УДК 621.391

ВОЛКОВ А.С., к.т.н. (УкрГАЖТ)

Метод построения и кодирования алгебраических сверточных кодов в частотной области на основе быстрого преобразования Фурье Кули-Тьюки

Разработан метод построения и кодирования алгебраических сверточных кодов в частотной области на основе БПФ-алгоритма Кули-Тьюки. Показано, что предлагаемый метод позволяет за фиксированное число операций алгебраическим способом задавать алгебраические сверточные коды в частотной области уменьшенной сложности.

Ключевые слова: *сверточный код, помехоустойчивое кодирование, БПФ-алгоритм, частотная область.*

Анализ литературы и постановка проблемы

Для повышения достоверности передаваемой информации в телекоммуникационных системах и сетях применяются помехоустойчивые сверточные коды. [1-2].

Известно, что большей эффективностью обладают коды большой длины (с большой длиной кодового ограничения), но построение таких кодов затруднительно. Это связано с тем, что существующие переборные методы построения сверточных кодов не допускают больших длин, так как их сложность экспоненциально возрастает с длиной кодового ограничения [1-3].

В настоящее время известны алгебраические методы построения сверточных кодов, которые допускают построение кодов большой длины: самоортогональные, ортогонализируемые и алгебраические сверточные коды [1,2]. Самоортогональные сверточные коды построены на основе простых совершенных разностных множествах, но корректирующая способность их, как и ортогонализируемых кодов, достаточно низкая [2].

Алгебраические сверточные коды строятся на основе формирования порождающих многочленов во временной области путем модификации порождающих многочленов алгебраических циклических блоковых кодов БЧХ и Рида-Соломона [1,8].

Алгебраические сверточные коды обладают высокой корректирующей способностью [1,8], но вычислительная сложность процедур кодирования и декодирования является сдерживающим фактором при их реализации [1,3,8].

Таким образом, актуальной научно-технической задачей является разработка алгебраических методов построения и кодирования алгебраических сверточных кодов уменьшенной сложности. Это возможно за счет рассмотрения процедур построения и кодирования алгебраических сверточных кодов в частотной области.

Цель статьи

Разработка метода построения и кодирования алгебраических сверточных кодов в частотной области с применением быстрого преобразования Фурье Кули-Тьюки для повышения достоверности предаваемой информации и уменьшения вычислительной сложности процедур кодирования.

Основная часть

Зафиксируем входную (информационную) непрерывную последовательность M бесконечной длины сверточного (n, k) – кода.

Представим последовательность M сверточного (n, k) – кода в виде вектора $M = (M_0, M_1, M_2, \ldots)$ бесконечной длины, где каждая компонента $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ [1,8].

Тогда многочлен информационной последовательности $M(x)$ бесконечной длины сверточного (n, k) – кода имеет вид

$$M(x) = \sum_{j=0}^{\infty} M_j x^j = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots \quad . \qquad (1)$$

Представим вектор M в виде последовательности векторов (секций) длины K, где K удовлетворяет условию [1,3,6]

$$\begin{cases} K = N - 2 \cdot t; \\ N = q^w - 1; \end{cases} \qquad (2)$$

где t – кратность исправляемых ошибок на длине N.

Тогда вектор M принимает вид

$$M = (M_0, M_1, M_2, ..., M_{K-2}, M_{K-1}) \cup \\ \cup (M_K, M_{K+1}, M_{K+2}, ..., M_{2K-2}, M_{2K-1}) \cup \\ \cup (M_{2K}, M_{2K+1}, M_{2K+2}, ..., M_{3K-2}, M_{3K-1}) \cup ... \quad (3)$$

Далее вектор информационной последовательности M, представленный выражением (3), бесконечной длины сверточного (n, k) – кода представим в виде многочлена $M(x)$ бесконечной степени, как последовательность секций многочленов $M_r(x)$. Тогда с учетом оператора задержки $x^{r \cdot K}$ запишем [1,8]

$$M(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + ... + M_{K-1} x^{K-1} + \\ + M_K x^K + M_{K+1} x^{K+1} + ... + M_{2K-1} x^{2K-1} + \\ + M_{2K} x^{2K} + M_{2K+1} x^{2K+1} + ... + M_{3K-1} x^{3K-1} + ... \quad (4)$$

где $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Следовательно

$$M(x) = \sum_{r=0}^{\infty} M_r(x) \cdot x^{r \cdot K}, \quad (5)$$

где $deg\ M_r(x) < K$.

