**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра експлуатації та ремонту рухомого складу

НАДІЙНІСТЬ ЗАЛІЗНИЧНОГО РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Харків - 2020

Надійність залізничного рухомого складу: Конспект лекцій / В. Г. Пузир, О. С. Крашенінін, О. В. Клименко, І. Г. Крамчанін. – Харків: УкрДУЗТ, 2020. – 100 с.

Забезпечення стійкої роботи залізничного транспорту формується на стадії проектування і виробництва, а підтримується в процесі експлуатації за рахунок встановленої системи технічного обслуговування і ремонту.

Для ефективної організації ремонту необхідна деяка стратегія щодо формування бази даних про стан рухомого складу і, з урахуванням цього, виконання необхідного переліку заходів для відновлення і підтримки їх технічного стану, тобто забезпечення високої надійності.

У даному конспекті лекцій наводяться основні відомості щодо визначення кількісних характеристик надійності, це є основою створення будь-якої надійної системи. Без цього неможливо проектувати і експлуатувати складну техніку, особливо таку, яка забезпечує перевізний процес і пов’язана з безпекою людини.

Теорія надійності вирішує основні завдання забезпечення високої надійності і оптимальної вартості технічної системи. Подані в конспекті лекцій основні положення, терміни, комплексні показники надійності дозволять майбутнім інженерам уявити процеси, що супроводжують надійну роботу тягового рухомого складу.

Рекомендується для студентів усіх форм і термінів навчання за спеціальністю «Локомотиви та локомотивне господарство» та відповідає робочій програмі з курсу «Надійність та технічна діагностика ЗРС».

Іл. 27, табл. 5, бібліогр.: 6 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри експлуатації та ремонту рухомого складу 10 лютого 2020 р., протокол № 10.

Рецензент
проф. О. Б. Бабанін

ЗМІСТ

Основні умовні позначення…………………………………………4
Вступ……………………………………………………………………5
Лекція 1. Надійність устаткування……………………………6
1.1 Загальні терміни і поняття надійності…………………6
1.2 Показники надійності. Класифікація основних показників надійності……………………………………………..8
1.3 Статистичні визначення основних показників надійності невідновлюваних об'єктів……………………………9
1.4 Статистичні визначення основних показників надійності відновлюваних об'єктів…………………………..16
Лекція 2. Вірогіднісні визначення основних показників надійності і взаємозв'язок між ними. Основний закон надійності……………………………………………...20
2.1 Використання основних законів розподілу часу безвідмовної роботи при оцінці показників надійності…..28
2.2 Основні показники ремонтопридатності, довговічності і зберігання об'єктів. Комплексні показники надійності…32
Лекція 3. Методи підвищення надійності………………………...37
3.1 Можливі шляхи підвищення надійності…………………37
3.2 Метод плавної зміни живильної напруги при ввімкненні і вимкненні електричного обладнання (ЕО)………………38
3.3 Метод вибору раціонального режиму використання електричного обладнання (ЕО) за заданим періодом його простою і коефіцієнтом циклічності…………………………42
3.4 Резервування обладнання…………………………………...45
Лекція 4. Оцінка надійності обладнання в процесі експлуатації.54
Лекція 5. Призначення і склад запасів………………………………68
Лекція 6. Застосування теорії масового обслуговування до завдань експлуатації…………………………………....75
6.1 Предмет і зміст теорії масового обслуговування…………75
6.2 Системи масового обслуговування з очікуванням………...78
6.3 Приклади застосування ТМО до завдань експлуатації……90
Список літератури……………………………………………………97
Додоток А……………………………………………………………...98
Додаток Б……………………………………………………………100

ОСНОВНІ УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$F(t)$ – функція розподілу напрацювання до відмови
$f(t)$ – щільність розподілу напрацювання до відмови
$\lambda(t)$ – інтенсивність відмов
$\Lambda(t)$ – параметр потоку відмов
$P(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи за час t
$Q(t)$ – вірогідність відмови за час t
T_0 – середнє напрацювання до відмови
T_B – середній час відновлення
$V(t)$ – вірогідність відновлення за час t
$\mu(t)$ – інтенсивність відновлення
$k_г$ – коефіцієнт готовності
$k_п$ – коефіцієнт простою
$k_{ог}$ – коефіцієнт оперативної готовності
$k_г(t)$ – нестаціонарний коефіцієнт готовності
$k_п(t)$ – нестаціонарний коефіцієнт простою
$k_{тв}$ – коефіцієнт технічного використання
$T_{екс}$ – тривалість експлуатації
$T_{рес}$ – ресурс
t_0 – заданий час роботи
N_0 – число об'єктів, що підлягають випробуванню
T – задана тривалість випробувань
r – задане (сумарне) число відмов
n – число відмов при експлуатації
m – кратність резервування
γ – довірча вірогідність
σ – середньоквадратичне відхилення

ВСТУП

Зростання складності сучасної техніки ставить усе більш високі вимоги до її експлуатації [6]. Якщо у минулому при експлуатації спиралися в основному на практичний досвід обслуговуючого персоналу, то подальший бурхливий розвиток техніки висунув необхідність розробки теоретичних основ експлуатації [1, 3, 5].

Експлуатація техніки, безумовно, передбачає перш за все її практичне застосування, практичну діяльність, досвід. Проте існують, принаймні, дві основні причини, через вплив яких виникає потреба в теорії експлуатації:

- інженерові з експлуатації техніки доводиться виконувати велику кількість різних експлуатаційних розрахунків і давати чисельні оцінки;
- в сучасних умовах розвитку техніки досвід експлуатації, на підставі якого складаються настанови, інструкції і інші керівні документи, накопичується з деяким запізнюванням.

Науково-технічний прогрес, використання нової елементної бази ставлять перед фахівцями нові завдання з удосконалення методів експлуатації і ремонту устаткування.

ЛЕКЦІЯ 1. Надійність устаткування

1.1 Загальні терміни і поняття надійності

Надійність – властивість об'єкта зберігати в часі у встановлених межах значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції в заданих режимах і умовах застосування, технічного обслуговування, ремонтів, зберігання і транспортування [1, 5].

Надійність є складною властивістю, яка, залежно від призначення об'єкта і умов його застосування, складається з поєднань властивостей: безвідмовності, довговічності, ремонтопридатності і збереження. Для конкретних об'єктів (елементів, систем) і умов їх експлуатації ці властивості можуть мати різну відносну значущість. Наприклад, для деяких об'єктів, що не ремонтуються (одноразових), надійність включає в основному їх безвідмовність. Для ремонтованих об'єктів однією з найважливіших властивостей, складових надійності може бути ремонтопридатність або поєднання безвідмовності і ремонтопридатності.

Система – об'єкт, що є сукупністю елементів, які взаємодіють у процесі виконання певного кола завдань і взаємопов'язані функціонально.

Елемент – об'єкт, який являє собою найпростішу частину системи, що не має самостійного значення.

Поняттями «*елемент*» і «*система*» користуються досить гнучко. Наприклад, якщо під системою розуміють локомотив, то його елементами будуть окремі агрегати. Якщо певний агрегат вважають системою, то його елементами будуть вузли і так далі.

Безвідмовність – властивість об'єкта безперервно зберігати працездатний стан в перебігу деякого часу або деякого напрацювання.

Довговічність – властивість об'єкта зберігати працездатний стан до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування і ремонту.

Ремонтопридатність – властивість об'єкта, що полягає в пристосованості до запобігання і виявлення причин виникнення відмов, пошкоджень, до підтримки і відновлення працездатного стану шляхом проведення технічного обслуговування і ремонтів.

Терміну «*ремонтопридатність*» у раніше випущеній літературі з надійності приблизно відповідає термін «*відновлюваність*».

Збереженість – властивість об'єкта зберігати значення показників безвідмовності, довговічності і ремонтопридатності впродовж і після зберігання або транспортування. В літературі, що присвячена питанням надійності, додатково введені такі властивості:

несправність – стан об'єкта, при якому він не відповідає хоч би одній з вимог, встановлених технічною документацією;

працездатність – стан об'єкта, при якому значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати задані функції, відповідають вимогам, встановленим технічною документацією;

пошкодження – подія, що полягає в порушенні справного стану об'єкта при збереженні працездатного;

відмова – подія, що полягає в порушенні працездатного стану об'єкта.

Поняття несправності є ширшим і загальнішим, ніж поняття відмови або пошкодження [5].

У літературі зустрічається і інше аналогічне визначення пошкодження – *дефект*. При виникненні пошкоджень система не втрачає працездатності, тобто відмова не відбувається, наприклад, при утворенні вм'ятин та тріщин на корпусах приладів, захисних покриттів, поламці ручок і тому подібне. Ці несправності, взагалі кажучи, не перешкоджають продовженню експлуатації систем, але при тривалій експлуатації об'єкта з наявністю дефектів може настати відмова.

Надалі розглядатимуться в основному лише такі несправності, які є відмовами.

Характеристика відмов

У процесі експлуатації необхідно уміти аналізувати відмови. Для аналізу відмов в теорії надійності розроблена широка їх класифікація.

Вони бувають: раптові і поступові, незалежні і залежні, конструкційні (конструктивні) і виробничі, а також експлуатаційні.

Головною ознакою цієї класифікації є характер (час) зміни заданого параметра об'єкта до моменту виникнення відмови, згідно з якою і відбуваються раптові і поступові відмови.

Раптова відмова – відмова, що характеризується стрибкоподібною зміною значень одного або декількох заданих параметрів об'єкта.

Поступова відмова – відмова, що характеризується поступовою зміною значень одного або декількох заданих параметрів об'єкта.

Надалі розглядаються в основному раптові, поступові, незалежні і конструктивно-виробничі відмови.

1.2 Показники надійності. Класифікація основних показників надійності

Надійність є якісною характеристикою, що відображає внутрішню, об'єктивно існуючу властивість устаткування [1, 4, 5].

З кількісного боку надійність оцінюється рядом критеріїв, названих показниками надійності.

Основні одиничні і комплексні показники надійності, вживані на етапі випробувань і експлуатації невідновлюваних і відновлюваних об'єктів устаткування, подано в таблиці 1.

Таблиця 1 – Класифікація основних показників надійності

Властивість	Показник
1	2
Безвідмовність	Вірогідність безвідмовної роботи Інтенсивність відмов Середнє напрацювання до відмови Параметр потоку відмов Середнє напрацювання на відмови
Ремонтопридатність	Вірогідність відновлення Інтенсивність відновлення Середній час відновлення

Продовження таблиці 1

1	2
Безвідмовність і ремонтопридатність	Коефіцієнт готовності Коефіцієнт простою Коефіцієнт технічного використання Коефіцієнт оперативної готовності
Довговічність	Призначений ресурс Середній ресурс між капітальними (середніми) ремонтами (міжремонтний ресурс) Середній термін служби
Збереженість	Середній термін збереження
Примітка – Для режимів зберігання і транспортування можуть застосовуватися аналогічно визначувані показники безвідмовності, наприклад, вірогідність безвідмовного зберігання (транспортування) до відмови, середній час зберігання (транспортування) на відмову	

1.3 Статистичні визначення основних показників надійності невідновлюваних об'єктів

1 Частота відмов. Перш за все визначимо статистично частоту відмов $f(t)$, яка, до речі сказати, має суто розрахункове значення і тому не подана в таблиці 2. Проте вона має важливе теоретичне значення, оскільки застосовується в розрахунках для зв'язку з іншими основними показниками надійності (безвідмовності).

Із статистичних даних, отриманих в результаті випробувань або дослідної експлуатації, частота відмов визначається за формулою

$$f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t}, \tag{1}$$

де $n(t)$ – число приладів, що відмовили, в даний інтервал часу випробувань Δt, тобто в період від $t - \frac{\Delta t}{2}$ до $t + \frac{\Delta t}{2}$;

N_0 – число приладів, спочатку взятих на випробування.

При користуванні цією та іншими формулами даного параграфа слід пам'ятати, що прилади, які відмовили, при випробуваннях не відновлюються і не замінюються новими [4, 5].

Приклад. На випробування поставлено 1000 однотипних транзисторів. Через кожних 1000 годин роботи враховувалося число транзисторів, що відмовили. Випробування продовжувалося до тих пір, доки не відмовили всі транзистори. Вибірку результатів випробувань подано в таблиці 2.

Таблиця 2 – Вибірка результатів випробувань транзисторів на надійність

Δt	$n(t)$	Δt	$n(t)$
0 - 1000	50	9000 - 10000	30
1000 - 2000	30	10000 - 11000	25
……….	……	………	…..
7000-8000	25	25000 - 26000	20

Використовуючи дані таблиці 2, розрахуємо частоту відмов для декількох інтервалів

$$f(500) = \frac{50}{1000 \cdot 1000} = 5 \cdot 10^{-5} \ {}^{1}\!/_{p.};$$

$$f(1500) = \frac{30}{1000 \cdot 1000} = 3 \cdot 10^{-5} \ {}^{1}\!/_{p.}.$$

Типова крива зміни частоти відмов об'єктів відповідно до формули (1) показана на рисунку 1. На цій кривій можна відзначити три характерні ділянки.

Перша ділянка (*I*) характеризується великими значеннями частоти відмов. Тут виявляються відмови, обумовлені грубими помилками в принциповій схемі або в конструкції об'єкта і технології його виготовлення, недотриманням вимог конструкторської і технологічної документації вживанням некондиційних матеріалів і елементів, слабким контролем якості виробів на всіх етапах їх проходження на заводі. Такі відмови зазвичай виявляються в процесі працювання (тренування) виготовлених пристроїв і їх випробувань в заводських умовах до введення в експлуатацію.

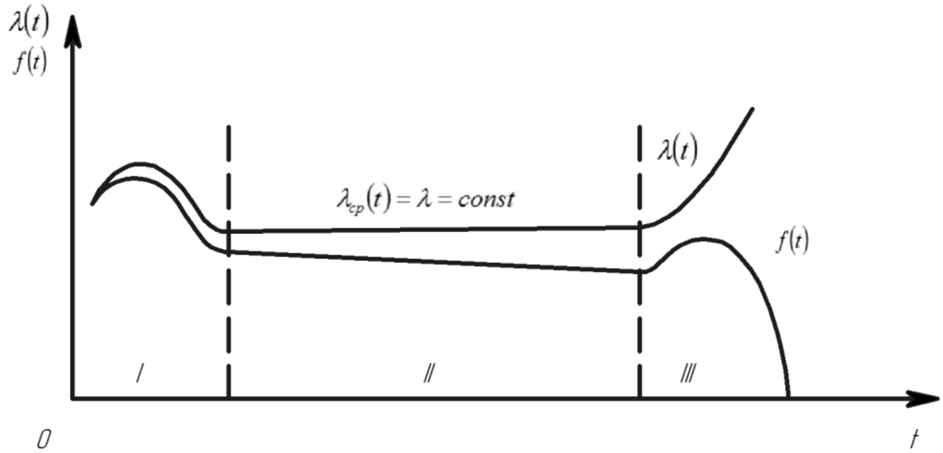


Рисунок 1 – Взаємне розташування кривих $f(t)$ і $\lambda(t)$

До цієї групи відмов можна віднести також експлуатаційні відмови, що викликані слабким знанням правил експлуатації (або відсутністю необхідного досвіду). Тому перший період називається періодом *припрацювання* об'єктів (елементів або пристроїв).

Друга ділянка (*II*) характерна порівняно постійним значенням частоти відмов і називається періодом *нормальної* експлуатації.

На третій ділянці (*III*) частота відмов спочатку знов зростає за рахунок настання старіння і зносу елементів або пристроїв, а потім падає до нуля. Цей період називається періодом *старіння*.

Частота відмов не може досить повно і якісно характеризувати надійність апаратури. Дійсно, з розглянутого прикладу виходить, що частота відмов за першу і останню тисячу годин відрізняється в 2,5 разу. Але надійність всієї системи (з 1000 транзисторів, поставлених на випробування) за ці проміжки часу далеко не однакова. За першу тисячу годин відмовило 50 приладів з 1000, а за останню – 20 із 20.

2 Інтенсивність відмов. Інтенсивність відмов $\lambda(t)$ із статистичних даних визначається за формулою

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{N(t)\Delta t}, \tag{2}$$

де $N(t)$ – середнє число приладів, що продовжують справно працювати в даний інтервал часу Δt (рисунок 2).

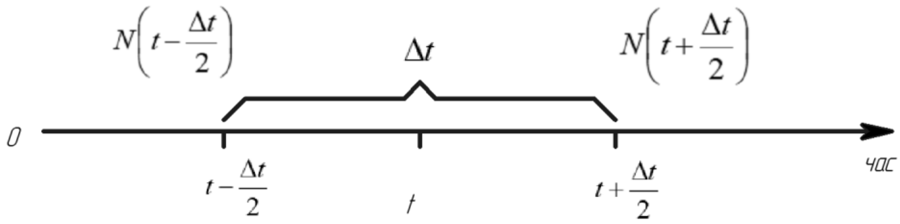


Рисунок 2 – Визначення $N(t)$

Виходячи з рисунка 2 число $N(t)$ визначається за формулою

$$N(t)=\frac{N\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)+N\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{2}.$$

Інтенсивність відмов характеризує міру надійності елементів (систем) в кожен заданий момент часу, тому є повнішою і якіснішою (точною) характеристикою надійності (безвідмовності).

Підставляючи у формулу (2) дані з таблиці. 2, отримаємо:

$$\lambda(500)=\frac{50}{\left(\frac{1000+950}{2}\right)\cdot 1000}=5{,}12\cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{р.};$$

$$\lambda(1500)=\frac{30}{\left(\frac{950+920}{2}\right)\cdot 1000}=3{,}12\cdot 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{р.}$$

$$\lambda(25500)=\frac{20}{\left(\frac{20+0}{2}\right)\cdot 1000}=2{,}0\cdot 10^{-3}\ {}^{1}\!/_{р.}$$

З порівняння даних по $f(t)$ і $\lambda(t)$ витікає, що $\lambda(t)$ на початку випробувань декілька вище $f(t)$, а в кінці випробувань – істотно вище $f(t)$.

Типова крива зміни інтенсивності відмов $\lambda(t)$ від часу експлуатації (у загальному випадку від часу напрацювання) показана на рисунку 1.

Крива $\lambda(t)$, так само, як і $f(t)$, має три характерні ділянки.

Тривалість *I* ділянки (періоду припрацювання) складає величину декілька десятків — декілька сотень годин залежно від складності об'єктів.

Для більшості елементів (пристроїв) в період *II* нормальної експлуатації $\lambda(t)$ змінюється досить повільно. Зазвичай вважають, що вона залишається постійною і рівною середній величині за цей період $\lambda_{cp}(t)$. Це усереднювання називають усереднюванням за часом.

На *III* ділянці величина $\lambda(t)$ має істотне зростання через старіння і зношування. Для багатьох виробів, особливо для об'єктів військового призначення, третій період часто не досягається, оскільки раніше настає «моральне старіння», при якому техніка списується.

Взаємне розташування кривих $f(t)$ і $\lambda(t)$ можна оцінити за рисунком 1.

Інтенсивність відмов, будучи одним з основних кількісних показників надійності (безвідмовності) елементів, широко використовується для визначення інших кількісних показників і при розрахунках надійності систем.

3 Вірогідність безвідмовної роботи. Під вірогідністю безвідмовної роботи розуміється вірогідність того, що в заданому інтервалі часу або в межах заданого напрацювання не виникне відмови [5]. Математично цей показник можна визначити як вірогідність того, що час *T* безвідмовної роботи, який є випадковою величиною, буде більше деякого заданого часу *t*, тобто

$$P(t) = P\{T > t\}.$$

Згідно з визначенням вірогідність безвідмовної роботи розраховується за формулою

$$P(t) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{N_0 - n(t)}{N_0}.$$

На практиці користуються наближеною формулою

$$P(t)=\frac{N_0-n(t)}{N_0}=1-\frac{n(t)}{N_0}. \qquad (3)$$

При цьому слід пам'ятати, що чим більше N_0, тим точніше можна визначити вірогідність безвідмовної роботи за формулою (3). Використовуючи дані таблиці 2, визначимо вірогідність безвідмовної роботи системи за час t=2000 *год*:

$$P(2000)=\frac{1000-(50+30)}{1000}=0{,}92.$$

Функція вірогідності безвідмовної роботи $P(t)$ є незростаючою функцією часу і володіє такими очевидними властивостями: 1) $0\le P(t)\le 1$; 2) $P(0)=1$; 3) $P(\infty)=0$.

Типова зміна $P(t)$ показана на рисунку 3. На практиці часто доводиться користуватися поняттям вірогідності відмови $Q(t)$, тобто події, протилежної до події безвідмовної роботи. За визначенням

$$Q(t)=P\{T>t\}=1-P(t).$$

Очевидно, що $P(t)+Q(t)=1$ як сума вірогідності протилежних подій.

Під вірогідністю відмови, таким чином, розуміють вірогідність того, що в заданому інтервалі часу або в межах заданого напрацювання виникне відмова.

Типова залежність вірогідності відмови від часу зображена на рисунку 3. Функція $Q(t)$ є неспадною функцією часу. Вона володіє такими очевидними властивостями: 1) $0\le Q(t)\le 1$; 2) $Q(0)=0$; 3) $P(\infty)=1$.

За вірогідністю $P(t)$ досить просто судити про надійність апаратури.

Буквами $P(t)$ і $Q(t)$ умовимося позначати вірогідність станів стосовно систем, а $p(t)$ і $q(t)$ — до елементів.

Наприклад, за кривими рисунка 3 визначаємо, що за час t_1 год випробувань відмовляє в середньому 30 % приладів і 70 % приладів в середньому працюватимуть справно.

