

ЗАЛІЗНИЧНИЙ ТРАНСПОРТ (273)

УДК 621.315

АНАЛІЗ ТОЧНИХ І АПРОКСИМУЮЧИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ АКТИВНОГО ОПОРУ ПРОВІДНИКА ВІД ЧАСТОТИ СТРУМУ ПІД ДІЄЮ СКІН-ЕФЕКТУ

Кандидати техн. наук В. П. Нерубацький, О. А. Плахтій,
аспіранти Д. А. Гордієнко, Г. А. Хоружевський, М. В. Філіп'єва

ANALYSIS OF EXACT AND APPROXIMATING DEPENDENCES OF ACTIVE RESISTANCE OF A CONDUCTOR ON THE CURRENT FREQUENCY BASED ON THE INFLUENCE OF SKIN EFFECT

PhD (Tech.) V. P. Nerubatskyi, PhD (Tech.) O. A. Plakhtii, postgraduate student D. A. Hordiienko,
postgraduate student H. A. Khoruzhevskyi, postgraduate student M. V. Philipjeva

***Анотація.** Залізничні системи електропостачання постійного і змінного струму містять досить широкий гармонічний склад струмів, який зумовлено роботою імпульсних напівпровідникових перетворювачів електричного рухомого складу та тягових підстанцій. На базі рівнянь Бесселя визначено аналітичні вирази, що описують залежність активного та повного опору електричної мережі від частоти струму і зумовлюються дією скін-ефекту. На їх основі отримано вирази для розрахунку додаткових втрат потужності під дією вищих гармонік струмів. Проведено аналіз збіжності отриманих рівнянь з даними міжнародного стандарту МЕК 60287-1-1. Для зони високих частот наведено спрощені апроксимуючі залежності, що визначають параболічну залежність активного опору від частоти. Для інженерних розрахунків отримано спрощені апроксимуючі залежності активного опору від частоти вищих гармонік. Отримані рівняння можуть бути використані при визначенні додаткових втрат потужності в активних опорах електричних мереж, обмотках електричних машин, високочастотних трансформаторів від вищих гармонік струмів при різних нелінійних навантаженнях. Крім того, отримані вирази можуть бути використані при обґрунтуванні використання фільтрокомпенсуючих пристроїв.*

***Ключові слова:** скін-ефект, рівняння Максвелла, функції Бесселя, гармоніки струму, додаткові втрати потужності.*

***Abstract.** The operation of semiconductor power converters, which are part of traction substations, frequency-controlled electric drives and other powerful nonlinear loads, cause a significant emission of higher harmonics of currents to electrical networks. Higher harmonics of currents in electrical networks cause a complex negative effect on the energy efficiency of the network. The increase in power losses in the active resistance under the action of higher harmonics is due to the increase in the root mean square value of the current and the action of the skin effect.*

Analytical expressions describing the dependence of the active and impedance of the electric network on the current frequency are determined. Based on them, analytical expressions are obtained for the calculation of additional power losses under the action of higher harmonics of currents, which are due to the skin effect. The dependences of the active resistance of the electric network on the frequency of higher harmonics are determined on the basis of Bessel equations. The analysis of

convergence of the received equations with the data of the international standard IEC 60287-1-1 is carried out. For the high-frequency zone, simplified approximating dependences are given, which determine the parabolic dependence of the active resistance on the frequency. Simplified approximating dependences of active resistance on the frequency of higher harmonics are obtained for engineering calculations. The obtained equations can be used to determine additional power losses in the active supports of electrical networks, windings of electric machines, high-frequency transformers from higher harmonics of currents at different nonlinear loads. In addition, the obtained expressions can be used to justify the use of filter-compensating devices.

Keywords: skin effect, Maxwell's equation, Bessel functions, current harmonics, additional power losses.

Вступ. Робота тягових підстанцій постійного струму та електричного рухомого складу з асинхронним електроприводом зумовлена дією напівпровідникових перетворювачів електроенергії, які викликають значну емісію вищих гармонік струмів до електричних мереж [1, 2]. Вищі гармоніки струмів в електричних мережах викликають комплексну негативну дію на енергоефективність мережі [3, 4]. Підвищення втрат потужності в активному опорі під дією вищих гармонік відбувається з причини збільшення середньоквадратичного значення струму та під дією скін-ефекту [5, 6].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У публікаціях [7, 8] показано, що додаткові втрати потужності в активному опорі провідників ліній електропередач, які зумовлені скін-ефектом від протікання струмів вищих гармонік, визначаються за виразом

$$P_{harm} = m \cdot \sum_{v=2}^{v=n} I_v^2 \cdot R_{dc} \cdot k_{se} \quad (1)$$

де m – кількість фаз; v – номер гармоніки; n – кількість розглянутих гармонік; k_{se} – коефіцієнт, що враховує ефект збільшення опору провідника під дією скін-ефекту; I_v – середньоквадратичне значення v -ї гармоніки; R_{dc} – активний опір провідника постійному струму.

Різними авторами виконано дослідження змін коефіцієнта k_{se} , який визначає збільшення активного опору

провідника у функції частоти струму. Так, в роботах [9, 10] визначення величини коефіцієнта k_{se1} у функції порядку гармоніки струму описано рівнянням

$$k_{se1} = 0,47 \cdot \sqrt{v} \quad (2)$$

де v – порядковий номер вищої гармоніки, для якої розраховується коефіцієнт.

У роботах [11, 12] наведено рівняння, що описує залежність питомого опору провідника від частоти струму, яке враховує дію скін-ефекту та ефекту близькості:

$$r_{0v} = r_0 \cdot (k_{se2} + k_{sv}) \quad (3)$$

де k_{sv} – коефіцієнт, що визначає вплив ефекту близькості для i -ї гармоніки; r_0 – питомий опір провідника.

Згідно з [13, 14] коефіцієнт k_{se2} для мідних провідників визначається за виразом (4), а для алюмінієвих провідників – за виразом (5):

$$k_{se2} = 0,021 \cdot \sqrt{f} \quad (4)$$

$$k_{se2} = 0,01635 \cdot \sqrt{f} \quad (5)$$

де f – частота струму.

У роботі [15] шляхом експериментальних досліджень отримано значення коефіцієнта k_{se3} для різних типів провідників. Дані коефіцієнти наведено в таблиці.

