

**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ**

**Кафедра вищої математики**

**Г.А. Шелудько, В.В. Науменко, О.О. Стрельнікова**

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ**

*Конспект лекцій*

**Харків - 2014**

Шелудько Г.А., Науменко В.В., Стрельнікова О.О.  
Методи розв'язання задач оптимізації: Конспект лекцій. -  
Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 50 с.

Даний конспект лекцій містить базові поняття оптимізації (нелінійного програмування), опис класичних методів одновимірного та багатовимірного пошуків оптимуму, приклади постановок та результатів розв'язання задач оптимізації.

Рекомендується для магістрів спеціальності «Теплоенергетика».

Іл. 24, табл. 2, бібліогр.: 17 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 13 листопада 2012 р., протокол № 4..

Рецензент

доц. А.О. Дрогаченко

Г.А. Шелудько, В.В. Науменко, О.О. Стрельнікова

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

*Конспект лекцій*

Відповідальний за випуск Шелудько Г.А.

Редактор Буранова Н.В.

---

Підписано до друку 05.03.13 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

**Українська державна академія  
залізничного транспорту**

Кафедра вищої математики

Г.А. Шелудько, В.В. Науменко, О.О. Стрельнікова

Методи розв'язання задач оптимізації

Конспект лекцій  
з дисципліни  
«Методи розв'язання задач оптимізації»

Харків 2014

Шелудько Г.А., Науменко В.В., Стрельнікова О.О. Методи розв'язання задач оптимізації: Конспект лекцій. - Харків: УкрДАЗТ, 2014. - 50 с.

Даний конспект лекцій містить базові поняття оптимізації (нелінійного програмування), опис класичних методів одновимірного та багатовимірного пошуків оптимуму, приклади постановок та результатів розв'язання задач оптимізації.

Рекомендується для магістрів спеціальності «Теплоенергетика».

Іл. 24, табл. 2, бібліогр.: 17 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 13 листопада 2012 р., протокол № 4..

Рецензент

доц. А.О. Дрогаченко

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
1 Методи розв'язання задач оптимізації в одновимірному випадку .....	9
1.1 Методи опосередкованого пошуку .....	12
1.2 Методи прямого пошуку .....	16
2 Методи багатовимірного прямого пошуку без обмежень	20
2.1 Градієнтні та асоційовані з ними методи .....	20
2.2 Методи пошуку екстремуму без залучення градієнтів .....	23
3 Стохастичний пошук .....	31
4 Методи багатовимірного прямого пошуку при наявності обмежень .....	35
5 Приклади оптимального проектування реальних конструкцій .....	43
Список літератури	49

## ВСТУП

... Інженер зобов'язаний будувати не тільки міцно, але й дешево, тобто створювати міцні довговічні машини і споруди за умови якомога менших витрат не лише матеріалів, але й людської праці і часу.

В.Л. Кирпичов - засновник та перший ректор Харківського технологічного (політехнічного) інституту

У практичній і теоретичній діяльності людини завжди було і залишається прагнення до вдосконалення існуючих процесів та конструкцій або до отримання новостворюваних об'єктів різного призначення з якомога кращими характеристиками. Багато задач такого типу з різних галузей інженерної практики, математики, економіки, медицини, моделювання і системного аналізу та багатьох інших видів людської діяльності зводяться, якщо використати мову математики, до схожих за змістом і навіть однотипних, так званих задач *оптимізації* (або *математичного програмування*). На сьогодні існує величезна кількість методів для розв'язання проблем зазначеного типу. Такі методи потребують величезної кількості обчислень та реалізовані у комп'ютерних програмах.

Не зупиняючись на способах переведення інженерних проблем у площину математичних (вони ґрунтуються на фізичних законах, що є визначальними у тій чи іншій галузі та розглядаються в інших дисциплінах), зосередимось на тому, яку математичну задачу ми отримуємо в результаті такої трансформації.

*Основні поняття та специфіка математичної теорії оптимізації.* Надалі ми будемо широко користуватися поняттями *проектні параметри, функція мети, пошуковий метод.*

Проектні параметри – це сукупність величин, за допомогою яких однозначно визначається процес, конструкція, прилад, що

проектується, і які має обирати на свій розсуд інженер-конструктор.

*Функція мети (критерій якості, критерій оптимальності)* – це функція від проектних параметрів, числові значення якої є тією величиною, що при подальшому вдосконаленні конструкції має прийняти найбільше або найменше (оптимальне) значення (наприклад, вважають, що оптимальна конструкція – це та, яка має найбільший к.к.д., найменшу вагу, вартість тощо).

Якщо функцію мети позначити  $F$ , кількість проектних параметрів через  $n$ , самі параметри  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), а їх сукупність  $X$ , тоді задачу оптимізації можна записати у вигляді

$$F(X) \rightarrow \max \quad (0.1)$$

або

$$F(X) \rightarrow \min \quad (0.2)$$

Набір незалежних змінних  $X^*=(x_1^*,\dots, x_n^*)$ , при яких досягається оптимальне значення, називається точкою оптимуму або оптимальним планом.

Оскільки задачі  $\max [-F(X)]$  та  $\min F(X)$  збігаються, надалі будемо вести мову тільки про одну з них, наприклад (0.2), тобто про *мінімізацію* функції мети.

На перший погляд, класичний математичний аналіз має вичерпний спосіб розв'язання цієї задачі про пошук екстремуму функції багатьох незалежних змінних, а саме: по-перше, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\partial F / \partial x_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (0.3)$$

тобто знайти стаціонарні точки, а потім провести аналіз гессіану на додатну визначеність у цих точках.

Але в реальних задачах функція мети дуже часто не має аналітичного виразу, тобто запису у вигляді формули, а можна лише знайти її чисельне значення у результаті виконання деякого алгоритму; інколи її взагалі можна тільки виміряти в результаті натурального експерименту, що унеможливорює навіть запис конкретного рівняння (0.3).

Зауважимо також, що екстремум може міститися у тих точках  $X$ , де похідна не існує, а знаходження таких точок не є стандартною задачею вищої математики.

Суттєві труднощі можуть виникнути і при розв'язанні системи (0.3), якщо її вдається записати, оскільки загальних точних методів розв'язку такої задачі класична математика не пропонує.

Таким чином, з багатьох причин звичайна математика не може дати вичерпної відповіді на поставлене питання, отже, потрібно звертатися до альтернативних підходів, у якості яких, як правило, виступають комп'ютерні алгоритми.

Методи, що спираються на рівняння (0.3), в цих алгоритмах при нагоді використовуються для розв'язання задач оптимізації; їх називають непрямыми, або опосередкованими.

Ми будемо надалі, в основному, розглядати більш поширені так звані методи прямої оптимізації, або прямі методи пошуку, відмінною рисою яких є те, що вони вказують деяку послідовність точок  $X_k$  (теоретично, у загальному випадку – нескінченну), у кожній з яких значення функції мети є кращим, ніж у попередній і які дають змогу наблизитись до точки оптимуму як завгодно близько (знову ж таки – теоретично). Частина з цих методів оперує тільки із значеннями функції  $F(X)$  в окремих точках і їм байдуже, чи є в неї аналітичний вираз, тобто формула для обчислення та чи існують похідні  $F(X)$ ; в інших методах використовують *припущення* про існування похідних та градієнта для побудови наступного кроку і знову ж – наявність аналітичного виразу не є обов'язковою.

Як правило, має велике значення те, які саме засоби оптимізації залучаються в тому чи іншому випадку і які обчислювальні витрати при цьому будуть наявні, тобто наскільки ефективними шляхами буде знайдено оптимум. Ефективність різних методів порівнюють за кількістю обчислень функції мети, необхідних для потрапляння у деякий малий окіл точки оптимуму.

Починаючи вивчення методів оптимізації, з причини їх великої кількості та різноманітності, доцільним буде ознайомитися з класифікацією, тобто загальноприйнятим розбиттям на групи, всередині яких вони об'єднані тією чи іншою ознакою.



Першою рисою, яка дозволяє провести класифікацію методів, є кількість незалежних змінних – проектних параметрів. У реальних задачах можна визначити десятки, а інколи сотні чинників, які впливають на якість проекту, тобто можуть служити проектними параметрами. Зрозуміло, що чим більшу їх кількість вдається врахувати, тим ціннішим, кращим буде результат, але, з іншого боку, чим їх менше, тим прозорішим та ефективнішим буде алгоритм. З цих міркувань виділяють в окремий клас методи *одновимірного* пошуку, тобто методи, які працюють з функціями мети, що мають усього один аргумент  $X=x$ . Важливість методів одновимірного пошуку полягає також у тому, що вони часто використовуються як складова частина пошуків багатовимірних.

По-друге, саме тільки припущення про диференційованість функції мети викликає широкий клас ефективних методів, навіть тоді, коли йдеться тільки про існування похідних, а не можливість їх точного обчислення за аналітичними формулами. Це так звані градієнтні методи та асоційовані з ними.

Відсутність похідних на деяких гіперповерхнях у просторі проектних параметрів призводить до появи іншого класу методів, які оперують тільки значеннями функції мети та враховують її недиференційованість. Особливості поведінки функції мети (наприклад, яружність) можуть призвести до того, що «звичайні» методи пошуку починають «тупцювати на місці» далеко від оптимальної точки, майже не покращуючи функцію мети. Для таких ситуацій використовують спеціальні методи, придатні для ефективного пошуку у цих умовах.

Задача оптимізації у вигляді (0.2) є задачею без обмежень на проектні параметри, тобто прийнятними є усі значення  $X$ , які належать області визначення функції мети. Реальна ситуація, як правило, складніша: для параметрів конструкції або процесу, що проектується, мають виконуватися деякі (такі, що не мають відношення до функції мети) умови, незадоволення яких є неприпустимим з точки зору належного функціонування. Мовою математики це формулюється як необхідність виконання у припустимих точках деяких співвідношень між тими ж проектними параметрами. Ці співвідношення можуть мати вигляд рівностей

$$G_i(X) = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (0.4)$$

або нерівностей

$$G_i(X) \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,k). \quad (0.5)$$

Зауважимо, що при наявності похідних у функціях (0.4), класична математика пропонує розв'язання задачі (0.2), (0.4), наприклад, методом множників Лагранжа, але з причини суттєвих обмежень на функції  $G_i$  при використанні цього методу та завдяки потребам практики, у теорії оптимізації розвинені також альтернативні підходи.

Задачі оптимізації, в яких наявні вирази (0.4) та (або) (0.5), називають *задачами оптимізації з обмеженнями*. Більшість реальних задач належить саме до цього класу.

В окремий клас задач завдяки специфічності методів розв'язання виділяються задачі (0.2), (0.5) у випадку, коли функція мети та обмеження є лінійними функціями своїх аргументів – проектних параметрів. Такі задачі називаються *задачами лінійного програмування*. У практиці інженера-конструктора вони зустрічаються досить рідко, тому не розглянуті у даному конспекті; поняття про їх специфіку та методи розв'язання можна отримати із літературних джерел. На відміну від них задачі оптимізації, де відсутня лінійність функції мети та (або) обмежень, називають також *задачами нелінійного програмування*.

На сучасному етапі розвитку цих методів актуальною є така проблема: багатий арсенал методів обчислювальної математики при розв'язанні різного роду прикладних задач оптимізації в науці, техніці, виробництві не завжди виявляється достатнім для ефективною реалізації задач оптимального проектування. Доводиться весь час шукати і підбирати найбільш відповідні методи, комбінувати черговість їх дій, обирати і поєднувати найкращі можливості, аналізувати і синтезувати відповідні фрагменти цих методів залежно від конкретної ситуації, у якій опинився пошук на той чи інший момент, тобто фактично займатися керуванням обчислювального процесу.

## **1 Методи розв'язання задач оптимізації в одновимірному**

## випадку

При вивченні одновимірних пошукових методів для екстремальних задач використаємо поняття *характерної точки* (ХТ)  $X^*$  функції, під якою будемо розуміти або точку її екстремуму, або корінь.

Окіл  $S^*$ , що містить ХТ, будемо називати областю локалізації характерної точки або інтервалом невизначеності.

Для спрощення запису використовуємо далі такі позначення:

$A_n, B_n$  – початок і кінець інтервалу невизначеності на  $n$ -му кроці пошуку,  $A=A_0, B=B_0$ ;

$L = |B - A|$ ;  $L_n = |B_n - A_n|$ ;  $I_{\alpha\beta} = (X_\alpha, X_\beta)$  – інтервал;

$S_{\alpha\beta} = [X_\alpha, X_\beta]$  – сегмент;

$L_{\alpha\beta} = |X_\alpha - X_\beta|$  – довжина сегмента;  $X_{\alpha,\beta} = X_\alpha - X_\beta$ ;

$F_X$  – значення функції  $F(X)$ ;

$F^* = F(X^*)$ ,  $F_k = F(X_k)$ ,  $F'(X) = f_X$ ;  $F_{\alpha,\beta} = F_\alpha - F_\beta$ ;

$\delta_{X_1 X_2, \dots, X_k} = F_1 F_2 \dots F_k$ ;

$\Delta_{X_1 X_2, \dots, X_k} = (k-1) (\Delta_{X_1 X_2, \dots, X_{k-1}} - \Delta_{X_2 X_3, \dots, X_k}) / L_{1k}$

$$\forall X_2, \dots, X_{k-1} \in S_{1k}, k \neq 1, 2; \quad \Delta_{X_1 X_2} = (F_{X_1} - F_{X_2}) / L_{1,2}. \quad (1.1)$$

Якщо в будь-якій точці  $X$  відомо значення  $F$ , то будемо називати точку *інформативною*.

Метод пошуку звужує інтервал невизначеності  $S_{A_n B_n} \subset S_{AB}$  з точкою  $X^*$  у його середині, тим самим зменшуючи величину  $L_n$ . Одна з характеристик ефективності методу – степінь зменшення початкового інтервалу невизначеності за певне число кроків. Якщо вдається відношення довжини  $L_n$  до попередньої довжини  $L_{n-1}$  зробити мінімальним, то пошук називають *мінімаксим*.

Зазвичай пошук ХТ  $X^*$  розпадається на дві частини: *відділення* характерних точок та *уточнення* місця їх розташування.

**Відділення характерних точок** ставить своїм завданням наявну область  $G$  розбити на підобласті  $g_i \subset G$  ( $i = \overline{1, k}$ ), в кожній з яких наявна одна ХТ, а уточнення звужує підобласті  $g_i$  до

необхідних розмірів  $\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – заздалегідь встановлена величина допустимого відхилення від оптимуму  $X^*$ .

Розглянемо спочатку задачу відділення характерних точок.

Практично в усіх довідниках, що розглядають одновимірний пошук, йдеться тільки про уточнення розташування екстремальних точок на відрізку  $S_{ab}$ , хоча зрозуміло, що цьому має передувати операція їх відділення на більш протяжному відрізку  $S_{AB} \supset S_{ab}$ . Також тільки згадується про відділення коренів функції  $dF(X)/dX$ , але і в цьому випадку втрата коренів призводить до втрати розв'язків екстремальної задачі. І, мабуть найголовніше, ігнорування операцією відділення може спричинити також і втрату глобального екстремуму.