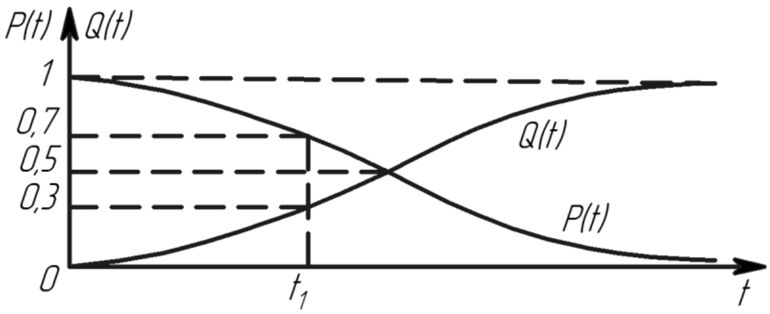


Рисунок 3 – Залежність вірогідності безвідмовної роботи і вірогідності відмови від часу

4 Середнє напрацювання до відмови. Для з'ясування суті будь-якого плану випробувань на надійність виробів умовимося будувати фізичну модель, подібно до поданої на рисунку 4

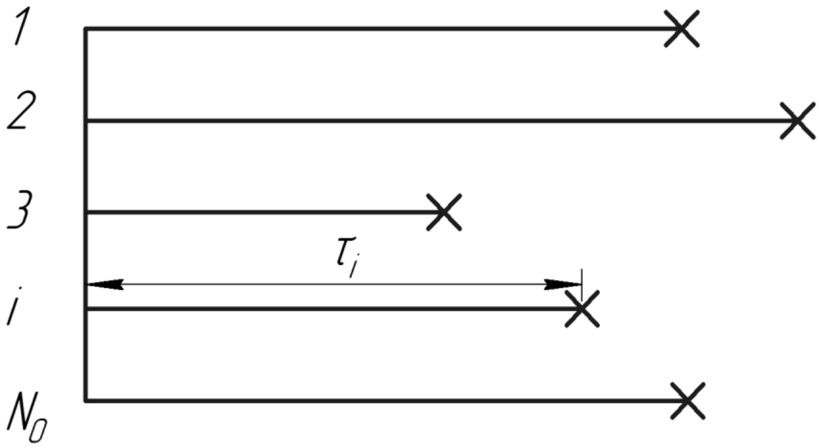


Рисунок 4 – Модель випробувань на надійність невідновних виробів

У простому випадку, коли за час випробувань відмовили всі вироби, середнє напрацювання повністю визначається за формулою

$$T_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0}\tau_i \,. \tag{4}$$

1.4 Статистичні визначення основних показників надійності відновлюваних об'єктів

Введені в попередньому пункті поняття $f(t)$, $\lambda(t)$, T_0 та $P(t)$, строго кажучи, можуть застосовуватися лише для невідновних елементів чи систем або ж для відновлюваних систем, але випробовуваних до першої відмови. В більшості своїй системи є відновлюваними (ремонтованими), тобто такими, відмови яких усуваються [1, 4, 5].

Для відновлюваних систем, наприклад, введене раніше визначення для вірогідності безвідмовної роботи може не мати сенсу.

Дійсно, може настати така ситуація, коли $n(t) > N_0$.

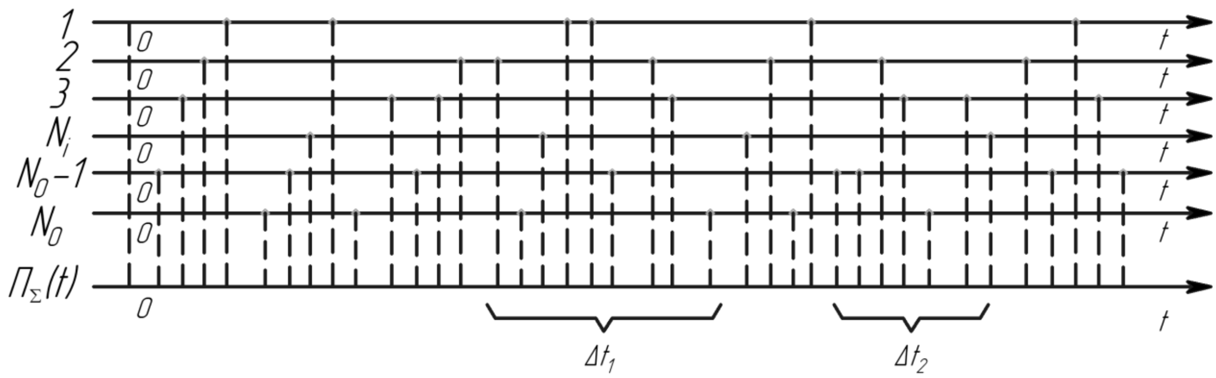


Рисунок 5 – Потік відмов відновлюваних систем

Тоді з формули $P(t) = 1 - \dfrac{n(t)}{N_0}$ виходить, що $P(t) < 0$, а цього не може бути.

Аналогічно втрачають фізичний сенс і поняття $f(t)$ і $\lambda(t)$. Тому для відновлюваних систем необхідно ввести нові поняття критеріїв надійності.

У теорії надійності як зручна фізична модель для опису потоку відмов відновлюваних систем (після періоду їх припрацювання) прийнятий так званий простий потік.

Простим потоком відмов називається такий потік, який задовольняє (одночасно) такі три умови: стаціонарності, ординарності і відсутності післядії.

Стаціонарність потоку означає, що кількість відмов за якийсь невеликий інтервал часу Δt не залежить від того, де розташовується на осі часу цей інтервал, а залежить лише від ширини (тривалості) цього інтервалу.

Умова стаціонарності може бути проілюстрована за допомогою рисунка 5.

Відмітимо, що умова стаціонарності на практиці виконується приблизно.

Ординарність означає, що за невеликий проміжок часу Δt маловірогідне виникнення двох і більше відмов. Умова ординарності математично записується таким чином:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q > 1}{\Delta t} = 0 .$$

Це означає, що $q > 1$ (вірогідність більша за одну відмову на інтервалі) є величина вищого порядку, ніж Δt. Тому умова ординарності на практиці в більшості випадків виконується (якщо не рахувати групових відмов або рахувати їх за одну).

Відсутність післядії означає, що кількість відмов після деякого моменту часу t_0 не залежить від того, скільки їх було до цього моменту. Цю умову потік відмов задовольняє не повністю.

Незважаючи на порушення першої і третьої умов у теорії і практиці надійності прийнято вважати, що потік відмов об'єктів, наприклад, електронного обладнання, є простим (для *II* ділянки залежності $\lambda(t)$, рисунка 1).

Визначимо для відновлюваних об'єктів показники надійності.

1 Параметр потоку відмов. Статистично параметр потоку відмов визначається як відношення загальної кількості відмов до сумарного напрацювання всіх випробовуваних (експлуатованих) об'єктів, тобто

$$\Lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} n_i(t)}{N_0 \Delta t} . \qquad (5)$$

У цю формулу значення Δt треба підставляти досить мале, щоб умова ординарності виконувалася. Якщо умова ординарності виконується, то завжди виконується і нерівність $\sum_{i=1}^{N_0} n_i(t) = n_i(t) < N_0$.

Це означає, що нерівність $P(t) < 0$ ніколи не матиме місця.

Визначимо $\Lambda(t)$ математично. Для цього побудуємо функцію $n(t)$ (загальна кількість відмов) наростаючим підсумком (рисунок 6). Якщо після деякого t_0 функція виявиться лінійною, то параметр потоку відмов $\Lambda(t)$ визначається таким чином:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n(t)}{\Delta t} = \frac{dn(t)}{dt} = \Lambda(t). \tag{6}$$

Тепер вкажемо на зв'язок між $\Lambda(t)$ і $\lambda(t)$. В літературі деякі автори без доказів вважають, що $\Lambda(t) = \lambda(t)$.

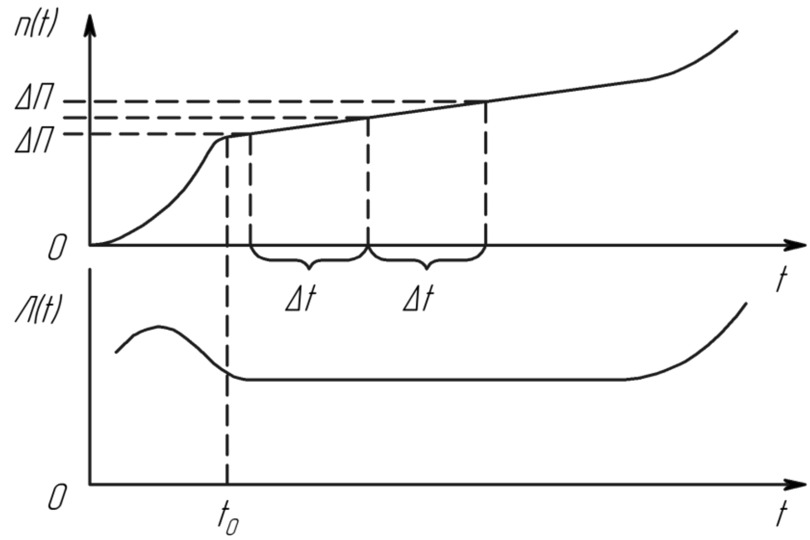


Рисунок 6 – Визначення параметра потоку відмов

Професор В. Л. Кузнецов довів теорему: «Інтенсивність відмов невідновлюваних елементів (систем) дорівнює параметру потоку відмов відповідних відновлюваних елементів (систем), якщо потоки відмов в обох випадках є простими».

Таким чином, для простого потоку справедлива рівність

$$\Lambda(t) = \lambda(t). \tag{7}$$

Примітка – Оскільки на практиці потік відмов відрізняється декілька від простого, то фактично має місце $\Lambda(t) \approx \lambda(t)$. Іноді замість $\Lambda(t)$ використовується позначення параметра потоку відмов як $\omega(t)$.

2 Напрацювання на відмову (середнє напрацювання на відмову). На практиці напрацювання на відмову визначається відношенням сумарного напрацювання відновлюваних об'єктів до сумарного числа відмов цих об'єктів за якийсь час випробувань.

Фізичну модель випробувань (до настання *r* відмов) подано на рисунку 7.

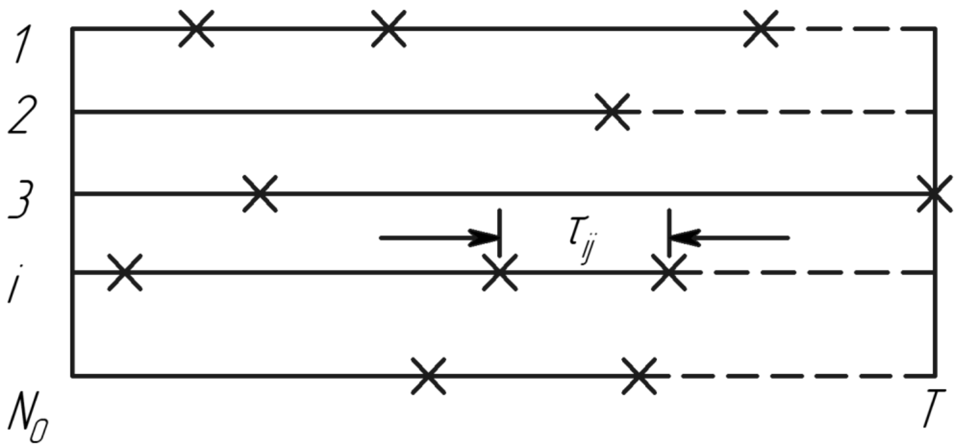


Рисунок 7 – Модель випробувань на надійність відновлюваних виробів

Згідно з поданою моделлю напрацювання на відмову

$$T_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{r} r_{ij}}, \quad (8)$$

де *j* – індекс номера відмови *i*-го об'єкта.

Із згаданої вище теореми витікає висновок, що

$$T_0 = \frac{1}{\Lambda}, \qquad (9)$$

оскільки $\Lambda = \lambda = \frac{1}{T_0}$.

3 Вірогідність безвідмовної роботи. Для експоненціального розподілу часу між відмовами відновлюваних систем (протягом нормального періоду експлуатації) вірогідність безвідмовної роботи визначається формулою

$$P(t) = e^{-\Lambda t} = e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (10)$$

тут параметр потоку відмов системи може визначатися як сумарна її інтенсивність, тобто

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i, \qquad (11)$$

де N – загальна кількість елементів у системі.

ЛЕКЦІЯ 2. Вірогіднісні визначення основних показників надійності і взаємозв'язок між ними. Основний закон надійності

Різні показники безвідмовності є кількісною мірою однієї загальної властивості технічного об’єкта – надійності. Відображаючи цю загальну властивість, вони, очевидно, мають бути між собою зв'язані. Приймемо план пошуку зв'язків, поданий на рисунку 8 (зв'язки позначені стрілками 1–4) [1, 4].

1 Зв'язок між $f(t)$, $P(t)$ **і (або)** $Q(t)$. Згідно з формулою (1) частота відмов, визначувана статистично,

$$f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t}.$$

Якщо розглядати *f*(*t*) як безперервну функцію і при цьому спрямувати інтервал часу Δt до нуля, то останній вираз можна записати як

$$f(t)=\frac{dn(t)}{N_0 dt}. \tag{12}$$

Якщо продиференціювати формулу (3), то отримаємо

$$\frac{dP(t)}{dt}=-\frac{dn(t)}{N_0 dt}. \tag{13}$$

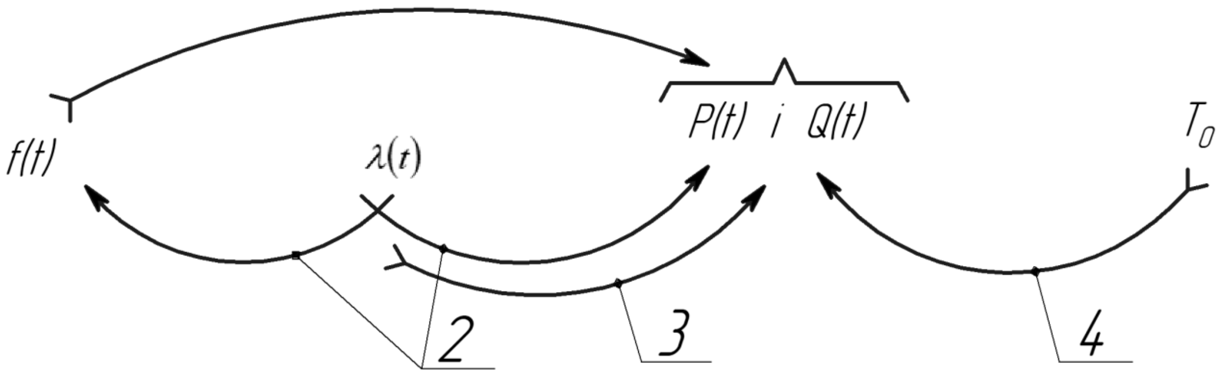


Рисунок 8 – План пошуку зв'язків між основними показниками надійності

Порівнюючи вирази (12) і (13), приходимо до висновку:

$$f(t)=-\frac{dP(t)}{dt}. \tag{14}$$

У літературі частоту відмов називають інколи швидкістю падіння надійності. Враховуючи, що $P(t)=1-Q(t)$, остаточно отримаємо

$$f(t)=-\frac{dP(t)}{dt}=\frac{dQ(t)}{dt}. \tag{15}$$

Відомо, що функція $Q(t)=P\{T<t\}$ є неуспадковуваною, а також при *t*=0

$$Q(0)=0;\ t\to\infty;\ Q(\infty)=1.$$

Ці властивості функції $Q(t)$ визначають її як функцію розподілу часу T безвідмовної роботи, названу інтегральним законом розподілу, що позначається $F(t)$. Отже $Q(t)=F(t)$.

Рівняння (15) описує щільність вірогідності або щільність розподілу вірогідності випадкової величини – часу безвідмовної роботи.

Вірогідність відмови можна отримати інтегруванням рівняння (15) в межах від 0 до t. Тоді після інтегрування знаходимо

$$Q(t)=\int_0^t f(t)dt. \tag{16}$$

Вірогідність безвідмовної роботи, згідно з визначенням, можна записати як

$$P(t)=1-Q(t)=1-\int_0^t f(t)dt=\int_0^\infty f(t)dt-\int_0^t f(t)dt=\int_t^\infty f(t)dt. \tag{17}$$

Вираз (17) є одним з основних в теорії надійності і його називають другою формою запису основного закону надійності.

Різновидом цієї форми запису є

$$P(t)=1-\int_0^t f(t)dt. \tag{18}$$

Формули (16) і (17) можна ілюструвати рисунком 9.

Якщо функція $f(t)$ аналітично відома, то площа під кривою $f(t)$ до якогось фіксованого значення t чисельно дорівнює вірогідності відмови $Q(t)$, а від t до ∞ – вірогідності безвідмовної роботи $P(t)$.

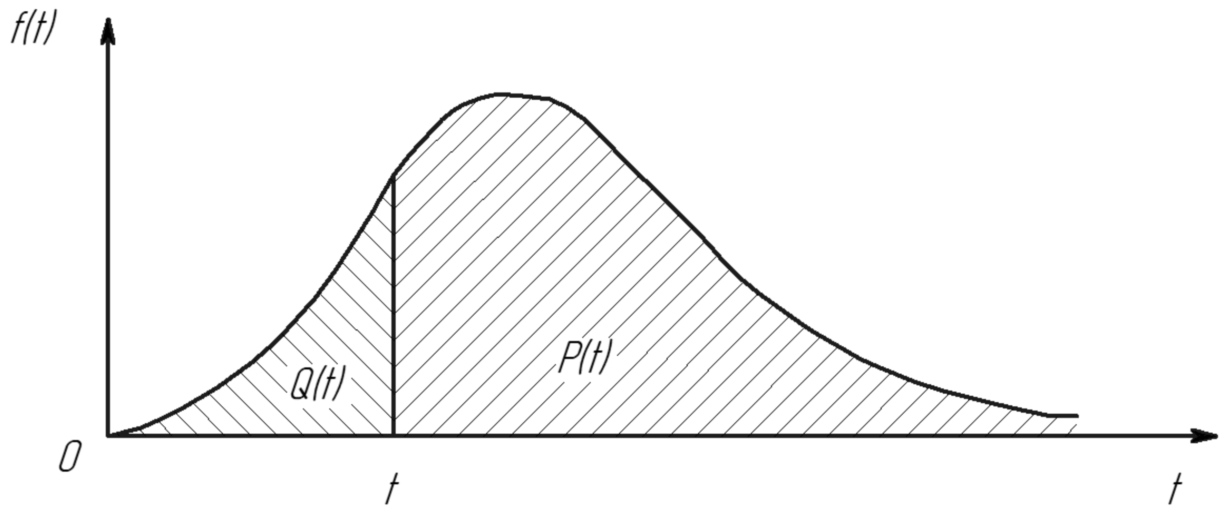


Рисунок 9 – Графічне визначення $P(t)$ та $Q(t)$

2 Зв'язок між λ(*t*), *f*(*t*), *P*(*t*) і (або) *Q*(*t*). Згідно з виразом (2), маємо

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{N(t)\Delta t}.$$

Якщо тепер передбачити, що функція λ(t) безперервна і спрямувати $\Delta t \to 0$, то

$$\lambda(t) = \frac{dn(t)}{N(t)dt}. \tag{19}$$

Але

$$N(t) = N_0 - N_0 Q(t) = N_0[1 - Q(t)] = N_0 P(t). \tag{20}$$

Підставивши значення (20) у формулу (19), отримаємо

$$\lambda(t) = \frac{dn(t)}{N_0 P(t)dt} = \frac{dn(t)}{P(t)N_0 dt}. \tag{21}$$

Порівнюючи вирази (21) і (12), остаточно отримаємо

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \tag{22}$$

або

$$P(t)=\frac{f(t)}{\lambda(t)}. \qquad (23)$$

З формули (23) виходить, що $\lambda(t)=f(t)$ лише за умови, що до заданого моменту часу всі елементи працювали справно, тобто коли $t=0$, $P(t)=1$.

З формули (23) видно, що $\lambda(t)\geq f(t)$, оскільки $P(t)\leq 1$.

Сказане можна проілюструвати графіками, поданими на рисунку 1.

У літературі формула (22) зустрічається також і в таких різновидах:

$$\begin{cases} \lambda(t)=\dfrac{f(t)}{1-F(t)}=\dfrac{1}{1-F(t)}\cdot\dfrac{dF(t)}{dt}; \\ \lambda(t)=-\dfrac{1}{p(t)}\cdot\dfrac{dP(t)}{dt}; \\ \lambda(t)=\dfrac{1}{1-Q(t)}\cdot\dfrac{dQ(t)}{dt}; \\ \lambda(t)=\dfrac{f(t)}{\int\limits_t^{\infty} f(t)dt}. \end{cases} \qquad (24)$$

3 Зв'язок між $\lambda(t)$ та $P(t)$. Основний закон надійності. Підставивши вираз (14) у формулу (22), отримаємо

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=-\frac{dP(t)}{P(t)dt}, \qquad (25)$$

або

$$\lambda(t)dt=-\frac{dP(t)}{P(t)}. \qquad (26)$$

Помноживши вираз (26) на мінус одиницю, отримаємо

$$\frac{dP(t)}{P(t)}=-\lambda(t)dt. \qquad (27)$$

Проінтегруємо вираз (27) в межах від 0 до якогось фіксованого значення *t*:

$$\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = -\int_0^t \lambda(t)dt \,. \tag{28}$$

Інтеграл від лівої частини дорівнює натуральному логарифму підінтегральної функції. Після підстановки верхньої і нижньої меж інтеграції в ліву частину формули (28) можна записати

$$\ln P(t) - \ln P(0) = -\int_0^t \lambda(t)dt \,. \tag{29}$$

У цій формулі $P(0)=1$, тому $\ln 1 = 0$.

$$\ln P(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt \,,$$

звідки за визначенням натуральних логарифмів маємо

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \,. \tag{30}$$

Останній вираз має величезне значення в теорії надійності і носить назву основного (загального) закону надійності (перша форма його запису).

Друга форма запису основного закону надійності є

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t)dt \,.$$

Тут під терміном «надійність», як і в багатьох джерелах літератури, розуміється вірогідність безвідмовної роботи.

