

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Будівельна механіка та гідравліка»

**РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ
СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ РАМ
МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КОМП'ЮТЕРА**

Методичні вказівки

Харків - 2013

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Будівельна механіка та гідравліка» 24 жовтня 2010 р., протокол № 5.

Розглядається класичний метод розрахунку статично невизначних систем методом переміщень, який з розвитком обчислювальної техніки виявився дуже зручним. Велика увага приділена теоретичному обґрунтуванню методу, порівнянню його з іншим класичним методом – методом сил. Показано їх взаємозв'язок. Обговорюються питання застосування методу для розрахунку рам з елементами, які не розтягуються і розтягуються. Розглядається часткова і повна реалізація його на комп'ютері. Наведено завдання на розрахунок рам методом переміщень. Наведено приклади «ручного» та машинного розрахунків з аналізом результатів. Розроблено програму розрахунку рам на комп'ютері.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельних і механічних спеціальностей, які вивчають елементи будівельної механіки.

Укладачі:

проф. Е.Д. Чихладзе,
доц. А.М. Петров

Рецензент

проф. В.П. Кожушко (ХНАДУ)

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ
СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ РАМ
МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КОМП'ЮТЕРА

Методичні вказівки

Відповідальний за випуск Петров А.М.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 25.10.10 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

З М І С Т

Вступ.	4
1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
1.1 Визначення ступеня кінематичної невизначності (числа невідомих)	5
1.1.1 Розрахункова схема зі стержнями, які не розтя- гуються	5
1.1.2 Розрахункова схема рами з елементами, які розтягуються	8
1.2 Основна частина	8
1.3 Канонічні рівняння методу переміщень при роз- рахунку на дію зовнішнього навантаження	10
1.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь	11
1.4.1 Загальний спосіб	11
1.4.2 Статичний спосіб	14
1.4.3 Перевірка правильності визначення ре- активних зусиль і моментів	19
1.4.4 Розв'язання системи лінійних рівнянь у матричній формі	21
1.5 Побудова епюр M , Q , N в заданій системі	22
1.6 Розрахунок на вплив температури	23
1.7 Розрахунок на зміщення опорних в'язей	26
2 ЗАВДАННЯ: РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИ- ЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ	28
2.1 Розрахунок на дію зовнішнього навантаження	28
2.2 Розрахунок на вплив температури.	33
2.3 Розрахунок на переміщення опорних в'язей.	35
3 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ РАМ	37
3.1 Розрахунок рами на дію зовнішнього навантаження	37
3.2 Розрахунок рами на вплив температури	55
3.3 Розрахунок рами на зміщення опорних в'язей.	59
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	63
ДОДАТОК А. Підготовка вихідних даних і виконання роз- рахунків на комп'ютері	64

ВСТУП

Одночасно з розрахунком статично визначних конструкцій розвивались методи розрахунку статично невизначних систем. У 1857 р. Б.П. Клапейрон одержав рівняння трьох моментів для розрахунку нерозрізних балок. У 1864 р. Дж.К. Максвелом і в 1874 р. О. Мором була одержана формула для визначення переміщень у пружних системах по заданих внутрішніх зусиллях, яка виявилася дуже зручною для розрахунку складних статично невизначних систем, досягнувши вдосконаленої форми. Сформувалися три основних методи розрахунку: метод сил, метод переміщень, змішаний метод. У результаті з'явилась можливість відмовитися від поелементного розрахунку будівель і споруд і перейти до розрахунку, в якому система розглядалась як єдине ціле. Це дозволило створювати міцніші, надійніші та довговічніші конструкції, що давало можливість одержати значний економічний ефект. Однак для реалізації цієї можливості потрібні потужні обчислювальні машини, у результаті чого виникла необхідність автоматизації розрахунків і найбільшого спрощення вихідних даних для машин. З цієї точки зору запропонований у даних вказівках метод переміщень є найбільш продуктивним, тому що він зводиться до стандартної процедури, при якій у процесі обчислення не потрібно знати фізичну суть задачі.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Як відомо, у статично невизначних системах рівнянь рівноваги недостатньо для визначення всіх зусиль у конструкції. Тому рівняння статички розв'язуються разом з іншими рівняннями, які передають умови деформації системи. Для спрощення розрахунків будується таким чином, що деякі фактори системи вибираються як основні невідомі, а всі інші величини в конструкції виражаються через них. У методі сил такими основними незалежними беруться внутрішні зусилля. У методі переміщень використано інший підхід. За основні невідомі приймаємо переміщення вузлів системи. Будемо розрізняти два типи розрахункових схем стержневих конструкцій: стержні, в яких враховується розтягання, та стержні, в яких не враховується розтягання.

Слід зазначити, що всі стержні мають кінцеву жорсткість на розтягання - стискання, і в загальному випадку при завантаженні змінюють свою довжину. У багатьох випадках внесок поздовжніх і поперечних деформацій у загальні величини переміщень вузлів рами дуже малий порівняно з величинами деформацій згину, і без суттєвої похибки можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил на деформації стержнів.

Розрахункова схема стержневої конструкції зі стержнями, які не розтягуються ($EA = \infty$), використовується нами при розрахунках згинних систем з частковим застосуванням комп'ютера. При повному використанні комп'ютера число невідомих не настільки суттєве, а такі фактори, як точність розв'язання і простота, є вирішальними. Тому розрахункова схема стержневої системи зі стержнями, які розтягуються, рекомендується для контролю наблизених розв'язків (у тому числі і систем з $EA = \infty$) та аналізу правильності прийнятих або інших допущень. А для багатоповерхових рам, рам з похилими стояками, арочних систем розрахункова схема з $EA \neq \infty$ є єдиним правильним рішенням.

1.1 Визначення ступеня кінематичної невизначеності (числа невідомих)

1.1.1 Розрахункова схема зі стержнями, які не розтягуються

Загальне число невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначається за формулою

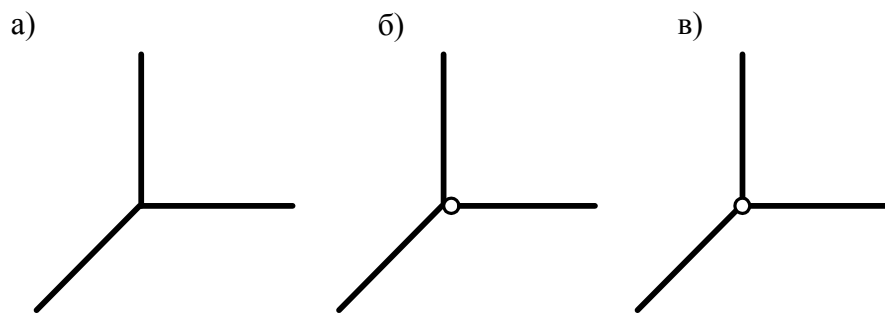
$$n = n_y + n_l, \quad (1.1)$$

де n_y - число невідомих кутів повороту вузлів системи;

n_l - число невідомих лінійних переміщень вузлів;

n_l - дорівнює числу жорстких вузлів (опорні вузли сюди не входять).

Жорстким вважається такий вузол, в якому кінці двох, що сходяться в ньому стержнів, жорстко з'єднані між собою (рисунок 1.1).



а, б – жорсткі вузли; в – шарнірний вузол

Рисунок 1.1 – Характерні види з'єднання стержнів у вузлі

Може виникнути запитання, чому число кутових переміщень дорівнює тільки числу жорстких вузлів. Це пов'язано з тим, що кути повороту шарнірних вузлів є залежними переміщеннями від кутів повороту жорстких вузлів (див. таблицю 1.1), а ми, як було зазначено вище, шукаємо незалежні переміщення.

При визначенні числа лінійних невідомих переміщень потрібно замінити схему заданої статично невизначної системи її шарнірною схемою введенням повних шарнірів в усі вузли та опорні закріплення. Переміщення всіх вузлів такої системи не є незалежними, оскільки зміщення одного з них може викликати зміщення інших вузлів. Число незалежних лінійних зміщень вузлів системи дорівнює числу стержнів, які потрібно ввести в шарнірну систему споруди, щоб перетворити її в геометрично незмінювану. Іншими словами, число незалежних лінійних зміщень вузлів дорівнює числу ступенів свободи шарнірної схеми заданої рами.

$$n_{л} = m - 3k, \quad (1.2)$$

де m – число всіх простих шарнірів системи (шарнір називається простим, якщо він з'єднує два стержні; шарнір, який з'єднує J стержнів, еквівалентний $J-1$ простому шарніру).

k – кількість замкнених контурів рами.

Визначимо число невідомих у рамі, зображеній на рис. 1.2.

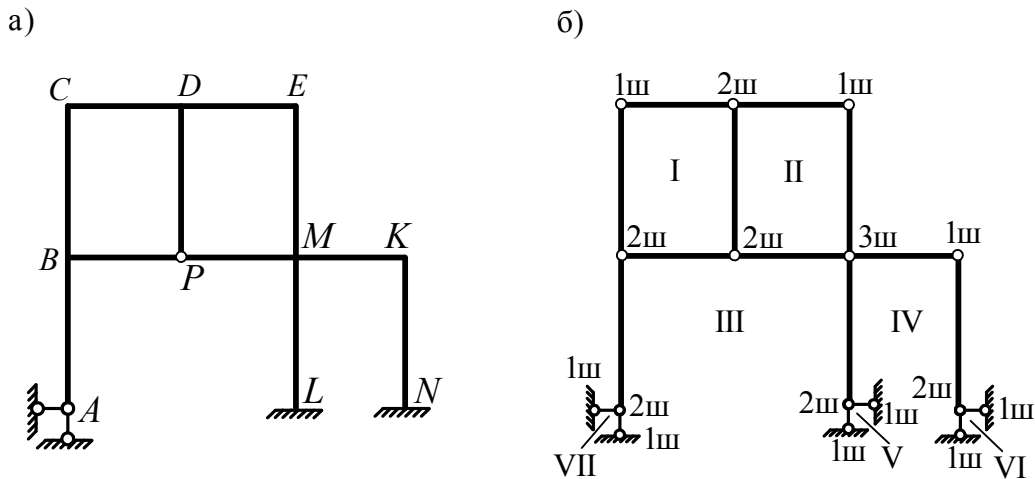


Рисунок 1.2 – Схема заданої рами (а) та її шарнірна схема (б)

Жорсткими вузлами є В, С, D, Е, М, К, тому

$$n_y = 6.$$

Число лінійних зміщень визначаємо за формулою (1.2):

$$n_l = 24 - 3 \cdot 7 = 3.$$

На рисунку 1.2, б римськими цифрами I, II, ... VI позначені замкнуті контури рами, а арабськими цифрами 1, 2, 3 – число простих шарнірів у заданому вузлі. Таким чином, загальне число невідомих дорівнює

$$n = 6 + 3 = 9,$$

з них 6 – кутових переміщень і 3 – лінійних.

Число незалежних лінійних переміщень вузлів можна визначити за змістом, не звертаючись до формули (1.2). Приймаючи $EA = \infty$, ми виключаємо лінійні переміщення внаслідок роботи стержнів на розтягання - стискання. Отже, для такої розрахункової схеми лінійні переміщення будуть визначатися тільки деформацією при згинанні стержнів. Аналіз роботи схеми розрахункової рами (рисунок 1.2, а) показує, що вузли С, D, Е переміщуються по горизонталі; вузли D і Р – по вертикалі, а вузли В, Р, М, К – також по горизонталі. Таким чином, число незалежних лінійних переміщень дорівнює 3, що відповідає знайденим за формулою (1.2) переміщенням.

1.1.2 Розрахункова схема рами з елементами, які розтягуються

Загальне число невідомих для цієї розрахункової схеми може бути визначене за формулою

$$n = 3 \cdot Y_{жс} + 2 \cdot Y_{ш} - C_0, \quad (1.3)$$

де $Y_{ш}$, $Y_{жс}$ – відповідно число шарнірних (з повними шарнірами) і жорстких вузлів споруди (до цих чисел входять і опорні вузли);

C_0 – число опорних стержнів.

Для рами, зображеної на рисунку 1.2, а, число невідомих дорівнює

$$n = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 2 - 8 = 20.$$

Як і раніше (див. пункт 1.1.1), число невідомих n можна визначити за смислом, послідовно закріплюючи всі вузли рами від лінійних та кутових їх зміщень. Так, вузли В, С, Д, Е, М, К мають по три зміщення (одне кутове і два лінійних), а вузол Р – два лінійних зміщення, тобто всього 20.

Порівняння результатів, одержаних у цьому та попередніх підпунктах, показують, що припущення про те, що стержні не можуть розтягуватися, знизило ступінь кінематичної невизначеності з 20 до 9. Це значно спрощує розрахунок. Далі будемо розглядати рами зі стержнями, які не розтягуються, а до розрахункових схем рам зі стержнями, які розтягуються, повернемося при розрахунку рам на комп'ютері.

1.2 Основна частина

При розрахунку статично невизначених систем методом переміщень основна система являє собою систему однопрогонових статично невизначених стержнів. Це досягається введенням у всі жорсткі вузли заданої системи затиснень і постановки додаткових стержнів, що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

Основна система заданої рами (рисунок 1.2, а) показана на рисунку 1.3. У задану систему введено 6 в'язей (вузли В, С, Д, Е,

М, К), які перешкоджають повороту вузлів, і три в'язі (вузли Р, Е, К), які перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

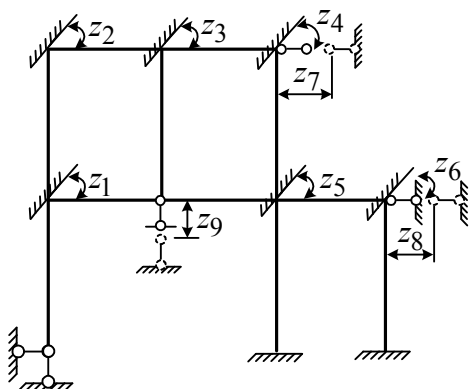


Рисунок 1.3 – Основна система методу переміщень

Слід зазначити, що введені затиснення відрізняються від звичайного абсолютного затиснення тим, що перешкоджають лише повороту вузла і не позбавляють його лінійної рухливості. Порівняємо основну систему методу переміщень з основною системою методу сил.

Показана на рисунку 1.3 основна система 18 разів статично невизначна. Якщо основна система методу сил одержується відкиданням в'язів (рисунок 1.4), то основна система методу переміщень – введенням в'язей (рисунок 1.3). Перехід від заданої системи до основної методу сил пов'язаний зі зниженням ступеня її статичної невизначності, а перехід до основної системи методу переміщень – з підвищенням ступеня статичної невизначності. За основні невідомі в методі переміщень приймаються кутові $Z_1 - Z_6$ та лінійні $Z_7 - Z_9$ переміщення вузлів (рисунок 1.3).

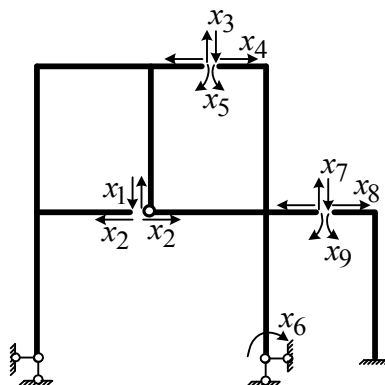


Рисунок 1.4 – Основна система методу сил

1.3 Канонічні рівняння методу переміщень при розрахунку на дію зовнішнього навантаження

Основна система (рисунок 1.3) відрізняється від заданої (рисунок 1.2) наявністю додаткових в'язей, які перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів. У введених затисненнях виникають реактивні моменти, а в доданих стержнях - реактивні зусилля. Реактивні моменти та реактивні зусилля можна обернути в нуль, якщо повернути затиснення на кути, що дорівнюють дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їх лінійні переміщення дорівнювали переміщенням, що виникають у заданій системі. Математичний запис цього факту виражається системою канонічних рівнянь

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1F} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

У матричній формі система рівнянь (1.4) має такий вигляд:

$$R\bar{Z} + \bar{R}_F = 0; \quad (1.5)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \text{ – матриця жорсткості або матриця реакцій};$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \text{ – вектор невідомих переміщень};$$

$$\bar{R}_F = \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \vdots \\ R_{nF} \end{bmatrix} \text{ – вектор вантажних реакцій}.$$

Кожний коефіцієнт r_{ik} ($i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,n$) системи рівнянь (1.4) являє собою реактивний момент (зусилля) у введеному затисненні (у додатковій в'язі) “ i ” від повороту (ліній зміщення) в’язі

" k " на одиницю. Таким чином, у позначенні реакції r_{ik} індекс i показує номер в'язі, в якій обчислюється реакція, а індекс k - номер в'язі, зміщення якої викликає цю реакцію (i - де виникає реакція, а k - від чого вона виникає). Вільні члени R_{iF} ($i = 1, 2, \dots, n$) системи рівнянь являють собою реакції (реактивні моменти, реактивні зусилля) в i -х в'язях, викликаних зовнішнім навантаженням.

1.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

1.4.1 Загальний спосіб

Розглянемо основну систему методу переміщень у двох одиничних станах i та k (рисунок 1.5).

Стан i характеризується переміщенням в'язі " i " на одиницю, у результаті чого у в'язі " k " виникає реактивний момент r_{ki} . У стані k повертається в'язь на кут, що дорівнює одиниці, і при цьому у в'язі " i " виникає реакція r_{ik} .

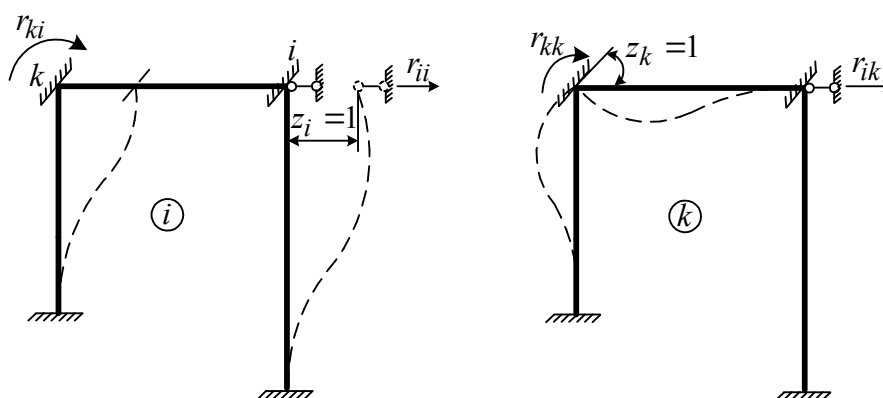


Рисунок 1.5 – Основна система методу переміщень у двох одиничних станах

Виразимо роботу зовнішніх сил (r_{kk}, r_{ik}) стану " k " на переміщеннях стану в'язі " i " через роботу внутрішніх сил стану " k " (M_k, N_k, Q_k) на переміщеннях, відповідних стану i $\left(\frac{M_i}{EJ}, \frac{N_i}{EA}, \frac{\mu Q_i}{GA} \right)$, і враховуючи, що на будь-яких можливих нескінченно малих пере-

міщеннях сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил дорівнює нулю [1], одержимо

$$A_{ki} = r_{ik} \cdot 1 = \sum \int \frac{M_k M_i}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_k N_i}{EA} ds + \sum \int \frac{Q_k Q_i}{GA} ds. \quad (1.6)$$

Звідки, беручи до уваги тільки роботу згинних елементів, знайдемо

$$r_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds. \quad (1.7)$$

Таким чином, щоб знайти коефіцієнт системи рівнянь (1.4), слід в основній системі побудувати одиничні епюри M_i та M_k і їх «перемножити» (тобто обчислення інтегралу з формули (1.7) провести за відомим правилом Верещагіна [1]).

