УДК 621.396

АЛЕШИН Г.В., д.т.н., профессор (УкрГАЖТ)

Новый метод математического программирования для прикладных задач радиоэлектронной системологии

Описана сущность и эффективность нового метода математического программирования для прикладных задач радиоэлектронной системологии.

Ключевые слова: *математическое программирование, метод Вульфа, прикладные задачи.*

Введение

Известные методы решения задач математического программирования [1] обладают следующими недостатками: 1) проблема «проклятье многомерности», влияющая на оперативность решения задач; 2) усложнение решения при введении функции связи; 3) специфичность поиска решений, которая зависит от вида математического программирования, от формы целевой функции и функций связи и от критерия поиска, или от требований к методу поиска решения, то есть, не универсальность программ; 4) сложность подготовки задачи к заданному типу решений, то есть, от методов проверки независимости целевой функции и функций связи, например, от проверки этих функций на выпуклость для определения одномодальности задачи; 5) необходимость использования численных методов и ЭВМ для сложных задач; 6) сложность математического анализа, анализа стабильности, критичности оптимума и оптимального решения и так далее.

Между тем, для большой части прикладных задач такие недостатки можно устранить, если использовать предложенный далее метод математического программирования. Метод особенно полезен при большом числе переменных и малом числе функций связи, что наиболее часто встречается в прикладных задачах [1 - 6].

Основная часть. Метод решения задач математического программирования в развитие метода Вульфа

Метод Вульфа, как известно [1], позволяет использовать известные стандартные универсальные программы оптимизации, независящие от видов целевой функции и функций связи. Это достигается ценой усложнения алгоритмов и получения результатов в численном виде, хотя и непригодном для математического анализа качества. Разрешить проблему многомерности он также не может. Однако, если в качестве целевой функции выбрать адекватную (или аппроксимирующую) сепарабельную функцию, а остальные функции связи линейно аппроксимировать в окрестности какой-либо начальной многомерной точки, то можно устранить практически все указанные недостатки.

Идею нового метода можно изложить на простом примере. Вначале предполагается, что целевая многомерная функция имеет какой-нибудь простой, сепарабельный вид, например:

$$C_1(\overline{X}) = \prod_{i=1}^{n1} X_i \, , \qquad (1)$$

а функция связи (2) может иметь самый произвольный вид, но должна удовлетворять условию одномодальности решения, или соответствующие выпуклость или вогнутость.

$$C_{2доп} - C_2(\overline{X}) = 0 \, , \qquad (2)$$

где в прикладных задачах допустимые значения показателей $C_{1доп}, C_{2доп}$ чаще представляют собой тактико-технические требования (ТТТ), $C_1(\overline{X}), C_2(\overline{X})$ - основные показатели качества систем или процессов, а $\overline{X}$ - список их параметров.

Целевую функцию можно получить также при соответствующей функциональной аппроксимации. Если ее взять линейной, или квадратичной, то она ничем, в том числе и по эффективности алгоритма, не отличается от метода Вульфа. И будет иметь те же недостатки. Но если квадратичная аппроксимация сепарабельна, то можно получить решение и оптимум в аналитическом виде распространить результат для решения более сложных задач.

В отличие от метода Вульфа предлагается: 1) выбрать начальную точку для линейной аппроксимации функции связи, где для ускорения поиска оптимума рекомендуется выбирать параметры системы, которая считается лучшей, 2) произвести линейную аппроксимацию одной лишь функции связи, 3) найти в каталоге или решить простейшую задачу любой размерности в аналитическом виде, то есть, получить решение задачи (1, 2) и ее результат в аналитическом виде при линейной аппроксимации, 4) если функция связи была линейна, то это окончательное решение, а если нет, то оценить по критерию близости аппроксимации к исходной функции область удовлетворительной аппроксимации по всем параметрам, 5) для параметров, превысивших область удовлетворительной аппроксимации, ограничить шаг до границ этой области, 6) использовать достаточно простое решение, полученное в аналитическом виде (в виде формулы) в качестве итеративного для получения второго приближенного решения, а далее по пункту 5), пока решение не попадет в область удовлетворительной аппроксимации и не сработает правило остановки процесса по критерию точности решения.

Правилом остановки может служить критерий точности решения

$$X_{i(n)} - X_{i(n-1)} \le \alpha X_{i(n-1)},$$

где n - номер шага, α - относительная точность решения, i - номер параметра.

Такое решение имеет следующие преимущества перед известными методами математического программирования: 1) решается проблема многомерности, 2) проще решаются задачи на условный экстремум, но пока при одной функции связи, 3) программа становится универсальной по отношению к любым функциям связи, а при полном наборе решенных простых задач она может быть универсальной и для разных классов целевых функций, 4) характер выпуклости или вогнутости влияет лишь на наличие требуемого экстремума, 5) численные значения используются только при итерациях, 6) после получения решения вид целевой функции и решение имеются в аналитическом виде и пригодны для анализа в области удовлетворительной аппроксимации, что особенно важно при стохастическом программировании для определения доверительных интервалов.