Таблиця 1

Апроксимовані залежності коефіцієнта k_{se3} для різних типів проводів

Тип провідника	k_{se3}
АС-400	0,3v
А-400	0,15v
Мідний кабель	0,06v
Алюмінієвий кабель	0,06v

На рис. 1 наведено залежності, які відображають збільшення опору провідника змінному струму R_{ac} на частоті f відносно опору провідника постійному струму R_{dc} , які

розраховано за допомогою вищенаведених коефіцієнтів k_{se1} , k_{se2} і k_{se3} для мідних проводів.

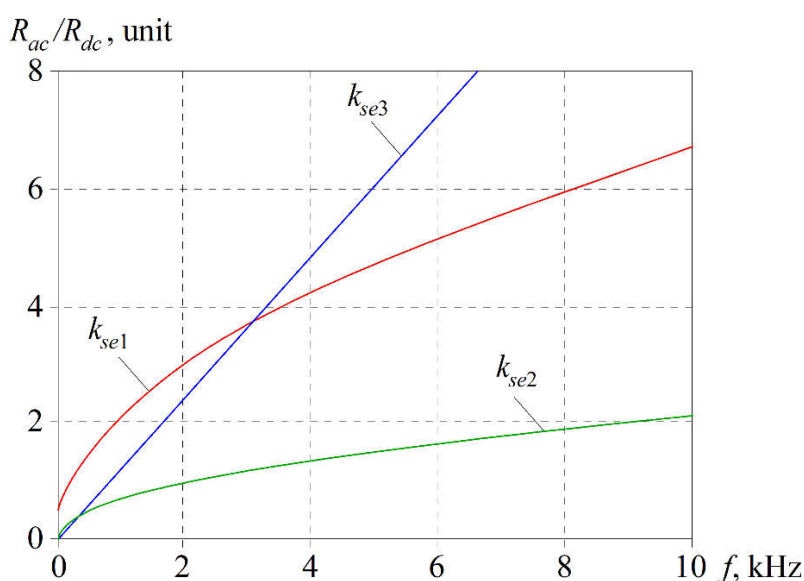


Рис. 1. Залежності збільшення опору провідника відносно частоти f

Як випливає з рис. 1, існуючі залежності, що описують залежність опору електричних провідників від частоти струму, є досить різними і взаємовиключними. Крім цього, згідно із залежностями (2)...(5) та залежностями, що наведено на рис. 1, в діапазоні низьких частот коефіцієнти k_{se1} , k_{se2} і k_{se3} набувають значень менше одиниці. Це фактично свідчить про те, що, згідно з цими виразами, зниження електричного опору у даному діапазоні частот є нижче значення опору постійному струму, тобто «надпровідності» провідника на низьких частотах струму, що суперечить фізичним законам. Таким чином, існуючі вирази, що

описують збільшення електричного опору провідників під дією скін-ефекту, є взаємовиключними і неточними. Це пояснюється тим, що існуючі вирази не враховують геометричні властивості провідників, а саме діаметр провідника, який досить сильно впливає на інтенсивність дії скін-ефекту.

У роботі [16] подано аналітичні вирази, що описують відносне значення розподілу щільності струму в циліндричному провіднику за його перетином. Проте вказані вирази не дають можливості визначити абсолютні значення розподілу щільності струму в провіднику, абсолютні

значення збільшення активного опору провідника та збільшення втрат потужності в провіднику при протіканні височастотного струму під дією скін-ефекту.

Таким чином, з проведеного огляду можна зробити висновок, що існуючі вирази, які описують збільшення електричного опору провідників під дією скін-ефекту, є взаємовиключними і неточними, що пояснюється тим, що вони не враховують геометричні властивості провідників, а саме діаметр провідника, який досить сильно впливає на інтенсивність дії скін-ефекту.

Визначення мети та завдання дослідження. Метою роботи є визначення залежності активного опору електричної мережі під дією скін-ефекту від частоти вищих гармонік струму. Для досягнення мети було поставлено такі завдання:

– подання аналітичних залежностей активного опору провідника від частоти за допомогою функцій Бесселя-Кельмана;

– визначення співвідношення отриманих рівнянь з існуючими апроксимуючими залежностями та даними міжнародного стандарту МЕК 60287-1-1 «Кабелі електричні. Розрахунок номінального струмового навантаження»;

– визначення апроксимуючих залежностей, що визначають залежність величини активного опору від частоти для діапазону високих частот.

Основна частина дослідження.

Аналітичну залежність активного опору провідника від частоти, внаслідок дії скін-ефекту, отримуємо шляхом запису першого рівняння Максвелла в циліндричній системі координат [17, 18]. Для цього розглянемо проходження гармонічного струму по прямолінійному циліндричному провіднику і визначимо електромагнітне поле всередині проводу [19, 20], сумістивши його вісь із віссю z циліндричної системи координат (рис. 2).

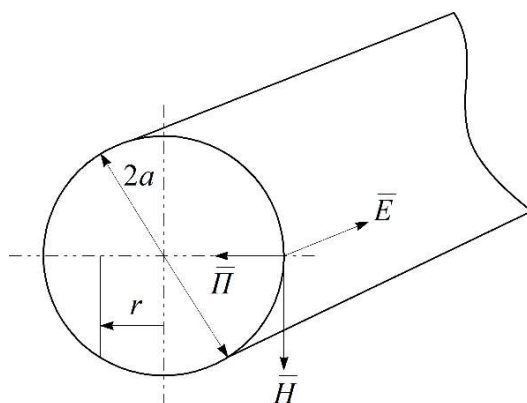


Рис. 2. Прямолінійний циліндричний провідник

На рис. 2 наведено такі позначення: \vec{P} – вектор щільності потоку енергії електромагнітного поля (вектор Пойнтінга); \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля; \vec{E} – вектор напруженості електричного поля; r – поточний радіус.

У силу того, що на провід не діють поля інших провідників, щільність струму розподілена симетрично навколо осі проводу і відсутній ефект близькості:

$$\left(\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right), \quad (6)$$

де \vec{J} – вектор щільності електричного струму; \vec{D} – вектор електричного зміщення; $d\vec{D}/dt$ – щільність струму зміщення.