На основі теореми про взаємність робіт [1] прирівнюємо роботу зовнішніх сил стану "k" на переміщеннях стану "i" до роботи зовнішніх сил стану "i" на переміщеннях стану "k".

$$\begin{aligned} A_{ki} &= A_{ik}, \\ r_{ik} &= r_{ki}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким чином, із формули (1.8) випливає, що коефіцієнти рівнянь (1.4) мають властивості симетрії, тобто матриця R системи (1.5) є симетричною відносно діагоналі. Для визначення вільних членів системи рівнянь (1.4), тобто реакцій, що виникають від зовнішнього навантаження, розглянемо два інших стани основної системи: вантажне, яке характеризується діями зовнішнього навантаження, та одиничне, яке характеризується переміщенням в'язі "i" (рисунок 1.6).

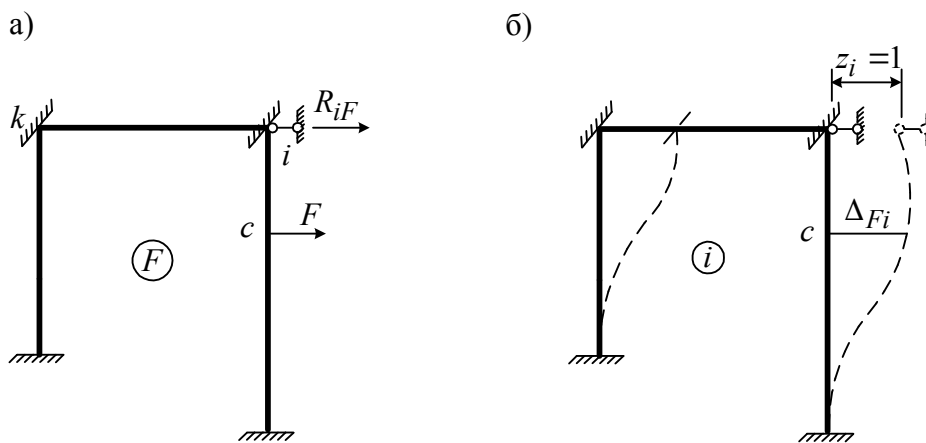


Рисунок 1.6 – Основна система методу переміщень у двох станах: вантажному (а) та одиничному (б)

Робота зовнішніх сил стану F на переміщеннях стану i дорівнює

$$A_{Fi} = F\Delta_{Fi} + R_{iF} \cdot 1. \quad (1.9)$$

На основі теореми про взаємність робіт $A_{Fi} = A_{iF}$, але $A_{iF} = 0$ (див. рисунок 1.6). Тому з рівняння (1.9) одержуємо

$$R_{iF} = F\Delta_{Fi}. \quad (1.10)$$

Тут Δ_{Fi} – переміщення точки С (точка прикладання сили F) в статично невизначній системі, яке викликане одиничним переміщенням в'язі “ i ”. Для визначення цього переміщення слід зробити наступне. У статично визначній системі прикласти в точці С за напрямком сили $F = 1$ і побудувати від неї епюру M^* (рисунок 1.7). Кожну ординату побудованої епюри M^* перемножити на величину сили F , тобто одержати епюру M_F (вантажна епюра в основній системі методу сил). Іншими словами, M_F – епюра, побудована від зовнішнього навантаження в будь-якій статично визначній системі, яка може бути одержана з заданої або основної системи методу переміщень усуненням зайвих в'язів, реакція якої визначається. Тепер переміщення, яке визначається при обліку роботи тільки згинальних моментів, дорівнює

$$\Delta_{Fi} = \sum \int M_F^* \frac{M_i}{EJ} ds, \quad (1.11)$$

а невідомі реакції з формули (1.10)

$$R_{iF} = \sum \int \frac{M_F^* M_i}{EJ} ds. \quad (1.12)$$

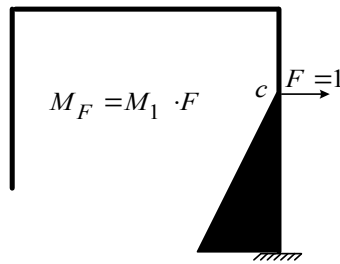


Рисунок 1.7 – Вантажна епюра в основній системі методу сил

Із виразу (1.12) випливає: для одержання реакцій в i -й в'язі від заданого навантаження треба «перемножити» епюру згинальних моментів в статично визначній системі від зовнішнього навантаження на епюру згинальних моментів M_i від одиничного зміщення i -ї в'язі в основній системі методу переміщень і знак результату змінити на протилежний. Нагадаємо, що рівність (1.12) була вперше одержана А.А. Гвоздєвим.

Повернемося ще раз до рівняння (1.10). Приймаємо $F=1$ і в зв'язку з цим замінимо Δ_{Fi} на δ_{Fi} , а $R_{iF}=r_{iF}$. У результаті одержимо

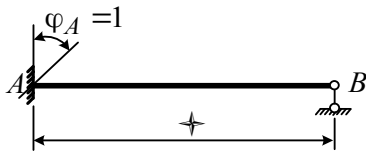

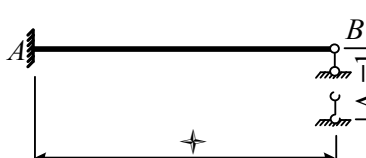
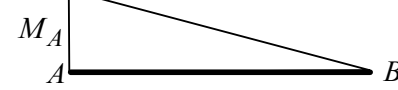
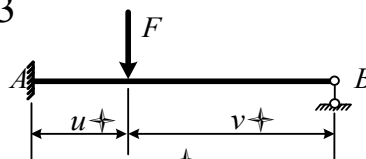
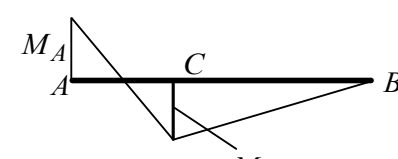
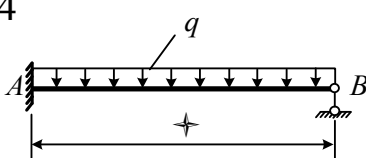

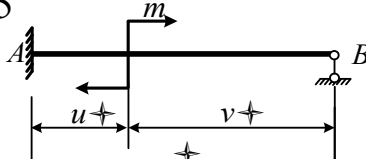
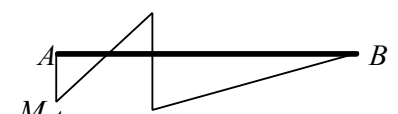
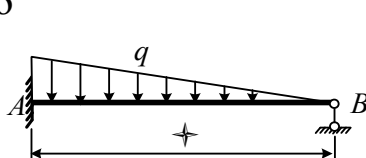

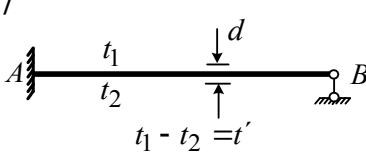

$$r_{iF} = \delta_{Fi}. \quad (1.13)$$

Рівність (1.13) по суті виражає взаємність реакцій і переміщень. Вона була встановлена Релеєм. Таким чином, епюру переміщень δ_{Fi} , яка викликана переміщенням в'язі $Z_i=1$, можна розглядати як лінію впливу реакції в цій в'язі (з протилежним знаком).

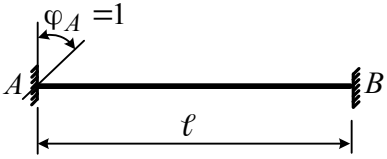
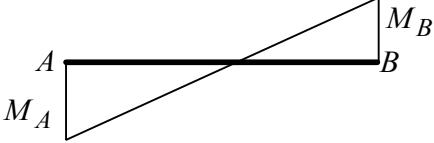
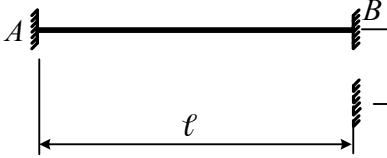
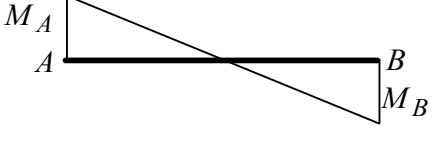
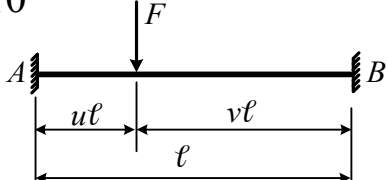
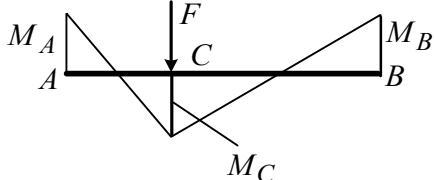
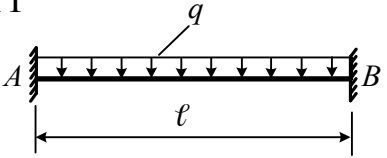
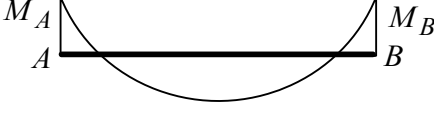
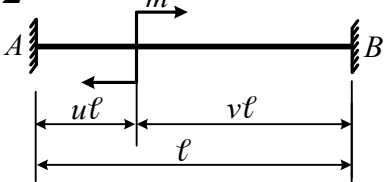
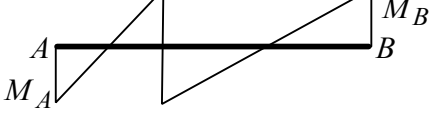
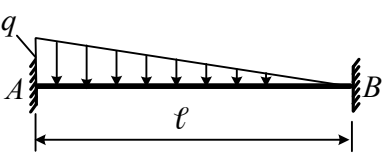
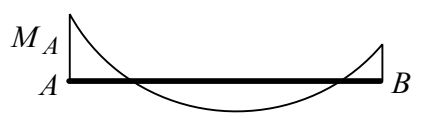
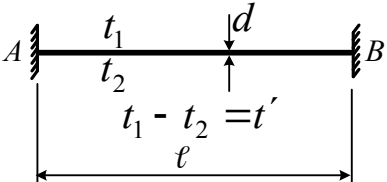
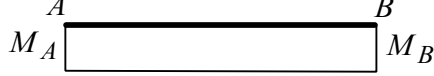
1.4.2 Статичний спосіб

Основна система методу переміщень, як було показано вище (див. рисунок 1.3), складена з однопрогонових статично невизначних стержнів. Задача визначення внутрішніх сил у таких стержнях може бути розв'язана будь-яким із відомих методів, наприклад методом сил. Результати таких розрахунків зведені в таблицю стандартних рішень (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 – Таблиця стандартних рішень

Схема стержня та вплив на нього	Епюра моментів	Формула
1	2	3
<p>1</p> 		$M_A = \frac{3EJ}{l}$
<p>2</p> 		$M_A = \frac{3EJ}{l} \frac{\delta}{l}$
<p>3</p> 		$M_A = -\frac{Fv}{2}(1-v^2),$ $M_C = \frac{F}{2}u^2v(3-u)$
<p>4</p> 		$M_A = \frac{ql^2}{8}$
<p>5</p> 		$M_A = \frac{m}{2}(3v^2 - 1)$
<p>6</p> 		$M_A = \frac{ql^2}{15}$
<p>7</p> 		$M_A = \frac{3EJ\alpha t'}{2d}$

Продовження таблиці 1.1

1	2	3
<p>8</p> 		$M_A = \frac{4EJ}{\ell},$ $M_B = \frac{2EJ}{\ell}$
<p>9</p> 		$M_A = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}$
<p>10</p> 		$M_A = u v^2 F \ell,$ $M_B = u^2 v F \ell,$ $M_C = 2u^2 v^2 F \ell$
<p>11</p> 		$M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12}$
<p>12</p> 		$M_A = m v (3u - 1),$ $M_B = m v (3v - 1)$
<p>13</p> 		$M_A = \frac{q\ell^2}{20},$ $M_B = \frac{q\ell^2}{30}$
<p>14</p> 		$M_A = M_B = \frac{EJ \alpha t'}{d}$

У цій таблиці наведено чисельні рішення з урахуванням згинальних деформацій стержня для характерних випадків закріпле-

ння зміщень опор, зовнішнього навантаження та впливу температури.

Перед тим як перейти до визначення реактивних моментів і реактивних зусиль, відмітимо таке. Усі коефіцієнти, а також вільні члени рівнянь (1.4), (1.5) поділені на дві групи: коефіцієнти, які представляють реактивні моменти у введених затисненнях; коефіцієнти, які представляють реактивні зусилля у введених стержнях. Коефіцієнти і вільні члени, які представляють реактивні моменти в затисненнях, визначаються вирізанням вузлів і складанням рівнянь $\sum M_y = 0$. Коефіцієнти та вільні члени, які у введених стержнях, можна визначити за допомогою перерізу, що відокремлює частину або всю раму від опор, і складанням рівнянь рівноваги сил, що діють на частину, яка відсікається:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0.$$

Розглянемо приклад визначення реактивних зусиль. Реактивне зусилля будемо вважати додатним, якщо напрямок його дії співпадає з прийнятим напрямком повороту або лінійного зміщення вузла.

Нехай задана рама, зображена на рисунку 1.8, а. Її основна система зображена на рисунку 1.8, б.

Покажемо, як визначаються коефіцієнти r_{11} , r_{21} , r_{31} , r_{41} та вільні члени R_{1F} , R_{2F} , R_{3F} , R_{4F} . Побудуємо епюри M_1 та M_F (рисунок 1.9). Епюра M_1 побудована від повороту на одиницю затиснення у вузлі «1» за напрямком стрілки годинника. Ординати епюри в кожному стержні одержані за допомогою таблиці стандартних рішень (таблиця 1.1, схеми 1 і 8). Для побудови епюри M_F використано схеми 11 і 3 тієї самої таблиці. Реактивні моменти направляємо за напрямком стрілки годинника (у бік повороту вузлів). Вирізаємо відповідні вузли і з рівнянь одержуємо значення реактивних моментів (рисунок 1.10).

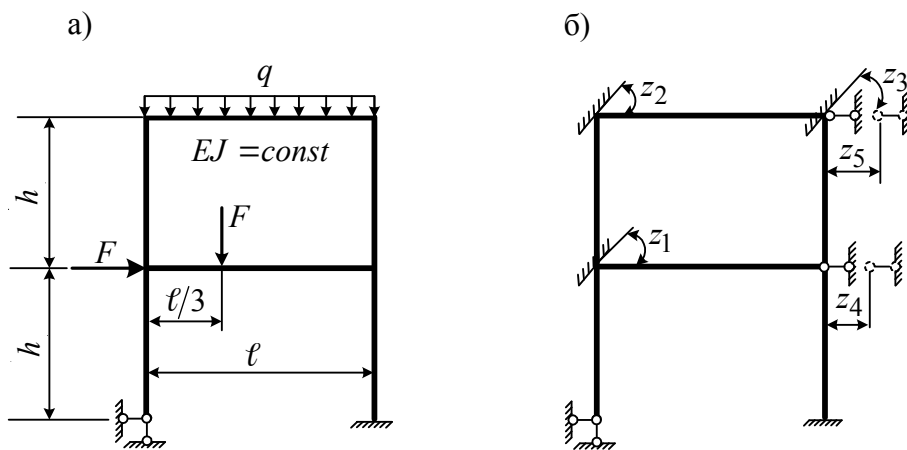


Рисунок 1.8 – Задана рама та її основна система

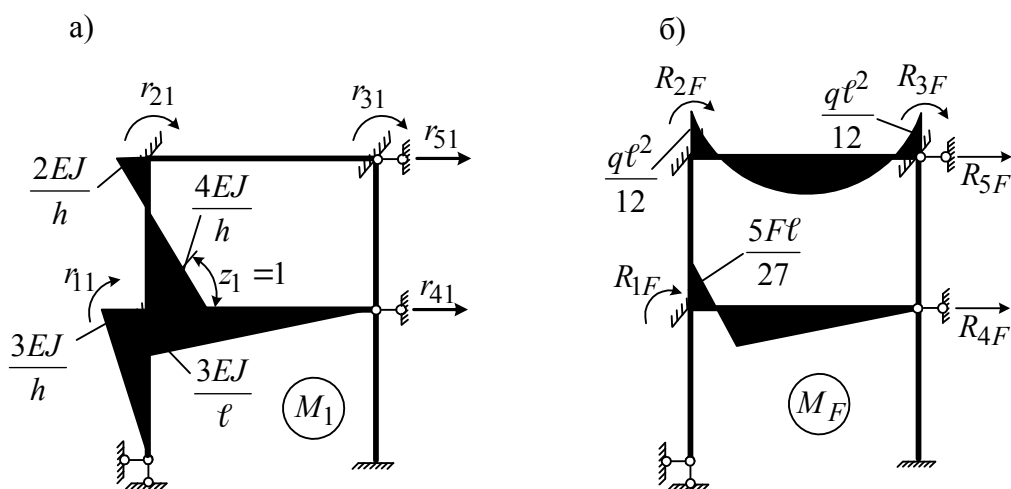


Рисунок 1.9 – Епюри M_1 та M_F

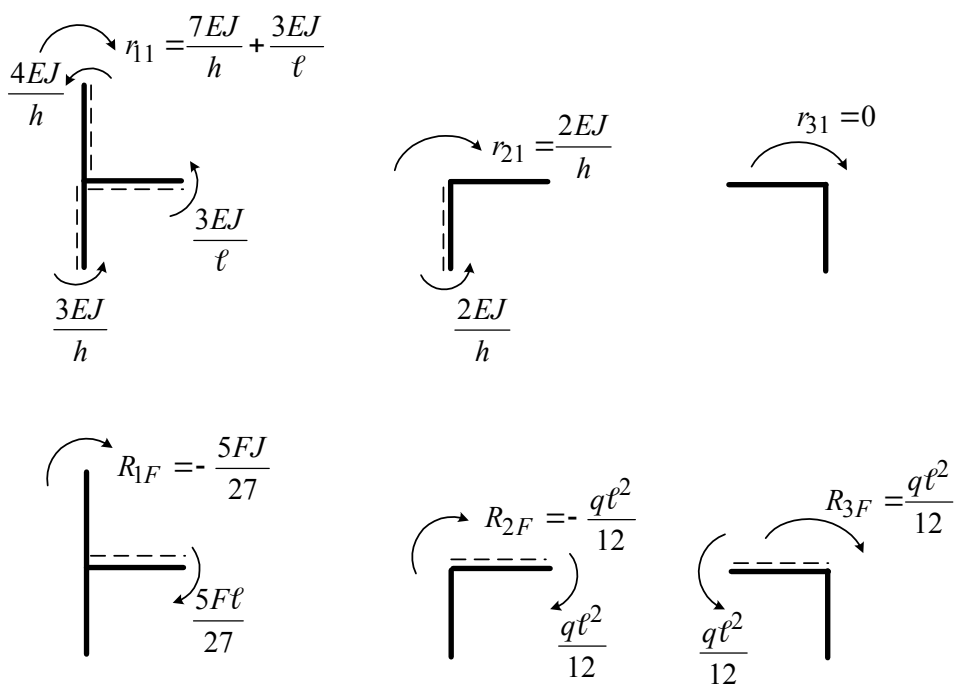


Рисунок 1.10 – До визначення реактивних моментів

Визначимо тепер реактивні зусилля (рисунок 1.11).