Задача с показателями (1), (2) имеет вид

$$F(\overline{X}) = \max \prod_{i=1}^{n1} X_i \tag{3}$$

при $C(\overline{X}) = C_{доп}$. (4)

Предписание к простой форме метода математического программирования предполагает разложение левой части функции связи в ряд Тейлора с сохранением членов не более первого порядка. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n1} \left[C_i(X_{0i}) + C_i'(X_{0i})(X_i - X_{0i}) \right] = C_{доп}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n1} C_i'(X_{0i}) X_i = C_{доп} - \sum_{i=1}^{n1} C_{0i} + \sum_{i=1}^{n1} C_i'(X_{0i}) = C_э, \tag{5}$$

где $C_i'(X_{0i})$ - производная от функции связи по i – тому параметру, $n1$ - число технических параметров.

Можно показать методом множителей Лагранжа или методом математической индукции, что решение задачи (3),(5) имеет аналитический вид:

$$X_{i(p)} = \frac{C_э(\overline{X}_{(p-1)})}{n1 C_i'(X_{i(p-1)})}, \tag{6}$$

где p – номер шага итерации, на котором удовлетворяется точность решения,.

При этом в случае при линейной функции (4) решение (6) окончательное, а для нелинейной следует формулу (6) использовать итеративно, меняя шаг $\Delta X_i = X_{i(p)} - X_{i(p-1)}$ по каждому параметру в пределах ΔX_i, при которых имеется хорошая аппроксимация исходной функции связи, например, в соответствии с соотношением

$$\Delta X_i = \sqrt{\frac{\Delta C}{C_i''(X_{i(p-1)})}}. \tag{7}$$

Здесь $\Delta C = C_{інн} - C_i(X_{i(p-1)})$ - погрешность аппроксимации в точке $X_{i(p-1)}$.

То есть, если по каким-то параметрам на каком-то шаге условие удовлетворительной линейной аппроксимации не выполняется, то требуется оценить кривизну функции (4) в точке $\overline{X}_{p-1}$ и определить границы области удовлетворительной аппроксимации по формуле (7).

При этом оптимум имеет вид

$$F(\overline{X}) = \frac{(C_э(\overline{X}_{(p-1)})/n1)^{n1}}{\prod_{i=1}^{n1} C_i'(X_{i(p-1)})}. \tag{8}$$

Возможности оптимизации расширяются при использовании двойственности решений. Например, для обратно-пропорциональной целевой функции при противоположном критерии и том же решении оптимум также будет обратно пропорциональным выражению (8).

Таким образом, в данном примере и в последующих примерах оптимизации просматривается основная идея нового метода математического программирования, который устраняет указанные недостатки существующих методов. Это идея использует линейную аппроксимацию сложной, даже не сепарабельной, функции связи, приведение целевой функции к стандартному, лучше к сепарабельному виду, для которого известно аналитическое решение типовых задач, использование итерации для нелинейных функций связи и правил остановки и поэтапное усложнение задачи практически блочного программирования.

По сходимости итераций метод близок к градиентным методам первого порядка, а при регулировании шага итерации – к градиентным второго порядка.

Для расширения возможностей применений данного метода можно увеличивать число форм и типов целевых функций и ограничений, для которых известны аналитические решения более простых задач оптимизации.

Например, вместо параметров Y_i можно использовать монотонные функции $X_i = X_i(Y_i)$ от них. В этом случае функцию связи необходимо также представить через функции параметров, использовать известное аналитическое решение задачи и затем по нему найти собственно параметры.

Метод позволяет также без существенных погрешностей за счет линеаризации использовать для оптимизации произвольную несепарабельную выпуклую или вогнутую функцию связи. Однако шаг итераций при этом может быть соответственно малым, чтобы были достаточно малы одночлены второго порядка малости.

Итеративный процесс представляет собой перекатывание гиперплоскости по гиперповерхности ограничений до требуемой точности.

Реальные прикладные задачи оптимизации, как правило, сложнее. Сепарабельность целевой функции, или одной из функций связи, позволяет решить проблему многомерности, распараллеливать сложные задачи на простые, находить готовые стандартные аналитические решения из банка данных для простых задач и сшивать результаты решений по методу блочного программирования.

Результаты решений будут обладать всеми указанными преимуществами по сравнению с известными методами нелинейного программирования: 1) решение проблемы многомерности, 2) упрощение решения и связанная с этим оперативность, 3) универсальность программ за счет базы известных простых задач, 4) упрощение подготовки задач, проверка условий Слейтера и так далее, 5) результат получается в аналитическом виде в окрестности оптимума и пригоден для его математического анализа.