Отже, для повної впевненості у якісному розв'язанні задачі потрібно включати етап відділення точок екстремуму або коренів.

Природним і значно поширеним способом відділення ХТ є сканування заданої області  $G$  постійним кроком  $h$  з виділенням підобластей  $g$  з ХТ (рисунок 1.1).

Вибір величини кроку  $h$  або автоматичного способу його послідовної зміни повинен враховувати не лише точність  $\varepsilon$  відділення, а й, по можливості, характер поведінки функції  $F(X)$  на даному відрізку  $S_{AB}$ .

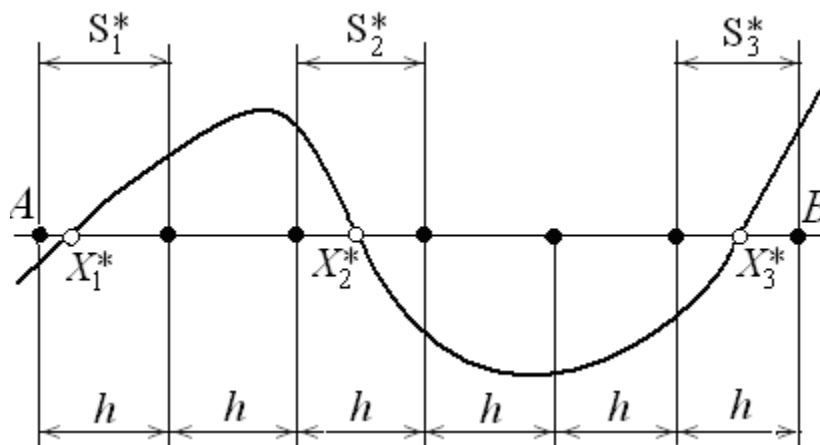


Рисунок 1.1 – Сканування області  $S_{AB}$

При відділенні точок  $X^*$  екстремуму функції  $F(X)$  можна скористатися очевидним корисним фактом: між двома сусідніми коренями неперервної функції  $F(X)$  розташовується щонайменше

одна точка  $X^*$  екстремуму (див. рисунки 1.1, 1.2).

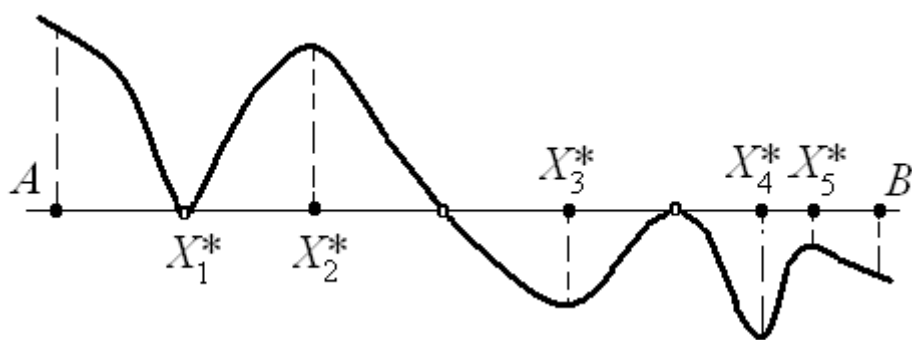


Рисунок 1.2 – Неперервна функція  $F(X)$

**Уточнення розташування точок екстремуму.** Відділення відрізка  $S_{AB}$  з ХТ  $X^*$  у загальному випадку ще не забезпечує заданої точності  $\varepsilon$  розв'язку екстремальної задачі.

Для процесу уточнення розташування  $X^*$  у загальному випадку ми змушені вдаватися до пошукових чисельних методів, тому що функції  $F(X)$  і  $f(X)$  можуть виявитися важко обчислюваними або алгоритмічно заданими, а це не дає можливості простого розв'язання рівняння (0.3) або безпосереднього знаходження точки екстремуму  $X^*$  функції  $F(X)$ .

Можливість використання методів відділення (наприклад, сканування) до вже відокремленої для уточнення області  $g$  у разі простих функції  $f(X)$  або  $F(X)$  виправдано, якщо не потрібна велика точність  $\varepsilon$ . Однак, якщо мати на увазі маловитратне уточнення, то доцільно скористатися більш ефективними спеціальними методами.

Для нас будуть цікавими методи, які можуть звужити відрізок з точкою  $X^*$  настільки, наскільки це потрібно або наскільки це можливо здійснити в прийнятний час.

Як зазначено вище, існуючі методи пошуку екстремуму можна поділити на прямі та опосередковані.

## 1.1 Методи опосередкованого пошуку

Звернемося спочатку до опосередкованих методів, тобто до методів розв'язку рівнянь (0.3).

З міркувань простоти, здавалося, міг би бути прийнятий метод ітерацій

$$X_{k+1} = \varphi(X_k) .$$

На жаль, для гарантованої збіжності він потребує гладкості функції  $\varphi(X)$  та виконання умови  $|\varphi'(X)| < 1$ .

Розглянуті далі методи локалізації ХТ будемо приводити до канонічної форми

$$X = C - f_C / \Delta (A, B, \dots, C; f_A, f_B, \dots, f_C), \quad (1.2)$$

де  $\Delta$  – деяка функція своїх аргументів.

**Метод Больцано (Б).** Однією з найбільш простих пошукових процедур уточнення кореня  $X^*$  рівняння  $F'(X) = f(X) = 0$  є метод Больцано.

При виборі звужуючих відрізків, що містять точку  $X^*$ , використовуються формули присвоєння для меж нового половинного відрізка  $S_{AB}$  за попередніми точками  $A_n$  і  $B_n$ :

$$A_{n+1} := \tau A_n + (1-\tau) (A_n + B_n) / 2; \quad B_{n+1} := \tau (A_n + B_n) / 2 + (1-\tau) B_n$$

з використанням ситуаційного покажчика

$$\tau = \text{sign}(f_A - f_{(A+B)/2}).$$

Таким чином, здійснюється послідовне зменшення інтервалу невизначеності на основі зіставлення знаків функції  $f(X)$  на кінцях поточного половинного відрізка.

Процес за методом Б завершується, як тільки для нових точок  $A_n$  і  $B_n$  виконана умова

$$L_{AB} \leq \varepsilon.$$

Виконавши  $N$  кроків шляхом Б, отримуємо відрізок  $S_{AB}$  у  $2^N$  разів менший початкового, зробивши при цьому  $N+2$  обчислення функції  $f(X)$ , тобто метод Б має геометричну швидкість збіжності.

За допомогою методу Б можна відшукувати прості корені

(або корені непарної кратності) не тільки в околі  $S_1^*$ ,  $S_2^*$ ,  $S_3^*$ , але і в околі типу  $S_4^*$  (розрив I роду), в яких функція  $f(X)$  не обертається у нуль, але змінює знак, залишаючись у  $S_4^*$  обмеженою (рисунок 1.3).

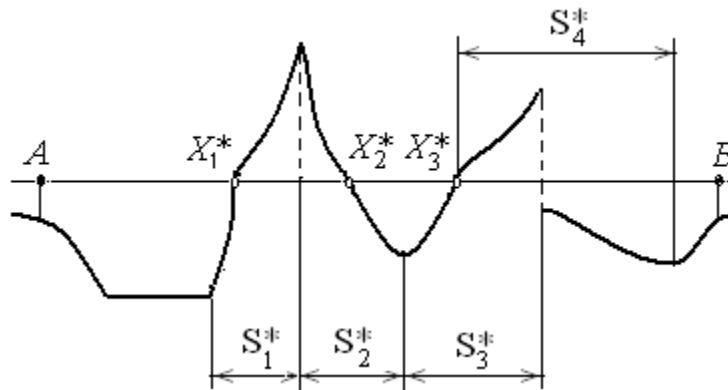


Рисунок 1.3 – Випадок кусково-розривної функції

Перевагою методу Б, крім надзвичайно слабких припущень щодо функції  $f(X)$ , є також отримання на кожному кроці двосторонньої оцінки для  $X^*$ .

**Метод Regula falsi (RF).** У методі Б використовувалися тільки знаки функції  $f(X)$  на послідовності наближень  $\{X_i\}$ . Прагнення прискорення процесу неминує приводить нас до більш повного використання інформації про поведінку цієї функції. Ця інформація є особливо цінною, якщо функція  $f(X)$ , хоча б в околі кореня, є монотонною (див. рисунок 1.3,  $S_2^*$ ,  $S_3^*$ ). Однак необхідно знати, як раціонально обирати точки  $X_i$ , для порівняння значень функції  $f(X)$  у них, оскільки може бути використана лише обмежена їх кількість, щоб вказати малий окіл розташування  $X^*$ . Виходячи з цього, наступним після методу Б природно розглянути метод RF.

Якщо у формулі (1.2) покласти  $C \equiv A$  і  $\Delta = \Delta_{BA}$ , то отримаємо

$$X = A - f_A / \Delta_{BA} = B - f_B / \Delta_{BA}. \quad (1.3)$$

Зазвичай у цьому методі одна з точок  $A$   $\vee$   $B$  оголошується як початкова  $X_0$  і фіксується, а інші  $X_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) утворюють послідовність, що прямує до  $X^*$ .

Точка  $X_2$  методу RF, яка отримана за двома заданими

інформативними точками  $X_0$  і  $X_1$ , належить відрізку  $S_{AB}$ . Однак наступні точки  $X_3, X_4, \dots$ , якщо не вживати необхідних заходів, можуть іноді залишати відрізок з коренем  $X^*$ , тобто процес (1.3) може розійтись. Приклади послідовностей, які збігаються  $\{X_i\}$  і розбігаються  $\{Y_i\}$ , зображені на рисунку 1.4. Виключити можливість розбіжності  $\{X_i\}$  можна, зробивши вибір з АВВ точки  $X_0$  після отримання точки  $X_2$  із значенням  $f_{X_2}$  за формулою

$$X_0 = (1 - \bar{\delta}_{AX_2})A + \bar{\delta}_{AX_2}B.$$

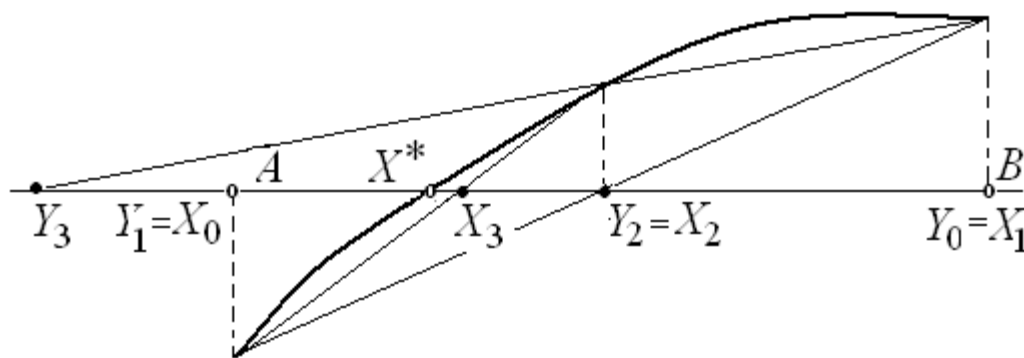


Рисунок 1.4 – Приклад збіжної  $\{X_i\}$  і розбіжної  $\{Y_i\}$  послідовностей

Відомо, що швидкість збіжності методу RF – лінійна. Класичний варіант методу RF передбачає збереження двох найближчих наближень, що охоплюють корінь. Можлива також реалізація RF, коли усі наближення лежать з одного боку від кореня (див. рисунок 1.4). Швидкість збіжності такого варіанта також є лінійною.

**Метод січних (С).** Зміна схеми наближень (1.3), тобто побудови чергової точки послідовності  $\{X_i\}$ , на

$$X = X_{i-1}, \quad C = X_i, \quad \Delta \equiv \Delta_{X_i X_{i-1}},$$

приводить нас до методу С

$$X_{i+1} = X_i - f_i / \Delta_{X_i X_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$



з більш високою ефективністю. При виконання умов Фур'є метод С дає двосторонню оцінку кореня  $X^*$ .

Отриманий метод такий само простий, як і метод RF, але завдяки вдалому розташуванню точки С і кращій узгодженості з характерними властивостями функції  $f(X)$ , метод С гарантує збіжність процесу незалежно від взаємного розташування  $X_0$  і  $X_1$ . Це забезпечується прийомом, який полягає у тому, що при виході наближення  $X_{i+1}$  за межу підсегмента, що містить корінь  $X^*$ , воно замінюється найближчим з кінців підсегмента. При цьому, природно, функція  $f(X)$  знову не переобчислюється. Ефективність методу С є вищою за ефективність методу Ньютона, збіжність якого квадратична, якщо вважати, що витрати на обчислення функції та її похідної однакові.

Залежно від вибору тих або інших початкових точок ( $X_0, X_1$ ) чи ( $X_1, X_0$ ) в методі С результати та кількість кроків, необхідних для їх досягнення, можуть помітно відрізнятись.

Нехай обидва наближення  $X_0$  і  $X_1$  розташовані по різні боки від  $X^*$ , тоді все одно, в якій послідовності формуються наближення. Якщо ж  $X_0$  і  $X_1$  лежать по один бік від кореня, тоді необхідно розташувати  $X_1$  ближче до  $X^*$ .

Послідовне використання "двосторонньої" інформації  $\Delta_{X_{i-1}, X_i}$  і  $\Delta_{X_i, X_{i+1}}$  у методі С, помітно покращуючи процес пошуку кореня, не веде до будь-яких додаткових витрат з обчислення функції  $f(X)$ .

Успіх методу С проявляється не стільки тому, що процес пошуку двосторонній, але, головним чином, тому, що метод на кожній ітерації використовує з двох можливостей ту, яка реалізується на найближчих точках. А це забезпечує більш кращі умови для отримання більш точного наближення "похідної"  $\Delta_{X_i, X_{i-1}}$ . Можливо, паралельне використання двосторонньої інформації може дати ще більш помітний ефект.

Подальшого підвищення ефективності пошукових методів можна очікувати, збільшуючи кількість інформативних точок у сегменті  $S_{AB}$ , наприклад, наближуючи функцію  $f(X)$  на  $S_{AB}$  інтерполяційними засобами.

Однак обчислювальна практика показує, що із зростанням кількості  $p$  інформативних точок хоча і збільшується ефективність методу, але приріст її швидко спадає (при  $p = 15$  становить всього 0,15 %), у той же час суттєво ускладнюється

ітераційний процес.

Практичне значення мають тільки триточкові методи, серед них модифікації методу січних, метод зважених нахилів [17].

## 1.2 Методи прямого пошуку

Усі методи цього типу ґрунтуються на припущенні про унімодалність функції мети.