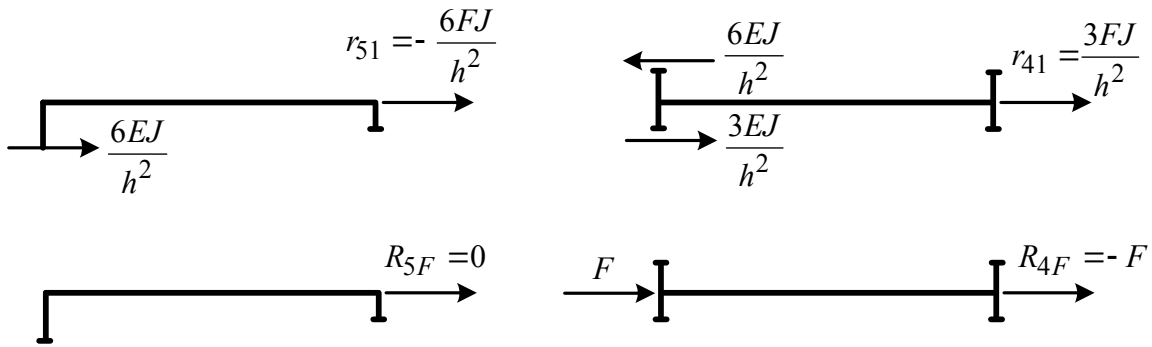


Рисунок 1.11 – До визначення реактивних зусиль

1.4.3 Перевірка правильності визначення реактивних зусиль і моментів

Для перевірки правильності знайдених реактивних зусиль з різними індексами використаємо рівняння (1.8). Наприклад, перевіримо правильність обчислення реактивних зусиль r_{41} (див. рисунок 1.11). Із рівняння(1.8) випливає $r_{41} = r_{14}$.

Побудуємо епюру M_4 (рисунок 1.12) і виріжемо вузол 1.

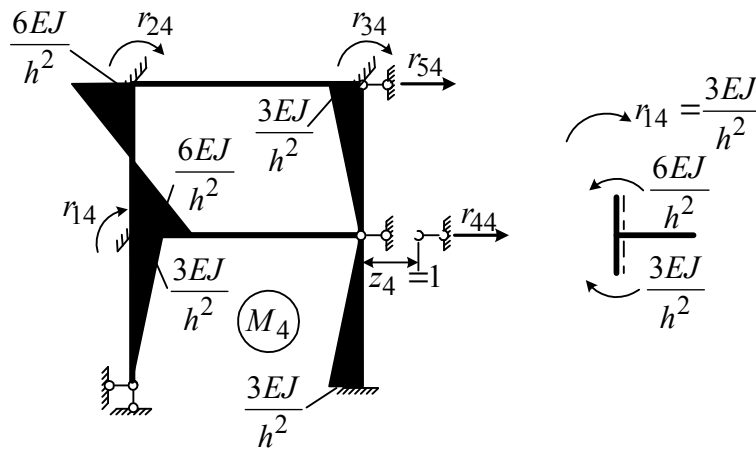


Рисунок 1.12 – Епюра M_4

Як видно, рівність $r_{14} = r_{41}$ витримується, отже, реактивний момент r_{14} визначено правильно.

Для перевірки правильності реактивних зусиль з однаковими індексами ($i = k$) і реактивних зусиль, викликаних зовнішнім навантаженням, використаємо залежності (1.7) та (1.12).

Визначимо r_{11} .

$$r_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \frac{3EJ}{\ell} \ell \frac{2}{3} \frac{3EJ}{\ell} + \frac{1}{2} \frac{3EJ}{h} \cdot h \frac{2}{3} \frac{3EJ}{h} + \frac{1}{2} \frac{4EJ}{h} \cdot h \left(\frac{2}{3} \frac{4EJ}{h} - \frac{1}{3} \frac{2EJ}{h} \right) + \frac{1}{2} \frac{2EJ}{h} \cdot h \left(\frac{2}{3} \frac{2EJ}{h} - \frac{1}{3} \frac{4EJ}{h} \right) \right]$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{\ell} + \frac{7EJ}{h}.$$

Цей результат відповідає значенню, знайденому статичним способом.

Визначимо реактивне зусилля R_{4F} . Побудуємо епюру M_F^* в основній системі методу сил (див. рисунок 1.13).

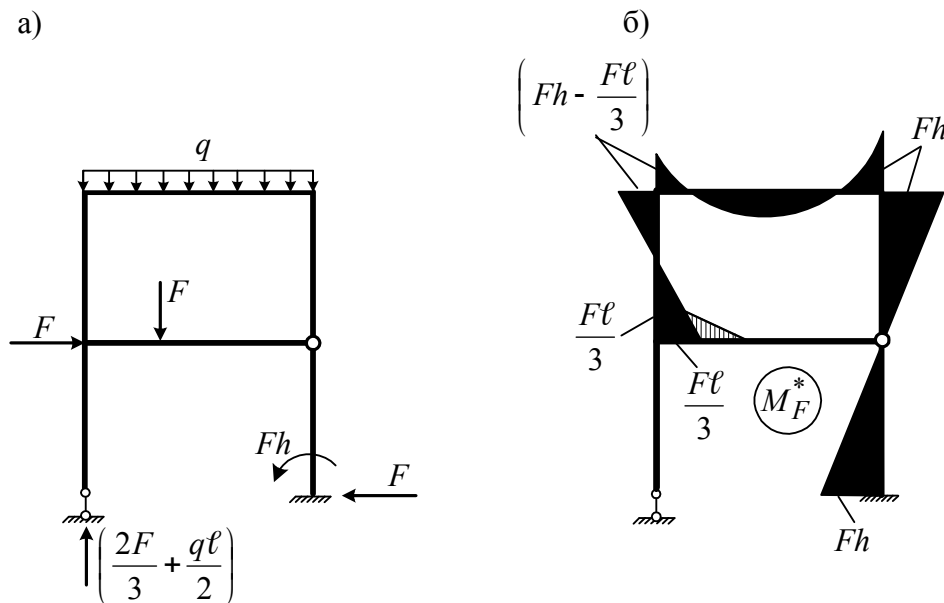


Рисунок 1.13 – Еквівалентна система методу сил (а) та епюра моментів M_F^* (б)

$$R_{4F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \frac{6EJ}{h^2} \cdot h \left(\frac{2}{3} \frac{F\ell}{3} - \frac{1}{3} \left\langle Fh - \frac{F\ell}{3} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \frac{6EJ}{h^2} \cdot h \left(\frac{2}{3} \left\langle Fh - \frac{F\ell}{3} \right\rangle - \frac{1}{3} \frac{F\ell}{3} \right) \right] = F.$$

Знак цього результату відповідно до формули(1.12) слід змінити на протилежний. Тоді одержимо $R_{4F} = -F$, що також відповідає зусиллю, знайденому статичним способом. Після того як знайдено та перевірено коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь (1.4), здійснюється їх розв'язання.

1.4.4 Розв'язання системи лінійних рівнянь у матричній формі

Розв'язком системи рівнянь (1.4) називається сукупність таких чисел $Z_1 \dots Z_n$, які перетворюють всі рівняння системи в тотожність. Система рівнянь (1.4) має єдиний розв'язок, якщо матриця R невироджена, тобто $\det R \neq 0$. У цьому випадку матриця R має зворотну матрицю і розв'язок системи записується так:

$$Z = R^{-1} \cdot R_F. \quad (1.14)$$

Щоб знайти зворотну матрицю R^{-1} , треба побудувати допоміжну матрицю C , складену з алгебраїчних доповнень елементів r_{ij} матриці R , транспонувати її та перемножити на число $\frac{1}{\det R}$, тобто

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} C^T. \quad (1.15)$$

Кожний елемент допоміжної матриці C_{ij} визначається за формулою

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.16)$$

Мінором M_{ij} називається визначник $n - 1$ порядку, одержаний із визначника $/R/$ викреслюванням i -го рядка та j -го стовпчика.

Для систем порядку $n = 3$ матриця R має вигляд

$$R = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}.$$

Допоміжна матриця

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Знайдемо елементи допоміжної матриці. Для визначення c_{11} в матриці R викреслюємо перший рядок і перший стовпчик. Тоді відповідно до формули (1.16)

$$c_{11} = r_{22}r_{33} - r_{32}^2. \quad (1.17)$$

Аналогічно знаходяться інші елементи матриці:

$$c_{12} = c_{21} = -(r_{21}r_{33} - r_{31}r_{23}),$$

$$\begin{aligned}
c_{13} = c_{32} &= r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22}, \\
c_{22} &= r_{11}r_{33} - r_{31}^2, \\
r_{23} = r_{32} &= -(r_{11}r_{32} - r_{31}r_{12}), \\
c_{33} &= r_{11}r_{22} - r_{12}^2.
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

Транспонована матриця

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = C.$$

Тепер

$$\begin{aligned}
Z_1 &= -\frac{1}{\det R} (C_{11}R_{1F} + C_{12}R_{2F} + C_{13}R_{3F}), \\
Z_2 &= -\frac{1}{\det R} (C_{21}R_{1F} + C_{22}R_{2F} + C_{23}R_{3F}), \\
Z_3 &= -\frac{1}{\det R} (C_{31}R_{1F} + C_{32}R_{2F} + C_{33}R_{3F}).
\end{aligned}
\tag{1.19}$$

Для систем більш високого порядку розв'язок може бути одержаний аналогічно.

1.5 Побудова епюр M , Q , N в заданій системі

Після того як систему канонічних рівнянь (1.4), (1.5) методом переміщень розв'язано та знайдено значення невідомих кутів повороту і лінійних переміщень вузлів, можна перейти до побудови кінцевих епюр у заданій системі. Кінцева епюра моментів отримується додаванням ординат епюри M_F , побудованої в основній системі, до ординат одиничних епюр, перемножених на значення невідомих:

$$M = M_1Z_1 + M_2Z_2 + \dots + M_nZ_n + M_F.
\tag{1.20}$$

Правильність побудови кінцевої епюри M може бути перевірена за допомогою заходів, які застосовувались в методі сил:

$$\sum \int \frac{M M_s^*}{EJ} ds = 0,
\tag{1.21}$$

де M – кінцева епюра з формули (1.20);

M_s^* – сумарна одинична епюра, яка побудована в основній системі методу сил.

Велике значення має статична перевірка рівноваги моментів у вузлах, оскільки у всіх сумарних епюрах вузли не врівноважені (див., наприклад, рисунок 1.12). Невиконання умови рівноваги вузлів ($\sum M = 0$) в кінцевій епюрі буде показувати, що невідомі визначені неправильно.

Епюру поперечних сил Q можна побудувати за епюрою M :

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}, \quad (1.22)$$

де M_n та M_{n-1} - відповідно правий і лівий опорні моменти елемента рами, який розглядається;

ℓ_n - прогін розглядуваног елемента;

Q^0 - поперечна сила в лівому перерізі елемента, як балки на двох опорах.

За епюрою поперечних сил Q способом вирізання вузлів можна побудувати епюру поздовжніх сил N . Перевірка епюр Q та N виконується звичайним способом. При цьому велике значення має статична перевірка рівноваги окремих частин рами.

1.6 Розрахунок на вплив температури

Зміна температурного режиму в статично невизначних системах призводить до появи в них внутрішніх зусиль і напружень.

Система канонічних рівнянь при впливах температури відрізняється від системи (1.5) вектором-стовпцем вільних членів і має такий вигляд:

$$R \cdot \bar{Z} + \bar{R}_1 = 0. \quad (1.23)$$

Тут елементи вектора-стовпця \bar{R}_1 являють собою реакції введених в'язей в основній системі від симетричних і кососиметричних впливів температури:

$$\bar{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{1t} & + & R_{1t} \\ R_{2t} & + & R_{2t}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{nt} & + & R_{nt}^1 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Визначимо реакції для рами, що зображена на рисунку 1.14.

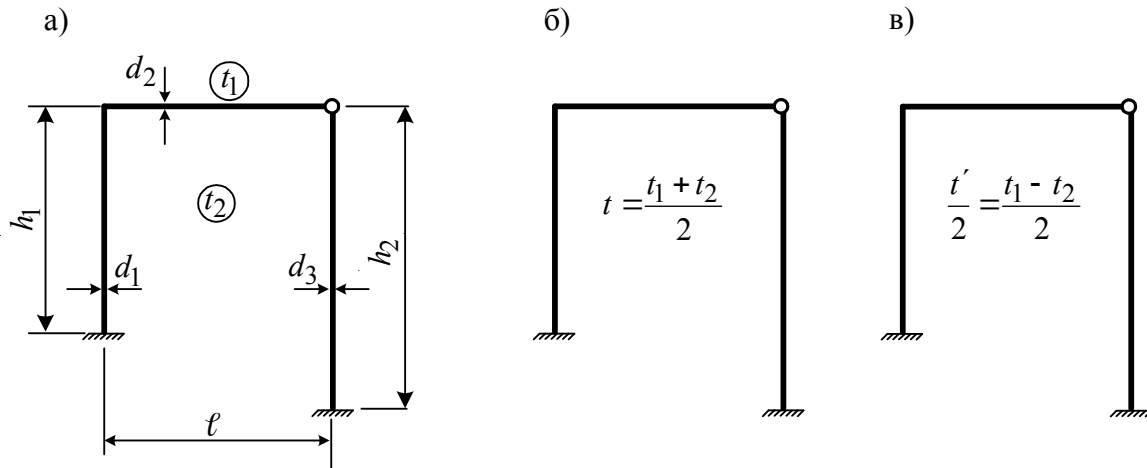


Рисунок 1.14 – Схема рами (а), симетричні (б) та косиметричні (в) впливи температури

Спочатку знайдемо подовження (будемо враховувати $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ та $t_1 > t_2$) всіх стержнів рами в основній системі від впливу температури t (рисунок 1.15). Після цього, користуючись таблицею стандартних рішень (таблиця 1.1), побудуємо епюри M_t та знайдемо R_{1t} та R_{2t} (див. рисунок 1.15).

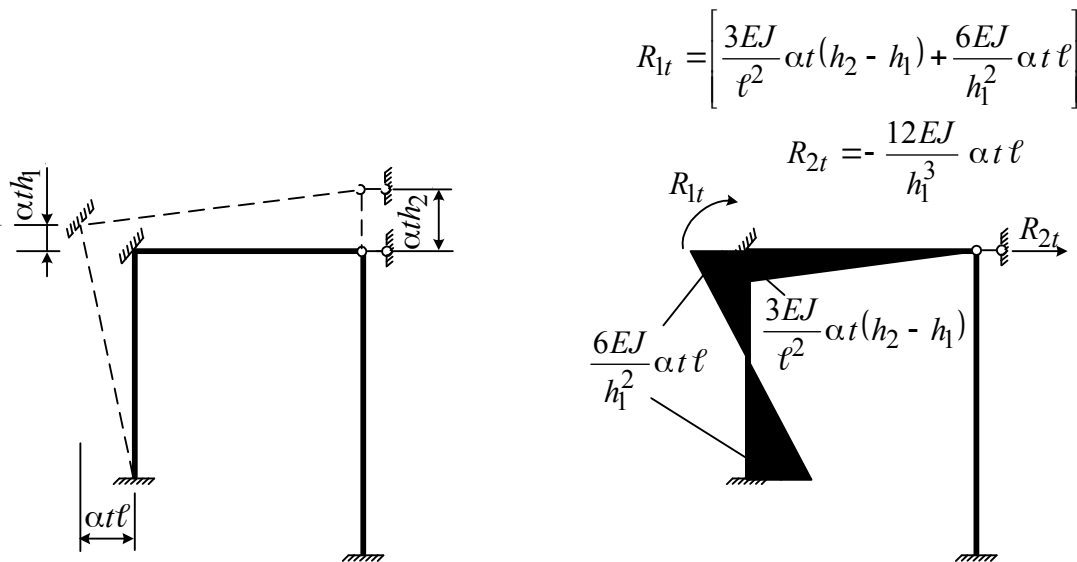


Рисунок 1.15 – Схема переміщень вузлів рами від впливу температури t та епюри M_t

Для визначення реакцій від кососиметричного впливу температури за допомогою таблиці 1.1 (схеми 7 та 14) побудуємо епюру M'_t (рисунок 1.16).

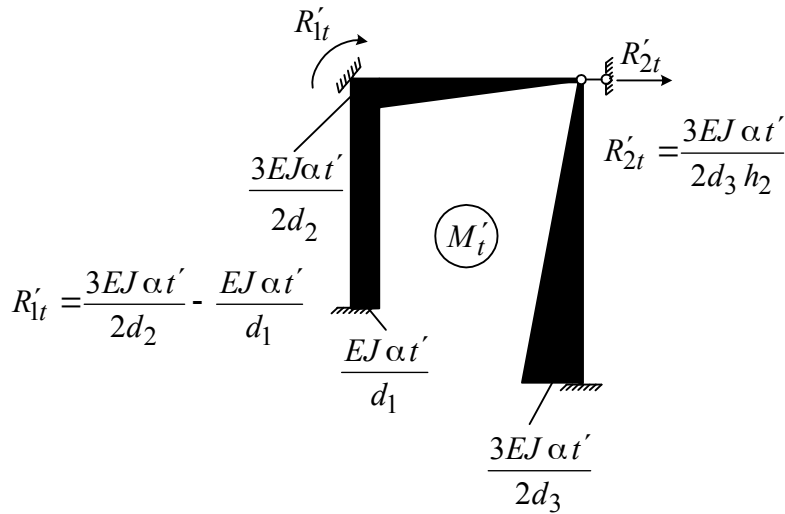


Рисунок 1.16 – Епюра M'_t

Далі, як було показано в п. 1.4.2, визначимо реакції R'_{1t} та R'_{2t} (див. рисунок 1.16). Кінцеву епюру моментів у заданій системі можна побудувати за формулою

$$M = M_1 Z_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n Z_n + M_t + M'_t. \quad (1.25)$$

Правильність побудови кінцевої епюри M від впливу температури підтверджується таким правилом: повинна виконуватися рівність нулю переміщень по напрямку відкинутих в'язей у якій-небудь основній системі методу сил:

$$\sum \int \frac{M \cdot M_s^*}{EJ} ds + \sum \int N_s^* \alpha t ds + \sum \int \frac{\alpha t'}{d} M_s^* ds = 0, \quad (1.26)$$

де M_s^* , N_s^* – згинальний момент і поздовжня сила (епюри) в основній системі методу сил; усі вузли кінцевих епюр моментів повинні бути урівноваженими.

Епюра поперечних сил будується за епюрою моментів:

$$Q = \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}, \quad (1.27)$$

а епюра поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів.

1.7 Розрахунок на зміщення опорних в'язей

Зміщення опорних або інших в'язей у статично невизначних системах викликає відмінні від нуля зусилля і призводить до появи напружень. Система канонічних рівнянь у випадку зміщення опорних або інших в'язей рами має вигляд

$$R \cdot Z + R_{\Delta} = 0, \quad (1.28)$$

де R_{Δ} – вектор реакцій у введених в'язях в основній системі від заданого зміщення.

Як і раніше, покажемо на прикладі, як знайти ці реакції. Розглянемо раму, у якій одна з опор переміщується (рисунок 1.17).