Примеры оптимизации радиоэлектронных систем различного уровня данным методом приведены в работах [4 - 6].

Рассмотрим задачу [4] оптимизации информационно-измерительных систем по критерию максимума отношения сигнал/шум q при ограниченных ассигнованиях на систему на множестве технических параметров и параметров расстроек, возмущений и неидеальностей $(\bar{Y})$.

Поскольку необходимо отыскивать лучшую систему, будем считать малыми влияния паразитных параметров расстроек возмущений и неидеальностей на отношение сигнал/шум. Ввиду того, что факторов влияний много, все они вместе оказывают существенное влияние на отношение сигнал/шум и их всех надо учитывать. Совместное влияние факторов на выходной эффект $\Psi(\bar{X}(\bar{Y}))$ при их малых значениях факторизует функции $X_i(Y_i)$ параметров влияния [4, 7]. Например, при корреляционном приеме выходной сигнал можно разложить в ряд Маклорена и ограничиться членами первого порядка

$$\Psi(\tau,\bar{Y}) = \int_0^T S(t-\tau,\bar{Y})S_{on}(t)dt \approx$$
$$\approx \psi(\tau,0) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i'(\tau,0)Y_i + \sum_i \sum_j \psi_i'\psi_j' Y_i Y_j + \cdots .$$

Поскольку произведение $(1+\varepsilon)(1+\nu) \approx 1+\varepsilon+\nu+\cdots$, то и наоборот, первые слагаемые могут быть представлены с той же точностью в факторизованном виде

$$\Psi(\tau,\bar{Y}) \approx \psi(\tau,0)\prod_{i=1}^{n}\left[1+\frac{\psi_i'(\tau,0)}{\psi(\tau,0)}Y_i\right] =$$
$$= \psi(\tau,0)\prod_{i=1}^{n} X_i(Y_i) .$$

С учетом влияния технических параметров и параметров паразитных факторов отношение сигнал/шум $q(\bar{X})$ на выходе информационного, или измерительного, канала можно записать в общем виде

$$q(\overline{X}(\overline{Y})) = k_1 \prod_{i=1}^{n1} X_i(Y_i)\,. \qquad (9)$$

Поскольку технические параметры отражают качество функциональных элементов, цена на них должна отражать эти качества. Поэтому задача оптимизации части системы, предназначенной для борьбы с помехой, при ограничении на ассигнования должна иметь вид, аналогичный (3),(4). Только цены на функциональные элементы и средства борьбы с паразитными факторами определяются линиями среднеквадратической регрессии стоимости на параметры. Эти линии должны быть представлены как зависимости от функций технических параметров и параметров паразитных факторов [4].

Для измерительных каналов и систем задача оптимизации будет иметь вид

$$F = \min\left[\frac{k_1}{\prod\limits_{j=1}^{n1} X_j} + \sum_{i=1}^{n2} X_i^{\,2}\right] \qquad (10)$$

при $C(\overline{X}) \le C_{доп}$, (11)

где $k_1 = const$, X_j - монотонные функции технических и паразитных параметров, такие, что чем они больше, тем лучше, а X_i – чем меньше, тем лучше.

Второе слагаемое в целевой функции (10) – это нестабильности эталонов и генераторов. При правильной обработке статистики цен [4] функция $C(\overline{X})$ должна быть вогнутой, а функция связи - выпуклой.

Функция связи может быть ограниченно сепарабельна. Однако ассигнования на параметры первого слагаемого в (10) раздельны от ассигнований на параметры второго слагаемого. Поэтому здесь имеются две стандартные задачи: по типу (3), (4) и по типу – минимум второго слагаемого при ограничениях на свои ассигнования. Вторая задача имеет стандартное аналитическое решение и оптимум соответственно:

$$X_{i(r)} = \frac{C_{э2}(\overline{X}_{(r-1)})C_i'(\overline{X}_{i(r-1)})}{\sum\limits_{i=1}^{n2}\left[C_i'(X_i)\ \right]^2}, \qquad (12)$$

$$F_2 = (C_{э2}) = \frac{C_{э2}}{\sum\limits_{i=1}^{n2}\left[C_i'(X_i)\right]^2}\,. \qquad (13)$$

Сшить решения двух задач (7), (8) и (12), (13) можно решением следующей более простой двумерной задачи:

$$\begin{aligned} F &= F_1(C_{э1}) + F_2(C_{э2}) \\ C_{э1} &+ C_{э2} \le C_{эдоп} \end{aligned}\,. \qquad (14)$$

Решение может быть получено методом Ньютона-Рафсона в виде итерационной формулы [4]. Общее решение выглядит следующим образом: сначала для задачи (14) итерационно отыскивается решение и оптимум, далее решение подставляется в задачи (7),(8) и (12),(13) и уточняется их решения и оптимум. После чего уточняется решение и оптимум задачи (14).