Определение алгебраическим способом сверточного (n, k) – кода в частотной области (алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области) начнем с введения на позиции младших компонент каждой секции информационной последовательности M вида (3), последовательности (множества) проверочных частот P [2,3,6]. Последовательность проверочных частот P состоит из $2 \cdot t$ последовательности нулей. Тогда каждую секцию (кодовое слово) алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области справедливо записать [2,3,6]:

$$M_r = (P_0, P_1, P_2, ..., P_{2t-2}, P_{2t-1}, \\ M_{2t}, M_{2t+1}, M_{2t+2}, ..., M_{N-2}, M_{N-1}), \quad (6)$$

где $N = q^w - 1$; $2 \cdot t = N - K$; $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$; $P_y = 0$, $y = 0, \dots 2 \cdot t - 1$.

Следовательно, вектор одной секции M_r кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области длины $N = q^w - 1$ можно представить следующим выражением [2,3,6]:

$$M_r = (0,0,0,...,0,0, M_{2t}, M_{2t+1}, ..., M_{N-2}, M_{N-1}). \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) видно, что каждая из компонент вектора одной секции M_r кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области, не принадлежащая множеству проверочных частот P, удовлетворяет следующим условиям [1,3,6]: $N = q^w - 1$; $2 \cdot t = N - K$; $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$.

В соответствии с выражением (6) многочлен одной секции $M_r(x)$ кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области, представим выражением

$$M_r(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + ... + P_{2t-2} x^{2t-2} + \\ + P_{2t-1} x^{2t-1} + M_{2t} x^{2t} + M_{2t+1} x^{2t+1} + \\ + M_{2t+2} x^{2t+2} + ... + M_{N-2} x^{N-2} + M_{N-1} x^{N-1}, \quad (8)$$

где $deg\ M_r(x) < N$; $N = q^w - 1$; $2 \cdot t = N - K$; $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$; $P_y = 0$, $y = 0, \dots 2 \cdot t - 1$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Тогда, согласно выражению (7), выражение (8) перепишем так:

$$M_r(x) = M_{2t} x^{2t} + M_{2t+1} x^{2t+1} + \\ + M_{2t+2} x^{2t+2} + ... + M_{N-2} x^{N-2} + M_{N-1} x^{N-1}. \quad (9)$$

В соответствии с выражениями (5) и (9), и с учетом введенного множества проверочных частот P, многочлен кодового слова $M(x)$ бесконечной степени алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области представим последовательность секций многочленов $M_r(x)$ следующим образом:

$$M(x) = \sum_{r=0}^{\infty} M_r(x) \cdot x^{r \cdot N}, \quad (10)$$

где $deg\ M_r(x) < N$; $N = q^w - 1$; $x^{r \cdot N}$ – оператор задержки.

Тогда

$$M(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + ... + P_{2t-2} x^{2t-2} + \\ + P_{2t-1} x^{2t-1} + M_{N-K} x^{N-K} + M_{N-K+1} x^{N-K+1} + \\ + M_{N-K+2} x^{N-K+2} + ... + M_{N-2} x^{N-2} + \\ + M_{N-1} x^{N-1} + P_N x^N + P_{N+1} x^{N+1} + \\ + P_{N+2} x^{N+2} + ... + P_{N+2t-2} x^{N+2t-2} + \\ + P_{N+2t-1} x^{N+2t-1} + M_{2N-K} x^{2N-K} + \\ + M_{2N-K+1} x^{2N-K+1} + M_{2N-K+2} x^{2N-K+2} + ... + \\ + M_{2N-2} x^{2N-2} + M_{2N-1} x^{2N-1} + ... \quad (11)$$