Так як щільність струму зміщення $d\vec{D}/dt$ набагато порядків менше щільності струму \vec{J} , то в (6) величиною $d\vec{D}/dt$ можна

знехтувати. В цьому випадку система основних рівнянь, яка описує електромагнітні процеси, набуває вигляду:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{J}; \\ \text{rot}\vec{E} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{d\vec{H}}{dt}; \\ \text{div}\vec{E} = 0; \\ \text{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для спрощення розв'язку виключимо з цієї системи векторів поля \vec{E} . Для того щоб виключити вектор \vec{E} , достатньо обчислити rot правої і лівої частини першого рівняння системи (7):

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{rot}(\vec{J}) = \text{rot}(\sigma \vec{E}) = \sigma \cdot \text{rot}(\vec{E}) \quad (8)$$

Підставивши у праву частину отриманого виразу (8) з другого рівняння системи (7) значення $\text{rot}\vec{E}$, отримаємо вираз

$$(\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \text{grad}(\text{div}\vec{H}) - \nabla^2\vec{H}). \quad (9)$$

Після перетворень, маючи на увазі, що $\text{div}\vec{H} = 0$, отримаємо

$$\nabla^2\vec{H} - \sigma \cdot \mu \cdot \mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Виключаючи вектор \vec{H} , отримаємо абсолютно аналогічне рівняння для вектора \vec{E}

$$\nabla^2\vec{E} - \sigma \cdot \mu \cdot \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = 0, \quad (11)$$

де ∇ – оператор Набла; σ – провідність струмоведучої частини.

Для тривимірного евклідового простору в прямокутній декартовій системі координат оператор Набла визначається виразом [21, 22]

$$\nabla = \frac{d}{dx} \vec{i} + \frac{d}{dy} \vec{j} + \frac{d}{dz} \vec{k}, \quad (12)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні просторові вектори по осях x, y, z .

З огляду на це, вираз (11) в циліндричній системі координат набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) - j\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot E = 0. \quad (13)$$

Виконавши диференціювання і зробивши заміну змінних, отримаємо

$$\eta = r \sqrt{j\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma} = r \sqrt{-\gamma^2} = jr \cdot \gamma; \quad (14)$$

$$\frac{d^2\vec{E}}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dE}{d\eta} + E = 0. \quad (15)$$

Рівняння (11) являє собою рівняння Бесселя при $n = 0$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (16)$$

Розв'язання для \vec{H} одержимо з другого рівняння Максвелла:

$$\vec{H} = - \frac{1}{j\omega \cdot \mu \cdot \mu_0} \cdot \text{rot}(\vec{E}) = \left[\frac{1}{j\omega \cdot \mu \cdot \mu_0} \cdot \frac{dE_z}{dr} \right] \cdot \frac{e}{\alpha}. \quad (17)$$

Вектор напруженості електричного поля \vec{E} обчислюємо за формулою

$$\bar{E} = \frac{\mathcal{J}}{\sigma} = \frac{q \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0 \cdot (q \cdot r)}{J_1 \cdot (q \cdot a)}, \quad (18)$$

де J_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку; J_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку; r – поточний радіус проводу, a – максимальний радіус проводу; σ – питома провідність провідника, см/м; q – хвильове число проводу.

Хвильове число проводу q є комплексною змінною і визначається виходячи зі значення товщини скін-шару Δ

$$q = \frac{1}{\Delta} - i \cdot \frac{1}{\Delta}. \quad (19)$$

Товщина скін-шару Δ визначається згідно з виразом

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \cdot \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}, \quad (20)$$

де μ_r – відносна магнітна проникність матеріалу (μ/μ_0 – безрозмірна величина), для міді 0,999992; для алюмінію 1,000022; μ – абсолютна магнітна проникність, $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$; μ_0 – магнітна проникність вакууму, $1,25663706 \cdot 10^{-6}$ Н/А; f – частота змінного струму, Гц; γ – питома електрична провідність, $\gamma = 1/\rho$; ρ – питомий опір провідника ($\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$), для алюмінію – $2,7 \cdot 10^{-8}$; для міді – $1,72 \cdot 10^{-8}$.

Із урахуванням (19) і (18) розподіл комплексної щільності струму в провіднику заданого радіусу буде визначатись так:

$$\mathcal{J}(r) = \frac{q \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_0 \cdot (q \cdot r)}{J_1 \cdot (q \cdot a)}. \quad (21)$$

Напруженість магнітного поля визначається за виразом

$$\bar{H} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} \frac{J_0 \cdot (q \cdot r)}{J_1 \cdot (q \cdot a)}. \quad (22)$$

Потужність, що розсіюється циліндричним провідником P , визначається законом Джоуля-Ленца у векторній формі

$$P = \bar{J} \cdot \bar{E} = \gamma \cdot E^2; \quad (23)$$

$$dP = [I^2 \cdot R] dt, \quad (24)$$

де \bar{J} – вектор щільності електричного струму; \bar{E} – напруженість електричного поля; γ – провідність провідника; R – опір провідника; I – струм, що проходить через провідник.

У той же час потужність розсіювання можна знайти, використовуючи теорему Умова-Пойнтінга, яка описує закон збереження енергії електромагнітного поля:

$$\frac{du}{dt} + \nabla \cdot \Pi = -J \cdot E, \quad (25)$$

де u – щільність енергії; ∇ – оператор Набла; Π – вектор Пойнтінга; J – щільність струму; E – напруженість електричного поля.

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon \cdot E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right), \quad (26)$$

де ϵ_0 – електрична стала; μ_0 – магнітна стала.

Вектор Пойнтінга Π , який визначає щільність енергії електромагнітного поля, компоненти якого входять до складу енергій-імпульсу електромагнітного поля, визначається як векторний добуток двох векторів

$$\bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}], \quad (27)$$

де E , H – вектори напруженості електричного і магнітного полів відповідно.

Потужність розсіювання, виходячи з теореми Умова-Пойнтінга, яка описує закон збереження енергії в електромагнітному полі, може бути визначена так:

$$P = \oint_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] \cdot dS. \quad (28)$$

З (28) одержуємо комплексний опір провідника

$$Z = \frac{\oint_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] dS}{I^2} = \frac{q l}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sigma} \cdot \frac{J_0(q \cdot r)}{J_1(q \cdot a)} \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_1(q \cdot r)}{J_1(q \cdot a)} \cdot 2 \pi a \cdot l = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \gamma} \cdot \frac{J_0(q \cdot r_0)}{J_1(q \cdot r_0)} \cdot l, \quad (30)$$

$$Z = R + i \cdot X = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \gamma} \cdot \frac{J_0(q \cdot r)}{J_1(q \cdot r)} \cdot l, \quad (31)$$

де X – реактивний опір провідника; R – активний опір провідника; i – комплексна складова; q – хвильове число проводу; r – радіус проводу; l – довжина проводу; $J_0(Z)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку; $J_1(Z)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку.