Унімодалною на  $[A, B]$  називають функцію, яка має не більше одного інтервалу зростання та не більше одного інтервалу спадання на цьому відрізку. Такими є функції, що мають один екстремум на відрізку; під це визначення підпадають і функції, що є тільки спадаючими або зростаючими на  $[A, B]$ .

Завжди існує прагнення працювати з універсальними методами, придатними до всіх функцій, а такими у даному випадку є методи, здатні відшукувати точку мінімуму  $X^*$  без припущення про диференційованість  $F(X)$ . Розглянемо деякі з них.

**Метод Фібоначчі (Ф).** Нехай на відрізку  $S_{AB}$  задана кусково-неперервна унімодална функція  $F(X)$  (рисунок 1.5). Необхідно отримати якомога меншу довжину  $L_n$  відрізка  $S_{A_n B_n}$  з ХТ, маючи можливість витратити тільки  $n$  обчислень функції  $F(X)$ . Тоді можна скористатися методом Ф. Він заснований на простій ідеї, коли значення  $F_X$  функції на попередніх кроках пошуку визначають місце розташування наступних точок пошуку.

Припустимо, що вже є сегмент  $S_{1,3}$  і відомо значення функції  $F_2$  всередині цього сегмента (див. рисунок 1.5). Потрібно встановити, де необхідно розташувати наступну точку  $X_4 \in S_{1,3}$ , щоб отримати найменший наступний відрізок з точкою  $X^*$ , маючи можливість обчислити функцію тільки один раз за один крок роботи методу.

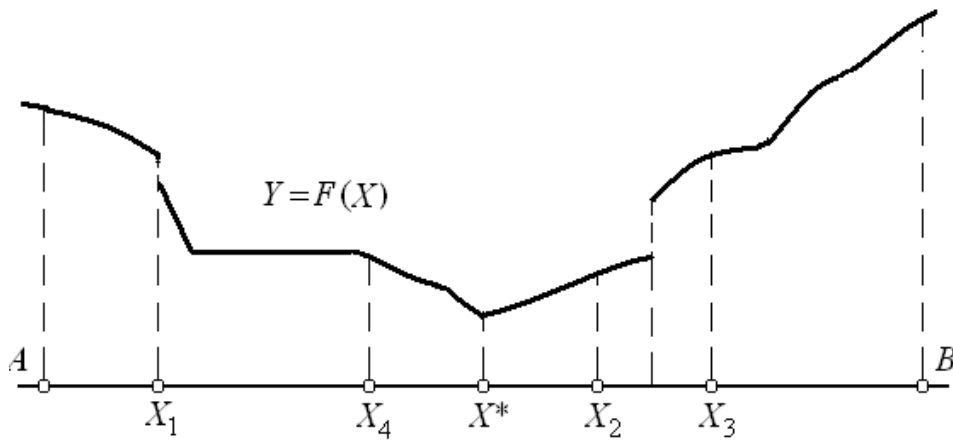


Рисунок 1.5 – Унімодальна функція та метод Ф

З рисунка 1.5 випливає, що коли  $F_4 > F_2$ , потрібно залишити  $S_{4,3}$ ; якщо  $F_4 < F_2$  - потрібно залишити  $S_{1,2}$ .

Оскільки невідомо, яка з цих ситуацій реалізується, то обираємо місце розташування точки  $X_4$  так, щоб мінімізувати найбільшу з довжин  $L_{3,4}$  і  $L_{2,1}$ , тобто вибравши  $X_4$  всередині інтервалу симетрично відносно точки  $X_2 \in S_{1,3}$ .

На  $n$ -му обчисленні точку  $X_n$  необхідно розташувати симетрично відносно точки  $X_{n-1}$ . Точки  $X_{n-1}$  і  $X_n$  (кінець  $n$ -крокового пошуку) мають розташовуватися на  $\varepsilon/2$  по обидва боки від середини відрізка  $S_{n-1,n}$ . Позначимо довжину останнього інтервалу невизначеності  $L_n$ , тоді

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon,$$

а зв'язок між послідовними довжинами відрізків має вигляд:

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n.$$

У загальному випадку

$$L_{j-1} = L_j + L_{j+1}, \quad 1 < j < n.$$

Отже,

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3L_n - \varepsilon,$$

$$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = 5L_n - 2\varepsilon,$$

$$L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = 8L_n - 3\varepsilon,$$

.....

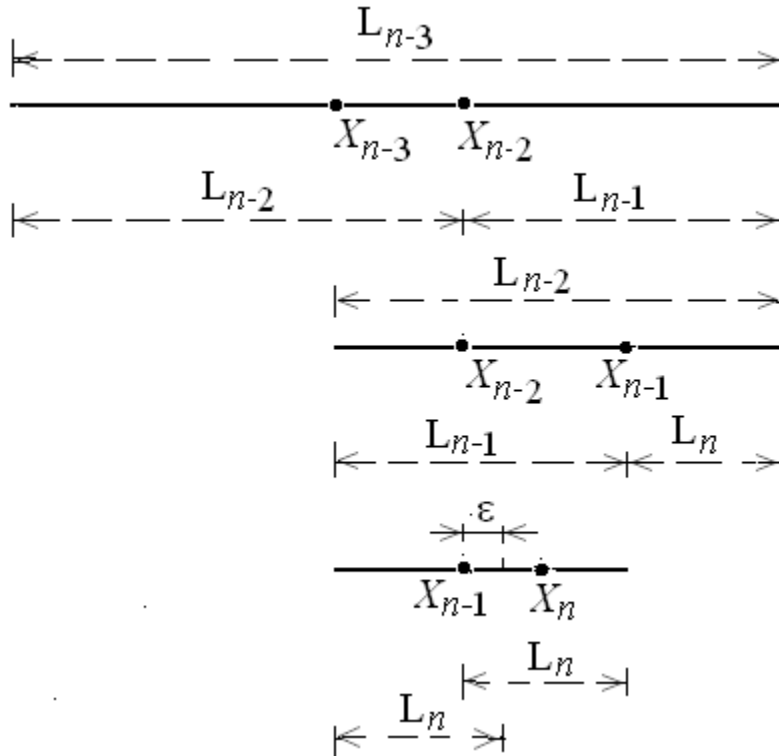


Рисунок 1.6 – Схема відносного розташування звужуючих відрізків у методі Ф

Звідси маємо

$$L_{n-j} = F_{j+1} L_n - F_{j-1} \varepsilon, \quad j = \overline{1, n-1},$$

де  $F_k$  - числа Фібоначчі, що задовольняють функціональне рівняння

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

з початковими значеннями  $F_0 = F_1 = 1$ .

Якщо початковий відрізок  $S_{AB}$  має довжину  $L_1$ , то маємо  $L_1 = F_n L_n - \varepsilon F_{n-2}$ , звідки  $L_n = \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon \frac{F_{n-2}}{F_n}$ .

Таким чином, після  $n$  обчислень функції можна бути

впевненим, що початковий відрізок  $S_{AB}$  звузиться (майже) у  $F_n$  разів, якщо вибір внутрішніх точок підпорядкувати закону методу Ф.

Процес пошуку триває до отримання відрізка з  $X^*$  необхідної довжини з кінцями, які визначаються за допомогою формул:

$$A := (\bar{F}_{2,4} + \bar{X}_{4,2}) A + (\bar{F}_{4,2} + \bar{X}_{4,2}) X_2 + (\bar{F}_{2,4} + \bar{X}_{2,4}) X_4,$$

$$B := (\bar{F}_{4,2} + \bar{X}_{2,4}) X_2 + (\bar{F}_{4,2} + \bar{X}_{2,4}) X_4 + (\bar{F}_{4,2} + \bar{X}_{4,2}) B$$

за попередніми інформативними точками  $A$ ,  $B$ ,  $X_2$ ,  $X_4$  (рисунок 1.6).

**Метод золотого перерізу (ЗП).** Іншим поширеним методом прямого одновимірного пошуку є метод золотого перерізу.

Особливістю методу ЗП, як і методу Ф, є те, що на кожному етапі фактично треба обчислювати лише одне з двох значень функції  $F(X)$  у точках  $X_1 = cX_0 + (1-c)X_3$  або  $X_2 = (1-c)X_0 + cX_3$ .

Якщо не використовуються відомості про кількість  $n$  обчислень функції  $F(X)$  для отримання точки екстремуму  $X^*$  і не спиратися на умову  $L_{n-1} = 2L_n - \epsilon$ , тоді, припускаючи, що відношення наступних довжин інтервалів буде сталим, а саме

$$L_{i-1} / L_i = L_i / L_{i+1} = L_{i+1} / L_{i+2} = \dots = c$$

та враховуючи зв'язок Фібоначчі, можна записати

$$L_{i-1} / L_i = 1 + L_{i+1} / L_i,$$

що приводить до квадратного рівняння  $c^2 - c - 1 = 0$ , розв'язком якого є число  $c = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0.618$ .

Таким чином, зменшення інтервалу невизначеності за  $n$  кроків буде таким:

$$L_n = L_1 / c^{n-1}.$$

Якщо є сегмент  $S_{03}$  (див. рисунок 1.7), то обирають новий сегмент  $S_{02}$ , якщо  $F_1 < F_2$ , і сегмент  $S_{13}$ , якщо  $F_1 > F_2$ .

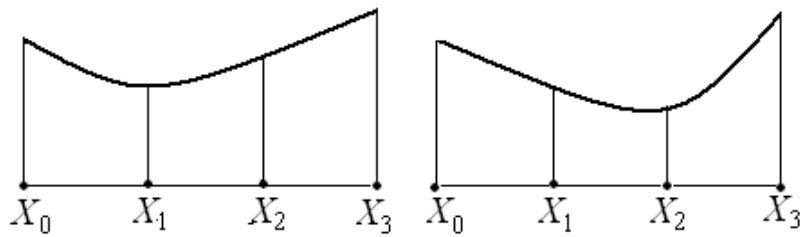


Рисунок 1.7 – Схема вибору наступної точки в методі ЗП

Хоча метод ЗП трохи поступається в ефективності методу Ф, він не вимагає попереднього задання числа кроків  $n$  для отримання заданої точності  $\varepsilon$ .

Розв'язання екстремальної задачі у випадку, коли функція мети  $F(X)$  визначена у одновимірній області, як зазначено вище, крім самостійного інтересу, є й допоміжним засобом для побудови чисельних методів оптимізації у багатовимірному випадку.

## 2 Методи багатовимірного прямого пошуку без обмежень

На перший погляд може здатися, що одно- та багатовимірні пошуки відрізняються несуттєво, але це не так. Значно більша потужність множини елементів, що утворюють багатовимірний простір, призводить до якісних відмінностей у стратегії ефективних багатовимірних пошукових методів.

Як вже зазначалося, методи пошуку поділяються на класи, залежно від їх відношення до існування похідних функції мети.

### 2.1 Градієнтні та асоційовані з ними методи

Ці методи припускають існування похідної функції мети та використовують її значення (точно або наближене) для просування у напрямку мінімуму.

Послідовність кроків для цього класу методів можна записати у вигляді

$$X_{k+1} = X_k + h_k \text{Dir } X_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $X_0$  – початкова точка;  $h_k$  – параметр кроку пошуку,  $\text{Dir } X_k$  –

напрямок руху (вживається термін - напрямок спуску), що починається з точки  $X_k$ .

Спадання диференційованої функції  $F(X)$  вздовж напрямку  $\text{Dir } X_k$  може гарантувати від'ємність скалярного добутку

$$(\nabla F(X_k), \text{Dir } X_k) < 0, \quad (2.1)$$

Найпростішим із класу градієнтних методів можна вважати **градієнтний спуск (ГС)**. Послідовність його кроків описується правилом:

$$X_{k+1} = X_k - h\nabla F(X_k).$$

Тут  $k$  – номер ітерації. Знак "-" вказує на напрямок антиградієнта, тобто зменшення значень функції мети. Параметр кроку  $h$  залишається постійним, але при наближенні до точки мінімуму для гладкої функції довжина кроку зменшуватиметься автоматично.

Питання вибору  $h$  є досить важливим і в кінцевому підсумку визначає працездатність і швидкість збіжності алгоритму.

Якщо розмір кроку обрано занадто малим, то рух до оптимуму буде дуже довгим через необхідність обчислення частинних похідних у багатьох точках. При великому кроці в районі оптимуму можуть виникнути коливання незалежних змінних, які можуть стати і розбіжними, як це ілюструє рисунок 2.1. Процес пошуку при великому значенні  $h$ , яке призводить до незгасаючих коливань незалежних змінних, зображено послідовністю точок  $A_0, A_1, A_2, A_3$ . При меншому значенні  $h$  процес пошуку зображено послідовністю точок  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$ .

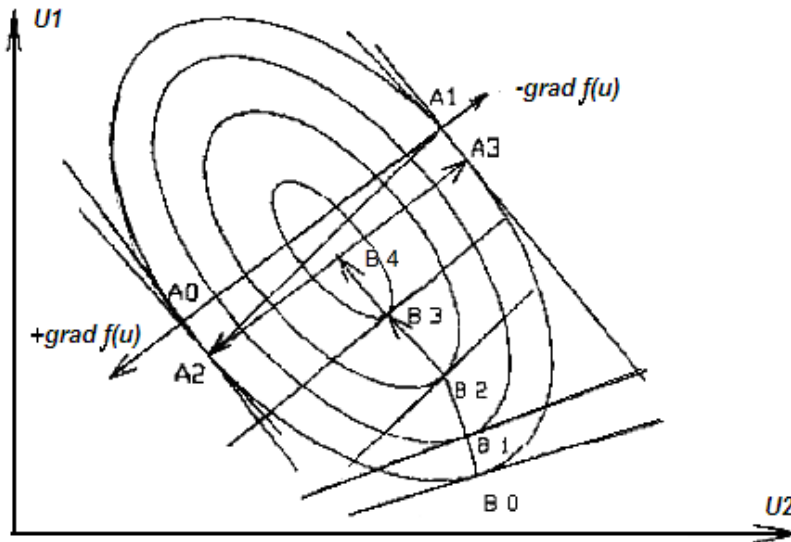


Рисунок 2.1 – Градієнтний спуск

У більш складних варіантах цього методу крок змінюється залежно від ситуації. Звісно, існують і такі модифікації ГС, де проводиться одновимірний пошук у напрямку антиградієнта.

До суттєвих недоліків градієнтних методів можна віднести те, що вони стають неефективними у випадку яружних функцій мети. Вони починають коливатися, перестрибуючи з одного боку яруги на інший, не просуваючись уздовж дна.

Яружність можна визначити таким чином: функція  $F(X)$  називається яружною, якщо на множині  $\{X\}$ , де вона визначена, є її підмножина  $\{\bar{X}\}$ , де існують такі напрямки, зміна функції на яких істотно відрізняється від змін на інших напрямках. Геометричними прикладами таких функцій можуть служити жолоби, гофри та інші поверхні, які містять елементи "хребтів" або протяжних "поглиблень". Пошук екстремуму таких функцій відомий своїми труднощами і вимагає спеціальних обчислювальних засобів.