За допомогою останніх двох формул можна визначити $P(t)$ за відомими $\lambda(t)$ або $f(t)$ відповідно. Але за допомогою цих формул в загальному випадку неможливо визначити характер зміни $P(t)$ від часу, так як самі $\lambda(t)$ та $f(t)$ змінюються в часі. Тому, хоча $P(t)$, згідно з формулою (30), і виражена через експоненту, вона далеко не буде експонентою.

У зв'язку з цим на практиці розглядаються окремі випадки з певними обмеженнями на поведінку $\lambda(t)$.

4 Зв'язок між T_0 та $P(t)$. Напрацювання на відмову T_0 (що є середнім напрацюванням на відмову для відновлюваних виробів) визначається як математичне очікування випадкового часу *T* безвідмовної роботи.

За визначенням для безперервної величини *t* маємо

$$T_0 = M[T] = m_t = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty tdQ(t) = -\int_0^\infty tdP(t). \tag{31}$$

Застосуємо до останньої рівності правило інтегрування по частинах. Для цього зробимо заміну змінної: $t = u$, $du = dt$; $dP(t) = dV$, $P(t) = V$.

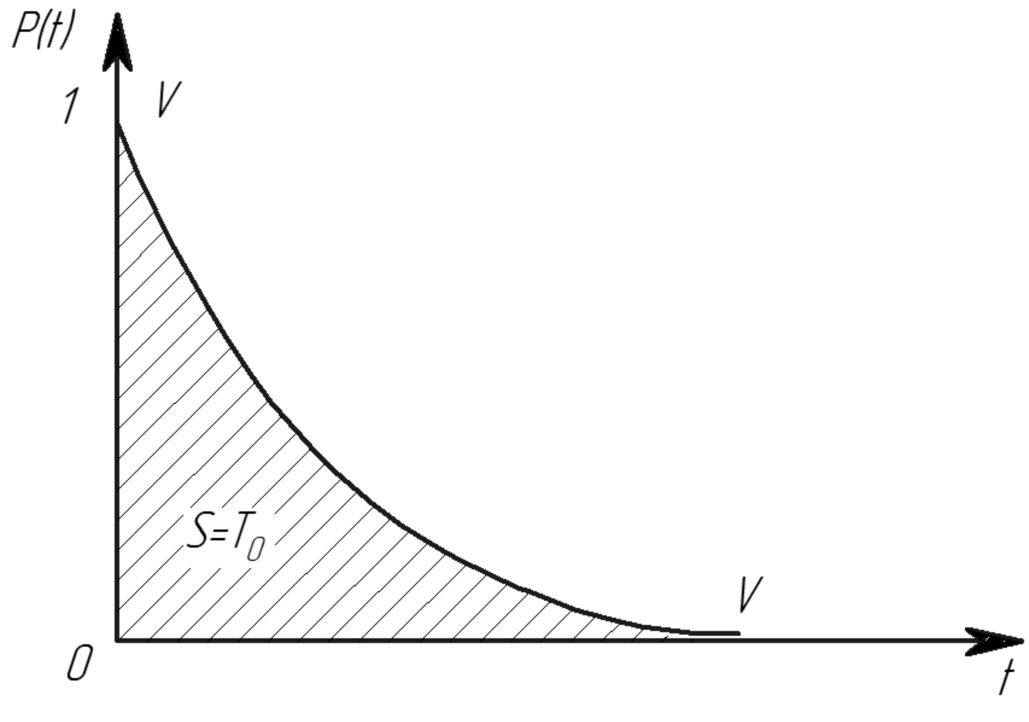


Рисунок 10 – Фізична інтерпретація напрацювання на відмову

Нагадаємо правило інтегрування:

$$\int_0^\infty u dV = uV \Big|_0^\infty - \int_0^\infty V du .$$

Тоді

$$T_0 = -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt . \qquad (32)$$

Перший доданок у виразі (32) при нижній межі інтегрування дорівнює нулю, так як $P(0)=1$, а $t=0$; при верхній теж дорівнює нулю, так як $P(t \to \infty)$ швидше прямує до нуля, ніж $t \to \infty$.

Тоді остаточно отримаємо

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt . \qquad (33)$$

Формула (33) є загальною для будь-якого закону розподілу. Фізично напрацювання на відмову є площа *S*, що обмежена функцією $P(t)$ і осями координат. Останнє ілюструється рисунком 10.

5 Зв'язок між однією (відомою) з чотирьох функцій – $P(t)$, $Q(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ і іншими (невідомими). Якщо хоча б один з основних показників надійності відомий, то інші можуть бути визначені за формулами, наведеними в таблиці 3.

Таблиця 3 – Взаємозв'язок між основними показниками надійності

Відома функція	Визначення трьох інших через відому			
	$P(t)$	$Q(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$P(t)$	–	$1-P(t)$	$-\frac{d}{dt}P(t)$	$-\frac{d}{P(t)}\frac{d}{dt}P(t)$
$Q(t)$	$1-Q(t)$	–	$\frac{d}{dt}Q(t)$	$-\frac{1}{1-Q(t)}\frac{d}{dt}Q(t)$
$f(t)$	$\int_t^{\infty} f(t)dt$	$\int_0^t f(t)dt$	–	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(t)dt}$
$\lambda(t)$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	–

Примітка – У формулах таблиці 3 домовилися позначати аргумент підінтегральних функцій однаково з позначенням меж інтегрування і позначенням аргументу шуканих функцій, допускаючи при цьому деяку математичну нестрогість (заради простоти запису).

2.1 Використання основних законів розподілу часу безвідмовної роботи при оцінці показників надійності

У теорії надійності зустрічаються різні закони розподілу випадкового часу *T* до настання відмов або, як кажуть коротко, розподілу відмов. Однак основні з них, що досить часто використовуються в інженерній практиці, тільки два: експоненціальний і нормальний, розгляду яких і приділено надалі основну увагу [1, 2, 5].

Експоненціальний розподіл. Для практики становить значний інтерес основний II період експлуатації (див. рисунок 1). В цьому випадку допустимо прийняти $\lambda(t)=\lambda_{cp}=\lambda=const$. Тоді формулу (30) можна записати в такому вигляді:

$$P(t)=e^{-\lambda t}. \qquad (34)$$

Вираз (34) отримав назву *експоненціального закону* надійності.

Цей закон набув дуже широкого застосування на практиці, по-перше, тому, що з достатнім (для інженерної практики) ступенем наближення відповідає дійсній зміни $P(t)$ в основний період експлуатації, і, по-друге, тому, що він досить просто пов'язує основний показник надійності λ елементів з показниками надійності системи T_0 та ін.

Графік зміни $P(t)$ для випадку експоненціального закону надійності наведено на рисунку 11. Він являє собою експоненту з початковими умовами $P(0)=1$, $P(\infty)=0$ і параметром $\lambda_{cp} = \lambda$.

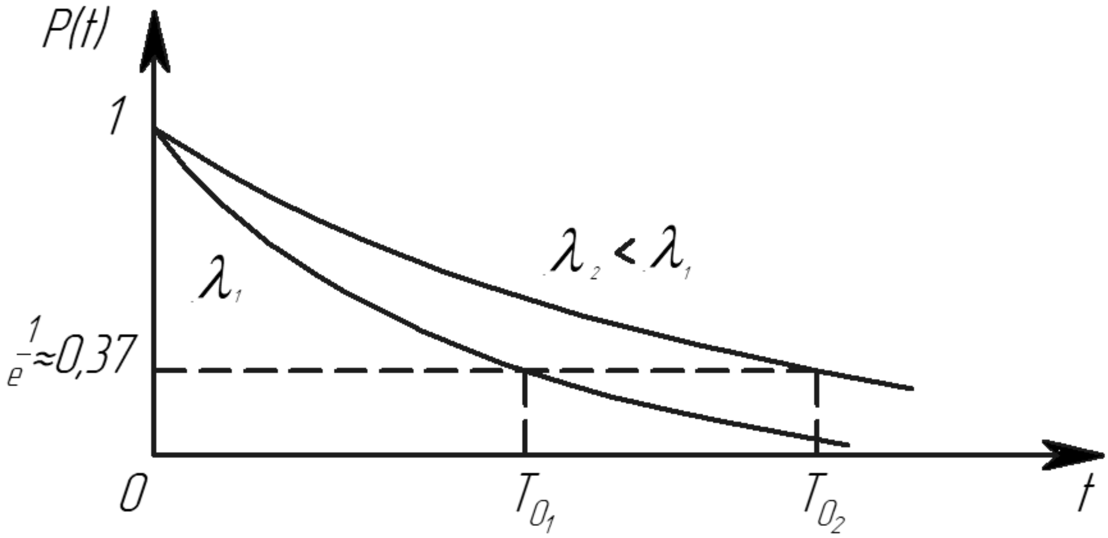


Рисунок 11 – Графік зміни $P(t)$ при експоненціальному законі надійності

Розглянемо деякі з показників в разі експоненціального закону надійності.

Напрацювання на відмову T_0, що є середнім напрацюванням на відмову, визначається як математичне сподівання випадкової величини часу T безвідмовної роботи. За допомогою формули (33) для експоненціального закону надійності маємо

$$T_0 = M[T] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

При верхній межі інтегрування отриманий вираз перетворюється в нуль, а при нижній – в одиницю.

Напрацювання на відмову кількісно являє площу, обмежену функцією $P(t)$ і осями координат (див. рисунок 10).

Таким чином, напрацювання на відмову при експоненціальному законі надійності є величиною, оберненою інтенсивності відмов

$$T_0 = \frac{1}{\lambda}. \tag{35}$$

Тоді експоненціальний закон надійності можна записати у вигляді

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{T_0}}. \tag{36}$$

Зауважимо на підставі виразу (1.36), що при експоненціальному законі надійності значення вірогідності $P(t)$ за час $t = T_0$ складе

$$P(T_0) = e^{-\frac{T_0}{T_0}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}37.$$

Таким чином, напрацювання на відмову дорівнює часу, протягом якого значення $P(t)$ зменшиться до величини, що дорівнює приблизно 0,37. Цей висновок дає можливість визначити T_0 безпосередньо за графіком (див. рисунок 11).

З цього випливає один наслідок. Якщо N_0 приладів, поставлених на випробування, будуть безперервно працювати час $t = T_0$, то до моменту T_0 відмовить приблизно 63 % від N_0 приладів. Зауважимо, що якщо $\lambda t << 1$, то $P(t)$ можна обчислити наближено, розкладаючи $P(t)$ в ряд і обмежуючись двома першими членами:

$$P(t) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \dots;$$
$$P(t) \approx 1 - \lambda t.$$

Тепер знайдемо вираз для *частоти відмов*. На підставі виразу (14) отримаємо

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (37)$$

Отже, в разі експоненціального закону надійності частота відмов (щільність вірогідності) підпорядковується також експоненціальному закону.

Зауважимо, що це справедливо тільки для II (нормального) періоду експлуатації, коли $\lambda(t) = \lambda = const$.

Якщо розглянутий інтервал часу невеликий, а інтенсивність відмов досить мала ($\lambda t << 1$), то формула (37) може бути перетворена до вигляду

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \lambda\left(1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \ldots\right) \approx \lambda .$$

Це співвідношення на практиці не відіграє суттєвої ролі, його лише треба мати на увазі в теоретичному плані. Розглянемо площу під кривою $f(t)$

$$S = \int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt = -\frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^\infty = 1.$$

Якщо взяти якийсь фіксований момент часу t (рисунок 10), то площа під кривою до t буде $Q(t)$, а після – $P(t)$.

Якщо мова йде про закон надійності (функції надійності), то його назва визначається видом $P(t)$, а якщо про закон розподілу відмов, то видом $f(t)$.

У нашому окремому випадку види $f(t)$ і $P(t)$ однакові – експоненціальні, але для інших розподілів відмінності є.

Експонентний закон надійності справедливий тільки для потоку раптових відмов, тобто передбачається, що старіння, знос і розрегулювання відсутні, а моменти появи інших відмов передбачити важко, тому вони називаються раптовими. Раптові відмови, що підкоряються експоненціальному розподілу, прогнозувати принципово неможливо. При старінні, зношуванні і інших факторах, як відомо, має місце інший закон, зокрема, нормальний. Такі відмови передбачати і попереджати можливо і потрібно.

Дослідження останніх років показують, що більшість відмов, в тому числі і тих, що вважалися раніше раптовими, мають свою передісторію, свої характерні риси, ознаки зародження і розвитку, які названі оповіщувачами. Прогнозувати за оповіщувачами можна і раптові відмови. Інакше кажучи, частину раптових відмов, якщо не всі, можна звести до категорії поступових. Інша справа, що процеси розвитку частини раптових відмов закриті від спостерігача, тому проявляються вони як раптові.

Нормальний розподіл. Нормальний закон розподілу відмов застосовується для опису поступових відмов або для III періоду експлуатації об'єктів, коли наступають старіння і знос (див. рисунок 1). Цьому ж закону підкоряються відмови, викликані розрегулюваннями, відхиленнями параметрів апаратури за поле допусків та ін.

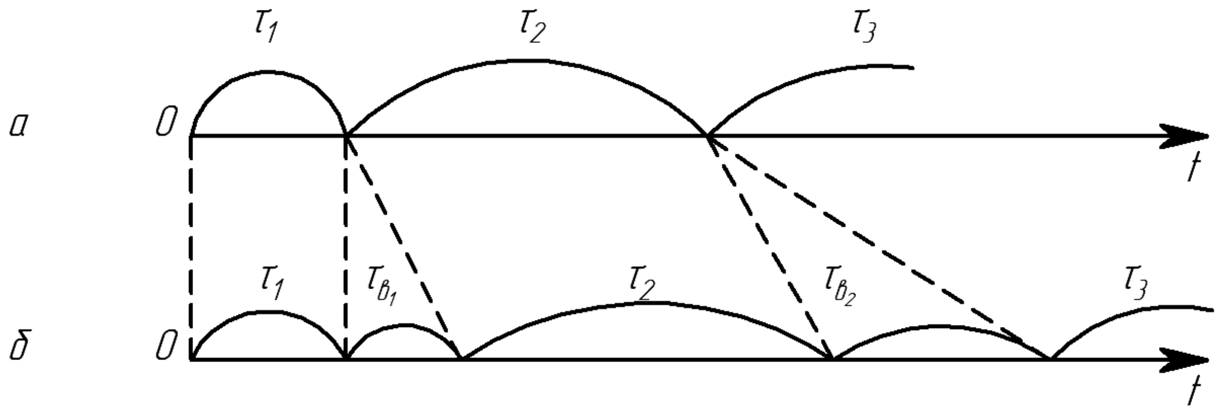
2.2 Основні показники ремонтопридатності, довговічності і зберігання об'єктів. Комплексні показники надійності

1 Ремонтопридатність. Іншою важливою характеристикою надійності є ремонтопридатність (в сенсі відновлюваності).

При розгляді безвідмовності припускалася схема роботи об'єкта, що показана на рисунку 12, а, тобто така: робота – відмова (миттєве усунення) – робота і т. д. [4].

Насправді усунення відмови миттєво не відбувається і реальна схема роботи об'єкта виглядає так, як показано на рисунку 12, б [1].

Час відновлення τ_B в загальному випадку залежить від багатьох факторів: характеру відмови, умов його знаходження, кваліфікації фахівців та ін. У нього зазвичай враховується час, що витрачається на виявлення, пошук причини і усунення наслідків відмови. Як фактори, так і цей час в різних ситуаціях можуть бути різні. Тому час τ_B розглядається як випадкова величина. Отже, для опису процесу відновлення можна застосувати апарат теорії вірогідностей.



а – без урахування часу відновлення; б – з урахуванням часу відновлення

Рисунок 12 – Схема роботи і відновлення об'єктів

Якщо за основний критерій (показник) ремонтопридатності прийняти *вірогідність відновлення* (завершення ремонту) в заданий час t_B, тобто вірогідність того, що випадковий час τ_B буде не більше якогось t_B, то вірогідність $V(t_B) = P\{\tau_B \le t_B\} = F(t_B)$ за визначенням є не що інше, як функція (закон) розподілу часу виконання відновлення.

Якщо в теорії безвідмовності вірогідність $P\{\tau_B \le t_B\} = F(t_B) = Q(t)$ є вірогідність того, що відмова здійсниться, то в теорії ремонтопридатності (відновлення) аналогічна функція $F(t_B)$ виявляється вірогідністю того, що відновлення здійсниться (відбудеться).

На цій підставі зробимо порівняння аналогічних показників безвідмовності і ремонтопридатності, таблиця 4.

Таблиця 4 – Порівняння аналогічних показників безвідмовності і ремонтопридатності

Безвідмовність	Ремонтопридатність
$Q(t)=F(t)$	$F(t_B)=V(t_B)$
$P(t)=1-Q(t)$	$1-V(t_B)=P(t_B)$
$P(t)=e^{-\int_0^1 \lambda(t)dt}$	$P(t_B)=e^{-\int_0^{t_B} \mu(t_B)dt_B}$
$\lambda(t)=\lambda$	$\mu(t_B)=\mu$
$P(t)=e^{-\lambda t}$	$P(t_B)=e^{-\mu t_B}$
	$V(t_B)=1-P(t_B)=1-e^{-\mu t_B}$
$f(t)=-\frac{dP(t)}{dt}=\lambda e^{-\lambda t}$	$f(t_B)=-\frac{d}{dt}P(t_B)=\mu e^{-\mu t_B}$
$T_0=\frac{1}{\lambda}$	$T_B=\frac{1}{\mu}$
$T_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_i}{n}$	$T_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_{Bi}}{n}$

Тут припускаємо справедливість експоненціального закону розподілу часу τ_B, при якому справедливо $\mu(t_B)=\mu$. Цей закон найбільш часто використовується в теорії і практиці відновлення. Тому інших законів розглядати не будемо.

2 Довговічність. Основними показниками довговічності є:

призначений ресурс – сумарне напрацювання об'єкта, при досягненні якого застосування за призначенням повинно бути припинено;

середній ресурс між капітальними ремонтами (міжремонтний ресурс) – середній ресурс між суміжними капітальними (різного обсягу) ремонтами об'єкта;

середній термін служби – математичне очікування терміну служби.

3 Збереженість. Основним показником зберігання є середній термін зберігання.

Середній термін зберігання – математичне очікування терміну зберігання. Збереженість об'єкта характеризується його здатністю протистояти негативному впливу умов зберігання і транспортування об'єкта на його безвідмовність і довговічність.

Тривале зберігання і транспортування іноді непомітно відображаються на поведінці об'єкта під час його перебування в цих режимах, але при подальшій роботі показники надійності таких об'єктів можуть виявитися значно нижчими, ніж аналогічні показники однотипних об'єктів, які не перебували на зберіганні і не піддавалися транспортуванню.

Наприклад, після тривалого зберігання акумуляторів їх ємність, а отже, напрацювання до відмови істотно зменшуються, хоча під час зберігання виникають відмови лише відносно невеликого числа виробів. Збереженість подібних виробів зазвичай характеризується таким терміном перебування на зберіганні в певних умовах, протягом якого зменшення середнього напрацювання до відмови, обумовлене зберіганням, знаходиться в допустимих межах.

Таким чином, термін зберігання не можна ототожнювати з терміном виникнення відмови під час зберігання. Останній характеризує поведінку об'єкта (його безвідмовність) тільки під час зберігання і не характеризує вплив зберігання на безвідмовність об'єкта при подальшій роботі.

Термін зберігання визначає календарну тривалість зберігання і транспортування об'єкта в заданих умовах з урахуванням проведення необхідного технічного обслуговування, встановленого в технічній документації на об'єкт.

4 Комплексні показники надійності. Комплексні показники надійності характеризують два і більше властивостей надійності. Найбільш часто використовуються на практиці комплексні показники надійності, що характеризують безвідмовність і ремонтопридатність одночасно. Розглянемо основні з них [1, 3, 4, 5].

Коефіцієнт готовності $k_Г$ – вірогідність того, що об'єкт виявиться в працездатному стані в довільний момент часу, крім запланованих періодів, протягом яких використання об'єкта за призначенням не передбачається.

Для будь-яких розподілів часу роботи між відмовами і часу відновлення, що мають кінцеві середні значення T_0 і T_B в сталому (стаціонарному) режимі експлуатації (тобто при $t \to \infty$), можна записати

$$k_Г = \lim_{t\to\infty} k_Г(t), \tag{38}$$

або

$$k_Г = \frac{T_0}{T_0 + T_В}. \tag{39}$$

Коефіцієнт технічного використання – відношення математичного очікування інтервалів часу перебування об'єкта в працездатному стані за деякий період експлуатації до суми математичних очікувань часу перебування об'єкта в працездатному стані, простоїв, обумовлених технічним обслуговуванням, і ремонтів за той же період експлуатації.

Статистично коефіцієнт технічного використання визначається за формулою

$$k_{ТВ} = \frac{t_{роб}}{t_{роб} + t_{рем} + t_{обсл}}, \tag{40}$$

де $t_{роб}$ – сумарне напрацювання всіх об'єктів;

$t_{рем}$ – сумарний час простоїв через планові і позапланові ремонти всіх об'єктів;

$t_{обсл}$ – сумарний час простоїв через планові та позапланові технічні обслуговуваня всіх об'єктів.

Час простою з організаційних причин тут не враховується.

Коефіцієнт оперативної готовності – вірогідність того, що об'єкт виявиться в працездатному стані в довільний момент часу, крім запланованих періодів, протягом яких застосування об'єкта за призначенням не передбачається, і, починаючи з цього моменту, буде працювати безвідмовно протягом заданого інтервалу часу.

Коефіцієнт оперативної готовності $k_{ОГ}$ характеризує надійність об'єктів, необхідність застосування яких виникає в довільний момент часу, після якого потрібна певна безвідмовна робота.

$$k_{ОГ} = P(t)k_Г.$$

ЛЕКЦІЯ 3. Методи підвищення надійності

3.1 Можливі шляхи підвищення надійності

Як зазначалося раніше, надійність залежить від великої кількості факторів [1, 2]. Шляхи та методи підвищення надійності визначаються локалізацією тих чи інших факторів і поділяються на два основні класи:

- перший клас – шляхи і методи підвищення надійності в процесі проектування і виробництва;

- другий клас – шляхи і методи забезпечення (підтримки) надійності в процесі експлуатації.