Так как $P_y = 0$, $y = 0, \dots 2 \cdot t - 1$, то

$$\begin{aligned}M(x) &= M_{N-K}x^{N-K} + M_{N-K+1}x^{N-K+1} + \\ &+ M_{N-K+2}x^{N-K+2} + \ldots + M_{N-2}x^{N-2} + \\ &+ M_{N-1}x^{N-1} + M_{2N-K}x^{2N-K} + \\ &+ M_{2N-K+1}x^{2N-K+1} + M_{2N-K+2}x^{2N-K+2} + \ldots + \\ &+ M_{2N-2}x^{2N-2} + M_{2N-1}x^{2N-1} + \ldots\end{aligned} \quad . \qquad (12)$$

Считаем все коэффициенты многочлена $M(x)$ вида (11) информационной последовательности алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области с учетом значений степени при каждом его коэффициенте. Тогда, вектор M последовательности алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области бесконечной длины представим следующим выражением:

$$\begin{aligned}M &= (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{2t-2}, P_{2t-1}, M_{N-K}, \\ &M_{N-K+1}, M_{N-K+2}, \ldots, M_{N-2}, M_{N-1}) \cup \\ &\cup (P_N, P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots, P_{N+2t-2}, P_{N+2t-1}, \\ &M_{2N-K}, M_{2N-K+1}, M_{2N-K+2}, \ldots, M_{2N-2}, \\ &M_{2N-1}) \cup (P_{2N}, P_{2N+1}, P_{2N+2}, \ldots, P_{2N+2t-2}, \\ &P_{2N+2t-1}, M_{3N-K}, M_{3N-K+1}, M_{3N-K+2}, \ldots, \\ &M_{3N-2}, M_{3N-1}) \cup \ldots\end{aligned} \quad . \qquad (13)$$

Следовательно, согласно выражению (13), справедливо записать

$$\begin{aligned}M &= (0,0,0,\ldots,0,0, M_{N-K}, M_{N-K+1}, M_{N-K+2}, \\ &\ldots, M_{N-2}, M_{N-1}) \cup (0,0,0,\ldots,0,0, M_{2N-K}, \\ &M_{2N-K+1}, M_{2N-K+2}, \ldots, M_{2N-2}, M_{2N-1}) \cup \\ &\cup (0,0,0,\ldots,0,0, M_{3N-K}, M_{3N-K+1}, \\ &M_{3N-K+2}, \ldots, M_{3N-2}, M_{3N-1}) \cup \ldots\end{aligned} \quad . \qquad (14)$$

Таким образом, выражение (14) является алгебраическим представлением кодового слова бесконечной длины алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области, где $N = q^w - 1$; $2 \cdot t = N - K$; $M_j \in F$, $|F| \geq |GF(q)|$, $F \in GF(q^w)$; $P_y = 0$, $y = 0, \ldots 2 \cdot t - 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

На следующем этапе процедуры кодирования алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области выполним обратное преобразование Фурье над полем $GF(q^w)$ [2,3-6] каждой секции M_r кодового слова.

Пусть обратное преобразование Фурье выполняется на длине $N = q^w - 1$, над полем $GF(q^w)$, при этом зафиксируем α – примитивный элемент поля $GF(q^w)$ [2-7]. Тогда обратное преобразование Фурье над полем $GF(q^w)$ одной секции M_r кодового слова бесконечной длины алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области имеет вид [3,6,7]

$$m_i = \tfrac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^{-i \cdot j} \cdot M_j \,, \qquad (15)$$

где $m_i \in GF(q^w)$; $i = 0, \ldots, N - 1$.

По определению, обратное преобразование Фурье в конечном поле позволяет выполнить однозначное соответствие вектора в частотной области вектору во временной области [3-7]. Следовательно, выражение (15) позволяет вычислить все компоненты одной секции m_r кодового слова (вектора) бесконечной длины алгебраического сверточного (n, k) – кода. При этом, считается, что компоненты m_i, которые принадлежать полю $GF(q^w)$, рассматриваются как компоненты вектора во временной области m_r [3,6].

Таким образом, одна секция m_r во временной области кодового слова (вектора) алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ можно представить следующим образом:

$$m_r = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{N-2}, m_{N-1}) \,, \qquad (16)$$

где $m_i \in GF(q^w)$; $N = q^w - 1$.