Один з них - **метод спряжених градієнтів (СГ)**, або метод Флетчера-Рівса.

Для збільшення ефективності у випадку яружних функцій для встановлення напрямку пошуку на черговому кроці у цьому методі використовують вектори градієнта на двох попередніх кроках. Напрямок наступного просування обчислюється як



зважена сума двох векторів, що дозволяє пошуку просуватися вздовж дна яруги, а не коливатися у перпендикулярному напрямку.

Алгоритм методу СГ можна описати таким чином. Нехай  $X_0$  – початкова точка,  $Dir X_0 = -\nabla F(X_0)$ . Припустимо, що мінімум  $F(X)$  у цьому напрямку знаходиться у точці  $X_1$ .

Нехай виконаним є  $k$ -й крок пошуку і маємо точку  $X_k$  та  $\nabla F(X_k)$ . Наступним напрямком пошуку обирають

$$Dir X_{k+1} = -\nabla F(X_k) + \alpha Dir X_k, \text{ де } \alpha = \frac{\nabla F(X_k), \nabla F(X_k)}{\nabla F(X_{k-1}), \nabla F(X_{k-1})}$$

у стандартному методі Флетчера-Рівса або

$$\alpha = \max\left(0, \frac{\nabla F(X_k), \nabla F(X_k) - \nabla F(X_k)}{\nabla F(X_{k-1}), \nabla F(X_{k-1})}\right)$$

у варіанті Полака.

Якщо у цьому напрямку зменшення функції мети не спостерігається, потрібно повторити цей крок з  $\alpha=0$ .

## 2.2 Методи пошуку екстремуму без залучення градієнтів

Звернемося тепер до методів, які не використовують похідні ні в точному, ні в наближеному вигляді. У випадку «хороших» функцій такі методи виявляються більш «повільними», ніж ті, що використовують похідні, зате в околі точок або ліній, де похідних немає або поведінка градієнта є складною, вони виявляються більш «надійними», наприклад, не схильними до коливань у випадку яружних функцій.

Простішим з цих методів можна вважати **метод покоординатного спуску (ПС)**. Ідея цього методу дуже проста: після вибору початкової точки усі координати, окрім першої, фіксуються і проводиться одновимірний пошук у напрямку  $x_1$ . Після досягнення мінімуму у деякій точці, починаючи з неї, проводиться одновимірний пошук у напрямку  $x_2$  і т.д. Після перебору усіх координат можна повернутися до першої та спробувати знову покращити розв'язок з меншим кроком.

Рисунок 2.2 ілюструє цей метод для функції двох незалежних змінних.

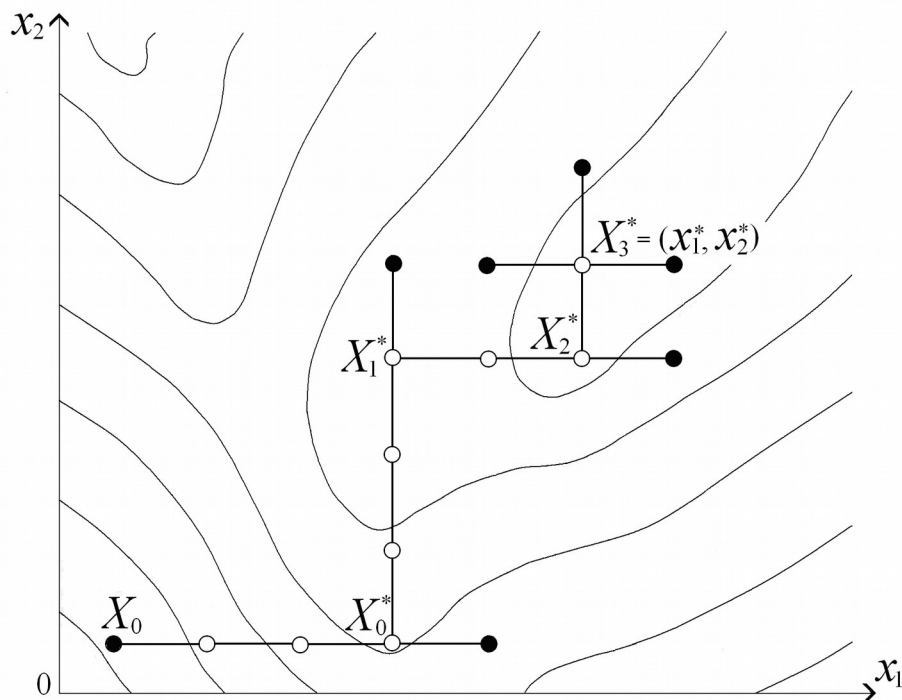


Рисунок 2.2 – Двовимірний пошук точки  $x^*$  екстремуму функції  $F(X)$  методом ПС

Такий рух до оптимуму унімодальної функції поширюється і на випадок функції  $F(X)$  з кількістю змінних  $n > 2$ , але він буде ефективним тільки у випадках, коли поверхні рівня є близькими до гіперсфер або еліпсоїдів, осі яких є паралельними координатним осям у просторі проектних параметрів. В інших випадках ефективність цього методу різко зменшується. Він виявляє повну непридатність у випадках, коли поверхні рівня мають злами. Незважаючи на ці недоліки, завдяки своїй простоті метод ПС часто використовують на початкових етапах процесу оптимізації для отримання стартової точки пошуку більш складними спеціальними методами пошуку.

**Метод Хука-Дживса (ХД).** Метод ПС може виявитися малопродатним, якщо функція мети  $F(X)$  містить у своїй структурі взаємозв'язані аргументи, наприклад, добутки незалежних змінних у вигляді  $x_k^m x_l^n$ .

Тому Хук і Дживс запропонували стратегію пошуку, що

містить рух не лише по осях, але і в напрямку, що сполучає характерні точки, кожна з яких є результатом оптимізації уздовж координатних осей.

У інтерпретації Вуда метод ХД містить такі основні етапи: "досліджуючий пошук" навколо базисної точки та "пошук за зразком" у напрямку, що обрано на попередньому етапі.

Якщо функція мети зменшується на деякому кроці, то її попереднє значення замінюється на нове при подальших порівняннях, а якщо зроблене зрушення є невдалим, колишнє значення зберігається.

Після успішного завершення досліджуючого пошуку використовується пошук за зразком до тих пір, поки функція  $F(X)$  зменшується на кожному наступному кроці.

Після призначення початкової базисної точки  $\overline{X}_0$  обчислюється функція в точці  $X_1 = \overline{X}_0 + h_1 e_1$ , де  $e_1$  – одиничний вектор у напрямі осі  $0x_1$  і в ній обчислюється функція  $F(X)$ . Якщо  $F(\overline{X}_0) > F(X_1)$ , то продовжуємо рух у тому ж напрямку і з тим самим кроком до моменту, коли виникне нерівність  $F(X_k) > F(X_{k-1})$ , і тоді точку  $X_{k-1}$  оголошують базисною. Якщо ж на першому кроці виявиться, що  $F(\overline{X}_0) < F(X_1)$ , то змінюють напрямок руху на зворотній і процес відбувається до отримання базисної точки, відмінної від початкової. Коли призначена нова базисна точка  $\overline{X}_1$  в результаті вичерпання усіх релаксаційних рухів по усіх осях, то пошук триває в напрямку  $\text{Dir } \overline{X}_1 = \overline{X}_0 - \overline{X}_1$ , після чого отримують нову точку  $X_2 = \overline{X}_1 + h_1 \text{Dir } \overline{X}_1$ , в якій обчислюється функція мети.

В загальному випадку  $X_j = \overline{X}_{j-1} + h_{j-1} \text{Dir } \overline{X}_{j-1}$ .

Процес отримання нових базисних точок супроводжується введенням кроків  $h_j < h_{j-1}$ . Пошук екстремуму далі повторюється за тією самою схемою до завершення в околі заданих розмірів. На рисунку 2.3 подано блок-схему методу Хука-Дживса.

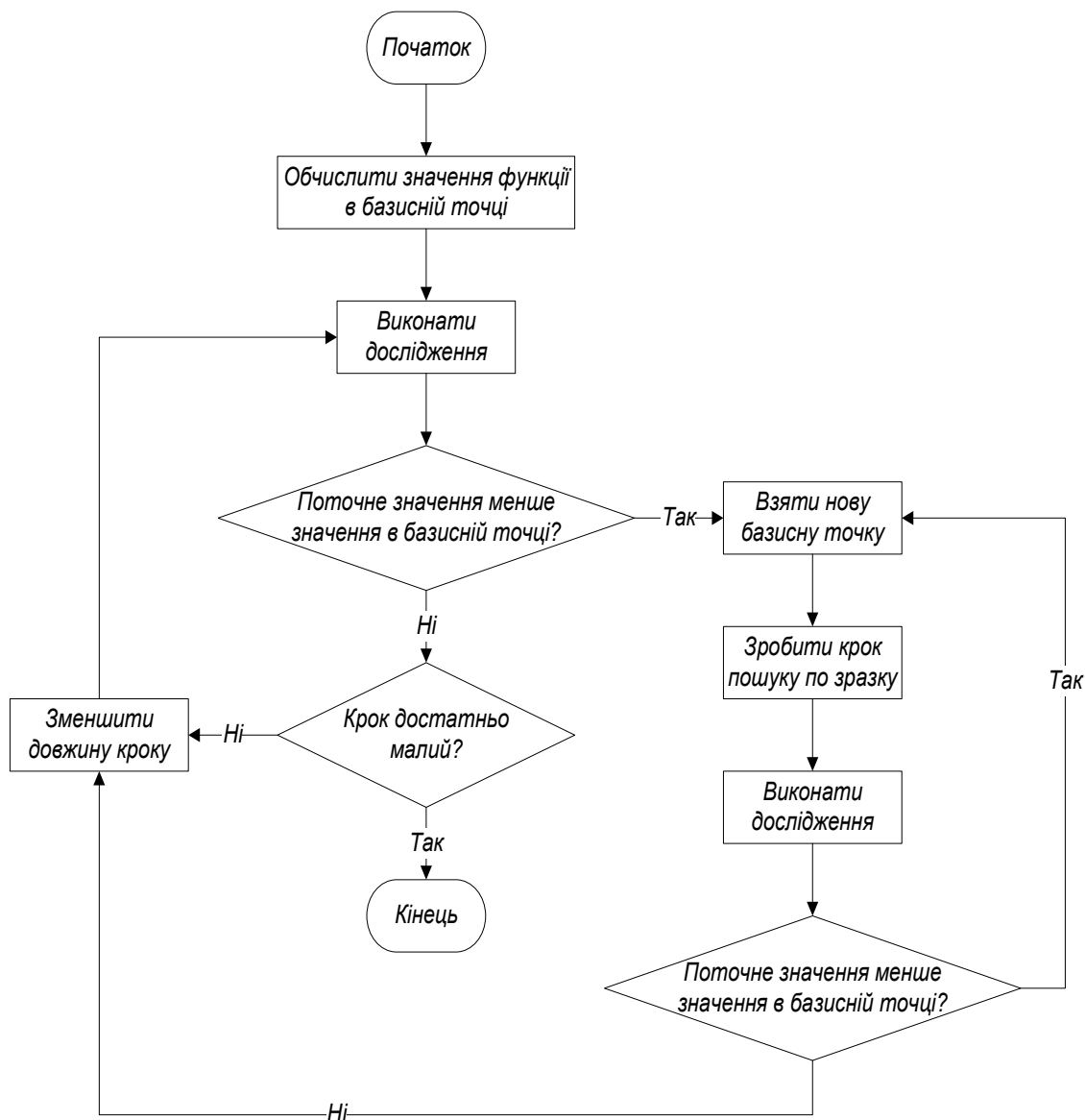


Рисунок 2.3 – Блок-схема методу Хука-Дживса

**Симплекс-метод (S).** Спроба уникнути обчислення похідних і в той же час зберегти можливість досить швидкого просування до оптимуму привели до алгоритму симплекс-методу. Основна ідея цього методу полягає в тому, що інформативні точки у вершинах опуклого багатогранника (симплексу) дозволяють знаходити напрямок, в якому потрібно зробити наступний крок, щоб отримати найбільше зменшення критерію оптимальності. Під симплексом у  $n$ -вимірному просторі розуміють правильний багатогранник, що має  $n + 1$  вершину, кожна з яких визначається як перетин  $n$  гіперплощин цього простору. У двовимірному просторі симплекс – це правильний трикутник, якщо  $n=3$  – правильний тетраедр (див. рисунок 2.4).

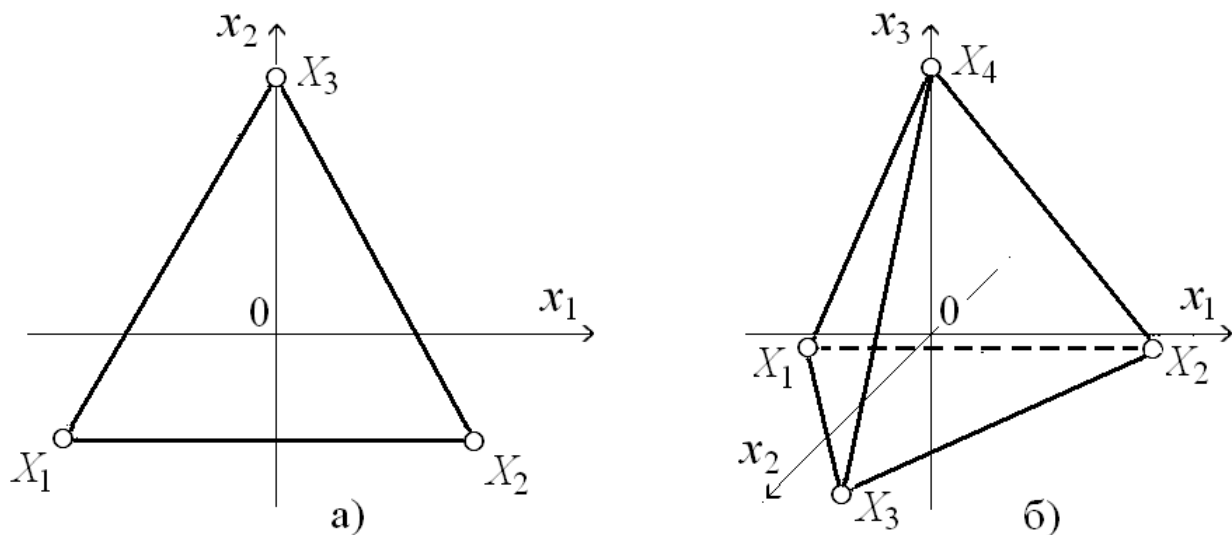


Рисунок 2.4 – Симплекси у двовимірному (а) і тривимірному (б) просторі

Одна з властивостей симплексу: проти будь-якої з вершин симплексу  $S$  розташовується лише одна грань, на якій можна побудувати новий симплекс, відмінний від попереднього розташуванням однієї нової вершини, тоді як інші вершини обох симплексів збігаються. Ця властивість і обумовила застосування симплексів для пошуку екстремуму.