Рівень надійності обладнання закладається на стадії проектування і виробництва, а процес експлуатації пов'язаний з забезпеченням потенційно можливої надійності, досягнутої при конструюванні і виробництві. Однак певними заходами в процесі експлуатації можна підвищити надійність і навіть перевершити промисловий рівень. Це досягається насамперед проведенням допрацювань на обладнанні, спрямованих на усунення відмов, що систематично виникають, а також іншими заходами [2].

Розглянемо більш докладно згадані два класи.

Перший клас. Існує цілий ряд шляхів і методів, що дозволяють отримати високонадійну апаратуру на етапі проектування і виробництва. Основні з них можуть бути визначені за такою формулою:

$$P(t) = e^{-t\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(v)} = e^{-t\sum_{i=1}^{k}N_i\lambda_i(v)}. \tag{41}$$

1 Застосування високонадійних елементів. Надійність обладнання багато в чому залежить від надійності складових його елементів. Чим надійніше будуть елементи, з яких складається обладнання, тим надійніше буде і все обладнання.

2 Проектування максимально простого обладнання. Чим менше елементів N в обладнанні, тим більш надійним воно буде. Але, на жаль, простота обладнання знаходиться в протиріччі з усе зростаючими вимогами щодо його функцій, тобто до вимог вирішувати все більш складні і різноманітні завдання.

3 Особливо важливо забезпечити полегшені електричні та теплові режими в перехідні періоди ввімкнення і вимкнення обладнання.

4 Застосування раціональних методів конструювання. При конструюванні обладнання повинні передбачатися методи і засоби захисту від зовнішніх впливів:

- вологи (герметизація, покриття монтажу вологозахисним лаком, застосування смол та ін.);
- тепла (обдування, кондиціювання, відведення тепла);
- вібрацій, ударів (амортизація)
- тиску (герметизація).

5 Застосування різних методів резервування, і, зокрема, одного з основних – методу структурного резервування.

Другий клас охоплює такі напрямки:

1 Проведення допрацювань.

2 Зниження коефіцієнтів навантажень в перехідних режимах при вмиканні та вимиканні.

3 Застосування раціональних режимів використання.

4 Прогнозування відмов.

5 Застосування резервування.

6 Виконання всіх планових профілактичних заходів.

7 Інструментальна перевірка і тренування всіх деталей і вузлів, з яких складається обладнання в обмін на ті, що вийшли з ладу.

8 Кваліфікована інженерно-технічна підготовка обслуговуючого персоналу.

9 Удосконалення форм і методів організації експлуатації на основі розробки і впровадження наукової організації праці та ін.

Розглянемо більш докладно шляхи та методи підвищення надійності обладнання при перехідних режимах його роботи, раціональних режимах використання обладнання і підвищення надійності методами резервування.

3.2 Метод плавної зміни живильної напруги при ввімкненні і вимкненні електричного обладнання (ЕО)

Метод плавної зміни напруги живлення (первинних змінних напруг) при ввімкненні і вимкненні електричного обладнання в теорії надійності відноситься по суті до методу зниження коефіцієнта навантаження в перехідних режимах [1, 3].

Для відновлюваних систем в основний період експлуатації справедливий експоненціальний закон надійності

$$P(t) = e^{-\Lambda t}, \tag{42}$$

де Λ – параметр потоку відмов системи.

При виведенні цієї формули виходять з припущення, що $\Lambda = \varphi(t)$ і не залежить від числа ввімкнень електричного обладнання в робочий стан (числа циклів). Насправді надійність істотно залежить від числа циклів *n* ввімкнено – вимкнуто.

Тоді

$$\Lambda = \varphi(t, F),$$

де $F = \dfrac{n}{t}$ – частота ввімкнень;

t – напрацювання.

Експериментальні дослідження показують, що залежність $\Lambda(F)$ апроксимується рівнянням прямої (рисунок 13)

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_c F, \tag{43}$$

де λ_0 – складова параметра потоку відмов електричного обладнання, що безперервно працює, тобто при $F = 0$;

λ_c – коефіцієнт, що характеризує нахил прямої, тобто тангенс кута нахилу. Фізично він означає число відмов, які виникають за рахунок впливу перехідних режимів, на один цикл вимкання – вимикання.

Перетворимо $\Lambda(F)$

$$\Lambda = \lambda_0\left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda_0}F\right)$$

і позначимо відношення $\frac{\lambda_c}{\lambda_0} = k_c$, яке назвемо коефіцієнтом циклічності.

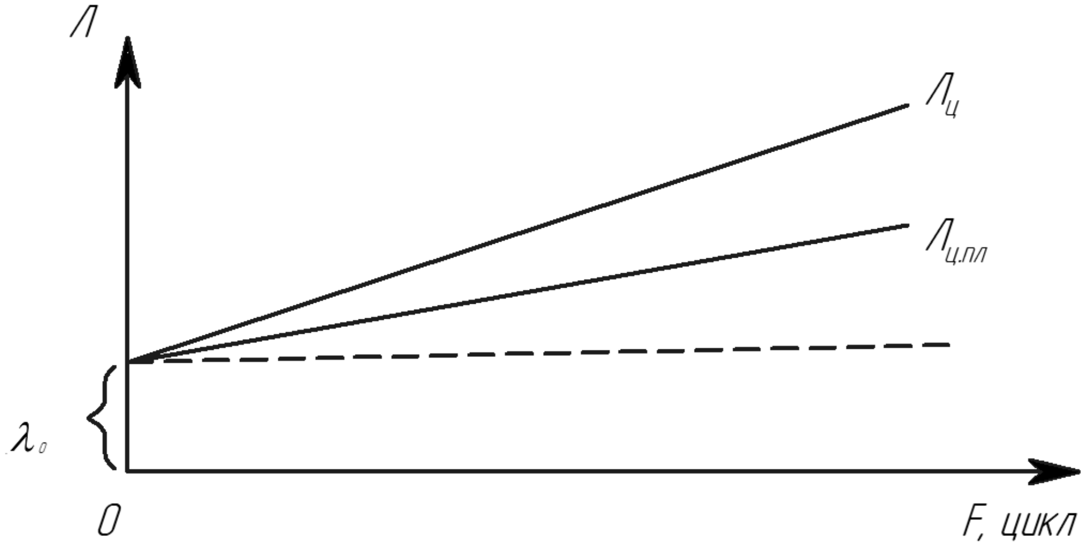


Рисунок 13 – Залежність параметра потоку відмов від частоти ввімкнень у циклічному режимі $\Lambda_ц$ і циклічному плавному режимі $\Lambda_{ц.пл.}$

Тоді формула (42) набуде вигляду

$$P(T) = e^{-(\lambda_0 + \lambda_c F)t}, \tag{44}$$

$$P(T) = e^{-\lambda_0 (1 + k_c F)t}. \tag{45}$$

Дослідження показують, що в основний період експлуатації (тобто після періоду напрацювання) як λ_0, так і k_c є постійними величинами для даної апаратури і якщо їх знати, то оцінка надійності з урахуванням циклічності труднощів не складе.

Залежність $P(T)$, тобто вірогідності безвідмовної роботи на інтервалі $0 - T$, при зміні частоти ввімкнень та фіксованого сумарного напрацювання має вигляд, зображений на рисунку 14.

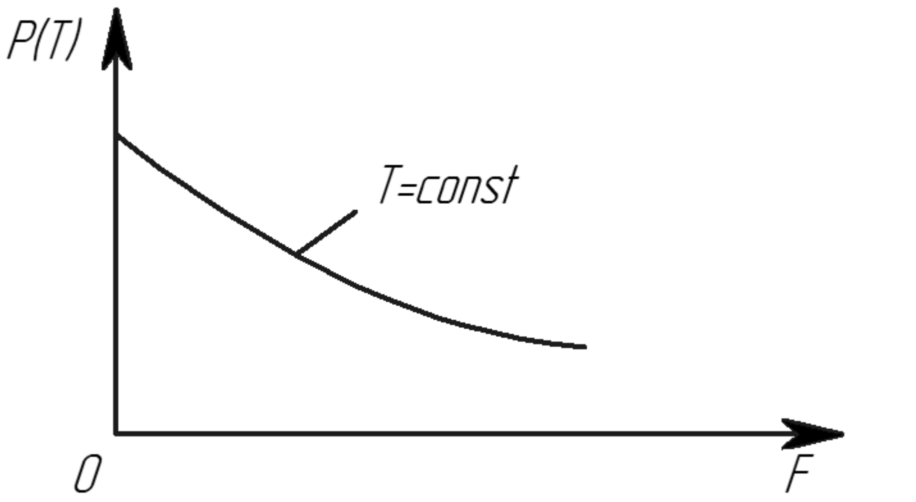


Рисунок 14 – Залежність вірогідності *P*(*T*) від частоти ввімкнень

Якщо електричне обладнання використовувати в циклічному режимі так, що кожен раз при його ввімкненні (тобто під час перехідних процесів) плавно (поступово) збільшувати живильну напругу і відповідно плавно зменшувати при вимкненні, то виявиться, що можна досягти зниження коефіцієнта циклічності в кілька разів і за рахунок цього підвищити загальну надійність (безвідмовність) роботи ЕО.

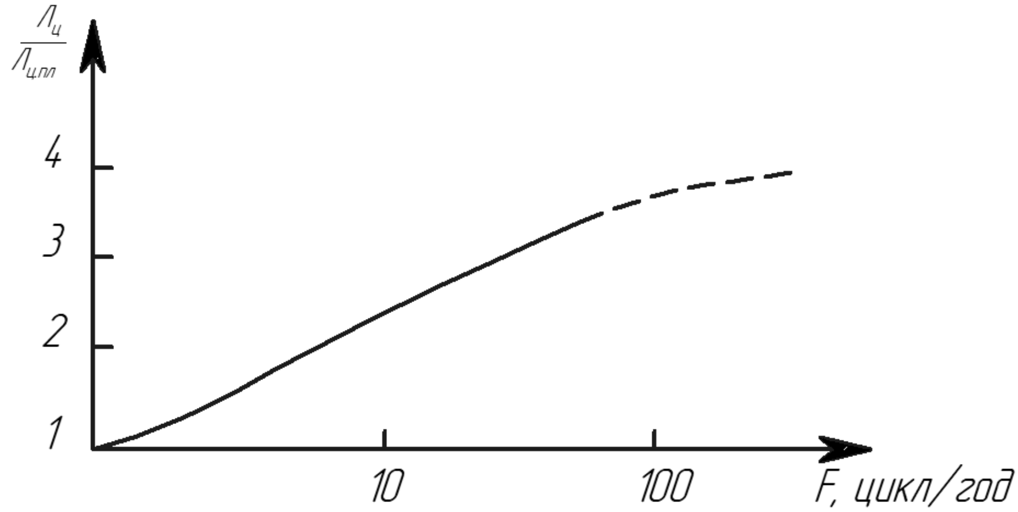


Рисунок 15 – Оцінка ефективності методу плавної зміни напруги живлення

Для оцінки ефективності цього методу необхідно побудувати залежність (рисунок 15)

$$\frac{\Lambda_{ц}}{\Lambda_{ц.пл}} = \varphi(F).$$

З розгляду графіка (рисунок 15) випливає, що виграш в надійності істотно залежить від робочої частоти ввімкнень ЕО. Так, наприклад, при частоті ввімкнень, що дорівнює 10 цикл/год, надійність ЕО з плавною зміною напруги живлення більш ніж в два рази вище, ніж надійність такої ж апаратури, що працює в звичайному циклічному режимі.

3.3 Метод вибору раціонального режиму використання електричного обладнання (ЕО) за заданим періодом його простою і коефіцієнтом циклічності

З попереднього матеріалу слідує $\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + k_c F\right)$, що надійність (безвідмовність) ЕО в безперервному режимі роботи вище, ніж в циклічному. Однак, по-перше, це не завжди практично можливо, по-друге, в ряді випадків і недоцільно. Дійсно, безперервна робота дозволяє забезпечити підвищену надійність в сенсі більшого напрацювання на відмову ЕО, але при цьому може виникати необхідність усунення і більшого (абсолютного) числа його відмов.

Сутність методу вибору оптимального режиму використання ЕО зводиться до мінімізації кількості його відмов, при цьому вірогідність безвідмовної роботи ЕО буде максимальною [1, 2].

Вимагатимемо, щоб середнє число відмов ЕО при переході від циклічної роботи (q_c) до безперервної (q_0) було б не більше, ніж при циклічній. Режим роботи, при якому $q_0 = q_c$, назвемо граничним.

Тепер визначимо галузі використання того чи іншого режиму роботи ЕО (без урахування питань економічного аспекту).

Отже, перехід від циклічного режиму до безперервної роботи доцільний, якщо

$$q_c \geq q_0. \tag{46}$$

Цю умову можна записати в розгорнутому вигляді

$$\frac{1}{F}\lambda_0(1 + k_c F) \geq 24\lambda_0. \tag{47}$$

Спростимо вираз (47):

$$\frac{1}{F} \geq 24 - k_c.$$

Нагадаємо, що $\frac{1}{F} = \Delta t$, де Δt – необхідне напрацювання (робочий цикл) за одне ввімкнення.

Виходячи з цього $\Delta t \geq 24 - k_c$.

З іншого боку, $\Delta t = 24 - \tau$, де τ – запланований час простою (очікування).

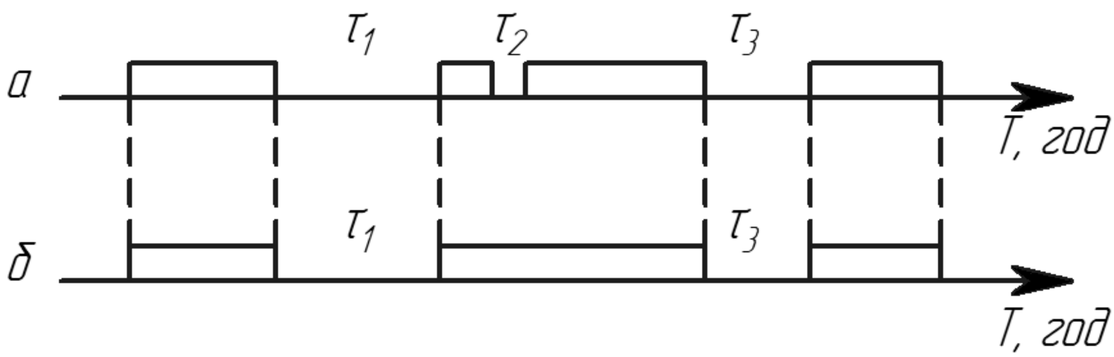
Тоді остаточно отримаємо

$$\tau \leq k_c. \tag{48}$$

Нерівність (48) розкриває умова (46) і звучить так: перехід від циклічного режиму роботи до безперервного доцільний в тому випадку, якщо планований простій ЕО (до наступного ввімкнення) чисельно менше значення коефіцієнта циклічності.

Умова (46) може використовуватися у всіх випадках, коли потрібно вирішити питання, чи не краще, з точки зору надійності, залишати ЕО ввімкненим (якщо не потрібно його використання за призначенням), ніж його вимикати.

Приклад. Нехай маємо робочий графік ЕО (рисунок 16, а). Якщо $\tau_1 > k_c$, $\tau_2 < k_c$, $\tau_3 > k_c$, то доцільно, з точки зору надійності, мати інший робочий графік (рисунок 16, б), тобто без τ_2.



а – циклічний; б – безперервно-циклічний

Рисунок 16 – Робочий графік електричного обладнання

У практиці роботи інженерно-технічного складу частин можна дуже часто зустріти таку схему роботи, коли вимикають ЕО, не замислюючись, скільки часу воно буде простоювати (наприклад, при проведенні регламентних робіт), тоді як наведений приклад переконує нас у зворотному [2].

Як недоліки розглянутого методу підвищення надійності можна відзначити такі:

- зайві витрати електроенергії і призначеного (технічного) ресурсу ЕО;
- необхідність знання коефіцієнта циклічності для даної ЕО.

Зауважимо, що усунення останнього недоліку в теорії надійності особливих труднощів не викликає. Якщо залежність $\Lambda = \varphi(F)$ вважати лінійною, а коефіцієнт циклічності – постійною величиною, то його значення може бути визначено експериментально одним із способів, сутність яких випливає з рисунку 17, а і б.

Тоді в разі *а* маємо $\Lambda_1 = \lambda_0(1 + k_c F_1)$, звідки

$$k_c = \frac{\Lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0 F_1}, \tag{49}$$

а для випадку *б* отримуємо систему з двох рівнянь

$$\Lambda_1 = \lambda_0(1 + k_c F_1); \tag{50}$$

$$\Lambda_2 = \lambda_0(1 + k_c F_2) \tag{51}$$

з двома невідомими λ_0 і k_c.

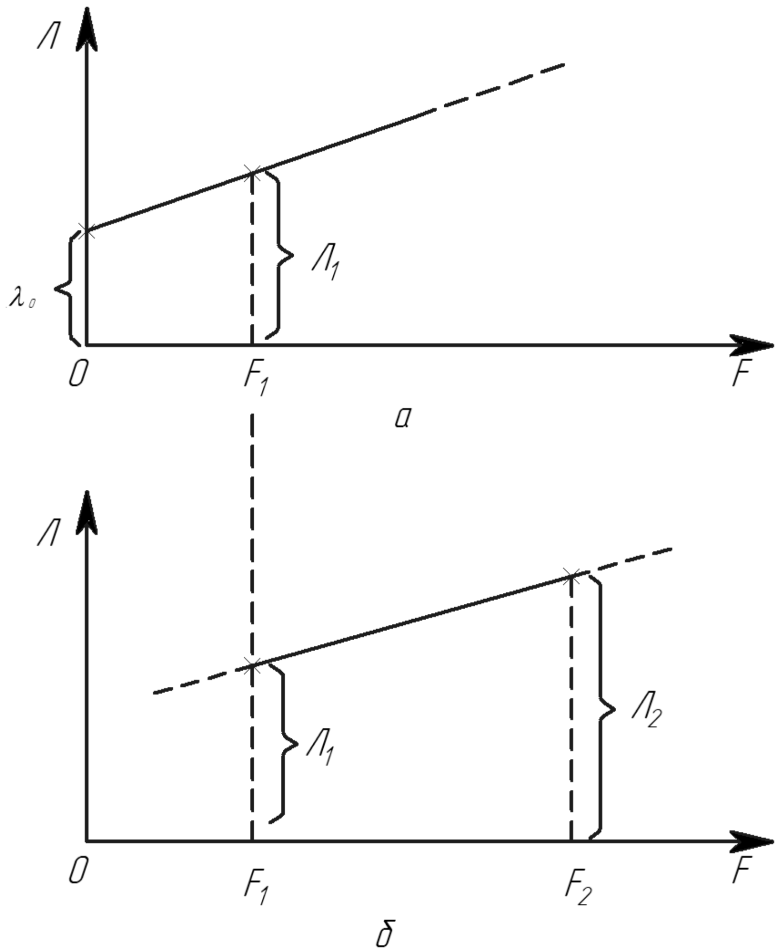


Рисунок 17 – Експериментальне визначення коефіцієнта циклічності

Спільне вирішення цієї системи (наприклад, шляхом ділення другого рівняння на перше) дає результат

$$k_c = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{\Lambda_1 F_2 - \Lambda_2 F_1}. \qquad (52)$$

3.4 Резервування обладнання

Резервування обладнання є методом підвищення надійності систем. В його основі лежить застосування додаткових засобів і (або) можливостей з метою збереження працездатного стану об'єкта при відмові одного або декількох його елементів [1, 4].

Застосовуються такі основні види резервування: структурний, тимчасовий, інформаційний, функціональний і навантажувальний.

Структурне (схемне, апаратурне) резервування – це застосування резервних елементів в структурі технічної системи для підвищення її надійності. Такими резервними елементами можуть бути додаткові пристрої, блоки, агрегати, функціональні та інші елементи, що вмикаються в процесі роботи автоматично або вручну замість тих, що відмовили, для підтримки системи в працездатному стані. При цьому операція заміни частини обладнання, що відмовила, на резервну не повинна переривати нормального функціонування всієї системи. В іншому випадку така заміна перетворюється на звичайний ремонт.

Тимчасове резервування – метод підвищення надійності апаратури, який передбачає використання резервного робочого часу. Джерелами резерву часу можуть бути: збільшення часу в порівнянні з мінімально необхідним часом для вирішення поставлених завдань за робочий час, запас продуктивності об'єкта, накопичення вихідної інформації («продукції») об'єкта в запам'ятовувальних пристроях для запису. Резерв часу, створюваний цими джерелами, дозволяє в ряді випадків виявити і усунути відмову в апаратурі без порушення нормального функціонування всієї системи.

Інформаційне резервування – підвищення надійності об'єкта шляхом використання резервної інформації. Такий вид резервування застосовується в інформаційно-керуючих системах.

Функціональне резервування – підвищення надійності об'єкта за рахунок можливості його елементів (пристроїв) виконувати деякі додаткові функції.

Навантажувальне резервування – підвищення надійності об'єкта (елемента), що передбачає використання його здатності сприймати додаткові навантаження.

Найбільш доцільним є спільне застосування двох або декількох видів резервування, яке може забезпечити найбільший ефект у підвищенні надійності.

Серед розглянутих видів резервування особливе місце займає структурне резервування. Воно найбільш універсальне і може замінити будь-який інший вид резерву, в той час як інші види резервування мають обмежені галузі застосуваня.

При класифікації методів резервування використовуються декілька ознак.

За схемою ввімкнення резервних елементів розрізняють загальне і роздільне резервування. При загальному резервуванні (рисунок 18) замість об'єкта, який відмовив, що складається з k елементів, застосовується резервний. При роздільному резервуванні замість елемента, що відмовив підключається один з m резервних елементів, як це показано на рисунку 20.