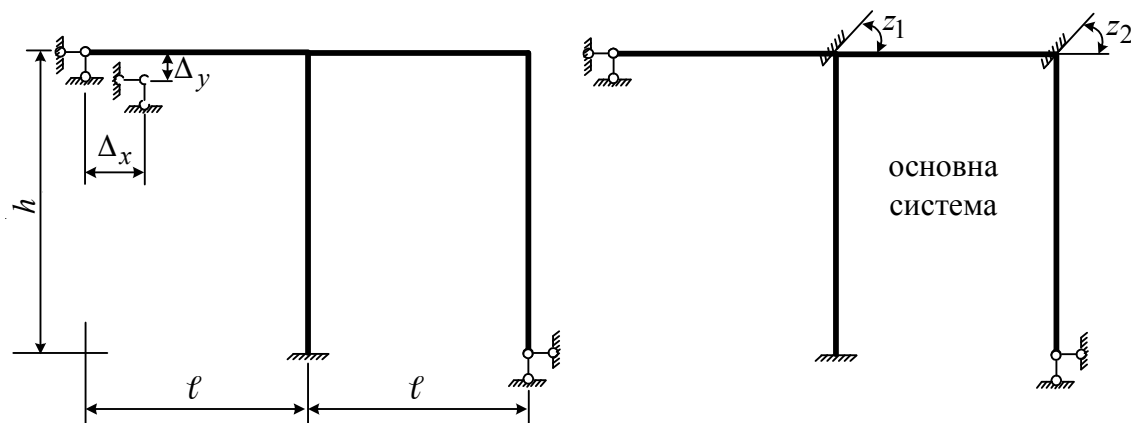


Рисунок 1.17 – До розрахунку рам на зміщення опорних в'язей

Визначимо реактивні моменти у введених затисненнях 1 і 2 від заданого зміщення. За допомогою таблиці стандартних рішень (таблиця 1.1) побудуємо епюру M_{Δ} (рисунок 1.18).

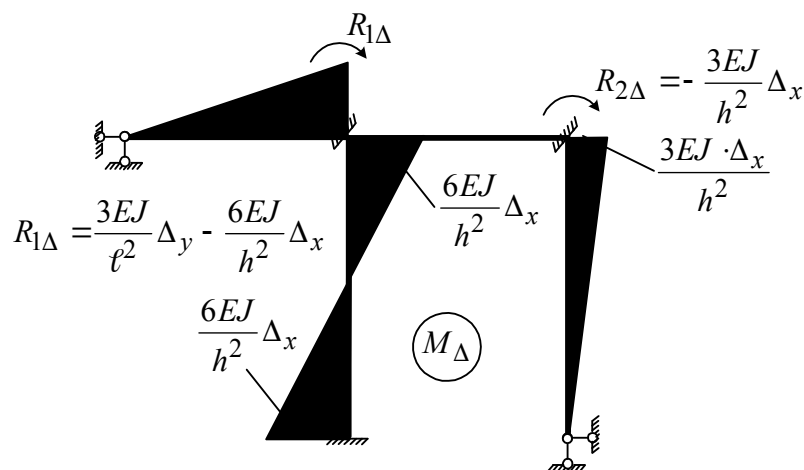


Рисунок 1.18 – Епюра M_{Δ}

Реактивні моменти визначимо статичним способом (див. п. 1.4.2). Значення цих моментів показані на рисунку 1.18.

Після обчислення елементів матриці R (див. п. 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3) і \bar{R}_Δ виконуємо розв'язання системи рівнянь (1.28), тобто знаходимо Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Епюру моментів у заданій статично невизначній системі можна побудувати за формулою

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_\Delta. \quad (1.29)$$

Якщо епюра моментів побудована правильно, то повинні виконуватися такі умови:

а) відповідність нулю переміщень в основній системі методу сил по напрямку реакцій відкинутих в'язей

$$\sum \int \frac{M_s^* M}{EJ} ds - \sum RC = 0, \quad (1.30)$$

де M_s^* – сумарна одинична епюра моментів, яка побудована в основній системі методу сил (основна система методу сил одержується з заданої відкиданням зайвих в'язей з обов'язковим збереженням тих в'язей, які за умовою задачі переміщуються);

R – реакції в тих в'язях, які переміщуються і викликані одиничними значеннями невідомих;

б) рівновага вузлів епюри моментів.

Епюру поперечних сил можна побудувати за формулою (1.27), а епюру поздовжніх сил – за епюрою поперечних сил способом вирізання вузлів.

2 ЗАВДАННЯ: РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

2.1 Розрахунок на дію зовнішнього навантаження

Для заданої статично невизначної рами (рисунок 2.1, таблиця 2.1) треба:

- 1) визначити число невідомих;
- 2) побудувати основну систему;

3) в основній системі побудувати епюру згинальних моментів від одиничних значень невідомих та епюру моментів від зовнішнього навантаження;

4) визначити реакції у введених в'язях. Скласти систему канонічних рівнянь у матричній формі;

5) розв'язати систему канонічних рівнянь;

6) побудувати епюри згинальних моментів у заданій рамі та перевірити їх правильність;

7) побудувати епюру поперечних і поздовжніх сил у заданій рамі та перевірити їх правильність;

8) підготувати вихідну інформацію для розрахунку рами на комп'ютері. Виконати розв'язання. Порівняти результати з п. 1.6, 1.7.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для розрахунку рами на силове навантаження

Ва- рі- ант	ℓ_1 , м	ℓ_2 , м	h_1 , м	h_2 , м	F , кН	S , кН	q , кН/м
1	16	8	6	4	100	20	30
2	10	6	6	5	120	10	20
3	8	10	5	6	140	25	10
4	12	6	8	5	100	20	15
5	10	8	6	4	120	10	15
6	6	10	5	4	100	25	30

7	8	6	4	5	80	15	20
8	5	10	5	4	100	25	10
9	8	5	4	5	120	15	20
10	12	10	6	6	80	20	15
11	5	6	4	5	120	20	25
12	8	10	6	4	100	10	15
13	6	12	6	4	80	25	10
14	5	8	4	5	120	25	30
15	6	5	5	4	100	15	20
16	8	12	6	5	60	20	10
17	10	12	6	4	80	10	20
18	12	8	6	5	60	10	15

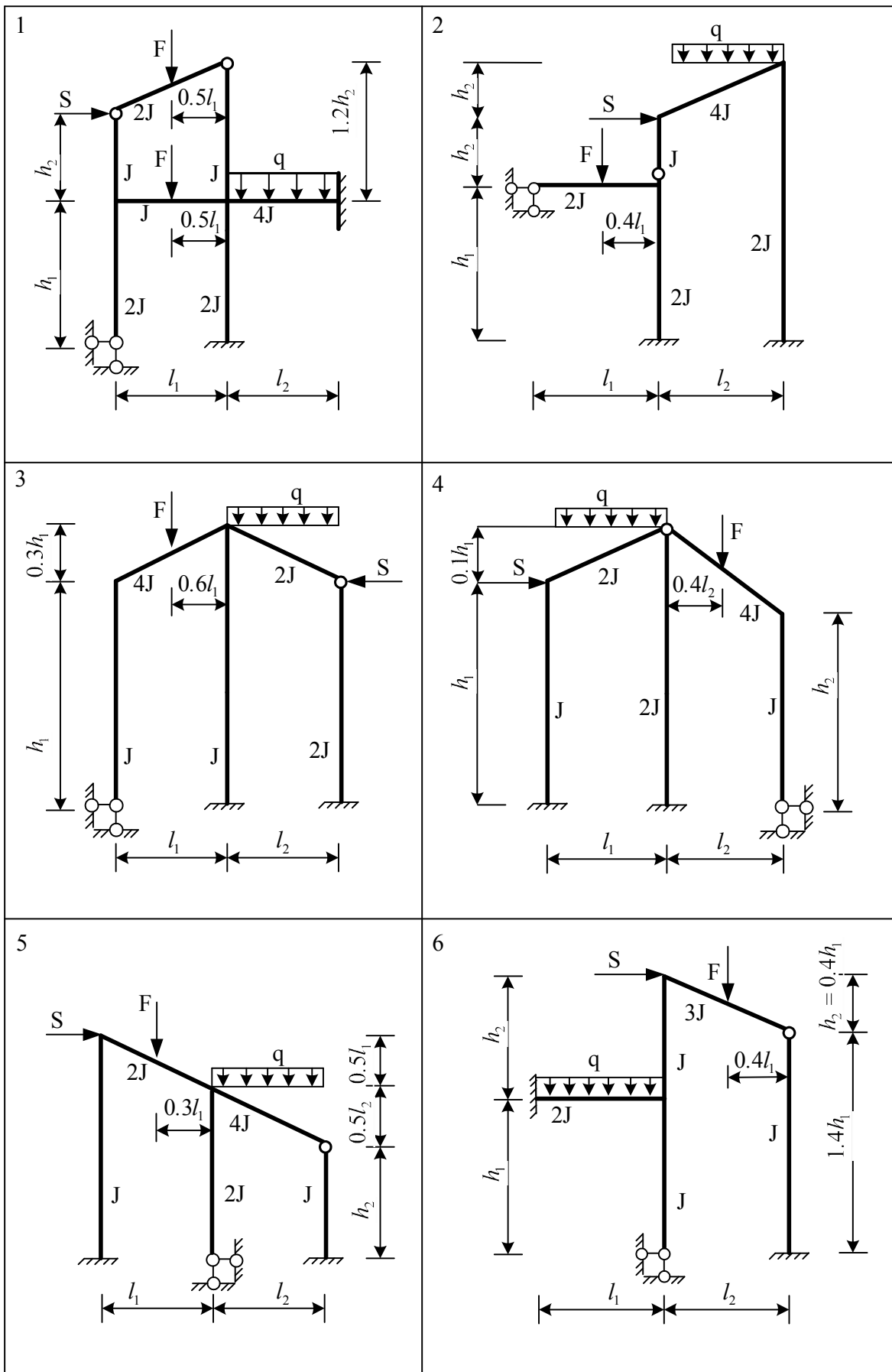


Рисунок 2.1 – Розрахункові схеми рам (аркуш 1)

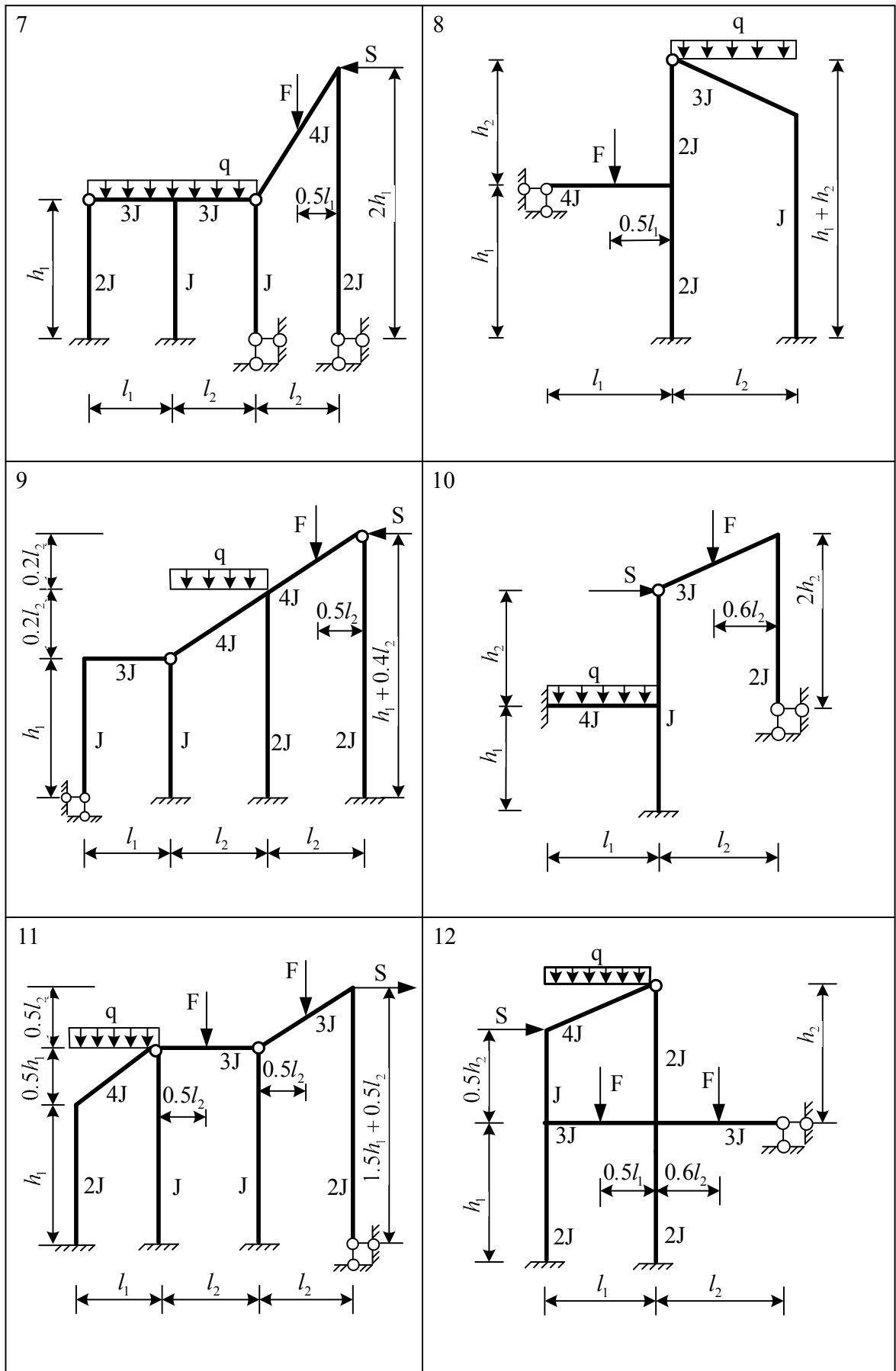


Рисунок 2.1, аркуш 2

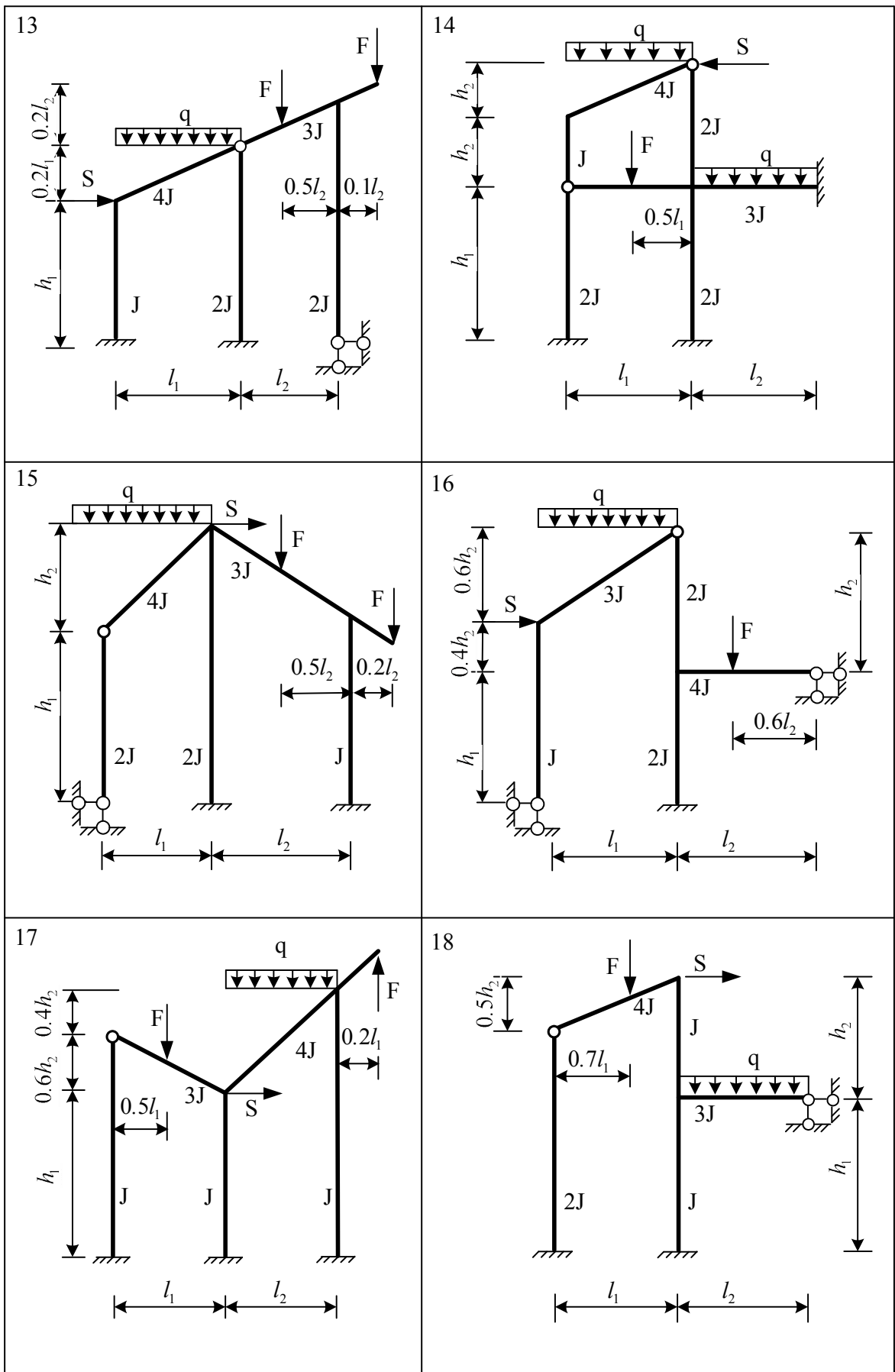


Рисунок 2.1, аркуш 3

2.2 Розрахунок на вплив температури

Для заданої статично невизначної рами (рисунок 2.2, таблиця 2.2) треба:

- 1) визначити число невідомих;
- 2) побудувати основну систему;
- 3) заданий вплив температури розкласти на симетричний і кососиметричний;
- 4) в основній системі побудувати епюри моментів від одиничних значень основних невідомих; від симетричного і кососиметричного впливу температури;
- 5) визначити реакції у введених в'язях. Скласти систему канонічних рівнянь у матричній формі та розв'язати її;
- 6) побудувати епюру моментів у заданій статично невизначній рамі та перевірити її правильність;
- 7) побудувати епюру поперечних і поздовжніх сил у заданій рамі і перевірити їх правильність.