Ідея методу полягає в порівнянні значень функції  $F(X)$  у  $(n+1)$  вершинах багатогранника і переміщенні його в напрямку, що зв'язує центр тяжіння багатогранника з його вершиною, в якій значення функції найменше. Нова вершина в отриманому напрямку обирається так, щоб утворився новий багатогранник, у якого одна з вершин, – результат операції *відображення*. Після цього процес повторюється як з першим багатогранником. На рисунку 2.5 показано на прикладі двовимірного пошуку переміщення симплексу, що веде в окіл мінімуму.

Порядок виконання операцій у методі S визначається таким алгоритмом:

1 У вершинах багатогранника обчислюються значення функції  $F(X)$ .

2 Знаходиться найбільше зі значень функції  $F_h$ , що йде за найбільшим значенням  $F_g$ , найменше значення функції  $F_l$ , і розглядаються точки, що відповідають їм  $X_h$ ,  $X_g$ ,  $X_l$ .

3 Знаходиться центр тяжіння точок, окрім  $X_h$ , тобто  $X_0 = \sum_{i \neq h} X_i / N$ , і обчислюється функція  $F(X_0) = F_0$ .

4 Робиться переміщення від точки  $X_h$  через центр тяжіння. Отримують точку, відбиту відносно точки  $X_r$ , і знаходять у ній значення  $F_r$ .

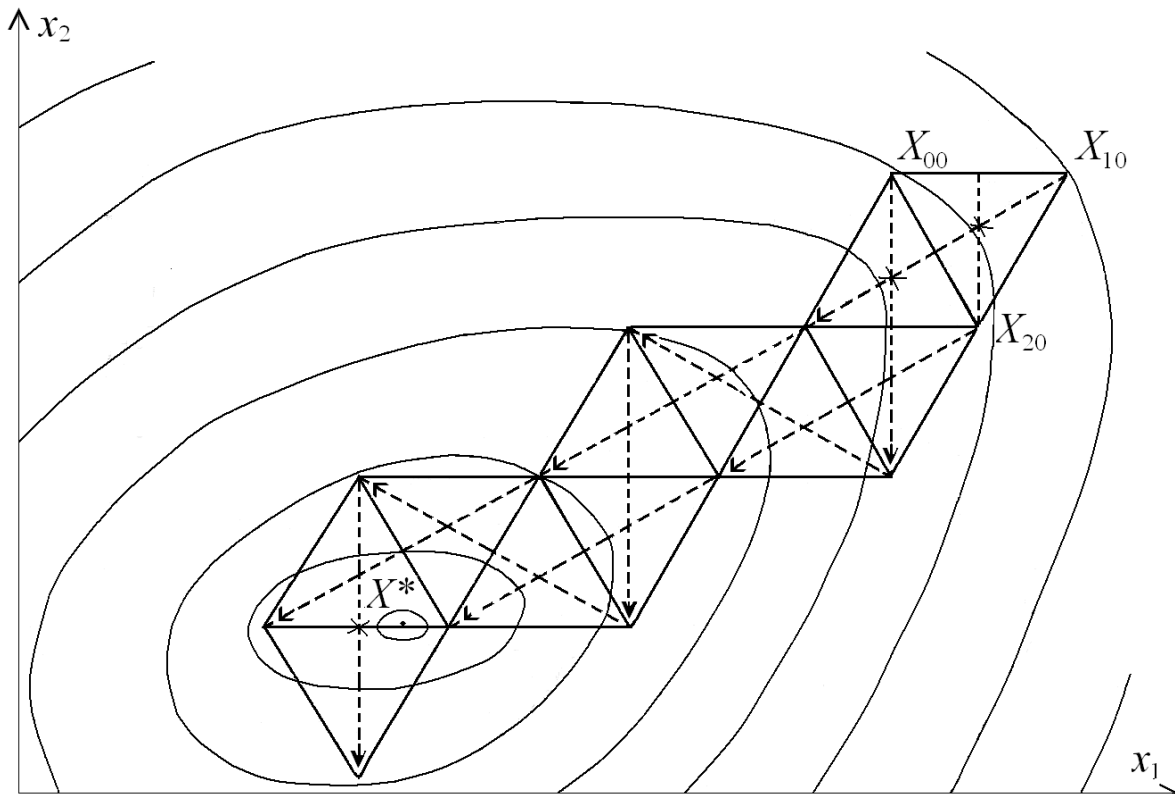


Рисунок 2.5 – Переміщення симплексів у методі S

**Метод деформованого багатогранника (ДБ).** Метод ДБ, або Нелдера-Міда є розвитком S методу, але, на відміну від нього, в методі ДБ багатогранник може стати *неправильним*.

Тут, як і в методі S, основною операцією є відображення, але також використовуються *розтягування* і *стискання*.

Операція *стискання* дозволяє потрапити в окіл розв'язку  $X^*$  зі зменшеним симплексом (див. рисунок 2.6), використовуючи прийом, коли його форма залишається незмінною. При цьому приймається один і той самий коефіцієнт стискання, а його підбір здійснюється експериментально.

Іноді у напрямку спуску при отриманні нової відбитої вершини  $X_1^H$  задають подвійний крок, розтягуючи новий симплекс у бік зменшення функції  $F(X)$  (рисунок 2.7).

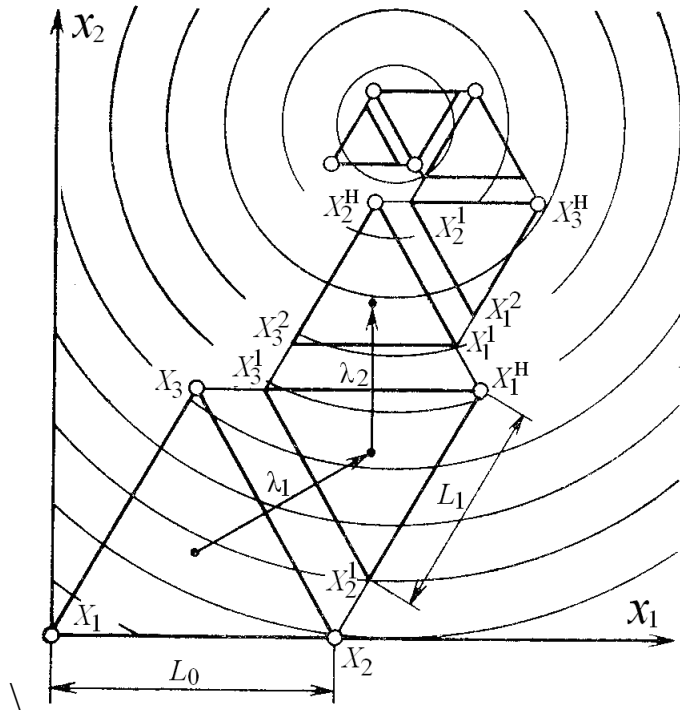


Рисунок 2.6 – Рух симплексу після операцій *стискування* та *відображення*

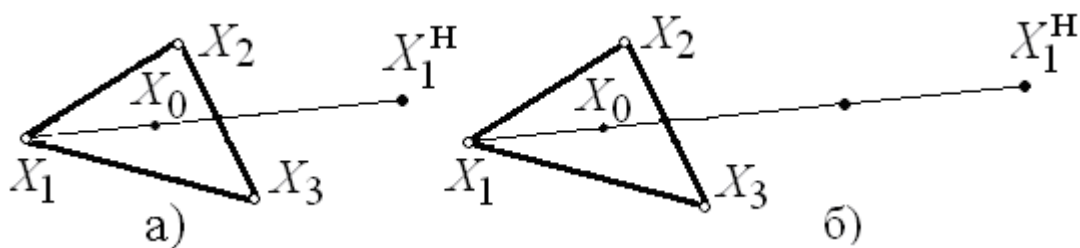


Рисунок 2.7 – Операція відображення

На відміну від методів типу ПС, ХД і подібних до них, траєкторії методу S і особливо його модифікації ДБ не скуті прямими напрямками і дозволяють собі здійснювати "вільне плавання" в параметричному просторі, що може сприяти певному прискоренню просування до мети.

Проте, на жаль, експеримент з методом ДБ довів, що його ефективність знижується із зростанням кількості вимірів простору проектних параметрів.

**Метод яруг (МЯ).** Цей алгоритм виявляє свою ефективність у випадках, коли функція  $F(X)$ , мінімум якої необхідно знайти, є яружною.

Класичний варіант МЯ (див. рисунок 2.8) реалізує традиційний градієнтний спуск з двох різних точок  $X'_0$  і  $X''_0$  у точки  $X_0$  і  $X_1$  дна яру, які знаходять одновимірним пошуком на напрямках  $\overline{X'_0 X''_0}$  і  $\overline{X'_1 X''_1}$ . Далі спуск відбувається до заданого значення величини  $1 - [F(\overline{X_k}) - F(\overline{X_{k-1}})] / F(\overline{X_{k-1}})$ , де  $\overline{X_k}$ ,  $\overline{X_{k-1}}$  – точки, розташовані уздовж напрямку "градієнтного" спуску. Через "спущені" точки  $X_0$  і  $X_1$  проводиться пряма і на ній убік від точки з меншим значенням  $F(X)$  відкладається "крок уздовж яру" для отримання точки відходу  $X'_2$ . Надалі по двох сусідніх спущених точках  $X'_{k-1}$  і  $X''_k$  процес повторюється з деяким заданим кроком  $h_k$ .

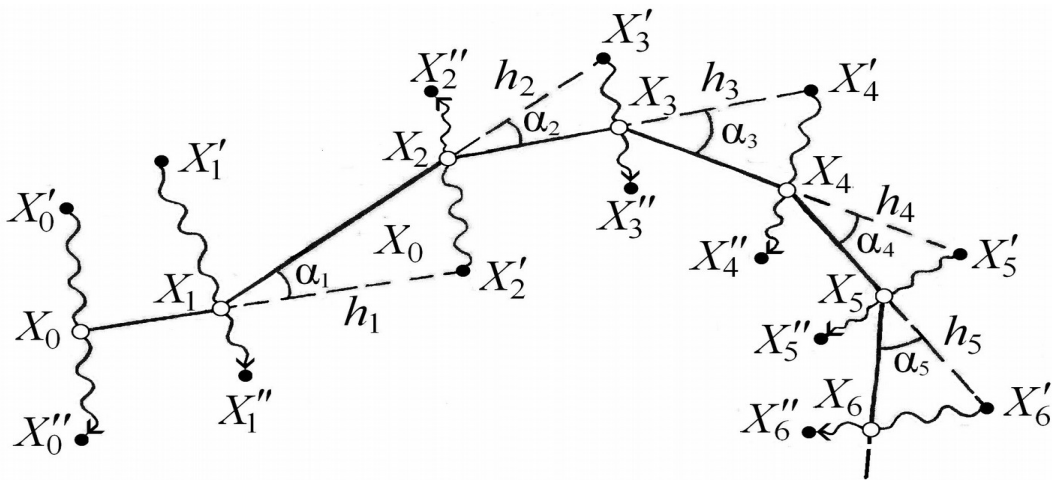


Рисунок 2.8 – Метод яруг

Зрозуміло, що в загальному випадку не завжди послідовність усіх точок у процесі яружного пошуку виявляється релаксаційною. Наприклад, у точках відходу  $X'_k$  може іноді порушуватися умова (2.1), і особливо часто таке положення виникає, коли яруга змінює напрямок. При цьому збільшуються обчислювальні витрати на спуски і є небезпека потрапити в іншу яругу.



Тому для попередження небажаних явищ при просуванні по яру необхідно на його поворотах зменшувати яружний крок  $h_k$ , а при виході на пряму, де кути  $\{\alpha_k\}$  зменшуються – збільшувати.

Тут доцільним буде автоматичне керування пошуком.

**Метод паралельних дотичних (PARTAN).** Розглянемо ще один двовимірний варіант локалізації безумовного екстремуму – метод **PARTAN**. Якщо функція  $F(X)$  в околі розв'язку  $X^*$  достатньо добре наближається квадратичною апроксимацією, то основою для методу уточнення точки екстремуму може служити відомий геометричний факт: точка екстремуму  $X^*$  лежить на прямій, що проходить через дві точки екстремуму  $X_1^*$  і  $X_2^*$ , які лежать на паралельних дотичних прямих до ліній рівня функції  $F(X)$ . Знайшовши одновимірним пошуком точки  $X_1^*$  та  $X_2^*$ , отримуємо далі напрямок  $X_1^*X_2^*$  для наступного одновимірного пошуку у напрямку точки  $X^*$  (див. рисунок 2.9).

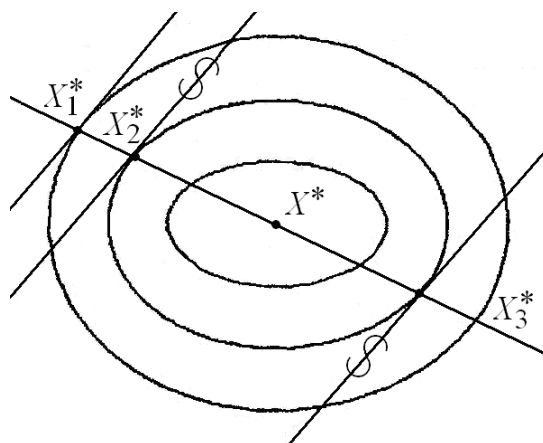


Рисунок 2.9 – Метод паралельних дотичних

Процес уточнення може бути повторений, якщо ще не досягнута необхідна точність локального екстремуму.

### 3 Стохастичний пошук

Всі розглянуті вище методи належать до регулярних (детермінованих) методів пошуку екстремуму, тобто до методів, у яких напрямок і величина робочого кроку обираються детерміновано. Це означає, що при певній постановці задачі

оптимізації та ідентичній початковій точці алгоритмом кожного разу буде обрано один і той самий напрямок пошуку, величина кроку та отримано той самий результат.

Існують стохастичні методи пошуку, що відрізняються від регулярних методів навмисним введенням елементів випадковості. Завдяки цьому той самий метод при одній стартовій точці може рухатися до оптимуму різними шляхами, що може бути корисним у випадку складних (у тому числі неунімодальних) функцій.

Хоча методи випадкового пошуку можуть бути формально віднесені до методів нульового порядку, наявність елементів випадковості дозволяє виділити їх у самостійну групу.

**Генерація випадкових чисел.** Елементи випадковості в методах випадкового пошуку реалізуються за допомогою випадкових чисел, рівномірно розподілених на деякому числовому відрізьку.