Например, оптимум задачи (14) можно найти, при уже известных оптимумах двух частных задач:

$$F = \frac{A}{C_{э1}^{n1+1}} + \frac{C_{э2}^2}{B} \qquad (15)$$

при $C_{э1} + C_{э2} = C_э$, (16)

где $A = n1^{n1}\prod\limits_{j=1}^{n1} C_j',\, B = \sum (C_i')^2$.

Задача решается по одной переменной методом подстановки. Решение находится из условия $\dfrac{dF}{dC_{э1}} = 0$ в аналитическом виде методом Ньютона-Рафсона из уравнения

$$\frac{C_{э1}}{B} = \frac{n1A}{C_{э1}^{n1+1}} + \frac{2C}{B}\,.$$

Итерационная формула для оптимального решения имеет вид

$$C_{э1(k)} = \frac{n1+2}{\dfrac{n1+1}{C_{э1(k-1)}^{n1+1}} + \dfrac{C_{э1(k-1)}^{n1+1}}{n1AB}}\,.$$

И так далее по алгоритму.

Возможно обобщение задачи и для совмещенной многофункциональной, многоканальной информационно-измерительной системы [4, 5]. При этом может определяться также сечение системы, где степень совмещения доставляет системе оптимум.

Список простейших задач, имеющих аналитические решения, можно расширять и обобщать, как это сделано в различных задачах [4 - 6], а также собирать в виде таблиц, аналогичным таблицам интегралов.

Можно применять монотонные преобразования переменных, контролируя одномодальность, и использовать все виды двойственности решений.

Например, задача (17) имеет то же решение, что и частная задача (10), (11)

$$\min \sum_{i=1}^{n} \ln X_i^{-1} = \min \ln \prod_{i=1}^{n} X_i^{-1} = \ln \min \prod_{i=1}^{n} X_i^{-1} \quad (17)$$

при $\sum_{i=1}^{n} C_i' X_i = C$.

То есть, сумму сепарабельных функций монотонным нелинейным преобразованием можно представить в виде произведения соответствующих функций и наоборот.

Например, для задачи (18)

$$F = \min(b, u^2) \quad (18)$$

при $(q,u) = C$,

где $(q,u) = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$ - скалярное произведение, оптимальным решением будет выражение

$$u_j = \frac{Cq_j}{b_j \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{b_i}} .$$

Это решение используется итеративно для любой задачи с вогнутой линеаризованной функцией $C(\overline{u})$, где q_i - ее первые производные.

Выводы

1) Новый метод математического программирования не имеет недостатков, присущих другим методам.

2) Метод особенно удобен для решения многопараметрических задач с сепарабельными функциями цели и где функциями связи являются ассигнования на систему, поскольку эти ассигнования являются глобальными ограничениями.

3) Получить решения сложных составных задач блочного программирования более просто [4-6] потому, что они сшиваются из решений и оптимумов более простых стандартных задач.

4) Даже если полученные оптимумы сложны для аналитического системного анализа, их численный анализ эффективности несложен и все другие преимущества метода сохраняются.

5) Полученные алгоритмы решений несложно программировать на ЭВМ.

6) Для несепарабельных целевых функций при их полиномиальных разложениях низких порядков эффективность метода снижается до эффективности метода Вульфа.

Литература

1. Wolfe Ph. The simplex method for quadrate programming. Econometrica, 1959, 28, №3, p. 600-606.
2. Пратт В.К., Стокс, Хинкли. Определение оптимальных характеристик оптических систем // Труды НИИР, 1970, т. 58, № 10, с. 355—364.
3. Гуткин Л.С. Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. М.: Сов. Радио, 1974.
4. Альошин Г.В. Оцінка якості інформаційно-вимірювальних систем. Х. УкрДАЗТ, 2009, 300 с.
5. Алешин Г.В., Богданов Ю.А. Эффективность сложных радиотехнических систем.- К. «Наукова думка», 2008, с.288.
6. Алешин Г.В. Теоретические основы электромагнитной совместимости. МО Украины, ХВУ, 1992, с.120.
7. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М.: Сов. Радио, 1969.

Альошин Г.В., професор, д.т.н. (УкрДАЗТ). Новий метод математичного програмування для прикладних задач радіоелектронної системології. Описана сутність та ефективність нового методу математичного програмування для реальних задач радіоелектронної системології.

Ключові слова: математичне програмування, метод Вульфа, прикладні задачі.

Aloshin G.V., professor, d.т.s. (UkrSART). New mathematic programming method for applied problems of radio electronic system science. The essence and efficiency of a new mathematic programming method for applied problems of radio electronic system science have been described.

Key words: mathematic programming, method Wolfe Ph., applied problems.

Поступила 07.10.2013г