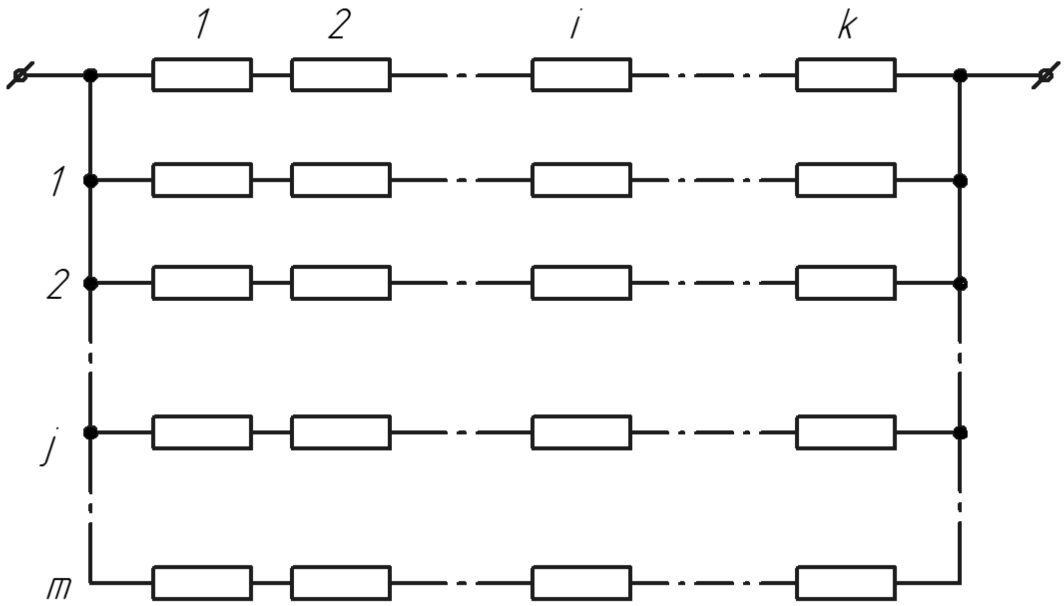


Рисунок 18 – Загальне резервування

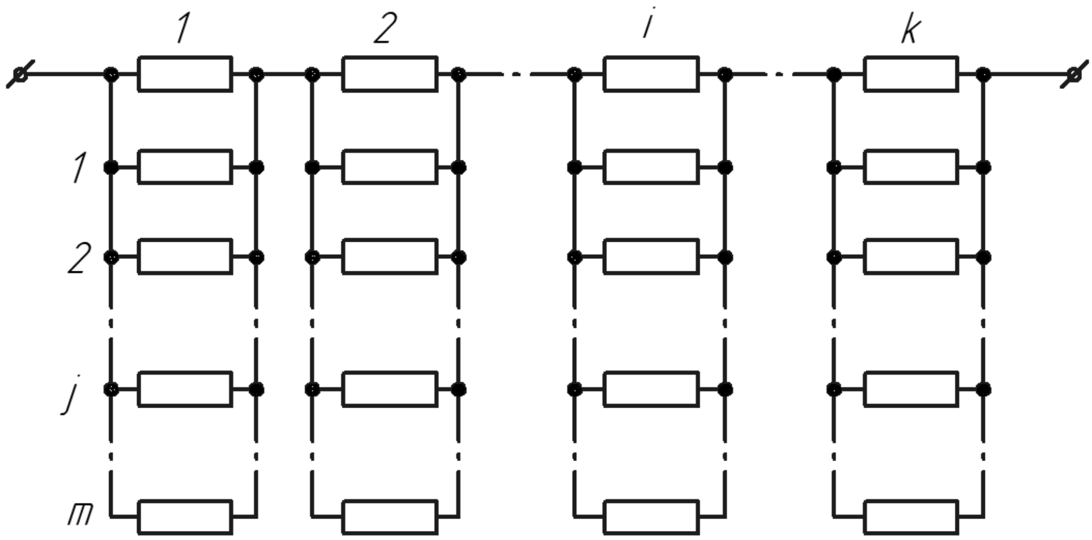


Рисунок 19 – Роздільне резервування

Загальне резервування в конструктивному та експлуатаційному відношенні простіше роздільного. Роздільне резервування володіє більш високою потенційною надійністю. Порівнюючи дві схеми ввімкнення резерву, що складаються з однакової кількості робочих і резервних елементів (див. рисунки 18 і 19), можна бачити, що для виходу з ладу першої системи досить, щоб в кожному ланцюзі послідовно з'єднаних k елементів відмовив хоча б один з них. У той час як для відмови другої системи необхідно, щоб слідом за відмовою будь-якого робочого елемента відмовили і всі m до нього резервних елементів, вірогідність другої події буде, безсумнівно, менше.

За кількістю резервних елементів, передбачених для заміни одного робочого елемента, розрізняють одноразове і багаторазове резервування з кратністю резервування, яка дорівнює m.

За способом ввімкнення резервних елементів застосовують постійне резервування і резервування заміщенням. Постійне резервування означає, що резервні елементи вмикаються паралельно з основними на весь час роботи.

У тих випадках, коли не уявляється можливим використовувати одночасну роботу паралельно ввімкнених працюючих і резервних пристроїв, застосовують резервування заміщенням, тобто відключають пошкоджену апаратуру і заміщають її резервною.

Режими електроживлення і зовнішні умови (довкілля), що впливають на резервні елементи, істотно впливають на інтенсивність їх відмов. Ця обставина викликає необхідність враховувати умови, в яких знаходиться резервна апаратура. За цією ознакою розрізняють три типи резерву: навантажений, ненавантажений і полегшений. При навантаженому резерві зовнішні умови і електричні режими живлення робочого і резервного елементів однакові. Інтенсивність відмов елементів, що знаходяться в резерві, вважається такою ж, як і в робочому стані. Для ненавантаженого резерву вважають джерела електроживлення відключеними, зовнішні впливи – майже відсутніми, а інтенсивність відмов – приблизно дорівнює нулю. Для елементів, які перебувають в полегшеному резерві, інтенсивність відмов менше, ніж при навантаженому резерві, але не дорівнює нулю.

За умовами експлуатації (технічного обслуговування і застосування) резервних елементів розрізняють два типи резерву:

відновлюваний і невідновлюваний. Відновлюваний резерв створюється в умовах, коли відмовлені робочі елементи вдається відновити і використовувати як резервні ще до того, як закінчиться робочий (оперативний) час.

У системах без резерву вихід з ладу хоча б одного з k елементів порушує нормальну роботу всієї системи. Вірогідність безвідмовної роботи такої системи $P(t)$ може бути визначена на підставі теореми множення вірогідностей, якщо прийняти появу відмов елементів системи як незалежні події

$$P(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \ldots \cdot p_i(t) \cdot \ldots \cdot p_k(t) = \prod_{i=1}^{k} p_i(t), \tag{53}$$

де $p_i(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи i-го елемента за час t.

Розглянемо тепер систему, що складається з одного робочого елемента і m резервних, ввімкнених таким чином, що система вважається нормально діючою при збереженні працездатності хоча б одного елемента (рисунок 20). Для того щоб така система вийшла з ладу, необхідно, щоб сталися відмови всіх $m+1$ елементів. Таким чином, вірогідність відмови всієї системи $Q(t)$ за час t також може бути визначена на підставі теореми множення вірогідностей як добуток вірогідностей відмов $q_i(t)$ всіх $m+1$ елементів

$$Q(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \ldots \cdot q_j(t) \cdot \ldots \cdot q_{m+1}(t) = \prod_{j=1}^{m+1} q_j(t). \tag{54}$$

Остання формула, як і формула (53), справедлива за умови незалежності відмов елементів системи.

Враховуючи, що відмова і безвідмовний стан – події протилежні, можемо записати

$$q = 1 - p; \; Q = 1 - P. \tag{55}$$

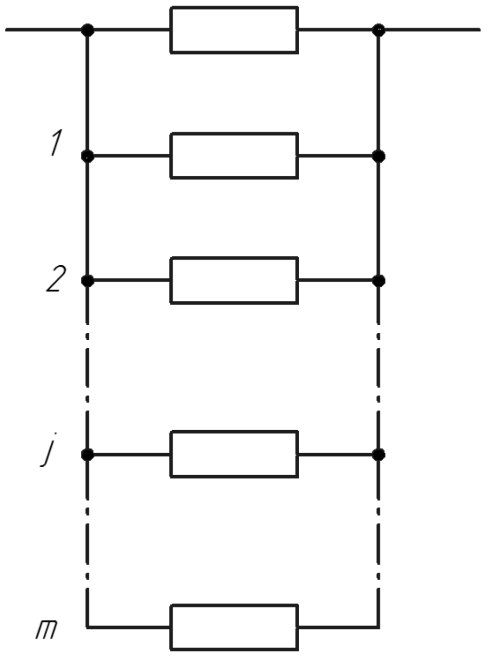


Рисунок 20 – Схема паралельно з'єднаних елементів
при резервуванні

Тоді значення вірогідності безвідмовної роботи $P(t)$ резервованої системи (див. рисунок 20), виражене через вірогідності безвідмовної роботи елементів,

$$P = 1 - \prod_{j=1}^{m+1} \left[1 - p_j(t)\right]. \tag{56}$$

Якщо всі елементи мають однакову надійність, то отримані формули спрощуються:

$$Q(t) = q^{m+1}(t); \tag{57}$$

$$P(t) = 1 - \left[1 - p(t)\right]^{m+1}. \tag{58}$$

Наведені співвідношення справедливі для будь-яких законів розподілу часу безвідмовної роботи.

Середнє напрацювання до відмови резервованої системи визначається за формулою

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t)dt \tag{59}$$

і може бути завжди обчислено за відомою функцією надійності $P(t)$ системи.

У всіх випадках для резервованої системи при знаходженні T_0 треба знати функцію $P(t)$ і інтегрувати за формулою (59).

Тепер оцінимо надійність $P(t)$ систем, що складаються з $N = k(m+1)$ елементів, при різних схемах ввімкнення резерву. Для простоти написання аргумент t будемо опускати.

Загальне резервування (див. рисунок 18).

Розглядаємо j-й ланцюг:

$$P_{j_{\text{лан}}} = p_1 p_2 ... p_i ... p_k = \prod_{i=1}^{k} p_{ij} \ ;$$

$$Q_{j_{\text{лан}}} = 1 - P_{j_{\text{лан}}} = 1 - \prod_{i=1}^{k} p_{ij} \ ;$$

$$Q_{заг} = \prod_{j=1}^{m+1} Q_{j_{\text{лан}}} = \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - \prod_{i=1}^{k} p_{ij} \right);$$

$$P_{заг} = 1 - Q_{заг} = 1 - \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - \prod_{i=1}^{k} p_{ij} \right).$$

Якщо елементи рівнонадійні за j, то $P_{заг} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^{k} p_{ij} \right)^{m+1}$, а якщо ще й за i , то

$$P_{заг} = 1 - \left(1 - p^k\right)^{m+1}; \tag{60}$$

$$Q_{заг} = \left(1 - p^k\right)^{m+1}. \tag{61}$$

Роздільне резервування (дивись рисунок 19).

Розглядаємо i-й вузол

$$Q_{i_{\text{вузол}}} = \prod_{j=1}^{m+1} q_{ji} = \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - p_{ij}\right);$$

$$P_{i_{\text{вузол}}} = 1 - Q_{i_{\text{вузол}}} = 1 - \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - p_{ij}\right);$$

$$P_{\text{разд}} = \prod_{i=1}^{k} P_{i_{\text{вузол}}} = \prod_{i=1}^{k} \left[1 - \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - p_{ij}\right)\right];$$

$$Q_{\text{разд}} = 1 - P_{\text{разд}} = 1 - \prod_{i=1}^{k} \left[1 - \prod_{j=1}^{m+1} \left(1 - p_{ij}\right)\right].$$

Якщо припустити, що всі елементи за i та за j рівнонадійні, то

$$P_{\text{разд}} = \left[1 - (1 - p)^{m+1}\right]^{k}; \tag{62}$$

$$Q_{\text{разд}} = 1 - \left[1 - (1 - p)^{m+1}\right]^{k}. \tag{63}$$

Тепер оцінимо ефективність Ф різних схем ввімкнення резервних елементів

$$\Phi = \frac{Q_{\text{заг}}}{Q_{\text{разд}}} = \frac{\left(1 - p^{k}\right)^{m+1}}{1 - \left[1 - (1 - p)^{m+1}\right]^{k}}. \tag{64}$$

Формула (64) є точною. Для грубої, приблизної оцінки Ф можна користуватися формулою (за умови $kq << 1$)

$$\Phi \approx k^{m}. \tag{65}$$

Як видно з цього виразу, переваги роздільного резервування в порівнянні із загальним ростуть зі збільшенням кількості елементів k в системі (складність системи) і кратності резервування m.

Приклад. Нехай потрібно оцінити надійність системи, що складається з 10 рівнонадійних елементів (з вірогідністю безвідмовної роботи $p = 0{,}9$ за певний час), без резерву, з одноразовим резервом при загальному і роздільному резервуванні, а також оцінити ефективність резервування (за грубою й точною формулами) .

Розв'язання

1) $P_{без\ рез} = \prod_{i=1}^{k} p_i = \prod_{i=1}^{10} 0{,}9 = 0{,}9^{10} = 0{,}34$;

2) $P_{\substack{заг \\ m=1}} = 1 - (1 - pk)^{m+1} = 1 - \left(1 - 0{,}9^{10}\right)^2 \approx 0{,}57$;

3) $P_{\substack{розд \\ m=1}} = \left[1 - \left(1 - 0{,}9^{10}\right)^2\right]^{10} \approx 0{,}90$;

4) $\Phi \approx k^m = 10^1 = 10$;

5) $\Phi = \dfrac{Q_{заг}}{Q_{розд}} = \dfrac{1 - P_{заг}}{1 - P_{розд}} = \dfrac{1 - 0{,}57}{1 - 0{,}90} = 4{,}3$.

При резервуванні заміщенням у ці схеми додаються перемикальні пристрої, які ускладнюють системи і знижують загальну надійність.

Зробимо порівняльну оцінку надійності цих двох схем. Число елементів N в кожній з них дорівнює $N = k(m+1)$, тоді як число перемикальних пристроїв $N_П$

$$N_{П_{заг}} = m + 1; \quad N_{П_{разд}} = k(m+1),$$

тобто при роздільному резервуванні в k разів більше.

Якщо врахувати, що перемикальні пристрої самі по собі мають невисоку надійність, то стає зрозумілим, чому ефект роздільного резервування різко зменшується. Тому на практиці роздільне резервування заміщенням застосовується рідше, частіше застосовується загальне резервування, і то при постійному ввімкненні резерву.

ЛЕКЦІЯ 4. Оцінка надійності обладнання в процесі експлуатації

Довірчі межі і довірчі вірогідності. Для оцінки показників надійності обладнання використовуються як закони розподілу випадкових величин, так і їх основні характеристики – математичне очікування і дисперсія [1, 4]. Закони розподілу найчастіше застосовують тільки до елементів обладнання, оскільки для отримання цих законів необхідно володіти великим статистичним матеріалом (порядку декількох сотень дослідів). Накопичити таку кількість дослідів (реалізацій) не завжди можливо. Тому на практиці обмежуються оцінкою параметрів розподілу, для обчислення яких досить мати один-два десятки реалізації [1, 4].

Показники надійності, обчислені на основі обмеженої кількості дослідів, завжди містять елемент випадковості. Саме тому експериментально отримані параметри називають оцінками параметрів. Чим менше число дослідів, тим більша вірогідність відхилення оцінки параметра від його істинного значення. Математична статистика встановлює зв'язок між числом реалізацій (відмов) n, величиною відхилення оцінки параметра від його істинного значення і вірогідністю цього відхилення.

При цьому найкраща статистична оцінка, яка забезпечує мінімальні помилки, повинна володіти такими основними властивостями [3].

Оцінка повинна бути *спроможною*. Це означає, що при збільшенні числа реалізацій n оцінка параметра повинна сходитися за вірогідністю до свого параметра.

Оцінка повинна бути *незміщеною*, тобто вона повинна бути вільною від систематичної помилки.

Оцінка повинна бути *ефективною*. Це означає, що обрана не зміщена оцінка повинна мати найменшу дисперсію в порівнянні з іншими оцінками.

На практиці не завжди вдається домогтися, щоб оцінка задовольняла всі ці вимоги. Може виявитися, що обчислення ефективної оцінки виходить дуже складним і трудомістким. У цьому випадку нерідко задовольняються іншою оцінкою, дисперсія якої дещо більше, зате обсяг обчислень помітно менше.

Як спроможна і незміщена оцінка T_0^* для математичного очікування T_0 приймається середнє арифметичне значення напрацювань між відмовами τ_i

$$T_0^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i \; . \tag{66}$$

Статистична дисперсія оцінюється виразом

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tau_i - T_0^*\right)^2 . \tag{67}$$

При малих значеннях n обчислена за цією формулою оцінка дисперсії виявляється зміщеною. Для усунення систематичної похибки досить в знаменнику замість n застосувати значення n–1

$$D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\tau_i - T_0^*\right)^2 . \tag{68}$$

Отримані за цими формулами оцінки параметрів є точковими, вони оцінюють невідомий параметр T_0 одним числом і фактично являють собою також випадкові величини, хоча і з істотно меншою дисперсією, ніж досліджувана випадкова величина T. На практиці часто потрібно знати не тільки точкову оцінку параметра, але і інтервал, в якому із заданою вірогідністю може перебувати сам параметр. Такий інтервал характеризує собою точність отриманої оцінки і називається *довірчим інтервалом*. А вірогідність, з якою довірчий інтервал містить в собі параметр, характеризує достовірність оцінки і називається *довірчою вірогідністю*. Межі інтервалу прийнято називати *довірчими межами*.

Якщо позначити нижню і верхню межі довірчого інтервалу відповідно $T_{0\min}^*$ і $T_{0\max}^*$, то довірча вірогідність γ виражатиметься формулою

$$\gamma = P\left\{T^*_{0\min} \le T_0 \le T^*_{0\max}\right\}. \tag{69}$$

Формулу (69) можна записати і в іншому вигляді

$$P\left\{\left|T_0^* - T_0\right| \le \varepsilon\right\} = \gamma. \tag{70}$$

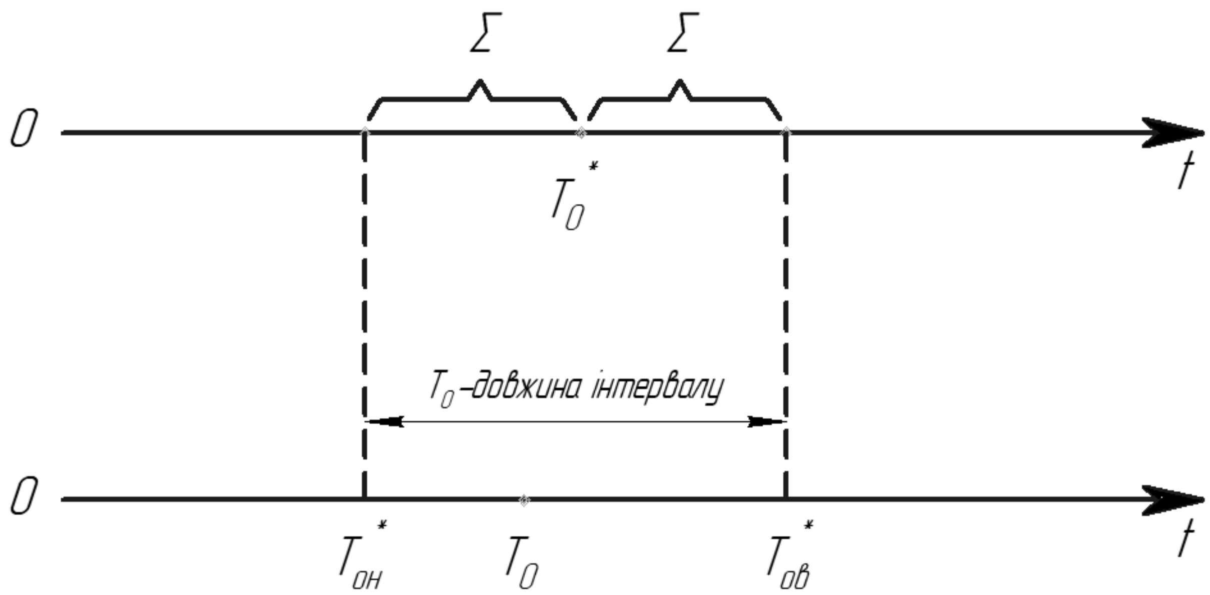


Рисунок 21 – Довірчий інтервал (T_0 – довжина інтервалу)

Тут γ – вірогідність того, що розбіжність між T_0^* і T_0 не перевищує деякого числа ε.

Розкриємо (70). Якщо $T_0^* > T_0$, то $T_0^* - T_0 \le \varepsilon$ або $T_0^* - \varepsilon \le T_0$. Якщо $T_0 > T_0^*$, то $T_0 - T_0^* \le \varepsilon$ або $T_0^* \le T_0^* + \varepsilon$.

Виходячи з цього можна написати

$$P\left\{T_0^* - \varepsilon \le T_0 \le T_0^* + \varepsilon\right\} = \gamma, \tag{71}$$

де $T_0^* - \varepsilon = T_{0н}^*$ – нижня межа довірчого інтервалу;

$T_0^* + \varepsilon = T_{0в}^*$ – верхня межа довірчого інтервалу (рисунок 21).

Таким чином, інтервал, в межах якого укладено невідоме значення параметра T_0 (математичне очікування), називається *довірчим*, а *вірогідність* того, що невідоме значення T_0 укладено в межах цього інтервалу, називається *довірчою*.

Якщо γ = 0,9, то це означає, що в 90 % випадків обробки статистичних даних невідоме (справжнє) значення параметра T_0 закладено в межах довірчого інтервалу $\left[T^*_{0н};T^*_{0в}\right]$, а в 10 % може бути поза ним. Звідси випливає важливий наслідок: чим вище довірча вірогідність, тим ширше довірчий інтервал.

Розглянемо інтервальні оцінки для двох найбільш уживаних в інженерній практиці законів розподілу відмов: експоненціального і нормального.