Найбільш поширеними є програмні способи одержання послідовностей випадкових чисел, засновані на використанні певних алгоритмів. Необхідно зазначити, що за допомогою цих алгоритмів можуть бути знайдені лише послідовності псевдовипадкових чисел, які насправді не є випадковими, а можуть вважатися такими лише в тому випадку, якщо об'єм вибірки випадкових чисел не є занадто великим.

Уявлення про ці алгоритми може дати такий:

$$Z_{i+1} = K \cdot Z_i \bmod M .$$

Це означає, що кожне наступне випадкове число  $Z_{i+1}$  дорівнює решті від ділення на  $M$  добутку числа  $Z_i$ , помноженого на постійний множник  $K$ . Рекомендується обирати  $K = 5^{17}$ ,  $M = 2^{42}$ ,  $Z_0 = 1$ .

Для знаходження випадкового напрямку  $\bar{a}$  за допомогою послідовності випадкових чисел  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  необхідно нормувати кожне з  $m$  випадкових чисел:

$$a_i = \frac{z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m z_i^2}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

таким чином  $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$ .

Такий випадковий вектор  $\vec{a}$  має одиничну довжину і вказує випадковий напрямок у  $m$ -вимірному просторі.

Координати випадкової точки у  $m$ -вимірному просторі  $u_i, i = 1, \dots, m$  також можуть бути знайдені за допомогою сукупності випадкових чисел  $Z_i, i = 1, \dots, m$ , рівномірно розподіленої на якому-небудь інтервалі.

**Метод випадкових напрямків.** Алгоритм цього методу полягає в тому, що з точки  $X^{(k)}$ , в якій обчислене значення  $F(X^{(k)})$ , здійснюється крок у випадковому напрямку  $\vec{a}_k$ . Величина кроку визначається величиною крокового множника  $h_k$ .

У результаті знаходиться нова точка  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + h_k \cdot \vec{a}^{(k)}$ .

Якщо  $F(X^{(k+1)}) < F(X^{(k)})$ , тоді робиться новий крок з точки  $X^{(k+1)}$  у випадковому напрямку  $\vec{a}^{(k+1)}$ . Якщо ж  $F(X^{(k+1)}) > F(X^{(k)})$ , то вибирається наступний випадковий напрямок  $\vec{a}_k$  і робиться інший крок із точки  $X^{(k)}$ .

Пошук закінчується, якщо після виконання серії кроків меншого значення цільової функції знайти не вдається.

Величина крокового множника  $h_k$  може бути постійною або змінною і обиратися як за допомогою регулярних, так і стохастичних алгоритмів.

Існує модифікація методу випадкових напрямків – метод випадкових напрямків із зворотним кроком. Помітною її особливістю є те, що при невдалому кроці  $h_k \cdot \vec{a}^{(k)}$  із точки  $X^{(k)}$  відразу здійснюється крок у зворотному напрямку  $-h_k \vec{a}^{(k)}$ , тобто реалізується алгоритм:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + h_k \cdot \vec{a}^{(k)} \cdot \text{sign}[F(X^{(k+1)}) - F(X^{(k)})].$$

Алгоритми такого типу при достатньому віддаленні від екстремуму виявляються досить ефективними.

**Простий випадковий пошук та оцінка Брукса.** Вище йшлося про те, що із зростанням вимірності простору проектних змінних суттєво зростає кількість обчислень функції мети. Ця кількість зростає як степенева функція, показник степеня якої дорівнює вимірності простору.

Оригінальна оцінка, що демонструє переваги статистичного підходу для багатовимірною пошуку, була запропонована Бруксом.

Нехай простір проектування, що являє собою куб або гіперкуб зі стороною, що дорівнює одиниці, розділено на кубічні області шляхом поділу на 10 рівних частин кожної сторони куба. При  $N = 2$  число областей дорівнює 100, при  $N = 3$  воно дорівнює 1000, у загальному випадку (при  $N$ -вимірному просторі проектних параметрів) число областей дорівнює  $10^N$ . Імовірність того, що область, яка обрана навмання, увійде в число 10% найбільш перспективних, дорівнює 0,1, тому що при  $N = 1$  нас буде цікавити одна клітинка з 10, при  $N = 2$  – одна з десяти кращих при загальній кількості областей 100 і т. д. Імовірність того, що ми пропустимо одну з 10% найбільш перспективних клітинок, дорівнює 0,9. Якщо випадковим чином вибрати дві клітинки, то ймовірність пропуску буде  $0,9^2$ , тобто 0,81. Взагалі ймовірність знаходження принаймні однієї з найбільш перспективних клітинок, частка яких дорівнює  $f$ , після  $N$  спроб складе  $P = 1 - (1-f)^N$ .

У таблиці 3.1 вказано, скільки клітинок треба обрати випадковим чином, щоб забезпечити задану ймовірність при заданій частці найбільш перспективних осередків. З неї видно, що при випадковій вибірці 44 областей ймовірність досягнення  $f = 0,1$  складе 99%.

Це дуже непогано, адже для 100%-го забезпечення цільову функцію у разі п'яти змінних довелося б обчислити 2476099 разів.

Таблиця 3.1

$f$	Вірогідність			
	0,80	0,90	0,95	0,99

	Кількість обчислень функції			
0.1	16	22	29	44
0.05	32	25	59	90
0.01	161	230	299	459
0.005	322	460	598	919

Таким чином, метод випадкового пошуку має дві переваги. По-перше, він придатний для будь-якої цільової функції незалежно від того, є вона унімодальною чи ні. По-друге, ймовірність успіху при спробах не залежить від розмірності простору проектних параметрів. Хоча цей метод не дозволяє безпосередньо знайти оптимальне рішення, він створює відповідні передумови для застосування в подальшому інших методів пошуку. Тому його часто застосовують у поєднанні з одним або кількома методами інших типів.

#### 4 Методи багатовимірного прямого пошуку при наявності обмежень

Як зазначено у вступі, найбільш поширені реальні задачі належать до класу багатовимірних задач (0.2) при наявності обмежень у вигляді (0.5). Як правило, у таких випадках оптимум знаходиться на одній з меж, що призводить до знецінення ефективності методів пошуку безумовного екстремуму та народження інших методів.

**Метод штрафних функцій.** Цей метод є спробою звести задачу оптимізації з обмеженнями до попереднього типу – оптимізації без них. Для цього будують нову функцію мети:

$$M(X) = F(X) + \sum \phi(G_i(X)),$$

де  $\sum \phi(G_i(X))$  - так звана штрафна функція, яка дорівнює 0 для тих  $X$ , де обмеження (0.5) виконані, та має великі значення для тих сукупностей проектних параметрів, які є не припустимими, тобто там, де обмеження (0.5) не виконані.

Завдяки простоті доступу до широкого арсеналу методів безумовної оптимізації, цей підхід досить широко використовується для пошуку умовного екстремуму.

Але розв'язання задачі оптимізації при наявності обмежень, яке спирається на схему штрафних функцій, може стати складним і неефективним у реалізації, коли траєкторія спуску підходить до межі області, навіть при диференційованості функцій  $F(X)$  і  $G_j(X)$  і точному обчисленні похідних.

При наближенні до меж у методі штрафних функцій цільова функція, починаючи з деякого моменту, стає "яружною" з "похилими" з одного боку і "крутими" з іншого боку схилами, що сильно утруднює пошук точок "дна" такого яру. А це, у свою чергу, зменшує можливість встановлення правильного напрямку "дна" яруги і, значить, оптимуму. Частково таке положення можна поліпшити, змінюючи за досить складною схемою величину штрафного коефіцієнта. Але підбір коефіцієнта зазвичай здійснюється "вручну", що знецінює ефективність цього підходу.

Якщо відмовитися від методу штрафних функцій, а також градієнтного спуску, то можна сподіватися на уникнення вказаних вище складностей.

Можна використати одновимірний пошук кореня на відрізьку, що сполучає найближчу до межі припустиму точку  $L$  і найближчу точку  $M$ , де обмеження будуть порушені. Потім з точки  $L$  провести перпендикулярний напрямок  $\text{Dir } L \perp \overline{LM}$ , уздовж якого здійснити рух.

Не виключено, що і після цього новий напрямок може вивести пошук з допустимої області. Проте планомірні "повороти" дадуть врешті-решт такий напрямок, вздовж якого вдасться зробити деяку кількість кроків до виходу з допустимої області і побудувати релаксаційну послідовність точок, що наближаються до мети. Такі "січні" рухи неминуче приведуть пошук у малий окіл точки оптимуму.

Варіанти отримання релаксаційних послідовностей допустимих точок детальніше розглянуті далі. Вони характеризуються простотою пошукової процедури, ефективністю в роботі, а також, по можливості, якомога меншою кількістю "виходів" з допустимої області  $G$ .

**Січний рух уздовж межі.** Ідея яружного пошуку [2] у застосуванні до задач оптимізації з обмеженнями приводить до методу "січний рух уздовж межі" [3]. У цьому випадку "дном"

яруги стає одна з меж, уздовж якої відбувається рух, що приводить в окіл оптимуму. Залежно від виду обмеження з моменту його порушення відбувається перемикання процесу на той або інший спосіб продовження, з використанням одновимірного покрокового процесу, який розгортається в необхідному напрямку. Для цього в кожній точці кожного разу перевіряється виконання системи обмежень, що визначає допустимість подальшого просування в досліджуваному напрямку, а потім, якщо не порушене жодне з них, обчислюється значення функції  $F(X)$ . Зупинка для зміни напрямку відбувається у двох випадках: при порушенні хоча б одного з обмежень або порушенні релаксаційності.

Перш ніж аналізувати варіанти побудови подальших напрямків пошуку, введемо класифікацію точок (вузлів), за якими можна робити висновки про пошукову ситуацію, що складається, і які можуть виступати ознаками ситуації при керуванні процесом.

*Кращою точкою*  $E(Y) \in G$  у напрямі  $Y$  вважаємо таку, значення функції  $F(E)$  в якій є найменшим порівняно з усіма іншими обчисленими значеннями в інших раніше отриманих точках на  $Y$ . Точка типу  $E(Y)$  – результат деякого одновимірного пошуку мінімуму функції  $F(X)$  на  $Y$ .

Точка  $C_k \vee C_k^\Gamma$  – перша точка на напрямі при покроковому спуску по  $Y_k$ , в якій порушена умова

$$\bigcup_{j=1}^m (G_j(X_{kl}) \geq 0) \vee \bigcup_l (F(X_{k,l-1}) \geq F(X_{kl})); \quad (4.1)$$

де  $D_k$  – точка  $C_k$  з  $l' = 1$  на напрямку  $Y_{k+1}$ , який проходить через точку  $B_k$  на  $Y_k$ ;  $B_k$  – точка типу  $E(Y)$  на напрямку  $Y_k$  з вже оголошеною точкою  $C_k$  і яка задовольняє умову (4.1) на послідовності  $\{Y_k\}$  *спряжених* напрямків, що утворюють траєкторію  $T_{kl}$ . Таким чином, послідовність  $\{B_k\}$  виявляється релаксаційною

$$\dots \succ B_k \succ B_{k-1} \succ \dots \succ B_0$$

і веде в окіл мети  $X^*$ . Вихід з області  $G$  на будь-якому кроці

означає початок умовного пошуку, мета якого – визначення на двох різних сусідніх напрямках двох точок на межі ("засічок") (див. рисунок 4.1,а,в) та приблизне знаходження напрямку межі області  $G$  між ними.

Незалежно від того, як розвивається пошук – чи виникають у його процесі точки  $C_k, D_k, C'_k, D'_k$ , або  $C_k^\Gamma$  – завжди можуть бути реалізовані варіанти продовження (див. рисунок 4.1).

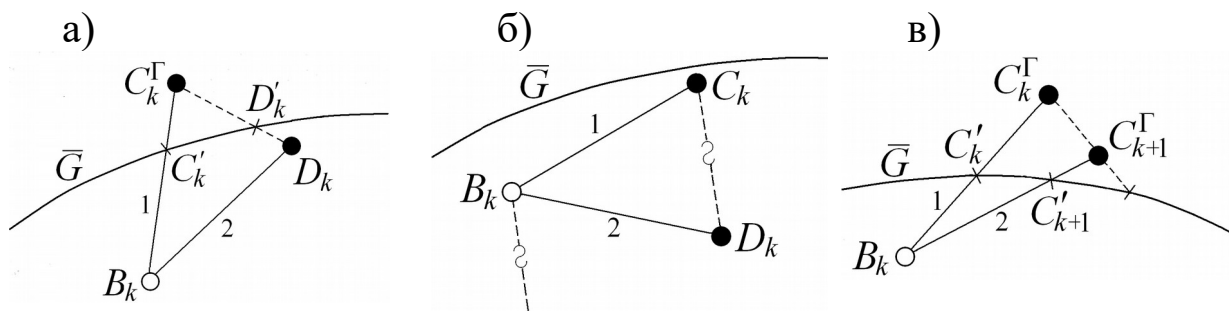


Рисунок 4.1 – Варіанти продовження пошуку:

а –  $C_k^\Gamma, D_k$ ; б –  $C_k, D_k$ ; в –  $C_k^\Gamma, C_{k+1}^\Gamma$

Якщо при русі в новому "січному" напрямку відбувається вихід поточної точки з області  $G$ , то скоректований напрям будується за попередньою точкою поза областю типу  $C_k^\Gamma$  і останньою допустимою точкою  $B_k$  на січному напрямі.

Якщо ж рух у новому напрямку залишає поточну точку в припустимій області, то процес триває за правилами безумовного пошуку.

Початкова точка пошуку може не належати припустимій області  $G$ ; якщо межа  $\bar{G}$  не є опуклою, це може на деяких кроках вивести пошук з області  $G$  також. Для таких випадків алгоритм пошуку умовного екстремуму, очевидно, повинен містити механізм, що здійснює "вхід" в область  $G$  (див. рисунок 4.2). Для цього достатньо побудувати функціонал  $\bar{\Phi}(G_j(X))$  над множиною обмежень  $G_j(X)$  у вигляді нерівностей.

$$\bar{F}(X) = -\sum_{j=1}^{m'} G_j^2(X), \quad (4.2)$$



де  $G_j(X)$  – обмеження у вигляді нерівностей і здійснюють "вхід" в область  $G$  описаним вище методом оптимізації.