З огляду на те, що площа бічної поверхні циліндричного провідника дорівнює S , а радіус поверхні дорівнює радіусу проводу $r = a$, із (28), отримаємо вираз, який визначає опір провідника:

Активний опір проводу R визначається дійсною частиною комплексного опору Z з виразу (31).

Отримані залежності активного опору мідного проводу довжиною 10 км з різними діаметрами (1 – 0,5 мм; 2 – 1 мм; 3 – 2 мм; 4 – 4 мм) від частоти розрахованих відповідно до виразу рівняння (9) наведено на рис. 3.

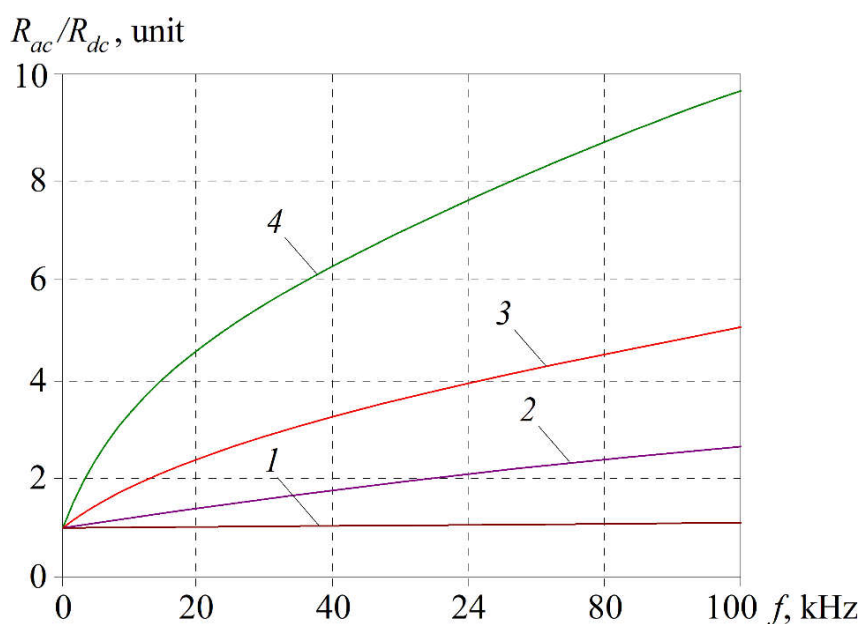


Рис. 3. Залежності активного опору мідного проводу з різними діаметрами від частоти

З рис. 3 витікає висновок про те, що частота струму та діаметр проводу в значній мірі впливають на інтенсивність скін-ефекту.

Для підтвердження отриманого аналітичного виразу розподілу щільності струму в перетині циліндричного моножилного проводу (21) при протіканні

середньоквадратичного значення струму 1 А шляхом комп'ютерного імітаційного моделювання із застосуванням програми «Ansys Electronics – Maxwell 3D» було виконано дослідження розподілу щільності струму в мідному провіднику діаметром 8 мм при протіканні струму із частотами 50 Гц (рис. 4, а) та 10 кГц (рис. 4, б).