Довірчий інтервал при експоненціальному законі розподілу відмов. Припустимо, що, використовуючи принцип ергодичності, проводиться експлуатація одного зразка обладнання досить тривалий час, тобто до отримання не менше n відмов.

Необхідно знайти довірчий інтервал $\left[T^*_{0н};T^*_{0в}\right]$ для невідомого параметра T_0, якщо закон розподілу відмов експоненціальний.

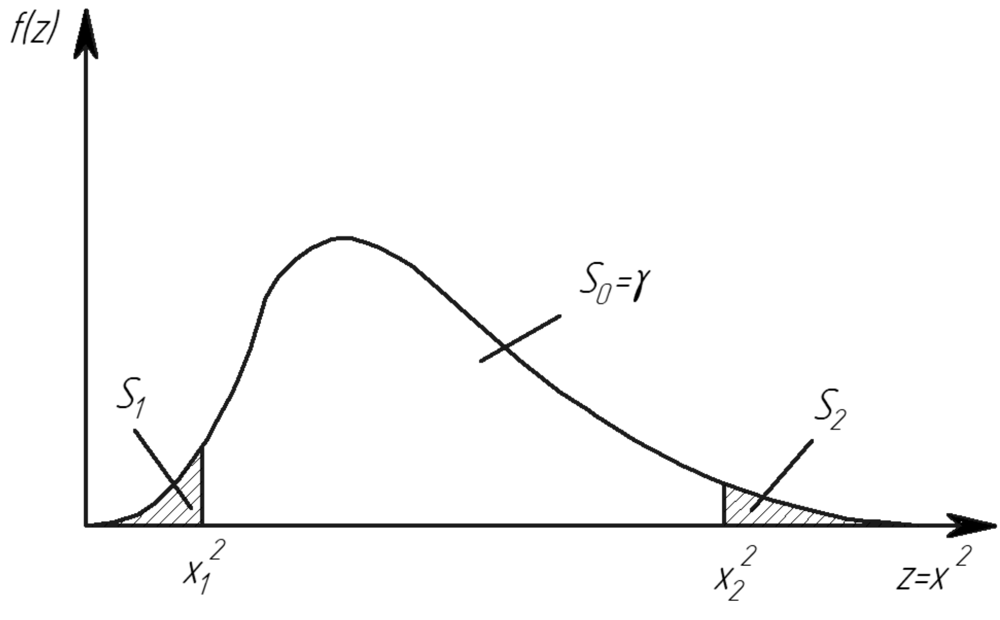


Рисунок 22 – χ^2 – розподіл

При експоненціальному законі (раптові відмови) вірогідність настання *дорівнює* l відмов, підкоряється закону Пуассона

$$Q_l(t_l) = \frac{(\Lambda t_l)^l}{l!} e^{-\Lambda t_l}, \tag{72}$$

а вірогідність настання *не менше* n відмов визначається як добуток

$$Q_{l \ge n}(t_l) = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(\Lambda t_l)^l}{l!} e^{-\Lambda t_l}. \tag{73}$$

Якщо у формулі (73) перейти до нової змінної $\Lambda t_1 = \dfrac{t_l}{T^O}$ або $2\Lambda t_1 = \dfrac{2t_l}{T_0}$ і продиференціювати (73) за цією новою змінною, то отримаємо щільність вірогідності (згадаємо, що $\dfrac{dQ(t)}{dt} = f(t)$). Ця щільність вірогідності називається χ^2 розподілом, де $\chi^2 = \dfrac{2t_n}{T_0} = z$. Вона має вигляд, показаний на рисунку 22.

Якщо взяти інтеграл від цієї щільності, то отримаємо

$$\int_0^{\infty} f(z)dz = 1.$$

або

$$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} f(z)dz = \gamma, \tag{74}$$

де γ – довірча вірогідність.

Інтеграл у виразі (74) табульований, є математичні таблиці

$$\gamma = P\left\{\chi_1^2 \le \frac{2t_n}{T_0} \le \chi_2^2\right\}. \tag{75}$$

Зазвичай χ_1^2 та χ_2^2 вибирають так, щоб $S_1 = S_2 = S$ (заштриховані площі рівні). Тоді $S_0 + 2S = 1$ або $S = \frac{1 - S_0}{2}$. Але $S_0 = \gamma$, $\gamma = 1 - \alpha$, де α – ризик в допущенні помилки.

Зазвичай величиною γ в експлуатації задаються, наприклад, часто беруть $\gamma = 0{,}9$, тоді ризик буде $\alpha = 0{,}1$.

Домовилися χ_2^2 позначати як $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(S = \frac{1 - S_0}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-1+\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\right)$.

Тоді χ_1^2 буде $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(S_1 + S_0 = 1 - S_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

З урахуванням нових позначень формулу (75) можна записати таким чином:

$$\gamma = P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{2t_n}{T_0} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Вирішуючи щодо T_0 нерівності

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{2t_n}{T_0} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}},$$

отримаємо

$$T_0 \le \frac{2t_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}; \ \frac{2t_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le T_0.$$

Звідки остаточно отримаємо

$$\frac{2t_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le T_0 \le \frac{2t_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}. \tag{76}$$

або

$$T^*_{0н} \le T^*_{0в} \le T^*_{0в},$$

де $T^*_{0н}$ – нижня, а $T^*_{0в}$ – верхня межа довірчого інтервалу.

Знаючи γ, визначають α, $\frac{\alpha}{2}$, $1-\frac{\alpha}{2}$ і при $k=2n$ ступенів вільності за таблицею А.1 додатка А знаходять $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ та $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Приклад. Задане напрацювання на відмову $T_{0з}=25$ год. Потрібно оцінити надійність – з довірчою вірогідністю $\gamma=0{,}9$, якщо число відмов $n=10$, а сумарне напрацювання до настання n відмов дорівнює $t_н=450$ год.

Розв'язання.

$$T^*_0=\frac{t_n}{n}=\frac{450}{10}=45 \text{ год.}$$

З цих простих розрахунків може бути зроблений неправильний висновок про те, що надійність станції значно (майже в 2 рази) перевищує задану.

Однак оцінимо надійність з урахуванням довірчих меж. З таблиці А.1 при $k=2n=2\cdot10=20$ ступенів вільності та $\frac{\alpha}{2}=0{,}05$; $1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95$ знаходимо, що $\chi^2_{0,05}\cong31$; $\chi^2_{0,95}\cong11$.

Тоді

$$\frac{2\cdot450}{31}\le T_0\le\frac{2\cdot450}{11},$$

або

$$28\le T_0\le83.$$

Висновки:

1) $T^*_{0н}\ge28\ год > T_{0з}=25\ год$ (незначно),

2) якщо тепер, покращуючи достовірність статистики, матимемо $t_н=900$ год; $n=20$, тоді $33\le T_0\le69$. Довірчий інтервал став вужчим.

Довірчий інтервал при нормальному законі розподілу відмов. Нехай потрібно оцінити T_{0n} – надійність обладнання за поступовими відмовами (наприклад, за розрегулюванням параметрів або з відмов, пов'язаних зі старінням і зносом). Закон розподілу таких відмов (без додаткової перевірки) вважається нормальним.

Довірча вірогідність за визначенням

$$P\left\{T_{0n}^{*}-\varepsilon \le T_{on} \le T_{0n}^{*}+\varepsilon\right\}=\gamma, \tag{77}$$

або

$$P\left\{T_{0nн}^{*} \le T_{on} \le T_{0nв}^{*}\right\}=\gamma. \tag{78}$$

У рівнянні (78) в лівій його частині є вірогідність потрапляння середнього значення T_{on} (математичного очікування) випадкової величини T_{n}^{*}, підпорядкованої нормальному закону, на задану ділянку $\left[T_{0nн}^{*}; T_{0nв}^{*}\right]$.

У загальному вигляді така вірогідність (з теорії вірогідностей) визначається за допомогою функції Лапласа

$$P\{\alpha \le X \le \beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-m_{x}}{\sigma_{x}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_{x}}{\sigma_{x}}\right).$$

Якщо в цій функції покласти $m_x=0$ (перенести початок координат в точку m_x) і прирівняти $\alpha=\beta=\varepsilon$, то шукана вірогідність буде залежати тільки від меж інтервалу і середньоквадратичного відхилення.

Тоді формулу (77) можна записати

$$\gamma=P\left\{T_{0nн}^{*}-\varepsilon \le T_{on} \le T_{0nв}^{*}+\varepsilon\right\}=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{T_{0n}}}\right), \tag{79}$$

де $\sigma_{T_{0n}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини T_{0n}^* від T_{0n} (математичне очікування);

σ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини T_n^* (виміряне значення) від T_{0n}.

Значення σ обчислюється за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{ni}^* - T_{0n}\right)^2}{n-1}}\ . \qquad (80)$$

Зауважимо, T_{0n} є математичне очікування, воно нікому не відомо, так само, як і σ.

Позначимо $\dfrac{\sigma}{\sigma_{T_{0n}}} = z_\gamma$, тоді $\varepsilon = z_\gamma \sigma_{T_{0n}} = z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ і із формули (80) отримаємо

$$T_{0n}^* - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le T_{0n} \le T_{0n}^* + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ . \qquad (81)$$

Задаючись довірчою вірогідністю γ, за математичними таблицями знаходять z_γ.

Формула (81) хоча і є остаточною, але не є робочою, так як в ній є нікому не відома σ. Якщо замість σ взяти його оцінку σ^*, то ця формула давала б похибку. Тому в інженерній практиці використовують розподіл Стьюдента, згідно з яким

$$T_{0n}^* - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \le T_{0n} \le T_{0n}^* + t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\ . \qquad (82)$$

де t_γ – параметр Стьюдента, який визначається з таблиці Б.1 додатка Б за значеннями γ і $k = n-1$ ступенів вільності.

У формулі (82) середньоквадратичне відхилення оцінюється з статистики

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{ni}^* - T_{0n}^*\right)^2}{n-1}}\,. \tag{83}$$

Формулу (82) можна записати і в іншому вигляді

$$T_{0n}^* - \varepsilon_\gamma \le T_{0n} \le T_{0n}^* + \varepsilon_\gamma\,, \tag{84}$$

де

$$\varepsilon_\gamma = t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = t_\gamma \sqrt{\frac{D^*}{n}} = t_\gamma \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{ni}^* - T_{0n}^*\right)^2}{n(n-1)}}\,, \tag{85}$$

або

$$T_{0nн}^* = T_{0n}^* - \varepsilon_\gamma\,;\; T_{0nв}^* = T_{0n}^* + \varepsilon_\gamma\,. \tag{86}$$

Приклад. При експлуатації 16 підсилювачів на стійкість до поступових відмов зареєстровані відхилення їх параметрів в різні моменти часу (у тексті не наводяться).

Потрібно знайти оцінку T_{0n}^* для T_{0n} і довірчий інтервал при довірчій вірогідності γ = 0,9.

Розв’язання

1 За формулою (66) маємо

$$T_0^* = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} T_{ni}^* = 2000 \text{ год.}$$

2 Застосуємо спочатку формулу (81) і з урахуванням виразу (83) отримаємо

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{ni}^* - T_{0n}^*\right)^2}{16-1}} \cong 341\,.$$

З математичних таблиць для нормального розподілу знаходимо $z_\gamma \approx 1{,}64$.

Тоді $1879\,год \le T_{0n} \le 2121\,год$.

Ця оцінка нижньої і верхньої довірчих меж визначена з похибкою, оскільки замість невідомого параметра T_{0n} брали його оцінку T_{0n}^{*} і, таким чином, замість σ обчислили σ^{*}.

3 Тепер визначимо довірчий інтервал за більш точною формулою (82).

Знаючи $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$ і γ=0,9, за таблицею Б.1 визначаємо параметр Стьюдента $t_{\gamma} = 1{,}75$.

Тоді $1851 год \le T_{0n} \le 2149 год$.

Висновок. За розподілом Стьюдента довірчий інтервал виходить ширше, але зате точніше, ніж за нормальним розподілом.

Приклади оцінок показників надійності при експлуатації об'єктів.

Приклад 1. При випробуваннях об'єктів на надійність отримане сумарне їх напрацювання, що рівне 1830 год. За цей час відмічено 15 відмов.

Потрібно знайти напрацювання на відмову і довірчі межі при довірчій вірогідності γ=0,8, якщо випадковий час між відмовами розподілено за експоненціальмим законом.

Розв'язання

1 За формулою (66) маємо

$$T_0^{*} = \frac{1830}{15} = 122 \text{ год.}$$

2 За формулою (76) визначаємо довірчі межі

$$T_{0н}^{*} = \frac{2t_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}; \; T_{0в}^{*} = \frac{2t_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Знаючи, що γ = 0,8, визначаємо $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $\frac{\alpha}{2} = 0{,}1$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9$ і для $k = 2n = 2 \cdot 15 = 30$ ступенів вільності за таблицею А.1 додатка А знаходимо

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0,1} = 40; \ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0,9} = 20.$$

Тоді

$$T^*_{0н} = \frac{2 \cdot 1830}{40} \approx 91{,}5 \text{ год};$$

$$T^*_{0в} = \frac{2 \cdot 1830}{20} \approx 183 \text{ год};$$

$$91{,}5 \le T_0 \le 183 \text{ год}.$$

Приклад 2. При експлуатації устаткування отримані такі значення часу між розрегулюванням її параметрів: 51, 67, 160, 92, 113,217, 25, 193 год.

Закон розподілу випадкового часу між відмовами обладнання нормальний.

Визначити оцінку напрацювання на відмову $T^*_{0н}$ і довірчі межі при довірчій вірогідності γ=0,9.

Розв’язання

$$1 \ T^*_{0н} = \frac{\sum_{I=1}^{n} \tau_i}{n} = \frac{51 + 67 + 160 + 92 + 113 + 217 + 25 + 193}{8} = 114{,}2 \text{ год}.$$

2 З урахуванням формули (83) знаходимо оцінку дисперсії $D^* = \sigma^{*^2}$ або $\sigma^{*^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T^*_{ni} - T^*_{0n}\right)^2}{n-1}$;

$$D^* = \sigma^{*^2} = \frac{(51-114{,}2)^2 + (67-114{,}2)^2 + (160-114{,}2)^2 + (92-114{,}2)^2}{8-1} +$$

$$+ \frac{(113-114{,}2)^2 + (217-114{,}2)^2 + (25-114{,}2)^2 + (193-114{,}2)^2}{8-1} = 4790.$$

3 За таблицею Б.1 додатка Б для $k = n - 1 = 8 - 1 = 7$ ступенів вільності і γ=0,9 знаходимо параметр розподілу Стьюдента $t_\gamma = 1{,}895$.

4 За формулою (85) визначаємо

$$\varepsilon_\gamma = t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = t_\gamma \sqrt{\frac{D^*}{n}} = 1{,}895\sqrt{\frac{4790}{8}} = 46{,}5 .$$

5 За формулами (86) знаходимо

$$T^*_{0пн} = T^*_{0п} - \varepsilon_\gamma = 114{,}2 - 46{,}5 = 67{,}7 \text{ год;}$$
$$T^*_{0пв} = T^*_{0п} + \varepsilon_\gamma = 114{,}2 + 46{,}5 = 160{,}7 \text{ год.}$$

Приклад 3. Оцінка напрацювання на відмову реле $T^*_0 = 435$ год. Число відмов $n = 10$. Потрібно визначити верхню $T^*_{0пв}$ і нижню $T^*_{0пн}$ межу довірчого інтервалу для T_0 при довірчій вірогідності γ=0,9, якщо закон розподілу часу між відмовами експоненціальний.

Розв'язання

$$T^*_{0н} = \frac{2t_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}};\ T^*_{0в} = \frac{2t_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

де $t_n = nT^*_0 = 10 \cdot 435 = 4350$ год;

$$\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95;\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}05;$$
$$k = 2n = 2 \cdot 10 = 20;\ \chi^2_{0,95} \approx 11;\ \chi^2_{0,05} \approx 31;$$
$$T^*_{0н} = \frac{2 \cdot 4350}{31} \approx 280 \text{ год; } T^*_{0в} = \frac{2 \cdot 4350}{11} \approx 800 \text{ год.}$$

Приклад 4. При експлуатації партії з реле були отримані відмови в такі моменти часу: 102, 122, 138, 132, 107, 118, 123,119, 124, 115, 118, 124 год.

Закон розподілу часу τ вважається нормальним. Визначити оцінку $T^*_{0п}$ для математичного очікування $T_{0п}$ і дисперсії D^*.

Розв'язання

1) $$T_{0н}^{*}=\frac{\sum_{I=1}^{n}\tau_{пі}^{*}}{n}=\frac{102+122+138+132+107+118+123}{12}+$$
$$+\frac{119+124+115+118+124}{12}=120\,год.$$

2) $$D^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{пі}^{*}-T_{0п}^{*}\right)^{2}}{n-1}=\frac{(102-120)^{2}+(122-120)^{2}+(138-120)^{2}+(132-120)^{2}}{12-1}+$$
$$+\frac{(107-120)^{2}+(118-120)^{2}+(123-120)^{2}+(119-120)^{2}+(124-120)^{2}}{12-1}+$$
$$+\frac{(115-120)^{2}+(118-120)^{2}+(124-120)^{2}}{12-1}=94{,}5.$$

Приклад 5. При експлуатації пристрою виникло шість відмов, кожна з яких усувається протягом такого часу $\tau_в$: 1,5; 2,2; 3,1; 6,0; 4,8; 3,5 год.

Визначити оцінку $T_в^{*}$ середнього часу відновлення $T_в$ і його довірчі межі $T_{вн}^{*}$ і $T_{вв}^{*}$ при довірчій вірогідності γ = 0,9. Закон розподілу випадкового часу відновлення $\tau_в$ експоненціальний.

Розв'язання

1) $$T_в^{*}=\frac{\sum_{I=1}^{n}\tau_{ві}^{*}}{n}=\frac{1{,}5+2{,}2+3{,}1+6{,}0+4{,}8+3{,}5}{6}\cong 3{,}5\,год.$$

2) $$T_{вв}^{*}=\frac{2t_{вп}}{\chi^{2}_{1-\frac{\alpha}{2}}};\quad T_{вн}^{*}=\frac{2t_{вп}}{\chi^{2}_{\frac{\alpha}{2}}};$$

де $t_{вп}=n_вT_в^{*}=6\cdot 3{,}5=21$ год;

$$\alpha=1-\gamma=1-0{,}9=0{,}1;\quad 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95;\quad \frac{\alpha}{2}=0{,}05;$$

$$k=2n=2\cdot 6=12;\quad \chi^{2}_{0{,}95}\approx 5{,}23;\quad \chi^{2}_{0{,}05}\approx 21;$$

$$T_{вн}^{*}=\frac{2\cdot 21}{21}\approx 2\text{ год};\quad T_{вв}^{*}=\frac{2\cdot 21}{5{,}23}\approx 8\text{ год}.$$

ЛЕКЦІЯ 5. Призначення і склад запасів

Термін «запаси» в різний час і в різних роботах розшифровувався по-різному [1, 4]

- запасне майно і приналежності;
- запчастини, інструмент та приладдя;
- запасне майно і прилади.

Нерідко термін ЗІП не розшифровують по буквах, а використовують як самостійне поняття про якісь запаси.

Під ЗІП будемо розуміти сукупність різних елементів і предметів, що додаються до певного об'єкта для забезпечення його безперебійної технічної експлуатації і ремонту. Іншими словами, елементи ЗІП призначаються для найшвидшого ремонту несправної техніки при її експлуатації, профілактичної заміни елементів у міру вироблення ними свого ресурсу, а також для виконання планового ремонту техніки.

У загальному випадку до складу ЗІП можуть входити такі групи елементів і предметів:

- запасні частини;
- інструмент;
- пристрої;
- спеціальне технологічне обладнання для проведення ремонту;
- контрольно-вимірювальні прилади;
- супутні товари для догляду за об'єктом;
- експлуатаційна технічна документація на предмети ЗІП;
- засоби укладання і упаковування ЗІП.

Залежно від виду ЗІП в його складі можуть бути пераховані групи предметів в різних поєднаннях, причому запасні частини входять в обов'язковому порядку в будь-який вид ЗІП.

До запасних частин відносяться елементи, взаємозамінні з відповідними знімними елементами робочого комплекту об'єкта (знімні панелі, вузли, електровакуумні й напівпровідникові прилади, окремі агрегати і деталі).

Запасні частини можна класифікувати за чотирма ознаками:

- за призначенням (для раптової або профілактичної заміни);

- за безвідмовністю в режимі зберігання (залежать або не залежать показники безвідмовності при зберіганні елементів ЗІП від терміну їх зберігання);

- за ремонтопридатністю (відновлювані чи невідновлювані елементи ЗІП);

- за зберіганням (елементи ЗІП обмеженого або необмеженого терміну придатності при їхньому зберіганні).

Запасні частини для раптової заміни повинні зберігатися в складі *одиночного* комплекту ЗІП з метою швидкого відновлення об'єктів, в яких виявлені відмови і пошкодження.

Необхідність профілактичної заміни елементів виникає або після закінчення встановленого терміну допустимої експлуатації окремих елементів незалежно від їх фактичного стану, або за результатами контролю технічного стану елементів. Тому ЗІП для профілактичної заміни доцільно зберігати в груповому комплекті ЗІП.

За безвідмовністю в режимі зберігання запасні частини можуть як залежати від терміну зберігання, так, практично, і не залежати від нього. У першому випадку число відмов при зберіганні буде визначатися календарною тривалістю зберігання.

Відновлювані запасні частини підлягають ремонту і поверненню до складу ЗІП, а *невідновлювані* після їх заміни списуються.

Збереженість ЗІП характеризується ступенем впливу умов зберігання і транспортування на безвідмовність і довговічність подальшого їх функціонування в робочому режимі. Одним з показників зберігання є середній термін зберігання (придатності) при зберіганні, який призначається підприємствами промисловості. Забороняється застосовувати елементи з вичерпаним терміном зберігання, оскільки через можливі неприпустимо великі зміни їх фізико-хімічної структури може відбутися різке погіршення надійності в робочому режимі.

При розгляді завдань надійності були отримані деякі вихідні передумови, які можуть бути використані для вирішення ряду інших експлуатаційних завдань.