Тогда многочлен $m_r(x)$ одной секции во временной области кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ запишем

$$\begin{aligned}m_r(x) &= m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + \\ &+ m_{N-2}x^{N-2} + m_{N-1}x^{N-1}\end{aligned} \,, \qquad (17)$$

где $m_i \in GF(q^w)$; $N = q^w - 1$; $deg\ m_r(x) < q^w - 1$.

Выражение (15) является одномерным обратным преобразованием Фурье [3, 5, 7]. Сложность вычисления (число арифметических операций сложений и умножений) такого преобразования возрастает с увеличением длины секции N кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области. Следовательно, переход от одномерного обратного преобразования Фурье к двумерному (быстрому преобразованию Фурье) позволит снизить вычислительную сложность процедуры кодирования алгебраических сверточных (n, k) – кодов заданных в частотной области [3-6].

Воспользуемся алгоритмом двумерного обратного преобразования Фурье (обратный БПФ-алгоритм) Кули-Тьюки [3-5], который возможно использовать, когда N – составное число.

Пусть $N = N' \cdot N''$. Выполним замену индексов временных m_i и частотных M_j компонент векторов алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ следующим образом [3]:

$$i = i' + N' \cdot i'', \tag{18}$$

$$j = N'' \cdot j' + j'', \tag{19}$$

где $i' = 0, \dots, N' - 1$, $i'' = 0, \dots, N'' - 1$; $j' = 0, \dots, N' - 1$, $j'' = 0, \dots, N'' - 1$.

При этом i' и i'' – назовем входными индексами; j' и j'' – выходными индексами.

Определим двумерные компоненты $m_{i',\,i''}$ и $M_{j',\,j''}$ векторов алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ [3-5]:

$$m_{i',i''} = m_{i'+N' \cdot i''}, \tag{20}$$

$$M_{j',j''} = M_{N'' \cdot j' + j''}, \tag{21}$$

где $i' = 0, \dots, N' - 1$, $i'' = 0, \dots, N'' - 1$; $j' = 0, \dots, N' - 1$, $j'' = 0, \dots, N'' - 1$.

В соответствии с обратным БПФ-алгоритмом Кули-Тьюки вычислим компоненты секции алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ по формуле [3-5]

$$m_{i',i''} = \frac{1}{N} \sum_{j''=0}^{N''-1} \gamma^{i'' \cdot j''} \left[\alpha^{-i' \cdot j''} \sum_{j'=0}^{N'-1} \beta^{i' \cdot j'} \cdot M_{j',j''} \right], \tag{22}$$

где $\beta = \alpha^{-N''}$; $\gamma = \alpha^{-N'}$.

Таким образом, на основании выражений (18) – (22) удается реализовать процедуру вычисления секции кодового слова m_r во временной области алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ (выражения (16) и (17)). При этом вычислительную сложность удается снизить до $N \cdot (N' + N'') + N$ умножений и $N \cdot (N' + N'' - 2)$ сложений [3-6].

Обобщим работу кодера алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ на случай бесконечной длины [1,3,6,8]. Т.е. выполним обратное преобразование Фурье каждой секции кодового слова m_r поступающей на вход кодера, где $r = 0, 1, 2, \dots$.

Тогда справедливо записать вектор кодового слова m во временной области алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} m = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_{N-2}, m_{N-1}, m_N, m_{N+1}, \\ m_{N+2}, \dots, m_{2N-2}, m_{2N-1}, m_{2N}, m_{2N+1}, m_{2N+2}, \dots, , \\ m_{3N-2}, m_{3N-1}, \dots) \end{gathered} \tag{23}$$

где $m_i \in GF(q^w)$; $N = q^w - 1$.