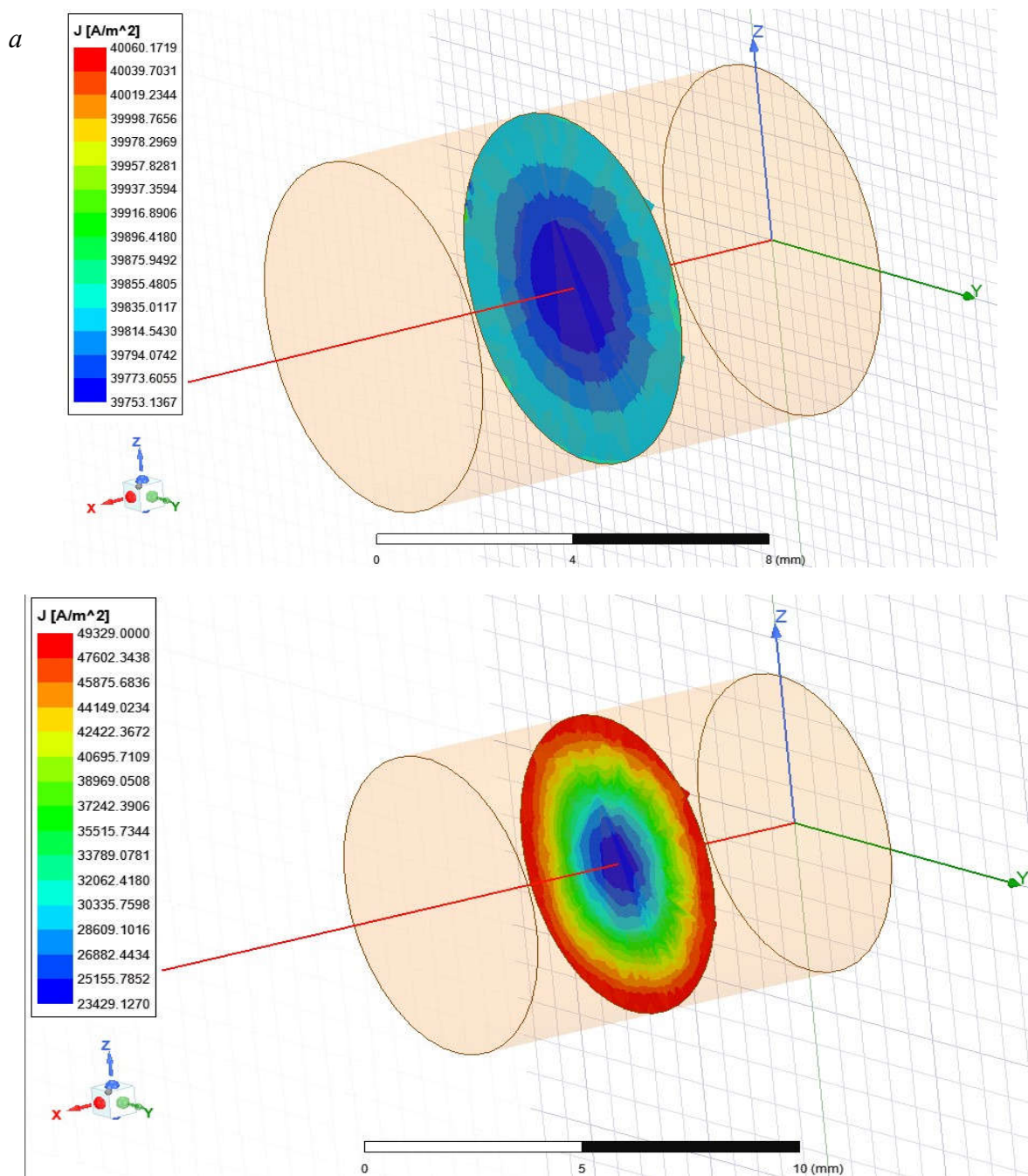


Рис. 4. Розподілення щільності струму в мідному провіднику діаметром 8 мм при протіканні струму із частотами: а – 50 Гц; б – 10 кГц

Як видно із результатів моделювання впливу скін-ефекту, збільшення частоти струму досить суттєво впливає на розподіл щільності струму i , як результат, на значення еквівалентного опору провідника.

Спрощений розрахунок додаткових втрат потужності від дії поверхневого ефекту може бути виконано шляхом застосування спрощених емпіричних залежностей, які подано в міжнародному стандарті МЕК 60287-1-1-2009 «Кабелі електричні. Розрахунок номінального струмового навантаження». В цьому стандарті подано емпіричні залежності, що визначають зростання активного опору кабелів від частоти струму. Згідно з п. 2.1 цього стандарту, опір жили змінному струму R , Ом/м, на одиницю довжини в усіх випадках, за винятком кабелів, прокладених в трубопроводах, визначається за виразом

$$R = R' (1 + y_s + y_p), \quad (32)$$

де R' – опір жили постійного струму при максимальній робочій температурі, Ом/м; y_s – коефіцієнт поверхневого ефекту; y_p – коефіцієнт ефекту близькості.

На даному етапі досліджень проведено аналіз дії виключно поверхневого ефекту. Вплив ефекту близькості буде досліджено в подальшій публікації, тому коефіцієнт близькості в розрахунку не враховувався.

Опір жили постійного струму на одиницю довжини з урахуванням діаметра провідника визначається так:

$$R' = \frac{\rho}{\pi \cdot r^2}, \quad (33)$$

де ρ – питомий опір провідника; r – радіус провідника.

Коефіцієнт поверхневого ефекту, згідно із стандартом МЕК 60287-1-1-2009, визначається згідно з виразом

$$y_s = \frac{x_s^4}{192 + 0,8 \cdot x_s^4}, \quad (34)$$

де x_s – аргумент Бесселя, який визначається так:

$$x_s = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot f}{R' \cdot 10^7}} \cdot k_s. \quad (35)$$

Коефіцієнт k_s для одножильних, багатожильних і сегментних проводів набуває значення 1 (згідно з табл. 1 з МЕК 60287-1-1-2009).

Важливо, що в п. 2.1.2 стандарту МЕК 60287-1-1-2009 вказується, що формули (34), (35) є точними лише в певному діапазоні досліджуваних частот, в якому аргумент Бесселя x_s не перевищує значення 2,8.

Виходячи з того, що аргумент Бесселя x_s залежить від частоти і радіуса проводу, і для коректності розрахунку він не має перевищувати значення 2,8, можна визначити критичне значення частоти F_{crit} , що обмежує застосування формул (7)–(9). Дана залежність визначається за виразом

$$F_{crit} = \frac{\rho \cdot 10^7 \cdot 2,8^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot r^2}. \quad (36)$$

Графічно залежність критичної частоти F_{crit} від радіуса провідника наведено на рис. 5.

У зв'язку з тим, що спектр вищих гармонік струмів в електричних мережах регламентується до частоти 2 кГц, а напівпровідникові перетворювачі генерують ще більший широкосмуговий спектр вищих гармонік спожитих струмів, то застосування формул (7), (8), (9) досить обмежене.

Проведемо аналіз збіжності результатів розрахунків опору мережі відповідно до повного аналітичного виразу залежності повного опору від частоти на базі рівнянь Бесселя (31) та емпіричних рівнянь, наведених у МЕК 60287-1-1, виразів (34), (35). На одних координатних площинах побудуємо залежності активного опору провідників для жил з радіусом 10 мм, 5 мм і 2 мм, вирішені відповідно до

рівнянь Бесселя і МЕК 60287-1-1. Отримані залежності наведено на рис. 6 (1 – характеристика, відповідно до рівнянь Бесселя, 2 – апроксимуюча залежність, відповідно до МЕК). На рис. 6, а наведено залежності відносного активного опору

проводу радіусом 10 мм від частоти. На рис. 6, б наведено залежності відносного активного опору проводу радіусом 5 мм від частоти. На рис. 6, в наведено залежності відносного активного опору проводу радіусом 2 мм від частоти.

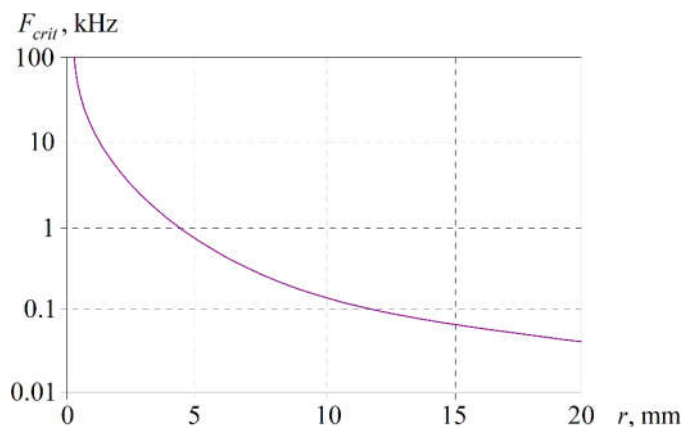


Рис. 5. Розподілення щільності залежності критичної частоти F_{crit} від радіуса провідника