Розглянемо деякі з них [1].

Розрахунок кількості запасних невідновлюваних елементів. Для забезпечення можливості швидкого відновлення об'єктів шляхом заміни комплектуючих елементів необхідно мати запасні елементи в кількості R, не меншій, ніж очікувана кількість відмов $n_{ож}$ за певний час t. Математично це виражається так: $R \geq n_{ож}$ за час t.

За розрахунковий час t приймається зазвичай календарний рік або інший час, протягом якого не передбачається поповнення запасу.

Точне значення $n_{ож}$ невідомо. Тому можна задовольнитися лише найпростішим випадком, коли

$$R \geq n_{ср}, \tag{87}$$

де $n_{ср}$ – середня кількість очікуваних відмов певного елемента за зазначений час t.

Знайдемо $n_{ср}$ при таких припущеннях: потік відмов є найпростішим, число елементів даного типу в системі дорівнює N, елементи за період t знаходяться в робочому режимі часу $t_р$ і мають при цьому інтенсивність відмов $\lambda_р$, решту часу $t - t_р$ простоюють, тобто перебувають в режимі простою $t_{пр}$ і мають при цьому інтенсивність відмов $\lambda_{пр}$.

Тоді середнє число відмов

$$n_{ср} = N\left(\lambda_р t_р + \lambda_{пр} t_{пр}\right). \tag{88}$$

Нерівність (87) з урахуванням (88) набуває вигляду

$$R \geq N\left(\lambda_р t_р + \lambda_{пр} t_{пр}\right) = n_{ср}. \tag{89}$$

В реальних випадках число відмов $n_{ож}$ може бути більше або менше середнього значення $n_{ср}$, тому необхідно знати, наскільки вірогідним є те, що число відмов $n_{ср}$ не перевищить числа запасних елементів, тобто

$$\gamma = P\{n_{cp} \le R\}. \tag{90}$$

Якщо треба знайти вірогідність того, що відбудеться рівно *k* відмов, то для найпростішого потоку відмов вона визначилася б за формулою Пуассона

$$P_k = \frac{n_{cp}^k}{k!} e^{-n_{cp}} . \tag{91}$$

Але ми не знаємо, скільки буде відмов за час *t*, тому повинні перебрати всі вірогідності від *k*=0 до *k*=*R*. Тоді вірогідність того, що середнє число відмов n_{cp} не перевищить числа запасних елементів *R* (тобто довірчу вірогідність), можна записати у вигляді суми вірогідностей P_k

$$\gamma = \sum_{k=0}^{R} P_k = \sum_{k=0}^{R} \frac{n_{cp}^k}{k!} e^{-n_{cp}} . \tag{92}$$

Тепер із (92) видно залежність (функцію)

$$R = \varphi(\gamma, n_{cp}). \tag{93}$$

Ця функція затабульована і її значення наводяться в таблицях довідників (наприклад, у таблиці 5). Обчисливши n_{cp} і задавшись γ, за таблицею 5 знаходять *R*.

Таблиця 5 – Значення функції $R=\varphi(\gamma, n_{ср})$ до визначення кількості запасних елементів

$n_{ср}$	γ					
	0,8	0,85	0,9	0,95	0,98	0,99
10	13	13	14	15	17	18
20	24	25	26	27	29	31
30						
40	45	46	48	50	53	55
50						
60	66	68	70	73	76	78
80	87	89	92	95	99	101
100	108	110	113	116	120	124
200	210	216	219	222	228	233
500	516	521	527	535	542	559

Приклад. Нехай при $n_{ср}=100$ необхідно забезпечити систему запасними елементами *R*. З таблиці 5 видно, що при довірчій вірогідності $\gamma=80\%$ їх треба мати 108, а при $\gamma=99\%$ – 124.

Слід зауважити, що на практиці добуток $\lambda_{пр}t_{пр}$ зазвичай буває невідомим через те, що всі відмови, які виникли при простої, проявляються лише під час ввімкненого стану апаратури і тому їх відносять, як правило, до відмов за рахунок роботи апаратури.

Тому середнє число відмов на практиці підраховується за формулою

$$n_{ср} \cong N\lambda_p t_p \,. \tag{94}$$

При розрахунках слід мати на увазі також, що запасні елементи *R*, які зберігаються на складах, теж можуть відмовляти, тому в розрахункову кількість запасних елементів необхідно ввести поправку *r*, яка підраховується

$$r = R\lambda_{хр}t_{хр}\,, \tag{95}$$

де $\lambda_{хр}$ – інтенсивність відмов при зберіганні (на складах);

$t_{хр}$ – час зберігання.

Таким чином, загальна кількість запасних елементів

$$R_0 = R + r\,. \tag{96}$$

Приклад. В електричному обладнанні встановлено $N = 500$ елементів. Довідкові відомості:

$\lambda_p = 10^{-4}$ від./год, $\lambda_{xp} = 10^{-5}$ від./ год, $t_p = 200$ год/р. (на кожний елемент).

Потрібно розрахувати ЗІП на один рік, якщо відомо, що $\gamma = 0{,}98$, а тривалість року в годинах складає T = 8760 год.

Розв'язання: очікувана середня кількість відмов

$$n_{cp} = \left[\lambda_p t_p\right]N = \left(10^{-4} \cdot 200\right)\cdot 500 = 10\,.$$

За таблиці 5 при $\gamma = 0{,}98$, $n_{cp} = 10$ знаходимо R=17.

Знайдемо поправку $r = R\lambda_{xp}t_{xp} = 17 \cdot 10^{-5} \cdot 8760 \approx 1{,}4$.

Округляючи до найближчого більшого, вважаємо $r = 2$. Тому в ЗІП необхідно мати $R_0 = 17 + 2 = 19$ елементів.

Відзначимо, що питанню розрахунку ЗІП невідновлюваних елементів в даний час приділяється досить велика увага. Деякі автори довели свої дослідження до інженерних методів. Накопичено великий статистичний матеріал, який може бути використаний при реалізації розроблених методик. Однак розглянута вище методика, не претендуючи на математичну строгість, може бути рекомендована поки що як приблизна, спрощена.

Оцінка необхідної кількості запасних ремонтованих блоків або вузлів об'єкта. На перший погляд, завдання з визначення кількості запасних блоків здається аналогічним до попереднього. Слід, здавалося б, тільки домовитися, що під елементом ми будемо розуміти блок, вузол та ін. Але це не так просто. У попередній задачі мали справу з невідновлюваними елементами, а тут – з ремонтованими об'єктами: блоками, вузлами і навіть цілими агрегатами, які при нормальній організації технічної експлуатації обов'язково треба мати як запасні. Очевидно, що кількість запасних блоків, вузлів і цілих агрегатів повинна бути менше очікуваної кількості їх відмов за даний проміжок часу, так як кожен запасний об'єкт потрібен для підміни робочого, тільки на час ремонту останнього. А за умовою ординарності найпростішого потоку неможливо, щоб відмовили одночасно всі блоки, вузли або агрегати.

Завдання формулюється так. Потрібно визначити кількість запасних блоків R, необхідних для функціонування системи, що складається з N блоків (це може бути, наприклад, шатунно-поршнева група), з вірогідністю $P(R)$ того, що система буде забезпечена запасними блоками, тобто з довірчою вірогідністю. Це завдання є важким, тому його лише сформулюємо, вкажемо план розв'язання і потім наведемо остаточний результат. Таке завдання зазвичай вирішується при таких обмеженнях:

1) розподіл часу до відмови блока підпорядковується експоненціальному закону при інтенсивності відмов, рівній λ;

2) часу на заміну несправного блока справним відносно мало, відновлення несправного блока починається відразу ж після заміни, а інтенсивність відновлення дорівнює $\mu = \dfrac{1}{T_B}$;

3) всі випадкові величини часу безвідмовної роботи і часу відновлення взаємонезалежні, але виконується умова

$$\frac{N\lambda}{\mu} = a < 1, \tag{97}$$

де $N\lambda$ – інтенсивність відмов системи з N блоків;

μ – інтенсивність відновлення тільки одного блока.

Накладаючи умову (97), хочемо, щоб перша інтенсивність була меншою від другої. Це необхідно для того, щоб не було простоїв обладнання через відсутність вже відремонтованих блоків;

4) відмова системи блоків відбувається тільки тоді, коли в момент відмови немає жодного запасного блока, тобто в найгіршій з можливих практичних ситуацій;

5) всі блоки піддаються ремонту.

При цих обмеженнях вірогідність $P(R)$ того, що розглянута система буде забезпечена запасними блоками, може бути знайдена. На практиці для наближеного розрахунку R цікавляться вірогідністю протилежної події, тобто вірогідністю $Q(R)$ незабезпечення системи запасними блоками

$$Q(R) > 1 - P(R). \tag{98}$$

Доведено, що мінімально необхідна кількість запасних блоків (вузлів) R повинна бути такою, щоб виконувалася така нерівність:

$$Q(R) > \frac{a^{R+1}}{(R+1)!} e^{-a}. \tag{99}$$

Значення, що задовольняють нерівність (99), знаходяться (шляхом підбору) наступним чином.

За заданим значенням $P(R)$ за допомогою формули (98) знаходять $Q(R)$. Після цього, призначаючи R цілими числами, тобто 1, 2, 3 та ін., підраховують праву частину нерівності (99). Мінімальне значення R, при якому нерівність (99) виконується, приймається як результат оцінки необхідної кількості запасних блоків або вузлів об'єкта.

ЛЕКЦІЯ 6. Застосування теорії масового обслуговування до завдань експлуатації

6.1 Предмет і зміст теорії масового обслуговування

Теорія масового обслуговування (ТМО) зародилася і отримала розвиток як розділ теорії вірогідностей. Однак в останні роки з огляду на важливість практичних завдань, що вирішуються методами цієї теорії, а також через специфіку самих методів ТМО стає самостійним науковим напрямом. Вона займається вивченням статистичних характеристик систем масового обслуговування [1].

Системою масового обслуговування називається сукупність однорідних обслуговуючих пристроїв. Під пристроями розуміють прилади, апаратуру та ін. Обслуговуючі пристрої називають загальним терміном – *канали обслуговування*. Однорідність каналів обслуговування полягає тільки в здатності задовольнити (обслужити) заявку з однаковими часовими характеристиками.

Характерними особливостями систем масового обслуговування вважаються випадковість моментів появи заявок на обслуговування і випадковість моментів закінчення обслуговування. Це означає, що проміжки часу між появою попередньої та подальшої заявок – випадкові величини. Тривалість обслуговування заявки в системах – також величина випадкова.

Прикладами систем масового обслуговування з галузі господарства (промисловості, зв'язку, транспорту та ін.) можуть служити ремонтні майстерні, телефонні станції, різні види транспорту (разом зі своїми квитковими касами) та ін.

Системами масового обслуговування, безумовно, є всі ремонтні органи транспортної техніки, які проводять капітальні і поточні ремонти транспорту та його обладнання.

Основне завдання ТМО полягає у визначенні пропускної спроможності систем обслуговування і знаходженні статистичних показників, що характеризують ступінь задоволення потоку заявок.

Пропускна спроможність систем обслуговування визначається кількістю обслуговуваних заявок за одиницю часу.

Вона залежить від таких факторів:

- числа каналів обслуговування;
- продуктивності кожного каналу;
- характеру і інтенсивності потоку заявок.

Вплив перших двох факторів на пропускну спроможність очевидний.

Розглянемо, як впливає характер і інтенсивність потоку заявок на роботу системи.

Виявляється, закономірності надходження заявок і інтенсивність потоку заявок істотно впливають на пропускну здатність системи обслуговування і всі її статистичні характеристики.

Справді, якщо заявки слідують одна за одною регулярно (з постійним інтервалом), то система легко пристосовується до цього режиму. Зі збільшенням інтенсивності потоку заявок необхідно відповідно збільшувати число каналів обслуговування. Однак завдання змінюється докорінно в разі, якщо потік заявок стає нерегулярним, в результаті чого іноді утворюються підвищені і знижені щільності потоку. В цьому випадку ритмічна робота системи обслуговування порушується: утворюються черги в періоди підвищеної щільності потоку заявок і відповідно простої обслуговування в періоди зниженої щільності потоку заявок. Простої каналів обслуговування через відсутність заявок, так само як і простої заявок в черзі на обслуговування, тягнуть за собою економічний збиток. Виникає завдання: встановити, якими характеристиками повинна володіти система обслуговування, щоб економічні втрати при цьому були мінімальними. Вирішити це завдання в даний час можна тільки методами ТМО.

Для вирішення завдання зазначеного типу необхідно володіти аналітичними співвідношеннями, що зв'язують дві групи критеріїв: перша група критеріїв характеризує ступінь задоволення потоку заявок, а друга – виявляє міру використання каналів обслуговування.

ТМО встановлює аналітичні залежності між цими критеріями. Використовуючи ці залежності і знаючи економічні показники, що оцінюють втрати, пов'язані з простоєм каналів обслуговування і простоями заявок в черзі на обслуговування, можна знайти для кожного конкретного випадку оптимальне співвідношення між довжиною черги і кількістю каналів обслуговування, між середнім часом простою каналів обслуговування і середнім часом перебування заявки в системі, між середнім числом необслуговуваних заявок, кількістю каналів та ін.

Всі існуючі системи масового обслуговування в залежності від характеру вирішуваних ними завдань і відповідного порядку обслуговування заявок можуть бути розділені на такі три типи:

1) системи масового обслуговування з відмовами, в яких заявки починають обслуговуватися негайно, якщо канали вільні, або отримують відмову і губляться, якщо всі канали обслуговування зайняті;

2) системи масового обслуговування з очікуванням, в яких всі заявки шикуються в чергу, якщо канали обслуговування зайняті, і знаходяться в системі до тих пір, поки їх не обслужать;

3) системи масового обслуговування з різними обмеженнями на час перебування заявки в системі (системи змішаного типу).

Прикладом системи першого типу може служити система телефонного зв'язку. Абонент, що застав лінію зв'язку зайнятою, отримує відмову. Повторна спроба при цьому розглядається як нова заявка.

Завдання з визначення статистичних характеристик систем масового обслуговування (СМО) можуть бути вирішені наближено експериментальними методами шляхом проб і послідовних наближень. На практиці все ще вдаються до цього прийому. Однак у багатьох випадках такий експеримент виявляється занадто дорогим, а в ряді випадків (наприклад, в деяких військових завданнях) і взагалі неможливим. З ускладненням структури економіки, зі зростанням складності техніки не можна більше у своїх рішеннях покладатися тільки на досвід і інтуїцію. Занадто дорого обходяться не тільки всілякі помилки і промахи, але навіть просто деякі відхилення характеристик систем обслуговування від оптимальних. Саме тому інженери і всі керівники повинні оволодіти методами ТМО, які дозволяють приймати науково обґрунтовані рішення в організації СМО в широкому сенсі цього слова.

6.2 Системи масового обслуговування з очікуванням

Постановка задачі. Розглянемо систему, що складається з n працюючих приладів і r каналів обслуговування. У кожному з приладів, що володіють обмеженою надійністю, у випадковий момент часу може з'явитися відмова. Відмова приладу породжує заявку на обслуговування, а потік відмов утворює відповідно потік заявок. Заявки, що надійшли, починають негайно задовольнятися обслуговуванням, а в разі, коли всі r каналів обслуговування зайняті, заявки становляться в чергу. Зауважимо, що в системі з очікуванням $r \le k < n$, де k – число відмов приладів.

Будемо вважати, що СМО задовольняє умову існування найпростішого потоку заявок (відмов) і обслуговування [1].

Тоді:

λ – інтенсивність надходження заявок (відмов) від одного приладу (зауважимо, що $\lambda = const$);

$\Lambda = n\lambda$ – сумарна інтенсивність заявок системи з n приладів (параметр потоку заявок);

μ – інтенсивність обслуговування (відновлення, ремонту) в одному каналі;

$r\mu$ – сумарна інтенсивність обслуговування у всіх *r* каналах.

До розглянутих систем можуть бути зведені майже всі системи обслуговування техніки. Очевидно, що потік заявок на обслуговування техніки може створюватися не тільки появою відмов, але і необхідністю зробити огляд і контроль приладів та ін. А сам процес обслуговування може складатися як з операцій контролю і ремонту, так і одного контролю. Як працюючі прилади можуть розглядатися локомотиви, окремі види обладнання. Як канали обслуговування можуть бути прийняті різні ремонтні органи, частини і їх складові ланки – групи регламентних робіт, групи обслуговування, технічні розрахунки, окремі фахівці та ін.

Потрібно знайти вірогідності перебування системи в будь-якому з станів $P_k(t)$ в довільний момент часу *t*. Під $P_k(t)$ розуміють вірогідність такого стану, при якому *k* приладів у системі не працюють (відмовили), з них *r* приладів обслуговується (ремонтується), а решта $(k - r)$ очікують обслуговування (знаходяться в черзі).

Знайдені значення для P_k дозволять розрахувати всі критерії, що характеризують ступінь задовільнення потоку заявок і ступінь використання каналів обслуговування.

Попередньо отримаємо деякі співвідношення, які знадобляться при складанні диференціальних рівнянь, що описують процес обслуговування.

Визначимо вірогідність відмови приладу $P_{від}$ до моменту $t + \Delta t$ за умови, що до моменту *t* прилад був справний.

Використовуючи умову незалежності закону розподілу решти проміжку часу Δt (основна властивість показового закону), можна написати

$$P_{від} = 1 - P_0 \text{, де } P_0 = e^{-\lambda \Delta t} .$$

Застосувавши розкладання показникової функції в ряд за ступенями Δt

$$e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} - \ldots,$$

знайдемо $P_{від}(\Delta t) = \lambda(\Delta t) + o(\Delta t)$.

За аналогією визначається вірогідність завершення обслуговування заявки до моменту $t + \Delta t$ за умови, що до моменту t прилад знаходився на обслуговуванні. Вираз для цієї вірогідності може бути складено також з урахуванням основної властивості показового закону

$$P_{обсл}(\Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = 1 - \left[1 - \mu \Delta t + \frac{(\mu \Delta t)^2}{2!} \ldots\right],$$

$$P_{обсл}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Інженерне правило складання системи рівнянь. Знайдемо спочатку $P_k(t)$ в загальному вигляді для будь-якого *k*, сформулюємо інженерне правило, а потім розглянемо окремі випадки. Схему станів СМО подано на рисунку 23.

Зафіксуємо час *t* і будемо цікавитися вірогідністю

$$P_k(t + \Delta t) = P(A) + P(B) + P(C) + o(\Delta t), \qquad (100)$$

де *A*, *B* і *C* – несумісні події;

$o(\Delta t)$ – сума вірогідностей всіх інших переходів за Δt в стан S_k.

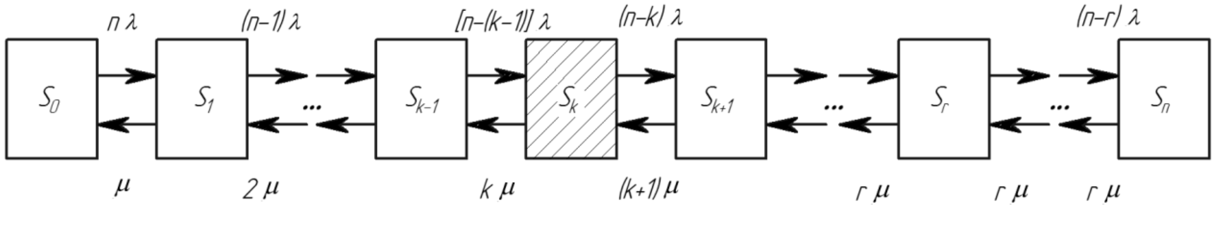


Рисунок 23 – Схема станів системи масового обслуговування

Подія А. В момент t СМО знаходиться в стані S_k, з вірогідністю $P_k(t)$, а за Δt не перейде ні в стан S_{k+1} (тобто не зробить жодної заявки від $n-k$ працюючих приладів), ні в стан S_{k-1} (не вивільниться жоден з k зайнятих каналів, тобто не відбудеться відновлення жодного з приладів *k,* які відмовили), рисунок 24, А.

Імовірність $P(A)$ визначається за формулою

$$P(A) = P_k(t) e^{-\Delta t(n-k)\lambda} e^{-\Delta t k \mu},$$

де $e^{-\Delta t(n-k)\lambda}$ – вірогідність того, що за Δt СМО не перейде в стан S_{k+1};

$e^{-\Delta t k \mu}$ – вірогідність того, що за Δt СМО не перейде в стан S_{k-1}.

Тоді $P(A) = P_k(t) e^{-\Delta t[(n-k)\lambda + k\mu]}$.

Розкладаючи експоненту в ряд і обмежуючись двома першими членами, отримаємо значення вірогідності

$$P(A) \approx [1 - (n-k)\lambda \Delta t - k\mu \Delta t] P_k(t). \tag{101}$$

Подія В. До моменту t СМО знаходиться в стані S_{k+1} з вірогідністю $P_{k+1}(t)$, а за Δt перейде в стан S_k (тобто один із k+1 відмовлених приладів буде відновлено), рисунок 24, *В*.