Таблиця 2.2 – Вихідні дані для розрахунку рами на вплив температури

Варіант	ℓ_1 , м	h_1 , м	ℓ_2 , м	h_2 , м	d , м	T_1 , град	t_2 , град	t_3 , град
1	22	3	3	2	0,1	-20	10	-30
2	4	4	4	4	0,2	-15	20	40
3	6	5	4	3	0,25	-10	-40	30
4	5	5	4	3	0,25	-5	-30	15
5	8	6	6	5	0,40	-30	15	20
6	2	2	3	4	0,1	-40	20	-20
7	1	2	2	3	0,25	-35	30	-15
8	3	4	6	5	0,2	-10	20	30
9	9	8	5	6	0,45	10	-25	40
10	4	3	3	2	0,15	25	-15	-20
11	10	5	4	2	0,5	40	10	15
12	4	4	2	2	0,25	35	-10	-20
13	6	6	6	3	0,30	15	20	-40
14	8	8	5	4	0,40	20	-30	-25
15	7	7	5	4	0,30	30	40	-10
16	4	4	8	6	0,50	-35	-25	15
17	5	5	4	6	0,25	-40	15	-20
18	6	5	3	4	0,20	-45	-20	30

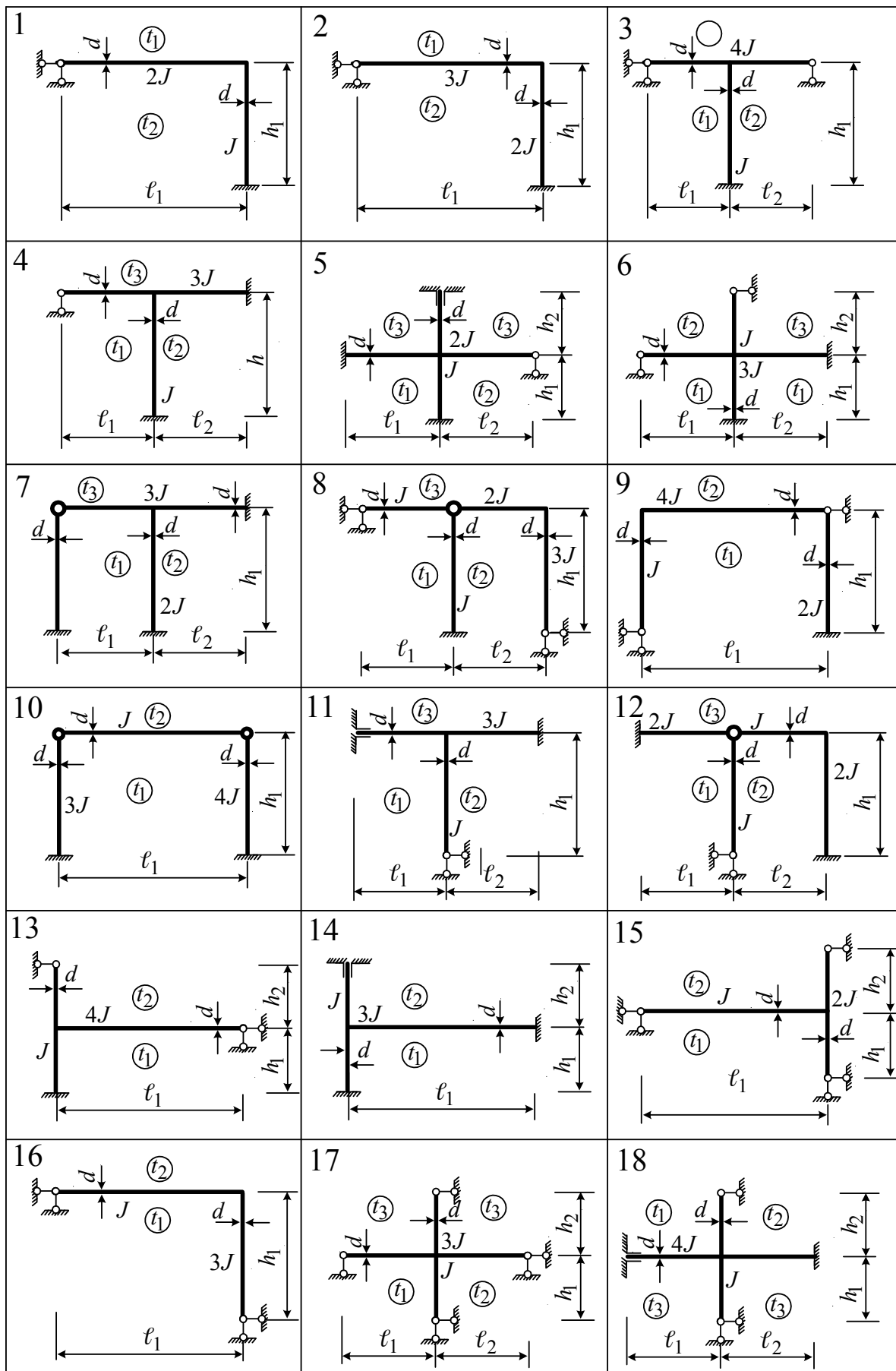


Рисунок 2.2 – Розрахункові схеми рам

2.3 Розрахунок на переміщення опорних в'язей

Для заданої статично невизначної рами (рисунок 2.3, таблиця 2.3) треба:

- 1) визначити число невідомих;
- 2) побудувати основну систему;
- 3) в основній системі побудувати епюри моментів від одиничних значень основних невідомих і від заданого переміщення опорних в'язей;
- 4) визначити реакції у введених в'язях. Скласти систему канонічних рівнянь у матричній формі та розв'язати її;
- 5) побудувати епюру моментів у статично невизначній рамі та перевірити їх правильність.

Таблиця 2.3 – Вихідні дані для розрахунку рами на переміщення опорних в'язей

Варіант	ℓ_1 , м	h_1 , м	ℓ_2 , м	h_2 , м	C_1 , м	C_2 , м	φ , рад
1	6	6	6	3	0,1	0,2	0,01
2	8	8	5	4	0,25	0,3	0,015
3	7	7	5	4	0,3	0,1	0,020
4	4	4	8	6	0,15	0,20	0,025
5	5	5	4	6	0,25	0,30	0,030
6	6	5	3	4	0,35	0,20	0,035
7	2	3	3	2	0,1	0,15	0,040
8	4	4	4	4	0,15	0,30	0,020
9	6	5	4	3	0,10	0,30	0,030
10	5	5	4	3	0,25	0,15	0,010
11	8	6	6	5	0,30	0,20	0,015
12	2	2	3	4	0,35	0,25	0,025
13	1	2	2	3	0,30	0,15	0,035
14	3	4	6	5	0,10	0,30	0,045
15	9	8	5	6	0,20	0,30	0,020
16	4	3	3	2	0,15	0,25	0,010
17	10	5	4	2	0,25	0,20	0,030
18	4	4	2	2	0,35	0,30	0,40

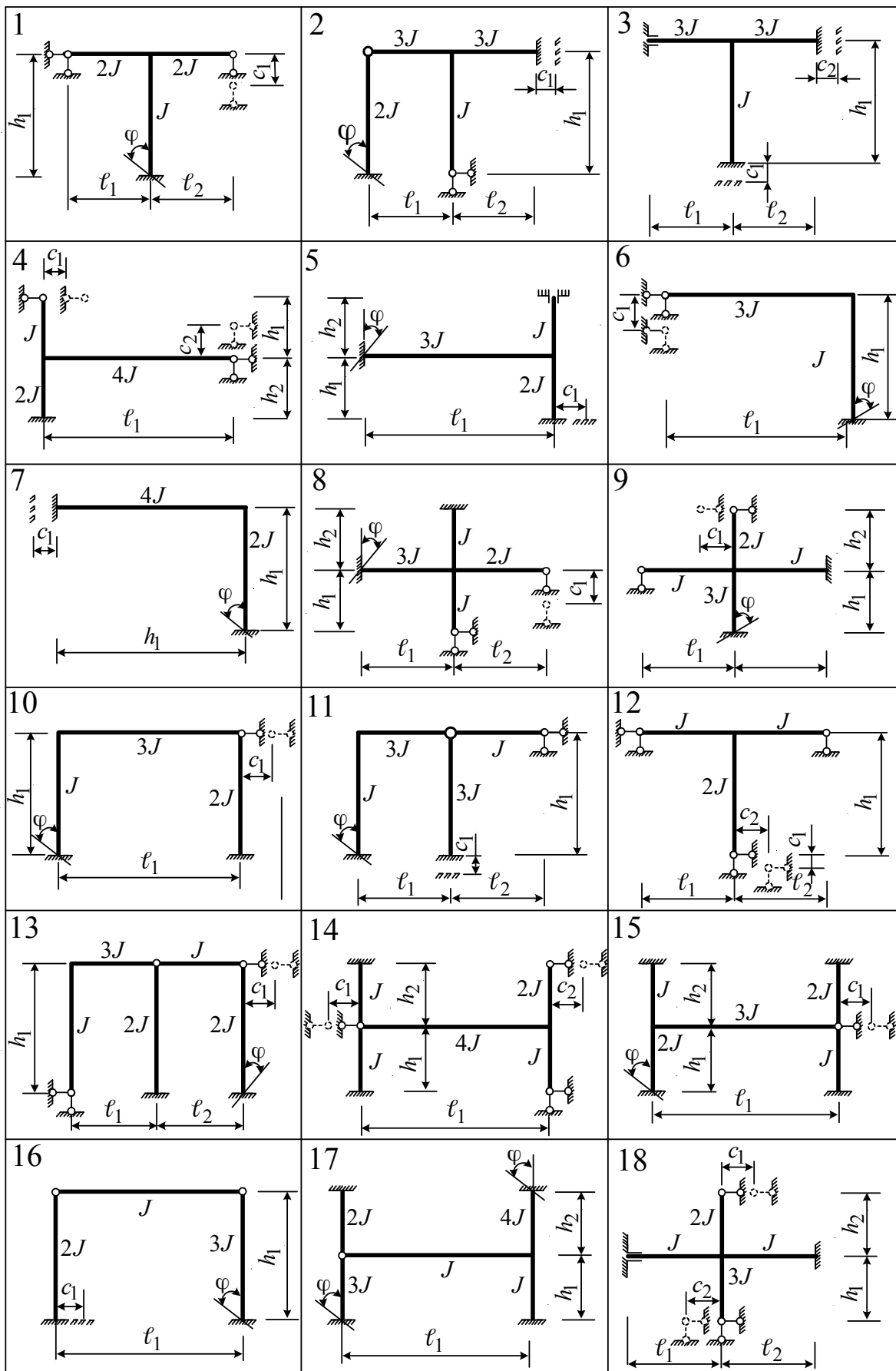


Рисунок 2.3 – Розрахункові схеми рам

3 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ РАМ

3.1 Розрахунок рами на дію зовнішнього навантаження

Задана рама показана на рисунку 3.1, а. Припустимо, що стержні рами не можуть розтягуватись. Число основних невідомих знайдемо за формулою (1.1):

$$n = n_y + n_r = 4 + 2 = 6.$$

Пояснимо ще раз методику визначення числа незалежних лінійних переміщень n_y .

У результаті прийнятого допущення про те, що стержні рами розтягуються не можуть, лінійні переміщення вузлів визначаються тільки згинальною деформацією. Аналіз роботи рами показує, що число незалежних лінійних переміщень дорівнює двом (горизонтальні переміщення вузлів верхнього 2, 3 та середнього ярусів рами зображено на рисунку 3.1, б). Зобразимо основну систему методу переміщень (рисунок 3.1, б). Виберемо основну систему методу сил (рисунок 3.1, в), побудуємо сумарну одиничну епюру M_s^* (рисунок 3.1, е) і вантажну епюру M_F^* (рисунок 3.1, д) в основній системі цього методу. Користуючись таблицею стандартних рішень (таблиця 1.1), побудуємо спочатку вантажну епюру в основній системі методу переміщень (рисунок 3.1, г), а потім одиничні епюри. На рисунку 3.2 показані епюри $M_1 - M_6$ в основній системі методу переміщень від повороту вузлів 1, 2, 3, 4 за напрямком руху стрілки годинника на одиницю ($M_1 - M_4$) та одиничного переміщення (M_5, M_6).

Маючи потрібні епюри, визначимо коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь (1.4). Виконаємо це статичним способом (п. 1.4.2). Результати визначення коефіцієнтів наведено на рисунках 3.3 та 3.4. Як видно з цих рисунків і приведених значень коефіцієнтів, рівність (1.8) виконується. Для перевірки правильності реактивних сил $r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44}, r_{55}, r_{66}, R_{1F}, R_{2F}, R_{3F}, R_{4F}, R_{5F}, R_{6F}$ використаємо формули «перемноження» епюр (1.7), (1.12).

$$r_{11} = \frac{EJ}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{EJ}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{EJ}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2 \right) EJ = 5EJ;$$

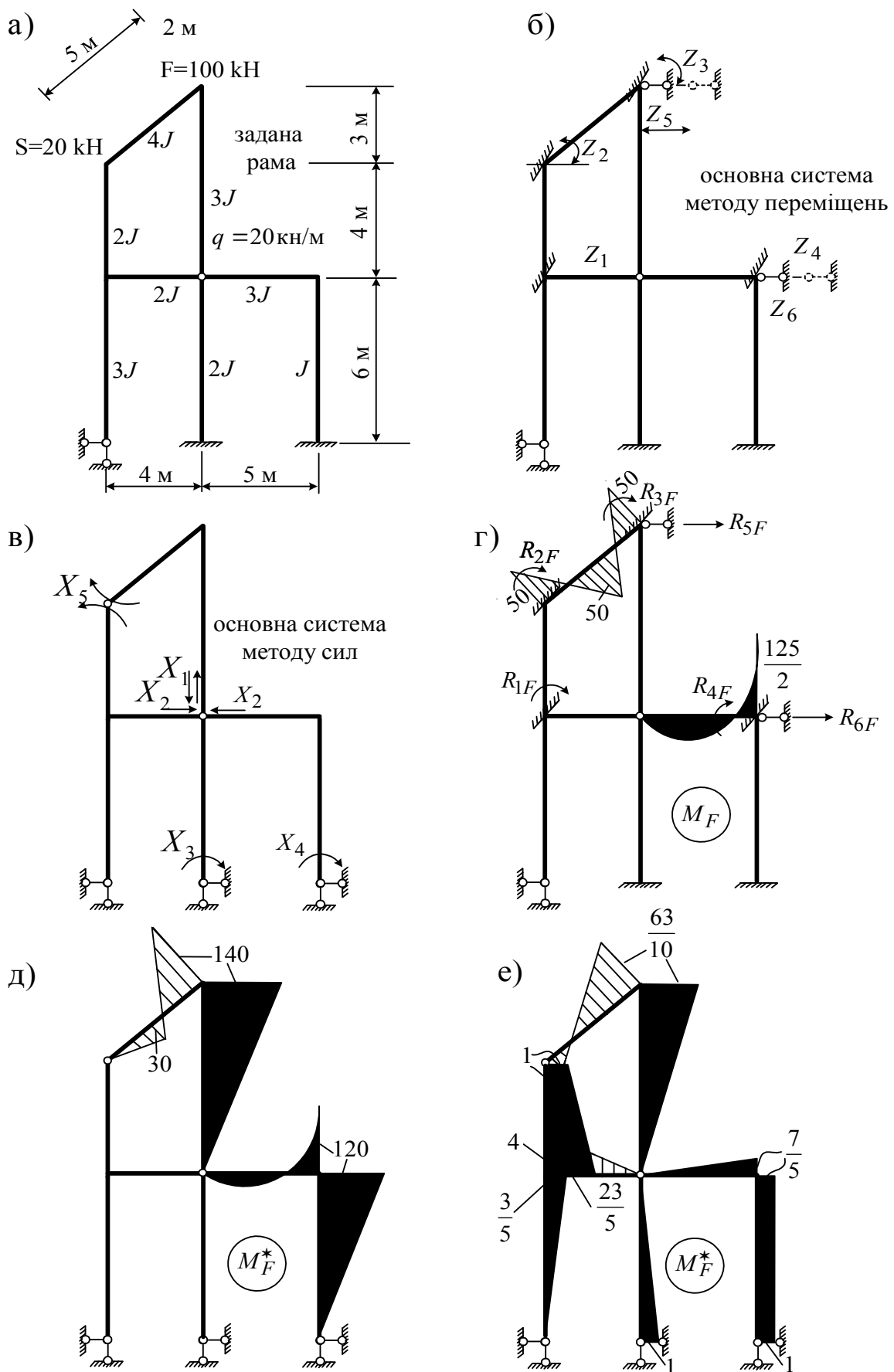


Рисунок 3.1 – Задана рама, основні системи, епюри M_F , M_F^* , M_s^*

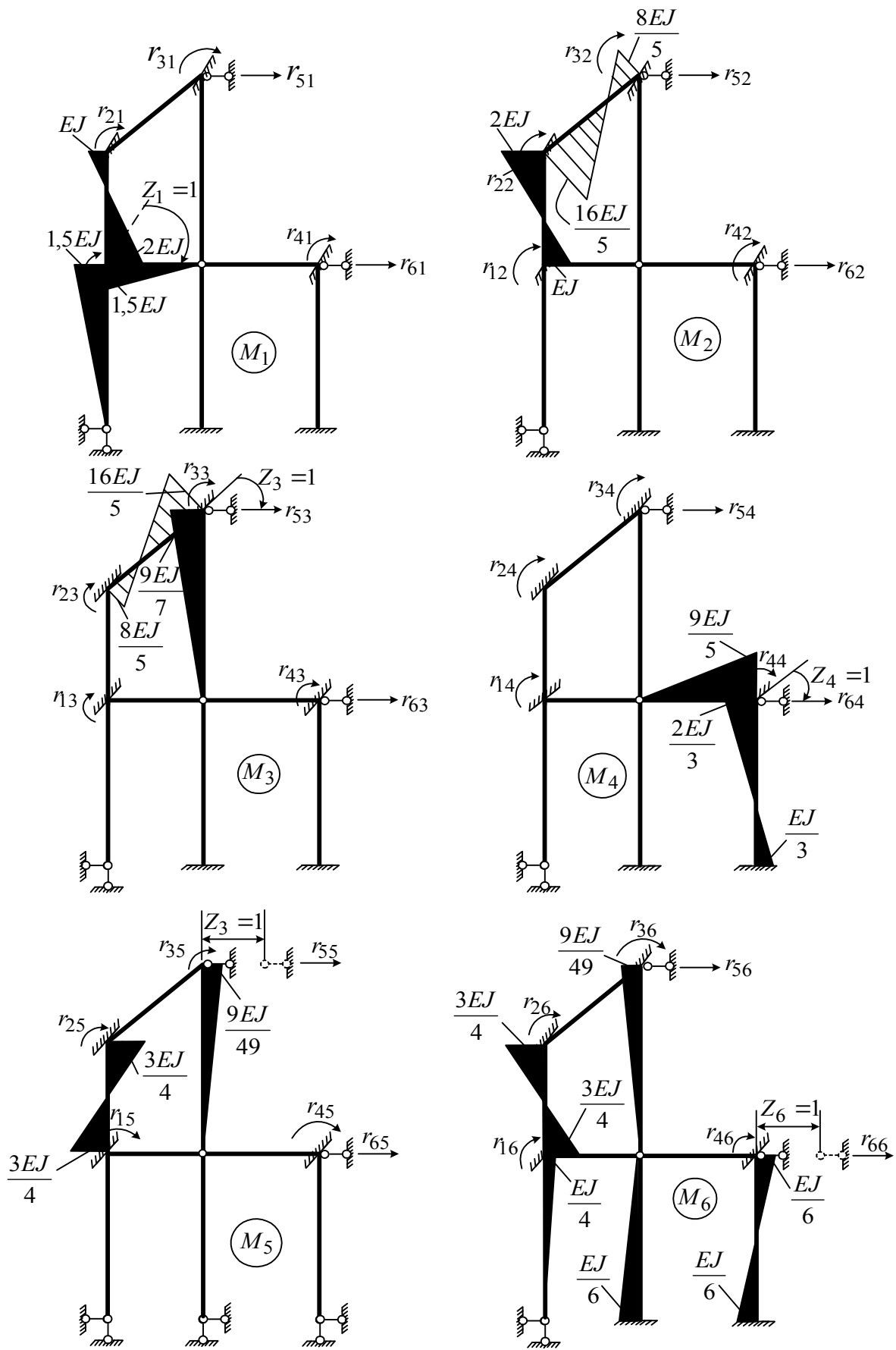


Рисунок 3.2 – Одичні епюри $M_1 - M_6$

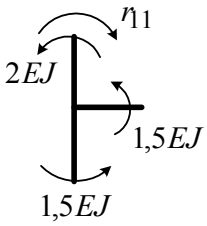

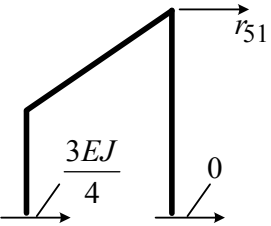
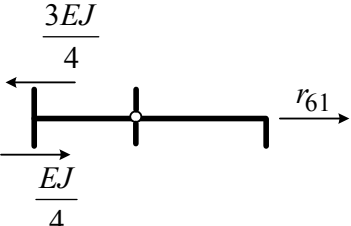
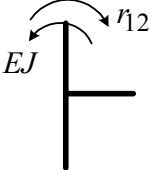
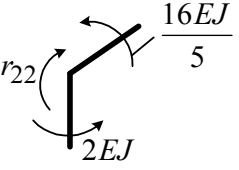
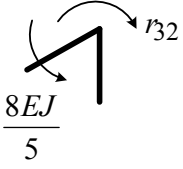
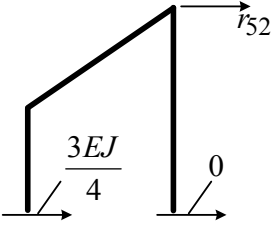
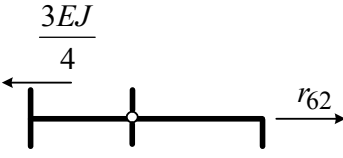
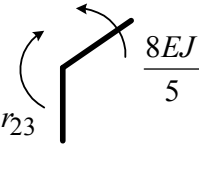
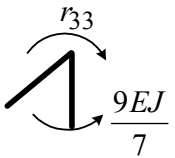
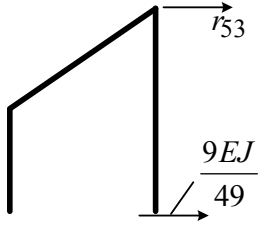
 <p>$r_{11} = 5EJ$</p>	 <p>$r_{21} = EJ$</p>	 <p>$r_{51} = -\frac{3EJ}{4}$</p>
 <p>$r_{61} = \frac{EJ}{2}$</p>	 <p>$r_{12} = EJ$</p>	 <p>$r_{22} = \frac{26EJ}{5}$</p>
 <p>$r_{32} = \frac{8EJ}{5}$</p>	 <p>$r_{52} = -\frac{3EJ}{4}$</p>	 <p>$r_{62} = \frac{EJ}{2}$</p>
 <p>$r_{21} = \frac{8EJ}{5}$</p>	 <p>$r_{33} = \frac{157EJ}{35}$</p>	 <p>$r_{53} = -\frac{9EJ}{49}$</p>