Сопоставим индексы компонент вектора m над $GF(q^w)$ выражения (23) в соответствие коэффициентам многочлен $m(x)$ с соответствующими степенями. Тогда многочлен $m(x)$ кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода заданного в частотной области над $GF(q^w)$ бесконечной степени запишем

$$\begin{gathered} m(x) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_{N-2} x^{N-2} + \\ m_{N-1} x^{N-1} + m_N x^N + m_{N+1} x^{N+1} + m_{N+2} x^{N+2} + \\ + \dots + m_{2N-2} x^{2N-2} + m_{2N-1} x^{2N-1} + m_{2N} x^{2N} + \\ + m_{2N+1} x^{2N+1} + m_{2N+2} x^{2N+2} + \dots + m_{3N-2} x^{3N-2} + \\ + m_{3N-1} x^{3N-1} + \dots \end{gathered} , \tag{24}$$

где $m_i \in GF(q^w)$; $N = q^w - 1$; $i = 0, 1, 2, \dots$.

Следовательно

$$m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} m_r(x) \cdot x^{r \cdot N} , \tag{25}$$

где $\deg m_r(x) < q^w - 1$.

Однозначное соответствие индексов j и i векторов m и M [2-4], позволяет сформировать алгебраическим способом параметры алгебраических сверточных (n, k) – кодов заданных в частотной области над $GF(q^w)$.

Таким образом, на основании выражений (3) – (25) возможно алгебраическим методом строить алгебраические сверточные (n, k) – коды заданные в частотной области над $GF(q^w)$.

Выводы

Разработан метод построения алгебраических сверточных (n, k) – кодов в частотной области, отличающийся от известных применением обратного преобразования Фурье (БПФ-алгоритма Кули-Тьюки) в конечных полях.

Показано, что предлагаемый метод построения позволяет за фиксированное число операций алгебраическим способом задавать алгебраические сверточные (n, k) – коды в частотной области над $GF(q^w)$.

Научно обоснована возможность применения БПФ-алгоритма Кули-Тьюки на основных этапах кодирования алгебраических сверточных (n, k) – кодов в частотной области над $GF(q^w)$.

При реализации кодирования алгебраических сверточ ных (n, k) – кодов в частотной области над $GF(q^w)$, использование БПФ-алгоритма Кули-Тьюки удается снизить вычислительную сложность до $N\cdot(N' + N'') + N$ умножений и $N\cdot(N' + N'' - 2)$ сложений.

Литература

1. Данько Н.И. Алгебраические сверточные коды: учеб. пособие/ Н.И. Данько, С.П. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, С.И. Приходько. – Х.: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.
2. Кларк Дж. мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: пер. с англ.; под ред. Б.С. Цыбакова/ Дж. мл. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: пер. с англ./ Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: пер. с англ./ Р. Блейхут. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
5. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: пер. с англ./ Г. Нуссбаумер. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
6. Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации / В.М. Муттер. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1990. – 288 с.
7. Приходько С.И. Алгебраическое представление самоортогональных сверточных кодов в частотной области / С.И. Приходько, А.С. Волков // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Х.: УкрДАЗТ, – 2009. – №3. – С. 67 – 69.
8. Приходько С.И. Метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов / С.И. Приходько, А.С. Волков // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, – 2010. Вип. 6(87). – С. 224 – 228.

Волков О.С. Метод побудови та кодування алгебраїчних згорткових кодів у частотній області на основі швидкого перетворення Фур’є Кулі-Т'юкі. Розроблено метод побудови і кодування алгебраїчних згорткових кодів у частотній області на основі ШПФ-алгоритму Кулі-Т'юкі. Показано, що запропонований метод дозволяє за фіксоване число операцій алгебраїчним способом задавати алгебраїчні згорткові коди в частотній області зменшеної складності.

Ключові слова: згортковий код, завадостійке кодування, ШПФ-алгоритм, частотна область.

Volkov Alexey Stanislavovych. The method of building and coding of algebraic convolutional codes in a frequency domain based on a fast Fourier transform Cooley-Tukey. A method of builing and coding of algebraic convolutional codes in a frequency domain based on the FFT-algorithm Cooley-Tukey has been developed. It is shown that the proposed method allows setting algebraic convolutional codes of reduced complexity in a frequency domain by algebraic method for a fixed number of operations.

Key words: convolutional code, antinoise coding, FFT-algorithm, frequency domain.

Рецензент д.т.н., профессор Алешин Г.В. (УкрГАЖТ)

Поступила 07.08.2013г.