У формулі (4.2)  $m' \leq m$  – кількість порушених меж. Враховуючи, що розглядаються в загальному випадку негладкі функції  $G_j(X)$ , можна функцію (4.2) замінити на більш просту

$$\bar{F}(X) = -\sum_{j=1}^{m'} |G_j(X)|.$$

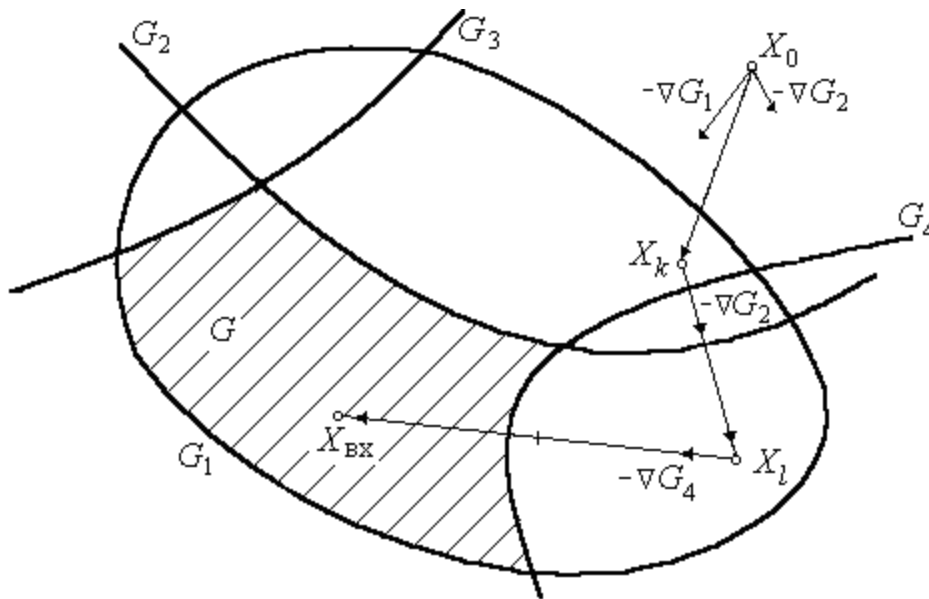


Рисунок 4.2 – Вхід у припустиму область

Після "входу" в область пошук відбувається звичайним шляхом, тобто з функцією мети  $F(X)$ , починаючи процес з точки  $X_{вх}$  як початкової точки  $X_0 \in G$ . На рисунку 4.2 зображена неопукла допустима область  $G$  (заштрихована), що обмежена лініями  $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 0$ . У початковій точці  $X_0$  порушено два обмеження  $G_1 > 0$  і  $G_2 > 0$ . Рух здійснюється в сумарному напрямі  $\overline{X_0 X_k}$ , що веде до зменшення функції мети  $\bar{F}(X)$ . У точці  $X_k$  напрям змінюється на  $\overline{X_k X_l}$ , оскільки порушено в ній тільки одне обмеження  $G_4 > 0$ . "Вхід" у допустиму область  $G$  завершується точкою  $X_{вх} \in G$  у напрямі  $\overline{X_l X_{вх}}$ .

Проходження уздовж межі після входу (точка  $B_0$ ) в область

$G$ , коли вона утворена, наприклад, однією опукло-увігнутою межею  $\bar{G}$  (див. рисунок 4.3), здійснюється таким чином, що навіть перехід на іншу сторону області  $G$  не порушує загальної ідеї січного руху.

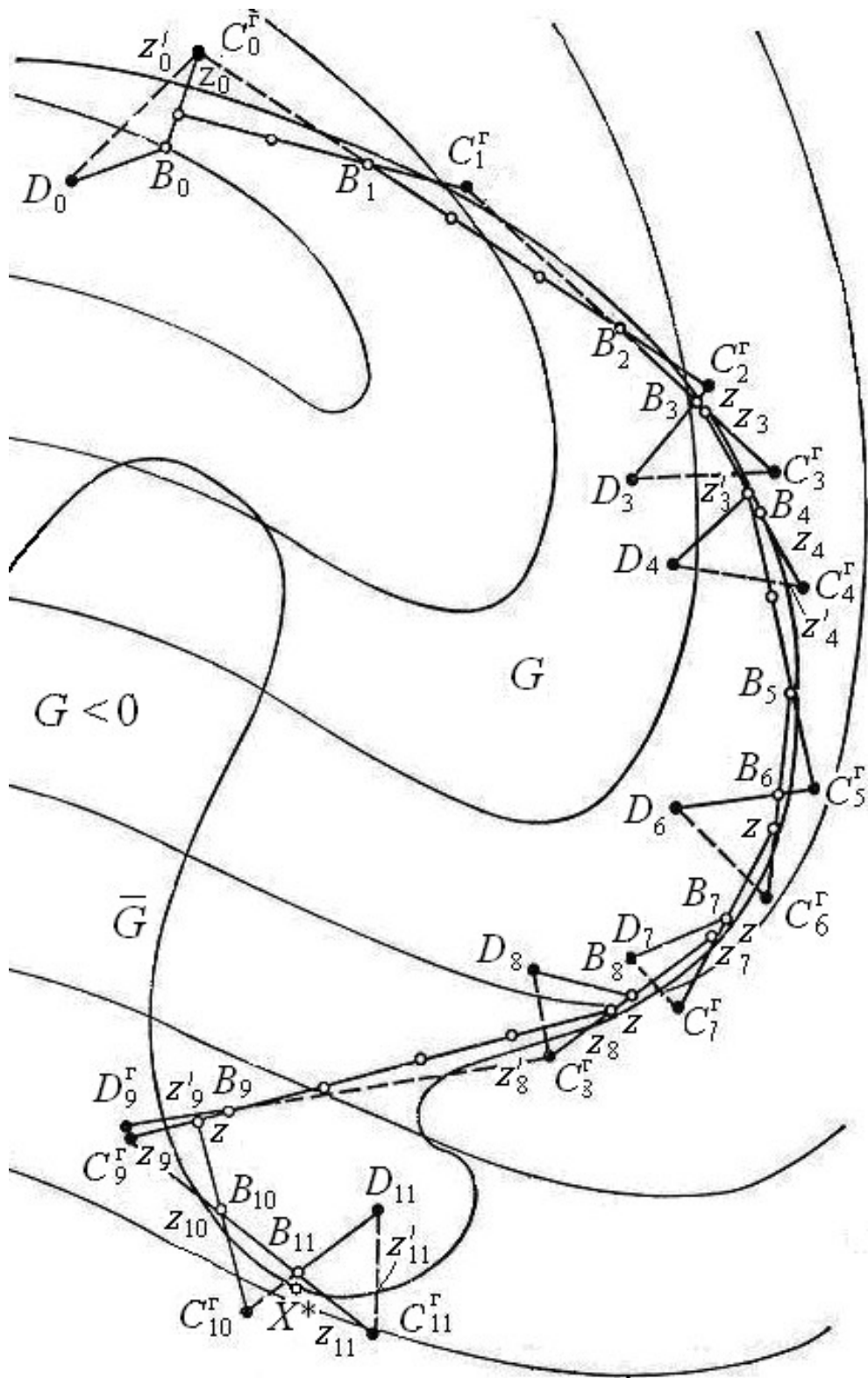


Рисунок 4.3 – Січний рух уздовж однієї межі

На рисунку 4.4 зображена щілиноподібна межа  $\bar{G}$ , що утворена двома опуклими обмеженнями  $G_1$  і  $G_2$ , тобто  $G = (G_1 \geq 0) \wedge (G_2 \geq 0)$ . І тут січний рух уздовж межі дає змогу досить близько підійти до оптимуму  $X^*$ , що міститься у вузькій щілині проміж меж.

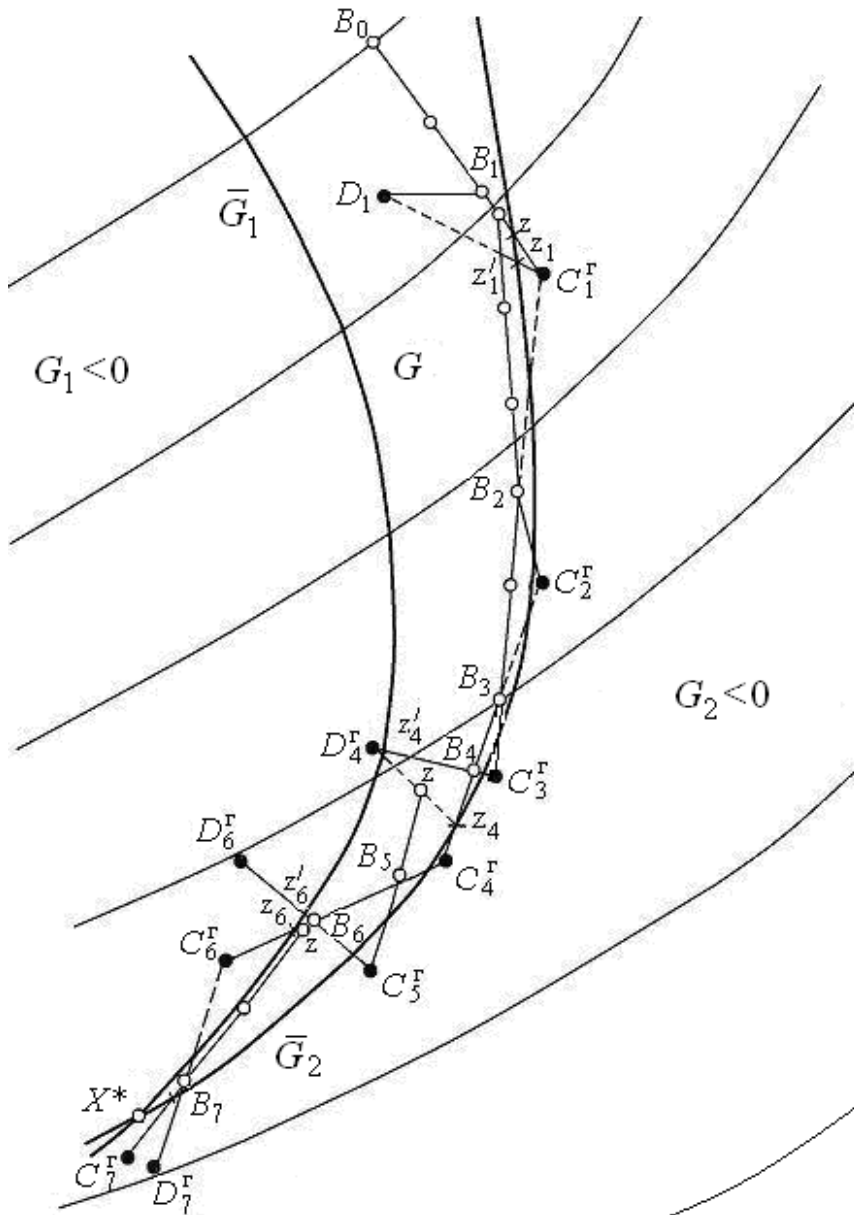


Рисунок 4.4 – Січний рух у щілині, утвореній двома межами

**Метод ковзного допуску (КД).** Цей метод побудовано на основі модифікації методу ДБ, він має низку переваг, важливих з точки зору алгоритмічної реалізації. Серед прямих методів

пошуку умовного екстремуму методу КД належить одне з перших місць за ефективністю в умовах задач помірних вимірів та у разі невеликого числа обмежень. Ця обставина зумовила його широке застосування в прикладних задачах. У методі КД задача знаходження оптимуму замінюється еквівалентною задачею знайти

$$X^* = \arg \min_{X \in G} F(X),$$

де

$$G = \left\{ X : G_i \geq 0, i = \overline{1, m_1}; G_j = 0, j = \overline{m_1 + 1, m} \right\},$$

за умови

$$\Phi^{(k)} - T(X) \geq 0,$$

де

$$\Phi^{(k)} = \min \left\{ \Phi^{(k-1)}, \frac{n+1}{m-n+1} \sum_{i=1}^{m-n+1} \|X_i^{(k)} - C^{(k)}\| \right\} > 0, \Phi^{(0)} = 2(n+1)t -$$

*критерій ковзного допуску* – функція, що визначена на вершинах  $X_i^{(k)}$  деформівного  $k$ -го багатогранника з центром тяжіння  $C^{(k)}$  (визначається без вершин з максимальним значенням  $\Phi(X)$ );  $T(X)$  – позитивно визначений функціонал, заданий на множині активних обмежень  $G_i > 0, G_i = 0$  такий, що набуває нульового значення в точках  $X \in G$ ;  $t$  – величина, що характеризує розмір початкового багатогранника (симплексу), наприклад, середня відстань між вершинами.

Більш розгорнутий виклад алгоритму і деякі деталі реалізації методу КД можна знайти, наприклад, у [1].

\*\*\*

Майже усі наведені пошукові процедури містять у своїй структурі частини, які змінюються у процесі пошуку (напрямки, кроки пошуку і інші параметри), що, на думку авторів цих пошукових процедур, сприяє поліпшенню їх функціонування (прискоренню процесу пошуку, скороченню обчислювальних витрат, підвищенню точності і тощо). Деякі із закономірностей такого вибору і належної їх зміни свідомо впроваджувалися в

обчислювальний процес, інші природним чином там були наявними з самого початку.

Ці зміни часто виявляються, на жаль, стрибкоподібними, і тому не завжди відповідають реальній ситуації та характеру поведінки функції  $F(X)$ . При ефективному оптимальному проектуванні конструкцій перевагу будуть мати такі методи, що широко використовують ідеї адаптивного керування пошуком та гібридизацію. Це такі методи, що мають у своєму арсеналі достатню кількість простих (класичних) методів пошуку. Аналізуючи конкретну ситуацію, у якій опинився пошук на поточному кроці, вони ухвалюють (без участі людини, звичайно) рішення про продовження оптимізації тим чи іншим гібридентом з тими чи іншими параметрами.

## 5 Приклади оптимального проектування реальних конструкцій

Велика кількість галузей техніки, будівництва користується сьогодні послугами оптимального проектування (ОП).

На рисунку 5.1 показана типова схема пошуку оптимального розв'язку.

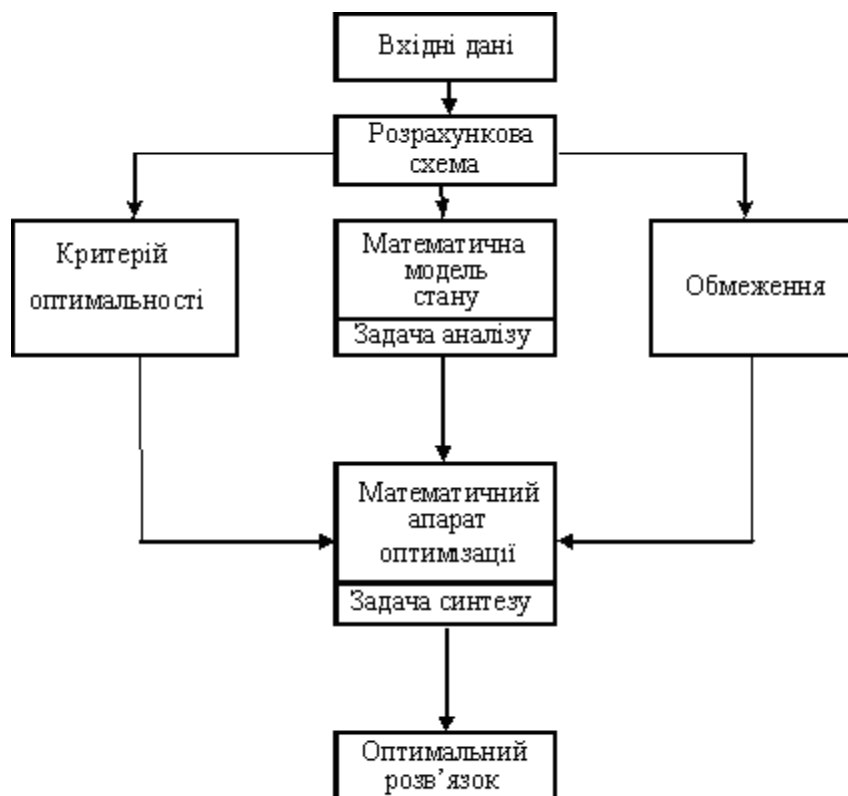


Рисунок 5.1 – Традиційна блок-схема досягнення оптимального розв'язку

**Оптимізація лінзових компенсаторів осьових переміщень.** У промисловості дуже поширені лінзові компенсатори осьових переміщень, що гасять температурні деформації і тим самим забезпечують необхідну надійність роботи трубопроводів різного призначення.