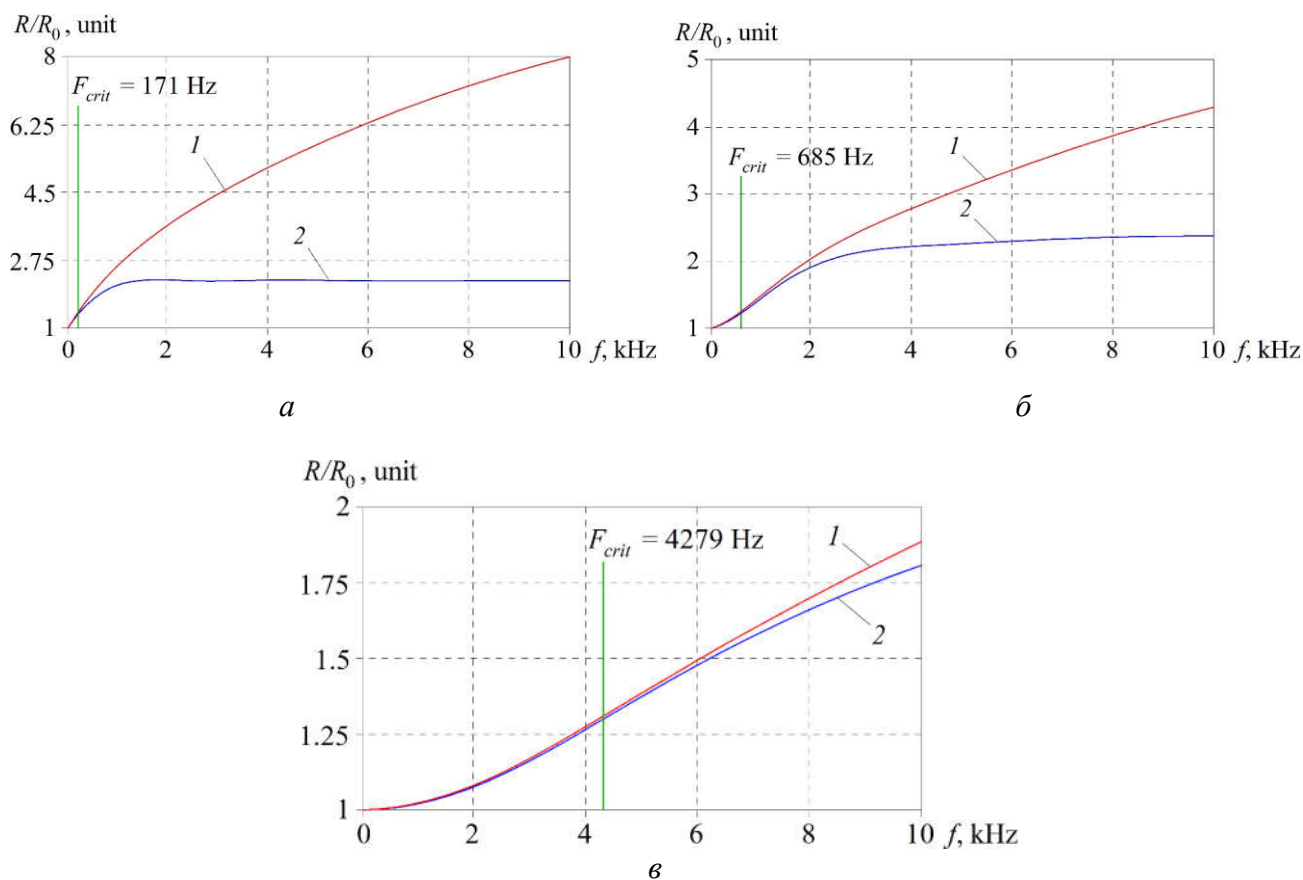


Рис. 6. Залежності відносного активного опору проводу з радіусом від частоти:
 а – $r = 10$ мм; б – $r = 5$ мм; в – $r = 2$ мм

З отриманих залежностей видно, що збіжність апроксимуючої залежності в стандарті МЕК 60287-1-1-2009 з результатами розв'язання за допомогою функцій Бесселя фактично говорить про можливість застосування апроксимуючої функції МЕК до частоти при значенні дещо більшому, ніж зазначено в МЕК, а саме до $x_s = 3,529$, при якому розбіжність між реальною і апроксимуючою функціями становить 0,798 %.

У той же час із залежностей на рис. 6 видно, що наведена в стандарті залежність справедлива для досить обмеженого діапазону частот. Крім цього, на тій же частоті, чим вище перетин провідника, тим інтенсивніше проявляється розбіжність між реальною і емпіричною залежностями.

Провівши аналіз функції виразу (32), побудованого на підставі функцій Бесселя на діапазоні частоти вище критичної частоти F_{crit} , при якій $x_s > 2,8$, зроблено висновок, що вона веде себе як класична параболічна функція $k\sqrt{f}$, а амплітуда її залежить від частоти. Пропонується для

діапазону високих частот вище за F_{crit} , при яких $x_s > 2,8$, застосування такої апроксимуючої функції, що визначає значення еквівалентного значення опору провідника від поверхневого ефекту у функції частоти струму та радіуса провідника:

$$R = R' \cdot (1 + y_{s2}); \quad (37)$$

$$y_{s2} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{f}{\rho \cdot 10^7}} - 0,735. \quad (38)$$

Збіжність запропонованого апроксимованого виразу (38) і залежності функцій Бесселя (32) для проводів з жилами радіусом 5 мм і 2 мм наведено на рис. 7 (1 – відповідно до виразу Бесселя, 2 – відповідно до апроксимованих виразів). На рис. 7, а наведено залежності відносного активного опору проводу радіусом 5 мм від частоти. На рис. 7, б наведено залежності відносного активного опору проводу радіусом 2 мм від частоти.