Рисунок 3.3 – До визначення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

$r_{63} = \frac{9EJ}{49}$	$r_{44} = \frac{37EJ}{15}$	$r_{64} = -\frac{EJ}{6}$
$r_{15} = -\frac{3EJ}{4}$	$r_{35} = -\frac{9EJ}{49}$	$r_{55} = \frac{1101EJ}{2744}$
$r_{65} = -\frac{1101EJ}{2744}$	$r_{16} = \frac{EJ}{2}$	$r_{26} = \frac{3EJ}{4}$
$r_{36} = \frac{9EJ}{49}$	$r_{46} = -\frac{EJ}{6}$	$r_{56} = -\frac{1101EJ}{2744}$
$r_{66} = \frac{361EJ}{686}$	$R_{2F} = -50$	$R_{3F} = 50$
$R_{4F} = \frac{125}{2}$	$R_{5F} = -20$	$R_{6F} = 0$

Рисунок 3.4 – До визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

$$r_{22} = \frac{EJ}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right] + \frac{EJ}{4} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 5 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot 5 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} \right) \right] = \left(2 + \frac{16}{5} \right) EJ = \frac{26EJ}{5};$$

$$r_{33} = \frac{EJ}{4} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot 5 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 5 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} \right) \right] + \frac{EJ}{3} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \right) = \left(\frac{9}{7} + \frac{16}{5} \right) EJ = \frac{157}{35} EJ;$$

$$r_{44} = \frac{EJ}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) + EJ \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] = \left(\frac{9}{5} + \frac{2}{3} \right) EJ = \frac{37EJ}{15};$$

$$r_{55} = \frac{EJ}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot 2 \right] + \frac{EJ}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{49} \right) = \\ = \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{343} \right) EJ = \frac{1101EJ}{2744};$$

$$r_{66} = \frac{EJ}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) + \frac{EJ}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot 2 \right] + \\ + \frac{EJ}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{49} \right) + \frac{EJ}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \right) \cdot 2 \right] = \\ = \left(\frac{9}{343} + \frac{1}{2} \right) EJ = \frac{361EJ}{686};$$

$$R_{1F} = 0;$$

$$R_{2F} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \cdot 140 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{10} + \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} \right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \times \right. \\ \left. \times \frac{16}{10} - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} \right) - \frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} \right] = \frac{420}{3} + 60 = 50.$$

Відповідно до формули (1.12) в одержаному результаті слід поміняти знак на протилежний, тобто $R_{2F} = -50$. Для того щоб були зрозумілі дії при обчисленні R_{2F} , на рисунку 3.5 показаний вигляд «перемножуваних» епюр.

Визначимо інші коефіцієнти:

$$R_{3F} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \cdot 140 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{10} \right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \times \right. \\ \times \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} - \\ \left. - \frac{1}{2} \times 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{10} - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{10} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \right) \right] = 50.$$

$$R_{3F} = 50.$$

$$R_{4F} = \left(\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} - \frac{20 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \\ = \frac{345}{6} - 120 = -\frac{125}{2}.$$

$$R_{4F} = \frac{125}{2};$$

$$R_{5F} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 140 \right) = 20.$$

$$R_{5F} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 140 \right) = 20.$$

$$R_{5F} = -20.$$

$$R_{6F} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 140 \right) + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \right) = 0;$$

$$R_{6F} = 0.$$

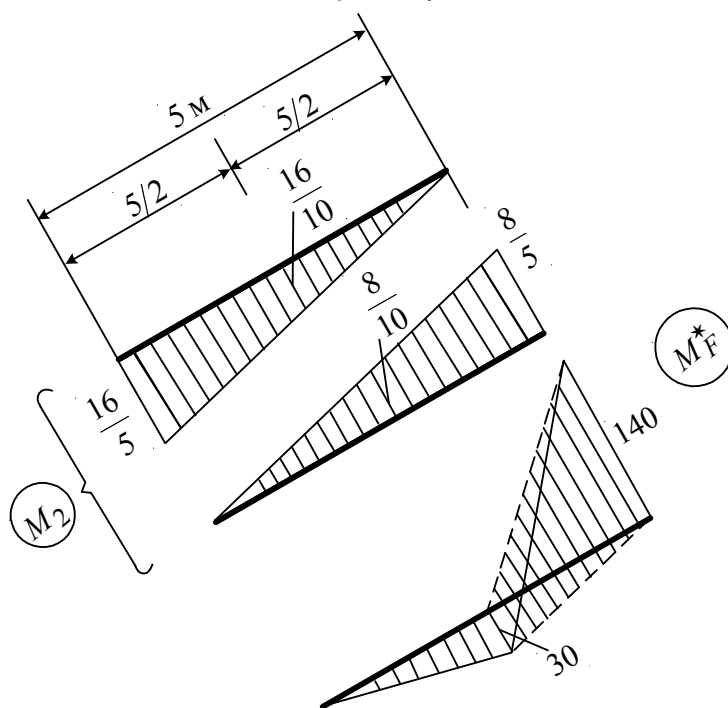


Рисунок 3.5 – До визначення реактивного моменту R_{2F} способом «перемноження» епюр

Коефіцієнти і вільні члени, знайдені способом «перемноження» епюр, співпадають з коефіцієнтами, одержаними статичним способом. Складемо тепер матричне рівняння (1.5):

$$R \cdot Z + \bar{R}_F = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 5EJ & EJ & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{4} & \frac{EJ}{2} \\ EJ & \frac{26EJ}{5} & \frac{8EJ}{5} & 0 & -\frac{3EJ}{4} & \frac{3EJ}{4} \\ 0 & \frac{8EJ}{5} & \frac{15EJ}{35} & 0 & -\frac{9EJ}{49} & \frac{9EJ}{49} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37EJ}{15} & 0 & -\frac{EJ}{6} \\ -\frac{3EJ}{4} & -\frac{3EJ}{4} & -\frac{9EJ}{49} & 0 & \frac{1101EJ}{2744} & -\frac{1101EJ}{2744} \\ \frac{EJ}{2} & \frac{3EJ}{4} & \frac{9EJ}{49} & -\frac{EJ}{6} & \frac{1101EJ}{2744} & \frac{361EJ}{686} \end{bmatrix} \times$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'яжемо це матричне рівняння на комп'ютері (див. додаток А).

Вихідні дані та розв'язок матричного рівняння наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані та розв'язок матричного рівняння

$n = 6$					
5.00000	1.00000	0.00000	0.00000	-0.75000	0.50000
1.00000	5.20000	1.60000	0.00000	-0.75000	0.75000
0.00000	1.60000	4.48571	0.00000	-0.18367	0.18367
0.00000	0.00000	0.00000	2.46667	0.00000	-0.16667
-0.75000	-0.75000	-0.18367	0.00000	0.40124	-0.40124
0.50000	0.75000	0.18367	-0.16667	-0.40124	0.52624

(права частина)

0.00000 50.00000 -50.00000 -62.50000 20.00000 0.00000

Z (розв'язок)

$$Z_1 = \frac{25.91954}{EJ}; \quad Z_2 = \frac{31.08824}{EJ}; \quad Z_3 = \frac{-16.13349}{EJ};$$

$$Z_4 = \frac{-12.11591}{EJ}; \quad Z_5 = \frac{344.70427}{EJ}; \quad Z_6 = \frac{195.68453}{EJ}.$$

Побудуємо кінцеву епюру моментів. Відповідно до формули (1.20) виправлені епюри показні на рисунку 3.6, а кінцева епюра – на рисунку 3.7.

Епюру поперечних сил побудуємо за допомогою залежності (1.22). Процес побудови кінцевої \mathcal{Q} показаний на рисунку 3.8, а сама епюра – на рисунку 3.7.

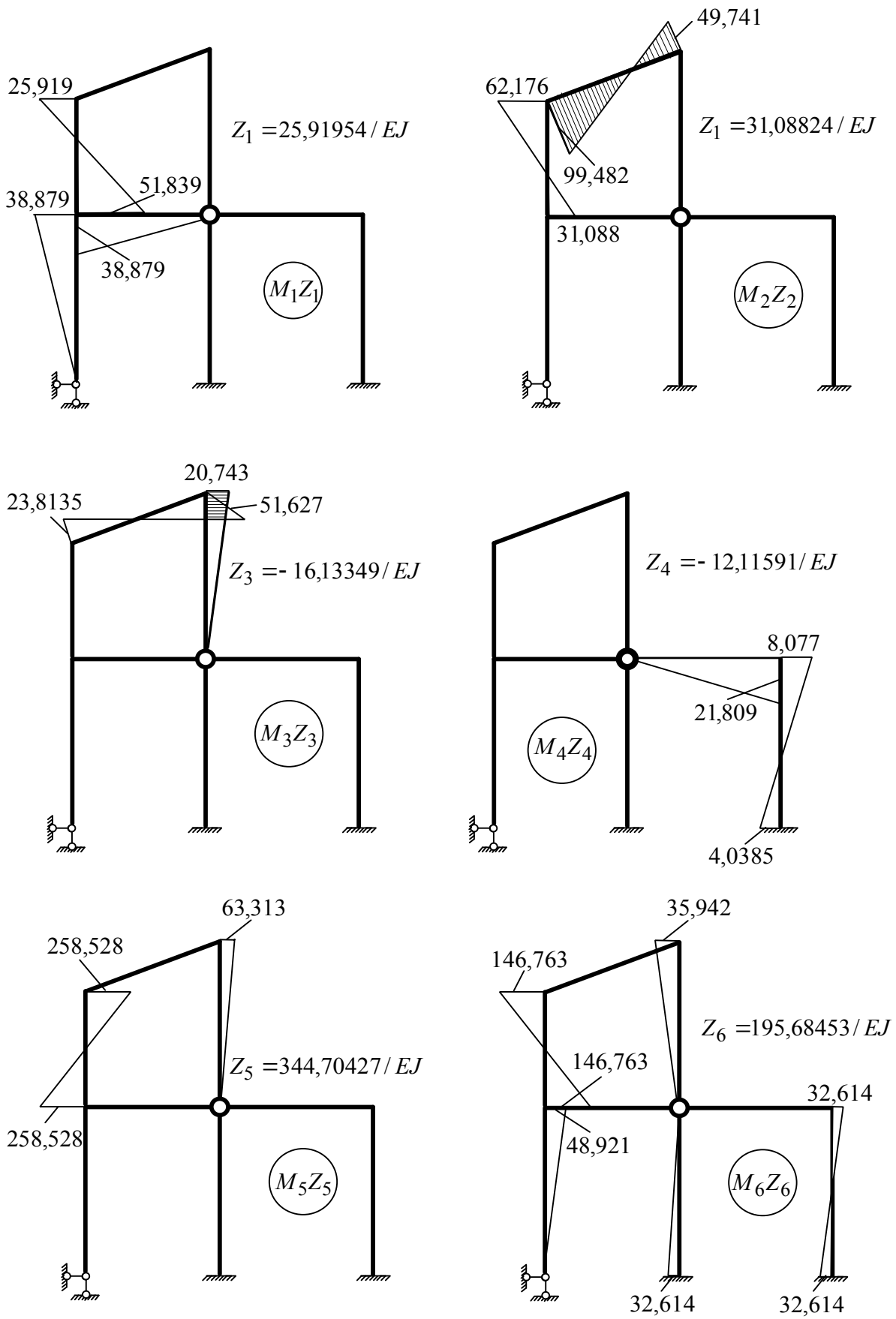


Рисунок 3.6 – Епюри $M_1 Z_1 \dots M_6 Z_6$

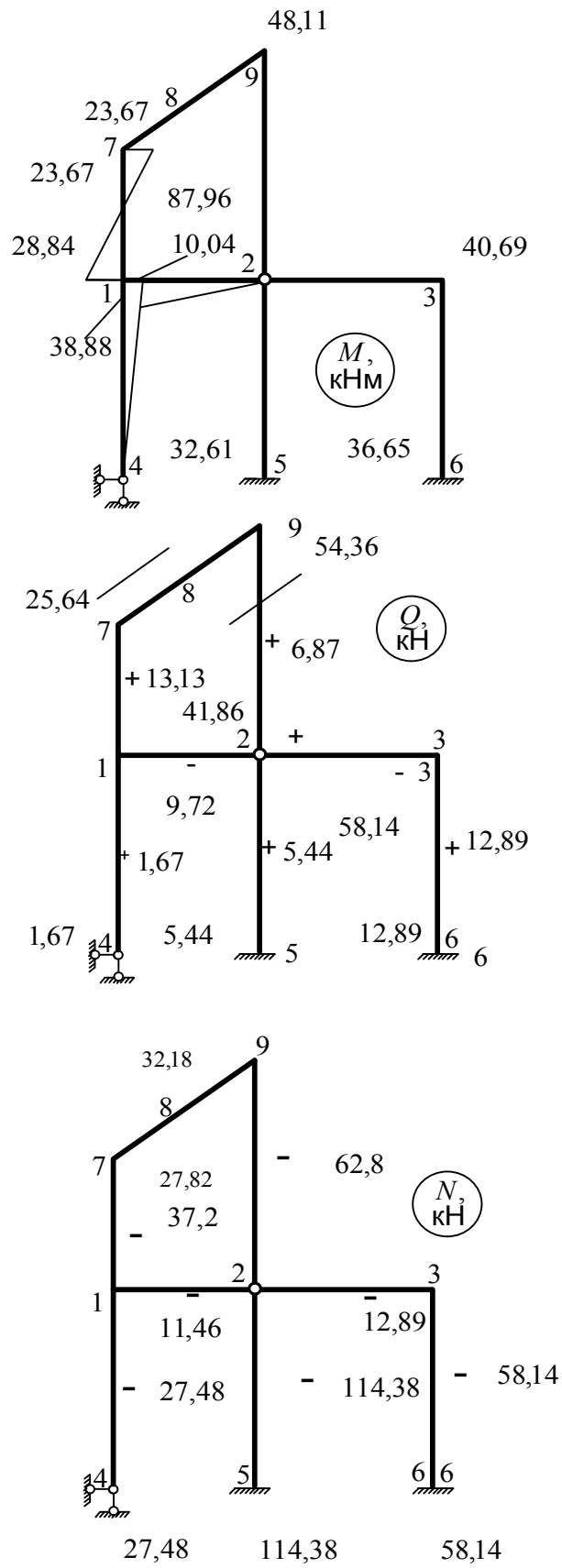


Рисунок 3.7 – Епюри M, Q, N

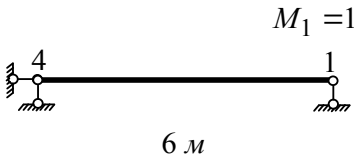
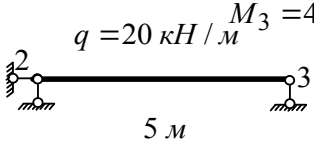
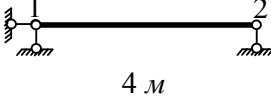
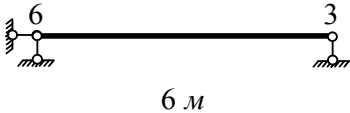
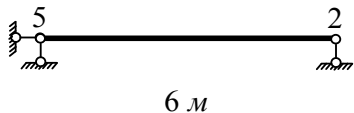
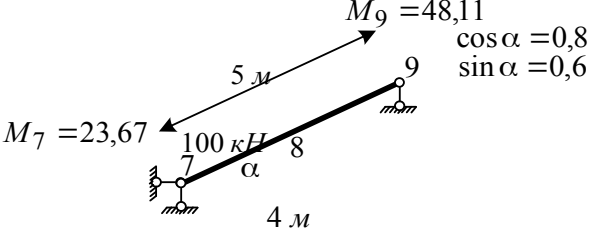
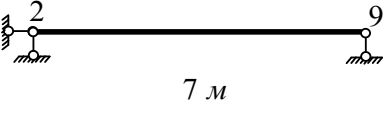
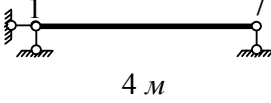
<p>Е л е м е н т 4-1 (повернутий на 90^0)</p>  <p>$M_1 = 10,04 \text{ кНм}$</p> <p>6 м</p> $Q_4 = Q_1 = \frac{10,04 - 0}{6} = 1,67 \text{ кН}$	<p>Е л е м е н т 2-3</p>  <p>$q = 20 \text{ кН/м}$ $M_3 = 40,69 \text{ кНм}$</p> <p>5 м</p> <p>50 кН Q_{2-3}^0 50</p> $Q_2 = 50 + \frac{-40,69 - 0}{5} = 41,86 \text{ кН}$ $Q_3 = -50 + \frac{-40,69 - 0}{5} = 58,14 \text{ кН}$
<p>Е л е м е н т 1-2</p>  <p>$M_1 = 38,88 \text{ кНм}$</p> <p>4 м</p> $Q_1 = Q_2 = \frac{0 - 38,88}{4} = -9,72 \text{ кН}$	<p>Е л е м е н т 6-3 (повернутий на 90^0)</p>  <p>$M_6 = 36,65 \text{ кНм}$ $M_3 = 40,69 \text{ кНм}$</p> <p>6 м</p> $Q_6 = Q_3 = \frac{40,69 + 36,65}{6} = 12,89 \text{ кН}$
 <p>$M_5 = 32,61 \text{ кНм}$</p> <p>6 м</p> $Q_5 = Q_2 = \frac{0 + 32,61}{6} = 5,44 \text{ кН}$	<p>Е л е м е н т 7-9</p>  <p>$M_9 = 48,11$ $\cos \alpha = 0,8$ $\sin \alpha = 0,6$</p> <p>5 м</p> <p>100 кН</p> <p>$M_7 = 23,67$ $M_9 = 48,11$</p> <p>4 м</p> <p>40 + - 40</p> $Q_7 = 40 + \frac{-48,11 - 23,67}{5} = 23,64 \text{ кН}$ $Q_9 = -40 + \frac{-48,11 - 23,67}{5} = 54,36 \text{ кН}$
<p>Е л е м е н т 2-9 (повернутий на 90^0)</p>  <p>$M_9 = 48,11 \text{ кНм}$</p> <p>7 м</p> $Q_2 = Q_9 = \frac{48,11 - 0}{7} = 6,87 \text{ кН}$	<p>Е л е м е н т 1-7 (повернутий на 90^0)</p>  <p>$M_1 = 28,84 \text{ кНм}$ $M_7 = 23,67 \text{ кНм}$</p> <p>4 м</p> $Q_1 = Q_7 = \frac{23,67 + 28,84}{4} = 13,13 \text{ кН}$

Рисунок 3.8 – До побудови епюри Q

	$\sum X=0, \quad N_{7-1} \cos \alpha + 25.64 + 20 \sin \alpha - 13.13 \sin \alpha = 0,$ $N_{7-1} = -37.2 \text{ кН},$ $\sum Y_1=0, \quad N_{7-9} \cos \alpha + 20 - 13.13 + 25.64 \sin \alpha = 0,$ $N_{7-1} = -27.82 \text{ кН}$
	$\sum Y_1=0, \quad N_{9-2} \cos \alpha + 54.36 - 6.87 \sin \alpha = 0,$ $N_{7-1} = -62.80 \text{ кН},$ $\sum X=0, \quad N_{9-7} \cos \alpha + 6.87 - 54.36 \sin \alpha = 0,$ $N_{7-1} = 32.18 \text{ кН}$
	$N_{1-4} = -27.48 \text{ кН},$ $N_{1-2} = -11.46 \text{ кН}$
	$N_{3-2} = -12.89 \text{ кН},$ $N_{3-6} = -58.14 \text{ кН}$
	$N_{2-5} = -114.38 \text{ кН}$

Рисунок 3.9 – До визначення поздовжніх сил у стержнях рами

Для побудови епюри поздовжніх сил застосовуємо метод вирізу вузлів (див. рисунок 3.9).