Розглянемо переріз (рисунок 5.2) серединної поверхні гофра лінзового компенсатора, навантаженого внутрішнім тиском  $q$  трубопроводу, який сприймає осьові переміщення  $\Delta$ , що викликаються, наприклад, його тепловими деформаціями.

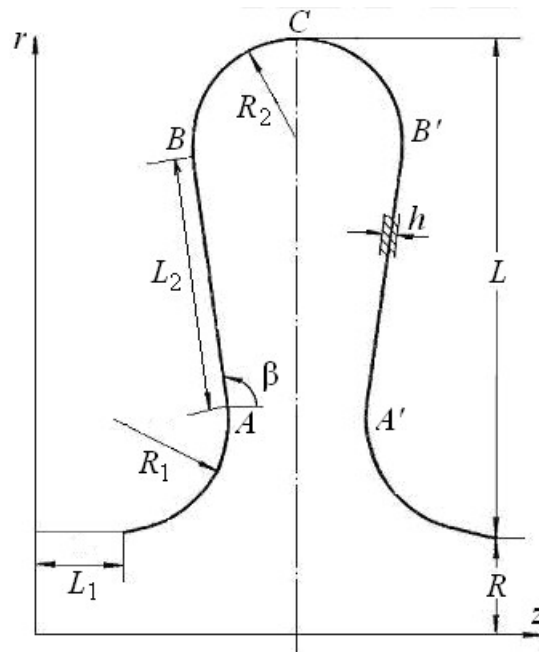


Рисунок 5.2 – Геометрія гофра лінзового компенсатора

Форма меридіана напівлінзи описується у вигляді послідовності ділянок прямих і дуг кіл (рисунок 5.2). Відшукується оптимальна форма меридіана, а функцією мети  $F(X)$  і обмеженнями  $G_k(X)$  можуть виступати різні технічні характеристики, що є важливими при експлуатації компенсатора, наприклад, кількість циклів  $N$  його навантаження до руйнування або його максимальна можлива компенсуюча здатність  $\Delta$ .

Замовник поставив вимогу: оптимальний компенсатор повинен мати габарити не більші від початкових, для того щоб ним можна було замінити вже працюючі.

Як обмеження на міцність прийнято умову, що найбільші напруження  $\sigma$  від дії внутрішнього тиску  $q$  не повинні перевищувати деяких граничних, які є умовою неруйнування ( $\sigma < 0.6 \sigma_T$ ).

Проводилися оптимізації компенсаторів ДУ 1200 і ДУ 1400 для  $q = 17 \text{ кг/см}^2$ .

Результати розрахунків подані на рисунку 5.3, де оптимальний варіант показано пунктиром, а початковий (той, яким користувалися до оптимізації) - жирною лінією.

Незначне ускладнення форми лінзи за рахунок введення конічної ділянки дозволило підвищити компенсуючу здатність на 33 % для ДУ 1200 і на 43 % для ДУ 1400.

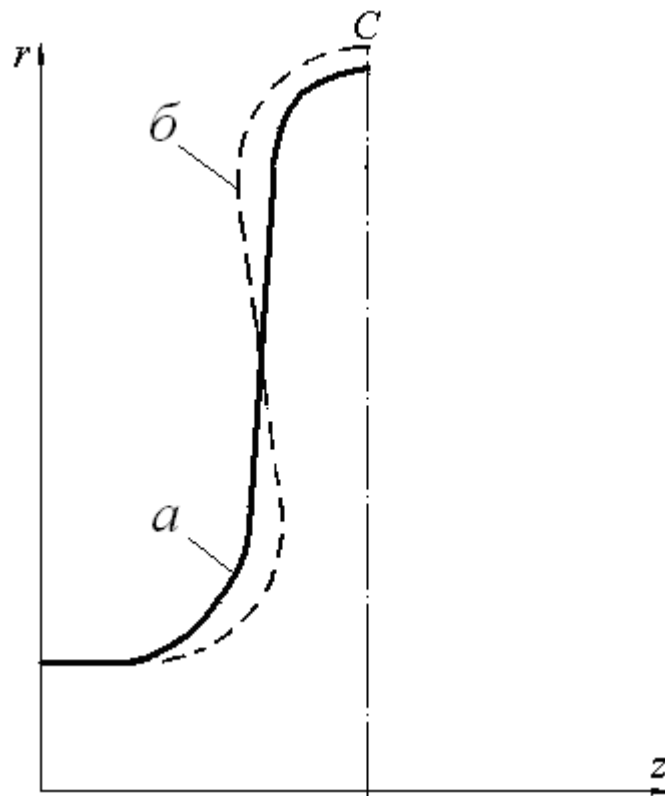


Рисунок 5.3 – Оптимізація гофра лінзового компенсатор

**Мінімізація маси лопатей вітроенергетичної установки.** Одним з найбільш важливих вузлів сучасної вітроенергетичної установки (ВЕУ) є *лопатева система*, фрагмент якої зображений на рисунку 5.4. Довжини лопатей для ВЕУ різної потужності перебувають у межах 3-30 м.

Лопаті виготовляються з достатньо дорогого матеріалу - вуглепластику. Правильний вибір параметрів лопаті великою мірою визначає ефективність роботи усієї ВЕУ, забезпечуючи при цьому мінімум її матеріалоємності та вартості.

Задача оптимального проектування лопатевої системи за вимогами замовника була поставлена як задача мінімізації ваги лопаті, при обмеженні згину (переміщення) лопаті під дією аеродинамічних навантажень та відцентрових сил (зігнута лопать не повинна торкатися опори ВЕУ, яка з конструктивних міркувань розташована поруч), обмеження напружень, що виникають у ній (вони не повинні перевищувати значень, що характеризують умови руйнування вуглепластику), а також її частот власних коливань (які мають бути віддаленими від частот обертання лопатевої системи та деяких інших).

Лопаті моделюються закрученими тонкостінними стержнями змінного перерізу (рисунки 5.4, 5.5).

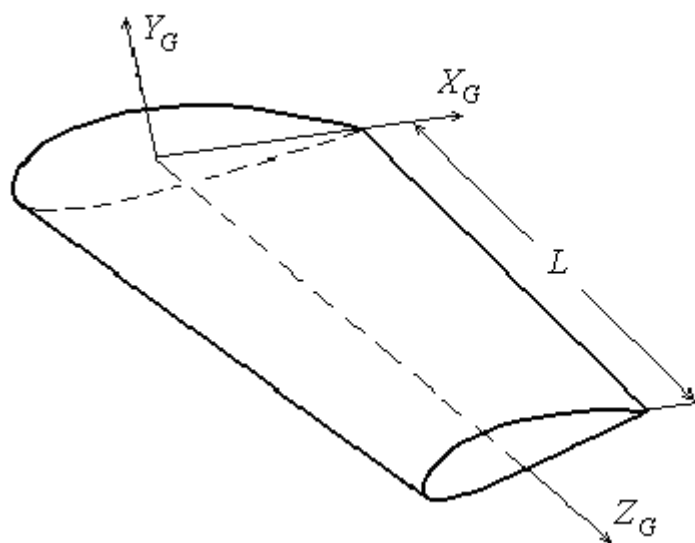


Рисунок 5.4 – Лопать ВЕУ

Геометрія лопаті формується набором перерізів, у кожному з яких задаються такі параметри профілю: форма зовнішнього контуру, товщина  $h(z)$  лопаті, товщина  $h_l(z)$  і ширина лонжерона  $l(z)$  (рисунок 5.5). Лопать піддана дії аеродинамічних навантажень і відцентрових сил. Аеродинамічне навантаження зводиться до розподілених поперечних навантажень  $q_x$ ,  $q_y$  і розподіленого крутного моменту  $m_z$ .



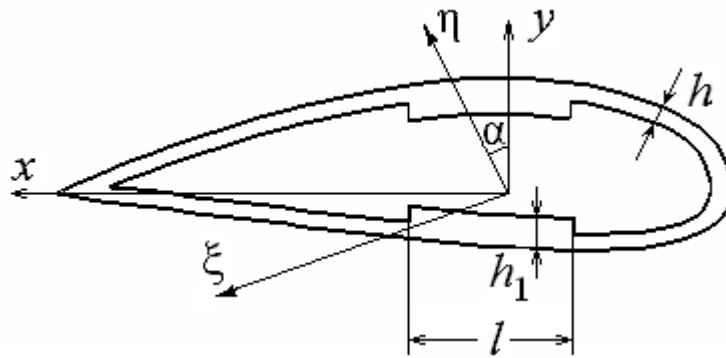


Рисунок 5.5 – Геометрія перерізу лопаті

Функція мети – маса лопаті - обчислювалася за формулою

$$Q = \rho \sum_{i=1}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} S(z) dz,$$

де  $S(z)$  – площа поперечного перерізу;  
 $\rho$  – щільність вуглепластику.

Варійованими параметрами в задачі оптимізації є товщини лопаті  $h^j(z)$  та параметри лонжерона  $h_1^i(z)$ ,  $l^i(z)$  у перерізах (див. рисунок 5.5). Кількість розрахункових перерізів дорівнювала 96.

Зовнішній профіль лопаті визначається аеродинамічними розрахунками і в задачі оптимізації вважався заданим.

Далі наведено результати оптимального проектування лопаті ВЕУ FA-9/2000 з такими параметрами: висота 20 м, потужність 7 Квт,  $L = 4$  м, частота обертання вітроколеса  $\Omega = 20$  об/хв для швидкості вітру 10 м/с, перша частота власних коливань мала перебувати у межах від 0,1 Гц до 10 Гц.

Максимальні переміщення оптимальної лопаті у площині обертання вітроколеса склали 28,5 см; максимальне напруження згину (у кореневому перерізі лопаті) досягло 12,8 МПа; перша частота  $\omega$  власних коливань виявилася рівною 2,28 Гц.

У таблиці 5.1 наведено початкові значення  $h_0$  товщин перерізів і їх оптимальні значення  $h_i^*$ , що отримані в результаті розв'язання задачі оптимізації, тут же вказана маса лопаті  $M$  у початковому і оптимальному варіантах.

Таблиця 5.1

Номер перерізу	1	28	38	48	58	68	96	<i>M</i> , кг
Координата <i>Z</i> , м	0,80 0	1,23 6	1,81 8	2,40 0	2,83 6	3,56 4	5,00 0	
Початкова товщина <i>h</i> <sub>о</sub> , мм	6,00	5,60	5,00	5,40	5,00	3,20	3,00	19,38
Оптимальна товщина <i>h</i> <sup>*</sup> , мм	5,04	5,73	5,21	3,67	3,25	2,41	2,19	16,64

У результаті оптимізації вдалося знизити масу лопаті ВЕУ FA-9/2000 на 15 %. Отриманий ефект виявився достатньо істотним, особливо якщо врахувати високу вартість матеріалу лопаті.

\*\*\*

Сфера створення досконалих і оптимальних проектів неухильно розширюється. До неї потрапляють різні задачі оптимізації, що виникають у багатьох галузях техніки. Сюди можна віднести задачі створення досконалих механізмів, конструкцій та інших об'єктів, що з'являються в авіа-, судно-, машинотранспортному будівництві, у промисловому та цивільному будівництві, в хімічній галузі та інших техногенних сферах людської діяльності. Вибір оптимальної конструкції супроводжується забезпеченням міцності і надійності, заданих рівнів звуко-, вібро-, теплоізоляції, захисту від агресивних середовищ, радіації тощо.

## Список літератури

- 1 Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование [Текст] / Э. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1983. – 478 с.
- 2 Прагер, В. Основы теории оптимального проектирования [Текст] / В. Прагер. – М.: Мир, 1977. – 118 с.
- 3 Геминтерн, В.И. Методы оптимального проектирования [Текст] / В.И. Геминтерн, Б.М. Каган. – М.: Энергия, 1980. – 160 с.
- 4 Шелудько, Г.А. К оптимальному проектированию компенсаторов осевых перемещений [Текст] / Г.А. Шелудько, Э.С. Шишкина // Пробл. машиностроения. – 1980. – Вып. 12. – С. 52-56.
- 5 Батищев, Д.В. Методы оптимального проектирования [Текст] / Д.В. Батищев. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
- 6 Зойтендейк, Г. Методы возможных направлений [Текст] / З. Зойтендейк. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 176 с.
- 7 Альсведе, Р. Задачи поиска [Текст] / Р. Альсведе, И. Вегенер. – М.: Мир, 1982. – 368 с.
- 8 Сеа, Ж. Оптимизация: теория и алгоритмы [Текст] / Ж. Сеа. – М.: Мир, 1973. – 244 с.
- 9 Первозванский, А.А. Поиск [Текст] / А.А. Первозванский. – М.: Наука, 1970. – 264 с.
- 10 Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау; пер. з англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
- 11 Шелудько, Г.А. Гибридный метод оптимизации [Текст] / Г.А. Шелудько, Е.А. Стрельникова. – Харьков, 1980. – 64 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 164).
- 12 Демьянов, В.Ф. Недифференцируемая оптимизация [Текст] / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
- 13 Еселева, Е.В. Весовая оптимизация лопастей ветроустановок [Текст] / Е.В. Еселева, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова, Г.А. Шелудько // Пробл. машиностроения. – 1999. – № 3-5. – С. 62-69.
- 14 Глебов, Н.И. Методы оптимизации [Текст] / Н.И. Глебов, Ю.А. Кочетов, А.В. Плясунов. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2000. – 105 с.

15 Васильев, Ф.П. Методы оптимизации [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

16 Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации [Текст] / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Физматлит, 2005. – 328 с.

17 Шелудько, Г.А. Гибридные методы в задачах оптимального проектирования [Текст] / Г.А. Шелудько, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2008. – 188 с.