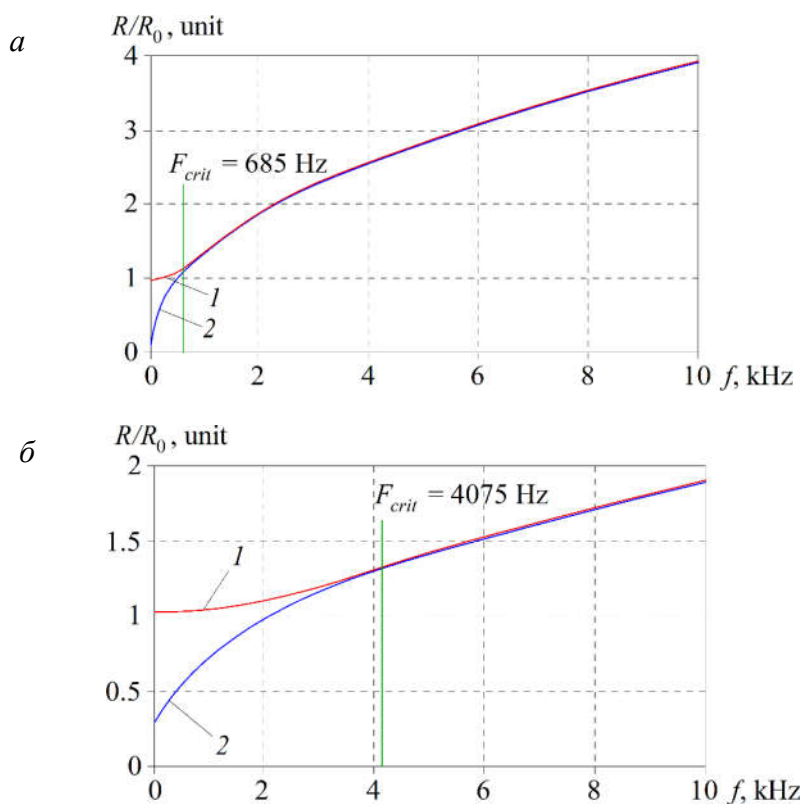


Рис. 7. Залежності відносного активного опору проводу з радіусом від частоти:
а – $r = 5$ мм; б – $r = 2$ мм

Як видно з рис. 7, запропонований апроксимований вираз (38) для діапазону частоти вище F_{crit} дає змогу отримати близьку збіжність значення активного опору провідника з урахуванням скін-ефекту, не вдаючись до розв'язання досить складних рівнянь залежності опору від частоти за рівняннями Бесселя (11)–(14). Більша частина струму протікає біля зовнішньої сторони проводу. Розподілення струму в розрізі формулюється за допомогою функцій Бесселя, що визначається властивостями матеріалу, частотою та діаметром проводу.

Висновки. На підставі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

– для розрахунку втрат потужності в залізничній системі електропостачання подано точні аналітичні вирази, отримані шляхом розв'язання рівнянь Бесселя, що визначають залежність активного опору провідника від частоти. Рівняння дають змогу визначити залежності розподілення щільності струму та еквівалентного опору провідника у функції частоти струму;

– проаналізовано емпіричні вирази міжнародного стандарту МЕК 60287-1-1-2009, які визначають залежність активного опору від частоти. Показано, що їх застосування є обмеженим у зв'язку з тим, що вони є точними лише в обмеженому діапазоні частот до величини F_{crit} . Проаналізовано

збіжність виразу (32) з МЕК 60287-1-1-2009 з розрахунком відповідно до рівнянь Бесселя. Для мідного проводу з перетином 8 мм в діапазоні частот від 0 Гц до $F_{crit} = 1070,96$ Гц відносна похибка розрахунку не перевищувала значення 0,11 %. З подальшим зростанням частоти похибка розрахунку істотно зростає до 100 % і вище; – шляхом апроксимації рівнянь Бесселя для залежностей активного опору від частоти при різних значеннях частоти струму та радіуса провідника запропоновано новий вираз, що визначає залежність активного опору від частоти струму під дією поверхневого ефекту для діапазону високих частот вище за значення F_{crit} . Виконано аналіз збіжності запропонованої апроксимуючої функції з точним аналітичним виразом (38) опору від частоти. Максимальна відносна похибка розрахунку відносного опору мідного проводу з перетином 8 мм склала менше 0,9 %, що цілком можна застосувати для інженерних розрахунків.

Роботу виконано в рамках теми, що фінансується за рахунок коштів загального фонду державного бюджету України «Розробка наукових основ підвищення енергетичної ефективності та покращення якості електроенергії в електричних мережах» (ДРН 0121U109440).

Список використаних джерел

1. Nerubatskyi V., Plakhtii O., Hordiienko D., Mykhalkiv S., Ravlyuk V. A method for calculating the parameters of the sine filter of the frequency converter, taking into account the criterion of starting current limitation and pulse-width modulation frequency. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 1, No. 8 (109). P. 6–16. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.225327.
2. Scherback Ya. V., Plakhtiy O. A., Nerubatskiy V. P. Control characteristics of active four-quadrant converter in rectifier and recovery mode. *Technical Electrodynamics*. 2017. Vol. 6. P. 26–31. DOI: 10.15407/techned2017.06.026.
3. Kirichenko M. V., Zaitsev R. V., Dobrozhan A. I., Khrypunov G. S., Kharchenko M. M. Adopting of DC magnetron sputtering method for preparing semiconductor films. *2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering*. 2017. P. 108–111. DOI: 10.1109/YSF.2017.8126600.