Епюра поздовжніх сил у заданій системі показана на рисунку 3.7. Перевірка правильності побудованих епюр Q та N полягає в дотриманні умов рівноваги рами або окремих її частин. Перевіримо умови рівноваги всієї рами:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ 1,67 + 5,44 + 12,89 - 20 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0, \\ 27,48 + 114,38 + 58,14 - 100 - 20 \cdot 5 &= 0. \end{aligned}$$

Задана рама знаходиться в рівновазі.

Складемо вихідну інформацію для розрахунку рами на комп'ютері. Нумерація вузлів і напрямки координатних осей показані на рисунку 3.10. Вихідні дані наведено в таблиці 3.2.

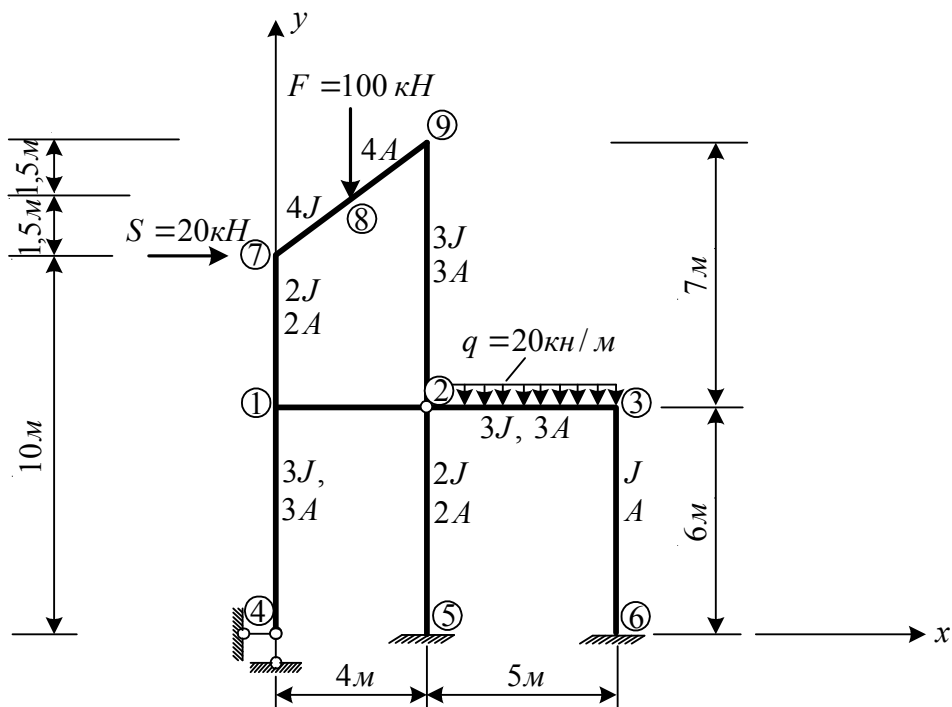


Рисунок 3.10 – Схема нумерації вузлів рами

Таблиця 3.2 – Вихідні дані для розрахунку на комп'ютері

ЗАГАЛЬНІ ДАНІ					
Число вузлів – 9, число елементів – 9					
Число типів поперечних перерізів – 4					
Число навантажень – 1					
Дані про вузли системи					
Вузол	Код вузла			Координати вузла	
				X, м	Y, м
1	1	1	1	0	6
2	1	1	0	4	6
3	1	1	1	9	6
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	4	0
6	0	0	0	9	0
7	1	1	1	0	10
8	1	1	1	2	11,5
9	1	1	1	4	13
Дані про жорсткість перерізів					
$EJ = 1500 \text{ кН/м}^2$					
$EA = 1 \cdot 10^6 \text{ кН}$					
Дані про стержні системи					
Код стержня		$EJ, \text{ кН/м}^2$		$EA, \text{ кН}$	
1	-2	30000		$2 \cdot 10^6$	
-2	-3	45000		$3 \cdot 10^6$	
-2	-5	30000		$2 \cdot 10^6$	
3	6	15000		$1 \cdot 10^6$	
1	-4	45000		$3 \cdot 10^6$	
1	-7	30000		$2 \cdot 10^6$	
7	8	60000		$4 \cdot 10^6$	
8	-9	60000		$4 \cdot 10^6$	
-2	9	45000		$3 \cdot 10^6$	

Продовження таблиці 3.2

Дані про навантаження вузлів і стержнів			
Число вузлів навантажених зосередженою силою – 2			
Число стержнів навантажених розподіленим навантаженням – 1			
Дані про навантаження вузлів			
Вузол	F_x , кН	F_y , кН	M_z , кНм
7	20	0	0
8	0	-100	0
Дані про навантаження стержнів			
Код стержня		q_x , кН/м	q_y , кН/м
-2	3	0	-20

Результати машинного розрахунку наведено в таблицях 3.3 та 3.4 і на рисунку 3.11.

Аналіз одержаних результатів показує, що прийняте при «ручному» розрахунку допущення про стержні, які не розтягуються призводить до невеликої похибки у величинах зусиль і переміщень (таблиця 3.3).

Таблиця 3.3 – Внутрішні зусилля в стержнях

Стержень		Згинальний момент, кНм		
		початок	середина	кінець
1	2	3.85E+01	1.92E+01	0.00E+00
-2	3	0.00+00	4.21E+01	-4.09E+01
-2	5	0.00E+00	1.65E+01	3.29E+01
3	6	-4.09E+01	-2.00E+00	3.69E+01
1	-4	-9.36E+00	-4.68E+00	0.00E+00
1	7	-2.91E+01	-2.83E+00	2.35E+01
7	8	2.35E+01	5.56E+01	8.77E+01
8	9	8.77E+01	1.99E+01	-4.80E+01
-2	9	0.00E+00	2.40E+01	4.80E+01

Продовження таблиці 3.3

Поперечна сила, кН			
Стержень		початок	кінець
1	2	-9.62E+00	-9.62E+00
-2	3	4.18E+01	-5.82E+01
-2	5	5.49E+00	5.49E+00
3	6	1.30E+01	1.30E+01
1	-4	1.56E+00	1.56E+00
1	7	1.31E+01	1.31E+01
7	8	2.57E+01	2.57E+01
8	9	-5.43E+01	-5.43E+01
-2	9	6.86E+00	6.86E+00
Поздовжня сила			
Стержень		початок	кінець
1	2	-1.16E+01	-1.16E+01
-2	3	-1.30E+01	-1.30E+01
-2	5	-1.14E+02	-1.14E+02
3	6	-5.82E+01	-5.82E+01
1	-4	-2.77E+01	-2.77E+01
1	7	-3.73E+01	-3.73E+01
7	8	-2.79E+01	-2.79E+01
8	9	3.21E+01	3.21E+01
-2	9	-6.27E+01	-6.27E+01

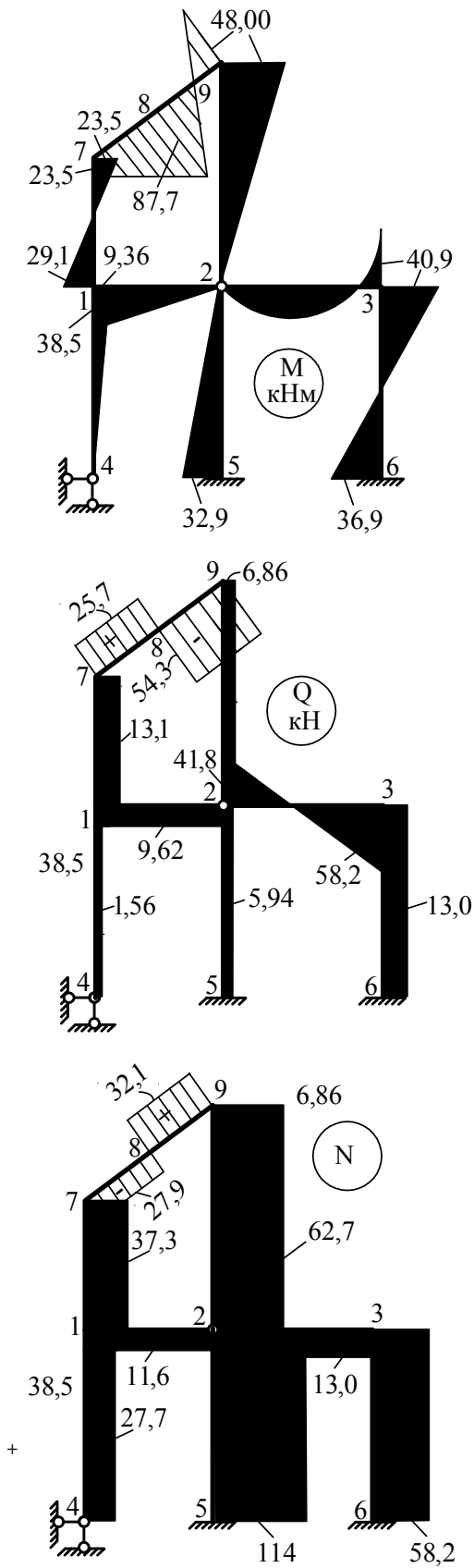


Рисунок 3.11 – Епюри M , Q , N , які побудовані за результатами машинного розрахунку

Таблиця 3.4 – Переміщення вузлів

Вузол	Переміщення, м		Кут повороту
	горизонтальне	вертикальне	
1	1.319E-02	-5.532E-05	1.782E-03
2	1.317E-02	-3.425E-04	0.000E+00
3	1.314E-02	-3.490E-04	-8.001E-04
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
7	2.341E-02	-1.299E-04	2.159E-03
8	2.523E-02	-2.588E-03	-1.579E-04
9	2.368E-02	-4.889E-04	-9.861E-04

3.2 Розрахунок рами на вплив температури

Задана система показана на рисунку 3.12, а. Число невідомих визначаємо за формулою (1.1):

$$n = n_y + n_d = 2 + 0 = 2.$$

Невідомими є два кутових переміщення Z_1 та Z_2 . Основна система показана на рисунку 3.12, б. На рисунку 3.12, в показано одиничні епюри M_1 та M_2 і наведено значення реактивних моментів r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} .

Температурні впливи розкладаємо на симетричні та кососиметричні і будуємо епюри M_t (рисунок 3.12, д) і M'_t (рисунок 3.12, е). Для побудови епюри M_t використовуємо схему переміщень вузлів рами від симетричних впливів температури, які показані на рисунку 3.12, б.

Система канонічних рівнянь має вигляд

$$\begin{bmatrix} EJ & 2EJ \\ 2EJ & \frac{31EJ}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{2295EJ}{8} - 100\alpha EJ \\ \frac{3795EJ}{16} - 325\alpha EJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

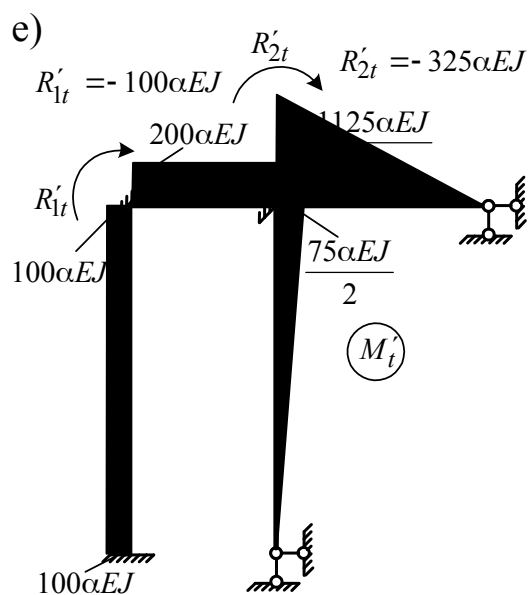
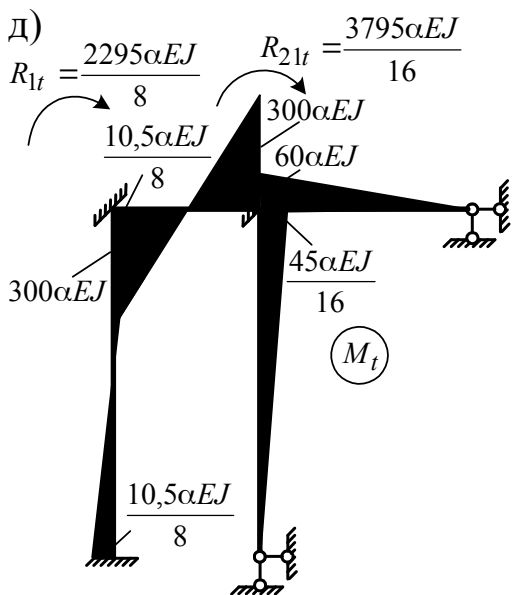
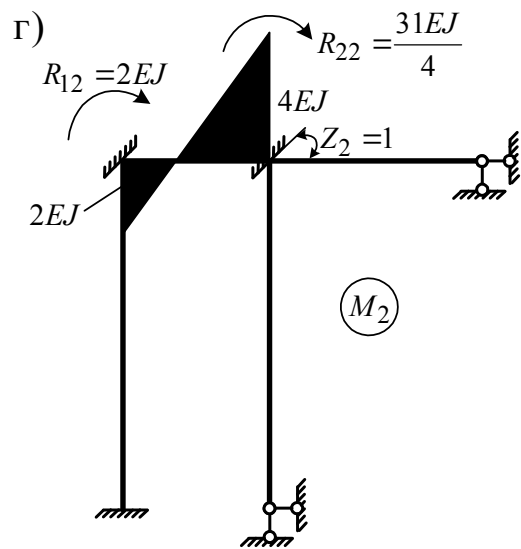
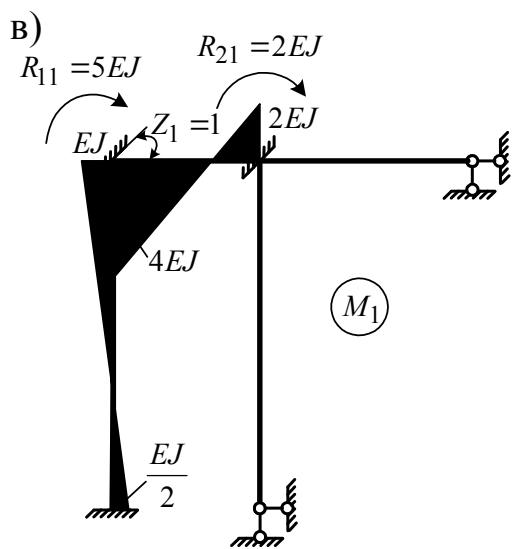
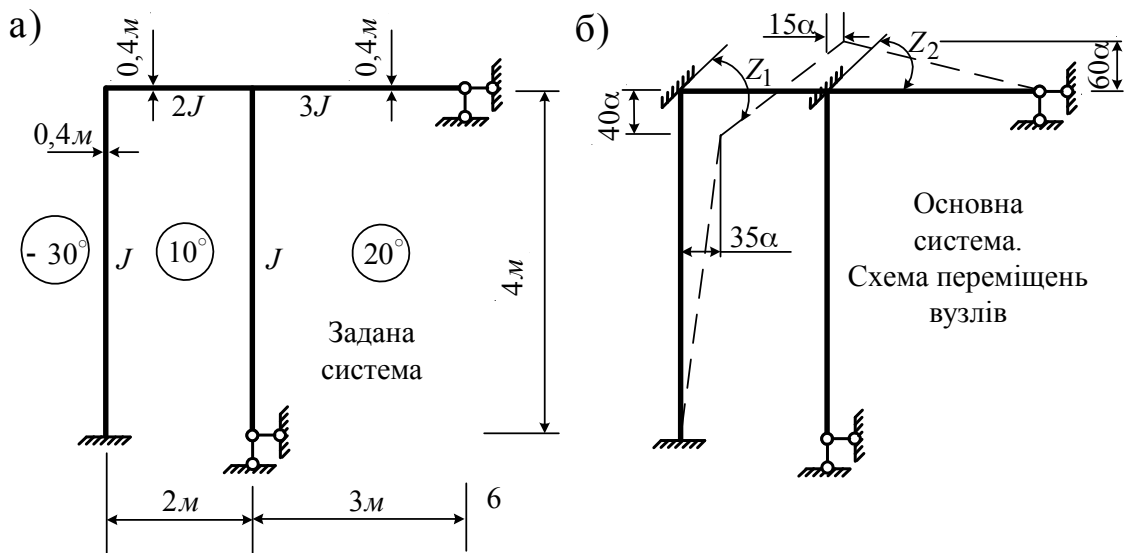


Рисунок 3.12 – До розрахунку рами на вплив температури

Розв'язком системи рівнянь є

$$Z_1 = -46,732\alpha;$$

$$Z_2 = 23,39\alpha.$$

Кінцева епюра моментів будується відповідно до залежності (1.25). «Виправлені» епюри « M_1Z_1 » та « M_2Z_2 » показано на рисунку 3.13, а, б, а епюра M - на рисунку 3.13, в. Щоб переконатися в правильності епюри M , треба виконати умову (1.26). На рисунках 3.13, г, д, е – показано основну систему методу сил і одиничні епюри M_4^* та N_4^* .