4. Методи боротьби з кондуктивною завадоємісією у зворотноходових перетворювачах / О. А. Плахтій, В. П. Нерубацький, Д. А. Гордієнко, Г. А. Хоружевський, М. Е. Орлов. *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*. 2020. № 1. С. 3–13. DOI: 10.18664/ikszt.v25i1.198645.
5. Визначення дії скін-ефекту на додаткові втрати потужності від вищих гармонік в електричних мережах / В. П. Нерубацький, О. А. Плахтій, Д. А. Гордієнко, Д. А. Шелест. Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Інтелектуальні транспортні технології» (Харків, 27–29 квітня 2021 р.). Харків: УкрДУЗТ, 2021. С. 139–141.
6. Zamaruiev V., Ivakhno V., Styslo B. Anti-Aliasing Filter in Digital Control System for Converter with Active Power Filter Function. *2019 IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. 2019. P. 797–801. DOI: 10.1109/ELNANO.2019.8783951.
7. Plakhtii O. A., Nerubatskyi V. P., Hordiienko D. A., Khoruzhevskyi H. A. Calculation of static and dynamic losses in power IGBT-transistors by polynomial approximation of basic energy characteristics. *Scientific bulletin of National mining university*. 2020. Vol. 2 (176). P. 82–88. DOI: 10.33271/nvngu/2020-82.
8. Vamanan N., John V. Dual-Comparison One-Cycle Control for Single-Phase Bidirectional Power Converters. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2018. Vol. 54. No. 5. P. 4621–4631. DOI: 10.1109/TIA.2018.2836359.
9. Lyutarevich A. G., Vyrva A. A., Dolinger S. Yu., Osipov D. S., Chetverik I. N. Estimation of additional power losses due to higher harmonics in elements of power system. *Omskiy nauchniy vestnik*. 2009. Issue 1. P. 109–113.
10. Nerubatskyi V., Plakhtii O., Tsybulnyk V., Philipjeva M., Korneliuk S. Energy efficient conversion system of a distributed solar photovoltaic station with power filtration function. *International scientific journal «Industry 4.0»*. 2020. Vol. 5, Issue 5. P. 214–217.
11. Ruehli A. E., Antonini G., Jiang L. J. Skin-Effect Loss Models for Time- and Frequency-Domain PEEC Solver. *Proceedings of the IEEE*. 2013. Vol. 101. No. 2. P. 451–472. DOI: 10.1109/JPROC.2012.2220312.
12. Riba J.-R. Analysis of formulas to calculate the AC resistance of different conductors configurations. *Escola d'Enginyeria d'Igualada, Universitat Politècnica de Catalunya*. 2015. P. 1–21.
13. Duran I. C., Duarte O. G., Pavas A. Low voltage conductor's ampacity derating due to stationary disturbances. *VII Simposio Internacional sobre. Calidad de la Energia Electrica*. 2013. P. 1–6.
14. Blahnik V., Talla J. Single-phase synchronization for traction active rectifier. *International Conference on Applied Electronics (AE)*. 2016. P. 23–26. DOI: 10.1109/ae.2016.7577233.
15. Жежеленко И. В. Электрические потери от высших гармоник в системах электроснабжения. *Электрика*. 2010. № 4. С. 3–6.
16. Nerubatskyi V. P., Plakhtii O. A., Hordiienko D. A., Karpenko N. P. Simulation of power losses in the frequency converter. *Modern engineering and innovative technologies*. 2021. Issue 16. Part 1. P. 44–57. DOI: 10.30890/2567-5273.2021-16-01-035.
17. Plakhtii O., Nerubatskyi V., Sushko D., Hordiienko D., Khoruzhevskyi H. Improving the harmonic composition of output voltage in multilevel inverters under an optimum mode of amplitude modulation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 2. No. 8 (104). P. 17–24. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.200021.
18. Torre J. L., Barros L. A., Afonso J. L., Pinto J. G. Development of a Proposed Single-Phase Series Active Power Filter without External Power Sources. *2019 International Conference on Smart Energy Systems and Technologies (SEST)*. 2019. DOI: 10.1109/sest.2019.8849010.

19. Venkatramanan D., Bharadwaj P., Adapa A. K., John V. Power Conversion Technologies for High-Performance AC Micro-grid. *INAE Letters*. 2019. Vol. 4 (1). P. 27–35. DOI: 10.1007/s41403-018-00062-6.

20. Nerubatskyi V., Plakhtii O., Hordiienko D., Khoruzhevskiy H. Study of energy parameters in alternative power source microgrid systems with multi-level inverters. *International scientific journal «Industry 4.0»*. 2020. Vol. 5, Issue 3. P. 118–121.

21. Plakhtii O. A., Nerubatskyi V. P., Kavun V. Ye., Hordiienko D. A. Active single-phase four-quadrant rectifier with improved hysteresis modulation algorithm. *Scientific Bulletin of National Mining University*. 2019. Vol. 5 (173). P. 93–98. DOI: 10.29202/nvngu/2019-5/16.

22. Aronov L. V. Method for calculating the active resistance of a cylindrical wire taking into account the surface effect. *Young scientist*. 2016. No. 12 (116). P. 202–205.

Нерубацький Володимир Павлович, кандидат технічних наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: +38 (095) 045-78-01. E-mail: NVP9@i.ua. ORCID iD: 0000-0002-4309-601X.

Плахтій Олександр Андрійович, кандидат технічних наук, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: +38 (093) 917-60-20. E-mail: a.plakhtiy1989@gmail.com. ORCID iD: 0000-0002-1535-8991.

Гордієнко Денис Анатолійович, аспірант кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: +38 (099) 612-02-12. E-mail: D.Hordiienko@i.ua. ORCID iD: 0000-0002-0347-5656.

Хоружевський Григорій Анатолійович, аспірант кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: +38 (099) 000-23-34. E-mail: khoruzhevskiy@gmail.com. ORCID iD: 0000-0003-2042-4938.

Філіп'єва Марина Віталіївна, аспірантка кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки Українського державного університету залізничного транспорту. Тел.: +38 (066) 578-41-96. E-mail: marifil2603@gmail.com. ORCID iD: 0000-0001-6499-7493.

Nerubatskyi Volodymyr Pavlovych, PhD (Tech.), Associate Professor, Department of Electrical Energetics, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: +38 (057) 730-10-76. E-mail: NVP9@i.ua. ORCID iD: 0000-0002-4309-601X.

Plakhtii Alexandr Andreevych, PhD (Tech.), Associate Professor, Department of Electrical Energetics, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: +38 (093) 917-60-20. E-mail: a.plakhtiy1989@gmail.com. ORCID iD: 0000-0002-1535-8991.

Hordiienko Denys Anatolievych, Postgraduate, Department of Electrical Energetics, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: +38 (099) 612-02-12. E-mail: D.Hordiienko@i.ua. ORCID iD: 0000-0002-0347-5656.

Khoruzhevskiy Hryhorii Anatolievych, Postgraduate, Department of Electrical Energetics, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: +38 (099) 000-23-34. E-mail: khoruzhevskiy@gmail.com. ORCID iD: 0000-0003-2042-4938.

Philipjeva Marina Vitalievna, Postgraduate, Department of Electrical Energetics, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport. Tel.: +38 (066) 578-41-96. E-mail: marifil2603@gmail.com. ORCID iD: 0000-0001-6499-7493.

Статтю прийнято 18.08.2021 р.