Виконаємо перевірку:

$$\sum \int \frac{M_4^* M_T}{EJ} ds = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} 136,49 + \frac{1}{3} 40,144 \right) \alpha = 834,997\alpha.$$

$$\Delta_{4t} = \sum \alpha \cdot t \omega_{N4} \pm \sum \frac{\alpha t'}{d} \omega_{M4} = -\alpha \cdot 10 \cdot 2 - \alpha \cdot 5 \cdot 3 - \frac{\alpha \cdot 40 \cdot 1}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = -835\alpha;$$

$$\sum \int \frac{M_4 M_Z}{EJ} \cdot ds + \Delta_{4t} = 834,997\alpha - 835\alpha = 0.$$

Таким чином, ми переконались, що переміщення по напрямку відкинутої в'язі X_4 в основній системі методу сил відсутнє, що відповідає граничній умові в заданій системі (рисунок 3.12, а). Аналогічну перевірку можна виконати відносно інших відкинутих в'язей. Побудуємо тепер кінцеві епюри Q_T та N_T (рисунок 3.14, а, б). На рисунку 3.14 показано процес визначення поперечних та поздовжніх сил.

3.3 Розрахунок рами на зміщення опорних в'язей

Систему, яку слід розрахувати на задане зміщення опорних в'язей, показано на рисунку 3.15, а. Число основних невідомих дорівнює двом (одне – кутове та одне – лінійне). Основну систему методу переміщень показано на рисунку 3.15, б. Будуємо одиничні епюри (рисунок 3.15, д). На цих же рисунках показано значення реакцій. Система канонічних рівнянь має такий вигляд:

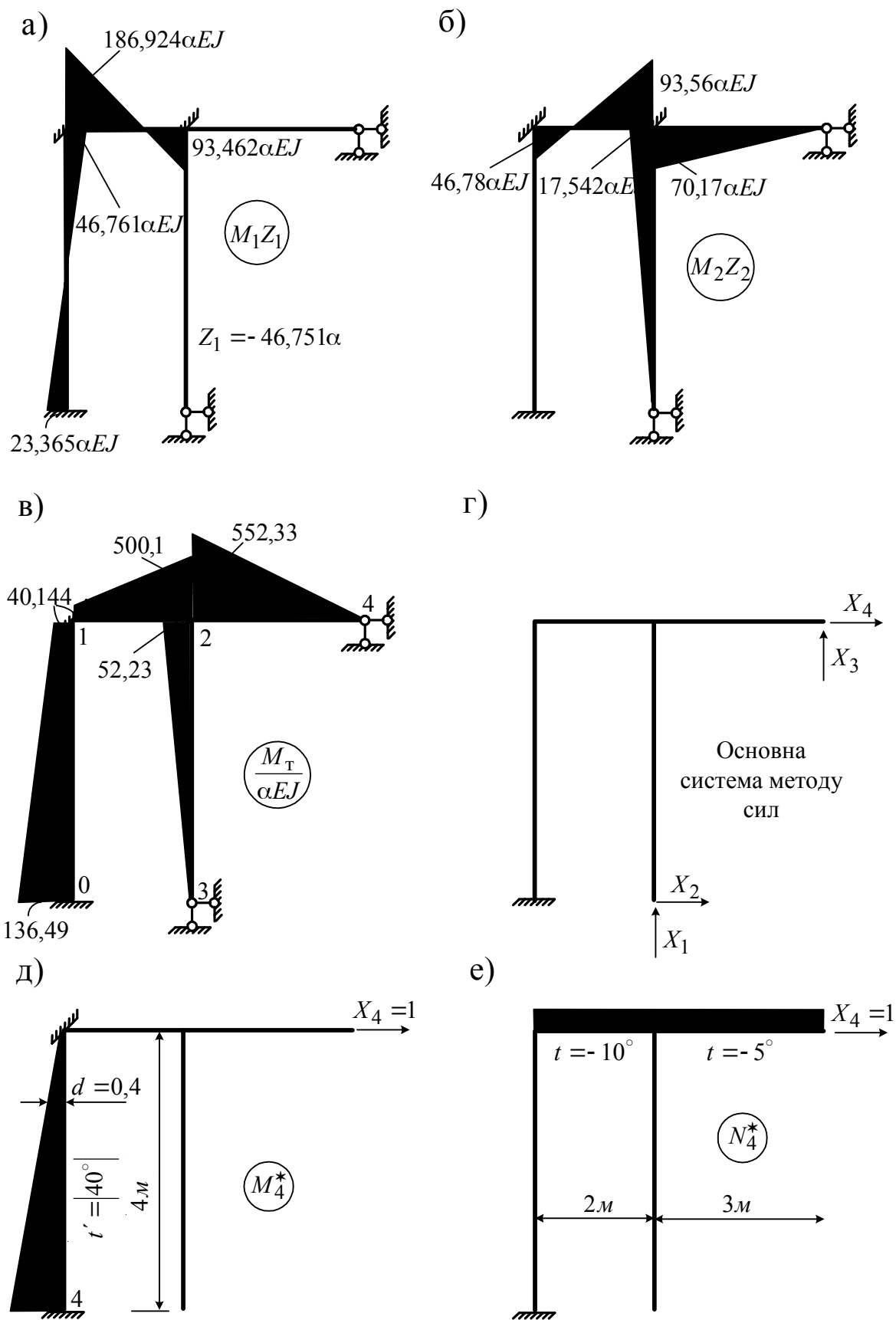


Рисунок 3.13 – До розрахунку рами на вплив температури

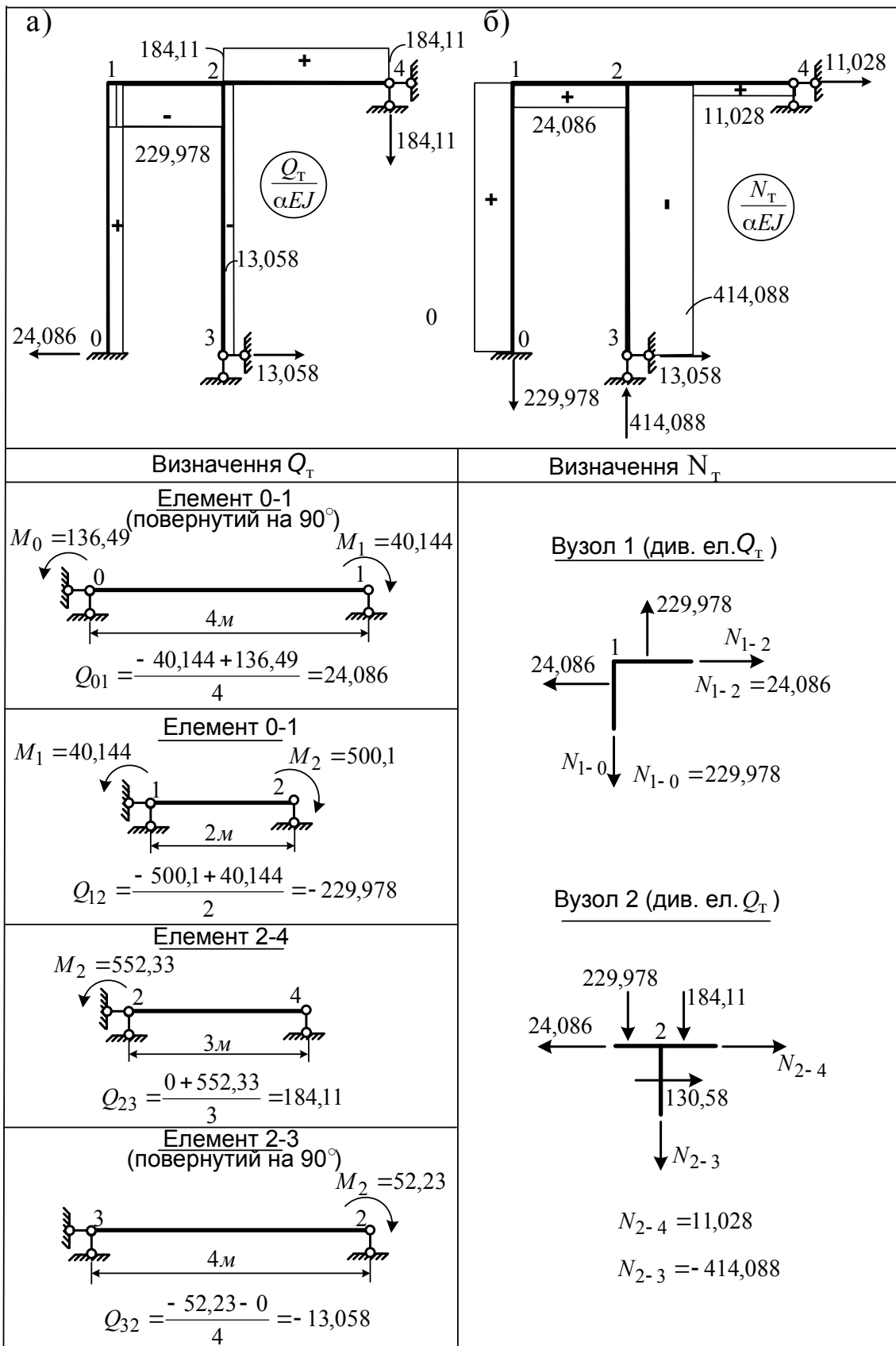


Рисунок 3.14 – До розрахунку рами на вплив температури

$$\begin{bmatrix} 6EJ & \frac{2EJ}{3} \\ \frac{2EJ}{3} & \frac{16EJ}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EJ}{10} \\ -\frac{EJ}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком системи рівнянь є

$$Z_1 = -\frac{5}{230}; \quad Z_2 = \frac{21}{460}.$$

Кінцеву епюру моментів будемо відповідно до рівняння (1.29). Процес побудови епюри M_c показано на рисунку 3.15, е, ж, и. Перевірку правильності побудованої епюри моментів виконаємо за формулою (1.30). Основну систему методу сил та епюру M_1^* показано на рисунку 3.15, к, л.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_c M_1^*}{EJ} ds &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15,2174 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \times \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot 121,739 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{3} \cdot 26,087 \cdot 10^{-3} \right) = 150,0749 \cdot 10^{-3}. \\ \sum RC &= \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{100} + 1 \cdot \frac{2}{10} \right] = 150 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Умова (1.30) виконується і переміщення відкинута в'язі дорівнює нулю, як у заданій системі (рисунок 3.15). Аналогічно визначається переміщення по напрямку інших відкинутих в'язей (рисунок 3.16, а). Пропонуємо допитливому студенту самому переконатися в справедливості як умови (1.30), так і умов

$$\sum \int \frac{M_c M_2^*}{EJ} ds - \sum RC = 0, \quad \sum \int \frac{M_c M_3^*}{EJ} ds - \sum RC = 0, \dots$$

Епюри поперечних і поздовжніх сил показано на рисунку 3.15, м, н. Тут же показано обчислення поздовжніх і поперечних сил для елементів рами.

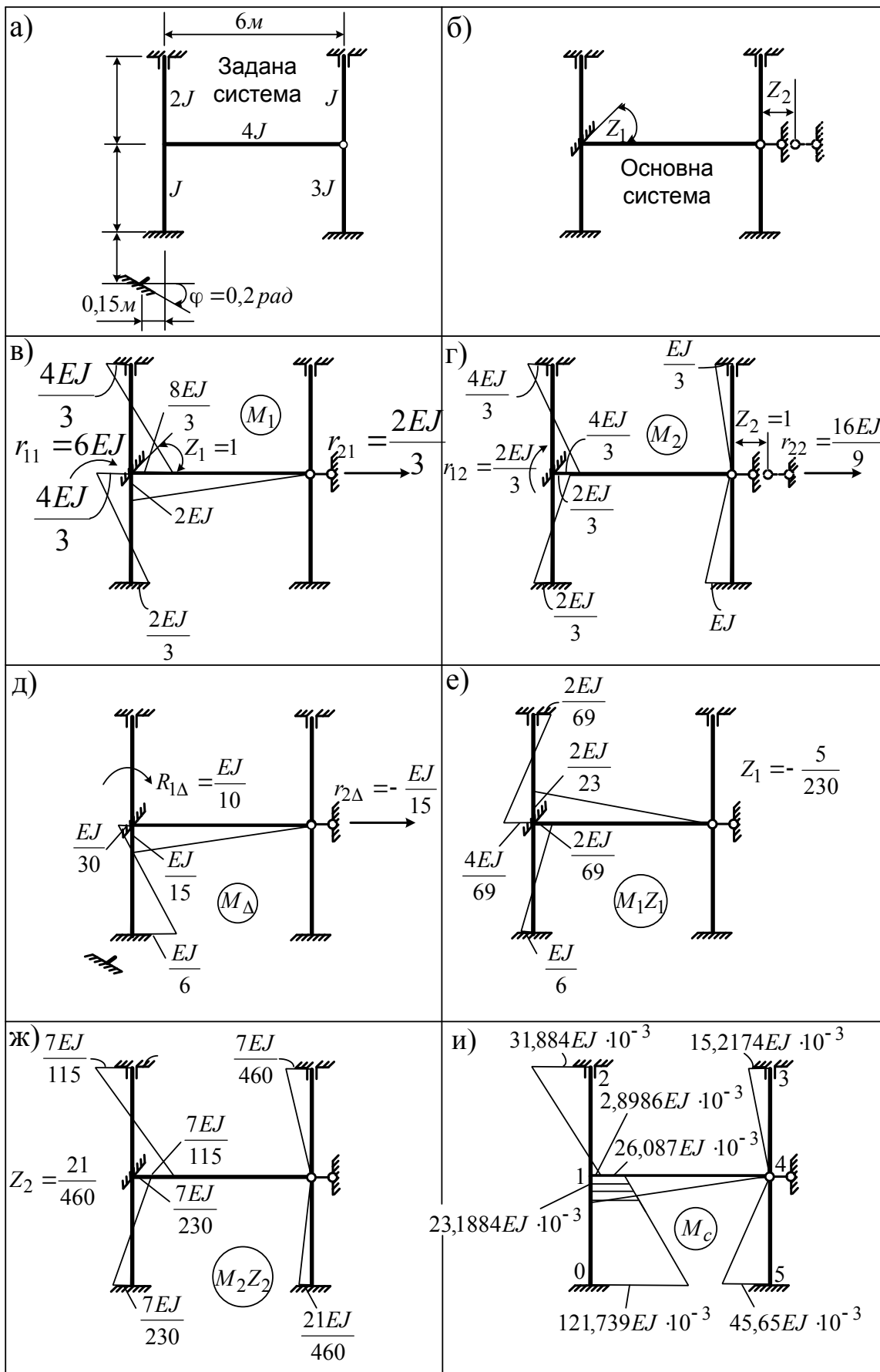


Рисунок 3.15 – До розрахунку рами на зміщення опорних в'язей, аркуш 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1 Строительная механика. Стержневые системы [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, В.Я. Лащеников и др. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.

2 Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы [Текст] / А.В. Александров, В.Я. Лащеников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.

3 Розин, Л.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем [Текст] / Л.А. Розин, И.А. Константинов, В.А. Смелов. – Л.: Изд-во Лен. университета, 1988. – 327 с.

4 Дарков, А.В. Строительная механика [Текст] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 602 с.

5 Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

6 Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст] / Н.К. Снитко. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.

7 Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела [Текст] / А.П. Филин. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 616 с.

8 Строительная механика [Текст] / Ю.И. Бутенко и др.; под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Выща школа, 1989. – 480 с.

9 Чихладзе, Э.Д. Расчет плоских статически неопределимых рам методом сил с применением ПЭВМ [Текст] : метод. указания / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Китов, Н.Г. Черненко. – Харьков: Изд-во ХИИТа, 1993. – 32 с.

10 Фадеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеева. – М.: Физматгиз, 1965. – 230 с.

11 Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 118 с.

12 Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Текст] / под ред. Г. Гроше и В. Циглера. – М.: Наука, 1981. – 718 с.

ДОДАТОК А

Підготовка вихідних даних і виконання розрахунків на комп'ютері

При розрахунку на комп'ютері розглядаються площинні стержневі системи, які в загальному випадку можуть складатися з прямолінійних і криволінійних елементів, з'єднаних між собою та з «землею» різними способами: жорстко, за допомогою циліндричних шарнірів, одинарних кінематичних в'язей, а також за допомогою різних їх комбінацій. Програма розрахунку таких систем використовує чотири типи прямолінійних стержневих елементів, які розрізняються між собою умовами закріплення лівого та правого кінців (рисунок А.1).

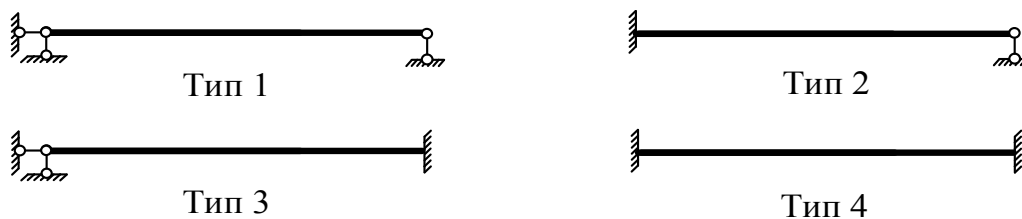


Рисунок А.1 – Типи прямолінійних стержневих елементів

При переході від заданої системи до її кінцевої моделі параметри жорсткості елементів повинні бути постійними на довжині елементів і мати кінцеві значення. Навантаження у вигляді зосереджених сил та моментів прикладаються на кінцях елемента, а розподілене навантаження повинне бути рівномірно розподіленим. Ці обмеження призводять до потреби поділу заданої конструкції достатнім числом перерізів, які далі будуть називатися вузлами. Якщо задана система має криволінійні стержні, то кожний стержень треба замінити набором прямолінійних елементів вставленням проміжних вузлів. Число елементів, які замінюються, залежить від точності обчислення. Аналогічно роблять і в тому випадку, якщо жорсткість стержня змінна за довжиною. Вставленням достатнього числа проміжних вузлів стержень можна розглядати як систему кінцевих елементів з постійними за довжиною жорсткостями.

Всі вузли, у тому числі й опорні, нумеруються без пропусків, починаючи з номера один. Кожному елементові відповідають номери двох вузлів, які він поєднує.

Для перепису стержневої системи вводиться декартова система координат. Початок і напрямок координатних осей вибирають довільно, при цьому враховують геометричні особливості розрахункової схеми з метою полегшення її опису. У вибраній системі координат описується положення та переміщення вузлів, діюче на систему вузлове та розподілене навантаження.

Інформація, яка потрібна для розрахунку конструкції, включає загальні дані про систему, про координати вузлів, жорсткості кінцевих елементів, список елементів і діючих на систему навантажень.

У загальних даних показується число вузлів, елементів, типів поперечних стержнів елементів, число завантажень.

Дані про координати вузлів включають коди і значення координат x_i та y_i кожного вузла. Код вузла характеризується трьома числами, які показують на можливість переміщення вузла за напрямком координатних осей та його повороту. Перше число відповідає переміщенню вздовж осі x , друге – вздовж осі y , третє відповідає повороту вузла. Якщо переміщення вузла, який розглядається, за напрямком координатних осей можливе, то відповідна компонента коду дорівнює одиниці, в іншому випадку записується нуль. При приєднанні всіх елементів до вузла за допомогою циліндричних шарнірів компонента, яка відповідає повороту вузла, дорівнює нулю.

Тип поперечного перерізу елемента характеризується двома числами – жорсткостями поперечного перерізу елемента при згині та розтяганні – стисканні. У списку типів поперечного перерізу показуються значення жорсткості для всіх типів поперечних перерізів елементів.

Кожний елемент у списку кінцевих елементів починається двома цифрами – номерами вузлів, які він з'єднує. Першим записується вузол з меншим номером. Якщо елемент приєднується до вузла за допомогою циліндричного шарніра, то цей номер вузла записується зі знаком мінус. Далі показується порядковий номер типу поперечного перерізу відповідного елемента. Розміщення елементів у списку довільне.