Вірогідність

$$P(B) = P_{k+1}(t)\left[1 - e^{-\Delta t(k+1)\mu}\right].$$

За аналогією маємо

$$P(B) \approx (k+1)\mu \Delta t P_{k+1}(t). \tag{102}$$

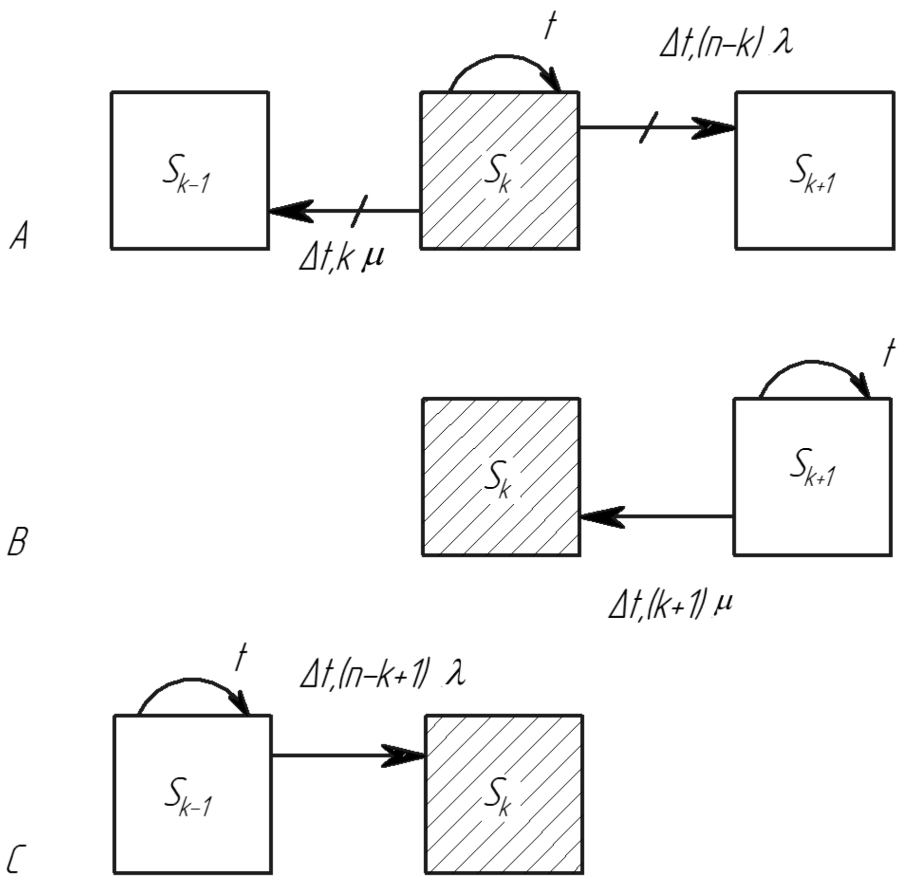


Рисунок 24 – Схеми станів системи для різних подій
(A, B, C)

Подія C. До моменту t СМО знаходиться в стані S_{k-1}, з вірогідністю $P_{k-1}(t)$, а за Δt перейде в стан s_k (тобто один із $n-(k-1)=n-k+1$ приладів відмовить), рисунок 24, *C*.

Вірогідність

$$P(C)=P_{k-1}(t)\left[1-e^{-\Delta t(n-k+1)\lambda}\right].$$

За аналогією маємо

$$P(C)\approx(n-k+1)\lambda\Delta t P_{k-1}(t). \tag{103}$$

Підставляючи вираз (101) в рівняння (100) і віднімаючи з лівої і правої його частин вірогідність $P_k(t)$, отримаємо

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P(C)-P_k(t)[(n-k)\lambda\Delta t+k\mu\Delta t]+P(B)+o(\Delta t). \quad (104)$$

Тепер підставляємо $P(C)$ і $P(B)$ і ділимо ліву і праву частини на Δt. Тоді ліва частина рівняння дорівнює $\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}$.

Здійснюючи граничний перехід, тобто спрямовуючи Δt до нуля, отримаємо $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$;

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=(n-k+1)\lambda P_{k-1}(t)-[(n-k)\lambda+k\mu]P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t). \quad (105)$$

Формула (105) є загальною і остаточною.

Тепер наведемо інженерне правило складання диференціальних рівнянь (сформульоване академіком А. Н. Колмогоровим) за виглядом графа станів:

«Похідна від вірогідності перебування системи в будь-який момент часу в стані *k* дорівнює добутку суми інтенсивностей переходів в *k* стан (або з *k* стану) на вірогідність того стану, звідки відбувається перехід в *k* стан. Причому тим добуткам, яким відповідають стрілки з *k*-го стану, що відійшли, приписується знак «мінус», а що входять – «плюс».

Розглянемо деякі окремі випадки:

1) *k*=0. Використовуючи інженерне правило, знайдемо $\frac{dP_0(t)}{dt}$ для події $S_k=S_0$, пов'язаної з подією $S_{k+1}=S_1$, (події S_{k-1} виключаються, оскільки не має фізичного сенсу), дивись рисунок 24, *A*, *B*.

Тоді

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-n\lambda P_0(t)+\mu P_1(t). \quad (106)$$

Зауважимо, що рівняння (106) можна отримати і з загального рівняння (105) при k = 0, але відкидаючи складову з $P_{k-1}(t)$, яка не має сенсу;

2) $r\le k<n$. В цьому випадку диференціальне рівняння виходить з рівняння (105) шляхом заміни множників при μ, що

визначають відновлення приладів, максимальним числом каналів обслуговування, рівним *r* (значить, інші $k - r$ заявок знаходяться в черзі):

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = (n-k+1)\lambda P_{k-1}(t) - [(n-k)\lambda + r\mu]P_k(t) + r\mu P_{k+1}(t); \qquad (107)$$

3) *k* = *n*. У цьому випадку всі *n* приладів відмовили. Вважаючи в рівнянні (107), що *k* = *n*, отримаємо

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - r\mu P_n(t), \qquad (108)$$

де третій член з складової $P_{n+1}(t)$ не має сенсу, так як всього *n* приладів.

Висновки. Рівняння (107) і (108) описують ситуацію, коли в системі утворюється черга через відсутність вільних каналів обслуговування.

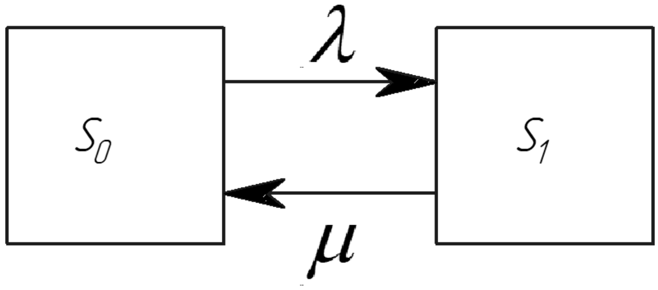


Рисунок 25 – Графік станів системи масового обслуговування

Приклад. Заданий розмічений граф станів СМО подано на рисунку 25. Використовуючи інженерне правило, потрібно скласти систему лінійних диференційних рівнянь для СМО

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t);$$

$$1 = P_0(t) + P_1(t).$$

Зауважимо, що з порівняння 1-го і 2-го рівнянь системи випливає висновок

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\frac{dP_0(t)}{dt}.$$

Згадаймо, що в теорії надійності вже приходили до такого висновку, тільки іншим шляхом:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt} = f(t),$$

де $f(t)$ – диференційний закон надійності.

Розв'язання системи рівнянь. Отриманий вираз (105) і його різновиди (106), (107) і (108) являють собою систему рівнянь, розв'язання яких дозволить визначити можливості різноманітних станів СМО в функції часу. З огляду на те, що в переважній більшості прикладних задач цікавляться тільки характеристиками режиму обслуговування, можна значно спростити розв'язання отриманих рівнянь, скориставшись результатами граничної теореми, що доводить існування межі

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k.$$

На підставі цього граничного переходу можна стверджувати, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dP_k(t)}{dt} = 0. \tag{109}$$

Дійсно, при $t \to \infty$ межі похідних можуть бути тільки нулями, так як якщо б якісь $\dfrac{dP_k(t)}{dt}$ прагнули до числа, відмінного від нуля, то відповідні функції $P_k(t)$ при $t \to \infty$ зростали б безмежно. А це суперечить граничній теоремі.

Умова (109) дозволяє перетворити складену систему диференційних рівнянь в систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$n\lambda P_0 = \mu P_1, \tag{110}$$

при $k = 0$;

$$\left[(n-k)\lambda + r\mu\right]P_k = (n-k+1)\lambda P_{k-1} + r\mu P_{k+1}, \tag{111}$$

при $r \le k < n$;

$$r\mu P_n = \lambda P_{n-1}, \tag{112}$$

при $k=n$.

Розв'язання рівняння (105) дає результат

$$P_k = \frac{n!}{r^{k-r} r!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0. \tag{113}$$

Значення P_0 визначається за формулою $P_0 = \dfrac{1}{1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$. Необхідно при цьому звернути увагу на те, що все в цій формулі підраховується з виразу

$$A_k = \frac{n!}{r^{k-r} r!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \tag{114}$$

відповідного умові $r \le k < n$.

Для окремого випадку, коли в системі є тільки один канал обслуговування, формула (113) спрощується

$$P_k = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 . \qquad (115)$$

Статистичні характеристики систем масового обслуговування. Отримані вирази для визначення вірогідності різних станів системи дозволяють розраховувати численні кількісні критерії, що характеризують ступінь задовільнення потоку заявок і ступінь використання каналів обслуговування. Розглянемо основні з них (рисунок 26).

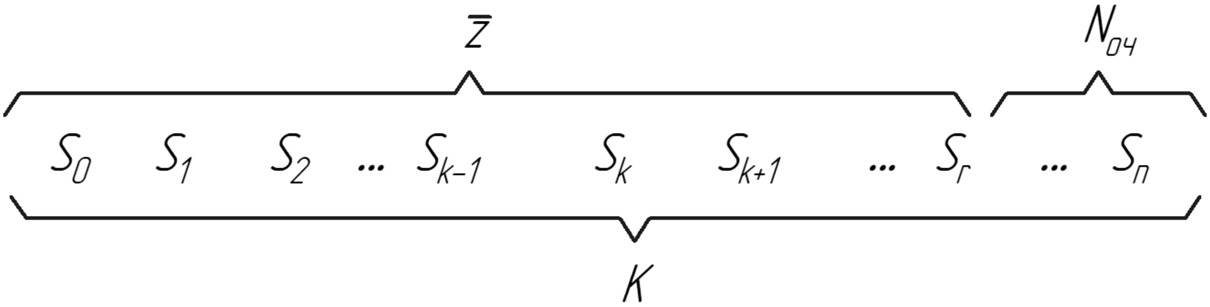


Рисунок 26 – Схема визначення статистичних характеристик системи

1 Пропускна спроможність

$$M = \frac{\bar{z}}{T_B} = \bar{z}\mu , \qquad (116)$$

де $\mu = \dfrac{1}{T_B}$;

$\bar{z}$ – середня кількість заявок в каналах обслуговування, тобто зайнятих каналів на ремонті. Вона визначається як математичне очікування дискретної випадкової величини.

Величина $\bar{z}$ визначається за такою формулою:

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^{r} kP_k + \sum_{k=r+1}^{n} rP_k , \qquad (117)$$

де перший доданок характеризує відсутність черги, а другий – чергу.

2 Середнє число заявок, що знаходяться в системі обслуговування (як в каналах обслуговування, так і в черзі на обслуговування), розраховується також за формулою математичного очікування дискретної випадкової величини

$$K = \sum_{k=0}^{n} kP_k \,. \tag{118}$$

Знайдемо зв'язок між *K* і *M*. Кількість справно працюючих приладів $n - K = T_0 M$, звідки

$$M = \frac{n-K}{T_0} = \lambda(n-K). \tag{119}$$

Порівнюючи вирази (116) і (119), отримуємо

$$\mu\bar{z} = \lambda(n-K) = n\lambda - K\lambda \,,$$

звідки

$$K = \frac{n\lambda - \mu\bar{z}}{\lambda} = n - \frac{\bar{z}}{\lambda/\mu} \,,$$

або

$$K = n - \frac{\bar{z}}{\rho} \,, \tag{120}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

3 Середнє число заявок, що знаходяться в черзі на обслуговування,

$$N_{оч} = \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)P_k \tag{121}$$

при $r \le k \le n$.

Для розрахунку $N_{оч}$ є й інша формула (дивись рисунок 26)

$$N_{оч} = K - \bar{z} = n - \frac{\bar{z}}{\rho} - \bar{z} = n - \bar{z}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \tag{122}$$

4 Середнє число простоїв каналів обслуговування через відсутність заявок

$$R_{пр} = \sum_{k=0}^{r-1} (r-k) P_k \tag{123}$$

при $0 \le k \le r$.

Якщо СМО одноканальна, тобто $r = 1$, то з виразу (123) випливає, що простій через відсутність заявок буде тільки при $k = 0$.

Тоді

$$R_{пр} = 1P_0 = P_0, \tag{124}$$

де $P_0 = P_k$ (при k=0) є гранична вірогідність, яка за фізичним змістом являє собою середній відносний час перебування системи в даному стані. Отже, $T_{пр} = R_{пр} = P_0$ при $r = 1$. Якщо $r > 1$, то $T_{пр}$ буде визначатися формулою (125).

5 Середній відносний час простою кожного каналу обслуговування через відсутність заявок

$$T_{пр} = \frac{R_{пр}}{r}, \tag{125}$$

при $r > 1$.

6 Середнє відносне значення часу перебування кожної заявки в черзі на обслуговування

$$T_{оч} = \frac{N_{оч}}{n}. \tag{126}$$

7 Середнє відносне значення часу перебування заявки в черзі і в каналі обслуговування

$$T_{обсл} = \frac{K}{n}. \tag{127}$$

Останні три характеристики, природно, величини безрозмірні.

6.3 Приклади застосування ТМО до завдань експлуатації

Визначення коефіцієнтів готовності і простою. Нехай система характеризується напрацюванням на відмову, що дорівнює T_0, середнім часом відновлення T_B.

Будемо припускати, що ЗІП необмежений, ремонт починається відразу ж після відмови, а потоки відмов і відновлення найпростіші [1].

Потрібно визначити коефіцієнти готовності $k_г$ і простою $k_п$.

Скористаємося графом двох можливих несумісних станів (робота або ремонт) системи, поданим на рисунку 25.

За визначенням:

$k_г = P_0$ – вірогідність застати систему в справному стані;

$k_п = P_1$ – вірогідність застати систему в несправному стані.

Застосовуючи інженерне правило (з урахуванням граничної теореми), складаємо систему алгебраїчних рівнянь з вигляду графа для стану S_0

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$1 = P_0 + P_1.$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо $P_1 = 1 - P_0$. Підставляючи цей вираз в перше рівняння, отримаємо

$$\lambda P_0 = \mu - \mu P_0,$$

звідки

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda - \mu} = \frac{T_0}{T_0 + T_B} = k_г ,$$

або

$$k_г = \frac{T_0}{T_0 + T_B} .$$

Ця формула часто використовується як комплексний показник надійності.

Коефіцієнт простою

$$k_п = P_1 = 1 - P_0 = 1 - k_г ,$$

або

$$k_п = \frac{T_B}{T_B + T_0} .$$

Визначення показників надійності резервованих систем. Нехай є система, що складається з основного (робочого) елемента і двох резервних (рисунок 27, а).

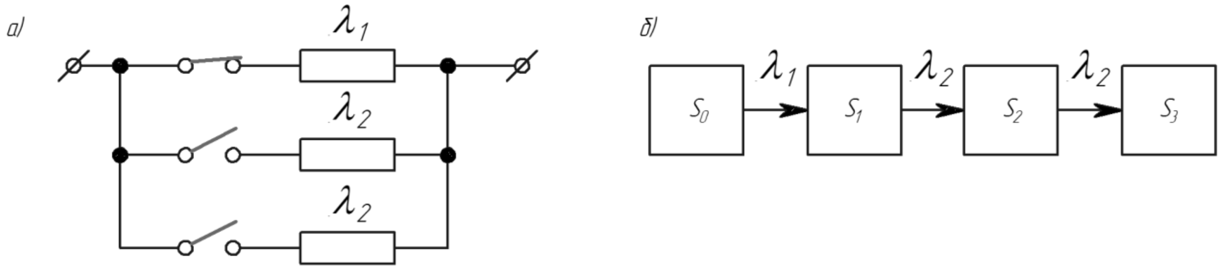


Рисунок 27 – Схема резервованої системи (*а*)
і граф її станів (*б*)

Резервування ненавантаженим заміщенням. Вважаємо, що перемикачі абсолютно надійні ($P_п \approx 1$).

Потрібно визначити надійність системи методом ТМО.

Граф можливих станів наведено на рисунку 27, *б*, де S_0 – працює основний елемент; S_1 – працює перший резервний елемент, так як основний відмовив; S_2 – працює другий резервний елемент, так як відмовили основний і перший резервний елементи; S_3 – система не працює, так як відмовили всі елементи.

Оскільки відновлення (ремонт) елементів не відбувається, то стрілки на графі спрямовані тільки в одну сторону.

Система диференціальних рівнянь, складених за інженерним правилом відповідно для S_0, S_1, S_2, і S_3, має вигляд

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_1 P_0(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 P_0(t) - \lambda_2 P_1(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_2 P_1(t) - \lambda_2 P_2(t);$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2 P_2(t).$$

Крім того, врахуємо нормувальну умову

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1.$$

Оскільки резерв ненавантажений, будемо вважати, що резервні елементи свій ресурс не витрачають, поки працює основний елемент. Тоді умова переходу зі стану *і* в стан *j* на межі не виконується.

Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{dP_k(t)}{dt} \neq 0$ і переходити до системи алгебраїчних рівнянь не можна.

Потрібно вирішувати диференційні рівняння відомими в математиці методами.

Наприклад, маючи на увазі, що $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, для першого рівняння отримаємо

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_1 P_0(t) = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t},$$

із другого рівняння

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 P_1(t),$$

а це вже лінійне диференціальне рівняння, рішення якого відомо. З нього знаходимо $P_1(t)$. Потім так само знаходимо $P_2(t)$.

Вірогідність безвідмовної роботи системи є вірогідність того, що справно працюватиме хоча б один елемент з трьох. Вона дорівнює сумі вірогідностей несумісних подій

$$P_{\sum}(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t),$$

а вірогідність відмови системи з нормувальної умови

$$P_3(t) = 1 - P_{\sum}(t).$$

Визначення необхідної кількості каналів обслуговування і їх продуктивності. Потрібно оцінити, яка повинна бути продуктивність каналу обслуговування, тобто інтенсивність відновлення заявок. З цією метою знайдемо максимально допустимий відносний час перебування заявки в каналі обслуговування, при якому ще не утвориться черга, тобто щоб $T_{оч} = 0$,

$$T_{оч} = \frac{N_{оч}}{n} = 0; \; N_{оч} = 0.$$

З урахуванням формули (122)

$$n - \bar{z} \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) = 0,$$

звідки

$$\bar{z} = \frac{n\rho}{1+\rho}.$$

Середній відносний час обслуговування з урахуванням формули (120) і попередньої формули

$$T_{обсл} = \frac{K}{n} = \frac{n - \frac{z}{\rho}}{n} = 1 - \frac{\bar{z}}{n\rho} = 1 - \frac{n\rho}{(1+\rho)n\rho} = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

З іншого боку, максимально можливий відносний час обслуговування заявки при відсутності черги

$$T_{обсл} = \frac{r}{n}.$$

Значить, СМО повинна бути такою, щоб

$$T_{обсл} \leq T_{обсл_{\max}}$$

або

$$\frac{\rho}{1+\rho} \leq \frac{r}{n}.$$

Зробимо обчислення за цим критерієм з урахуванням того, що $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,

$$\frac{r}{n} \geq \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

звідки

$$r\lambda = r\mu \geq n\lambda$$

і остаточно

$$\mu \geq \frac{\lambda(n-r)}{r},$$

або з урахуванням того, що $\mu = \dfrac{1}{T_B}$,

$$T_B \le \frac{r}{\lambda(n-r)} = T_0 \frac{r}{n-r}.$$

З останньої формули можна визначити і кількість каналів r за умови відсутності черги, якщо T_0 і T_B відомі:

$$T_B \le \frac{rT_0}{n-r};$$

$$r \ge n\frac{T_B}{T_0 + T_B},$$

або

$$r \ge nk_n.$$

Приклад. Яка кількість каналів обслуговування повинна бути при обслуговуванні 30 локомотивів без утворення черги, якщо підтримувати $k_г = 0{,}9$?

Розв’язання

$$k_n = 1 - k_г = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Тоді $r \ge 30 \cdot 0{,}1 = 3$.

Тут треба мати на увазі, що $0 < r < n$.

Цікавий окремий випадок, коли $r = n$. В цьому випадку СМО розпадається на ряд одноканальних, в кожній з яких обслуговується одна заявка.

У цьому параграфі коротко викладено обмежене число завдань ТМО стосовно СМО з очікуванням [1]. Сучасна теорія масового обслуговування має добре розроблені методи аналізу систем з відмовами, систем з обмеженим очікуванням заявок в черзі і взагалі з обмеженим часом заявки в системі обслуговування і різними правилами обслуговування.

Розрахувавши основні характеристики системи масового обслуговування (такі, як $N_{оч}$ і $R_{пр}$) і поставивши їм у відповідність економічні показники, можна оптимізувати кількість каналів і їх пропускну спроможність. Залежно від числа локомотивів і інтенсивності потоку заявок на обслуговування визначається пропускна спроможність кожного приладу і їх загальна кількість з урахуванням економічних чинників або з урахуванням забезпечення необхідного рівня готовності техніки. Таким чином, апарат ТМО може бути успішно застосований не тільки для обґрунтування організаційної структури систем обслуговування, але і для раціонального вибору їх технічних характеристик.

Існуючі методи ТМО поки ще не враховують якість обслуговування. Зазвичай передбачається, що всі заявки однотипні, час обслуговування заявок розподілено за показниковим законом з постійним параметром μ, тобто середній час обслуговування однієї заявки – величина постійна. Тим часом існує чимало практичних завдань, в яких якість обслуговування має певний функціональний зв'язок з тривалістю обслуговування. Таким чином, виникає нова проблема аналізу систем масового обслуговування з різнотипними заявками і, отже, з різним середнім часом обслуговування заявок.

Подальший розвиток ТМО, безсумнівно, розширить коло розв'язуваних інженерних задач, в тому числі і завдань із забезпечення високої ефективності експлуатації транспортної техніки [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Канарчук В. С., Полянський С. К., Дмітрієв М. М. Надійність машин : підручник. Київ : Либідь, 2003. 424 с.

2 Барнік М. А., Афтаназів І. С., Сівак Ш. О. Технологічні методи забезпечення надійності деталей машин. Київ, 2004. 148 с.

3 Васілевський О. М. Поджаренко В. О. Нормування показників надійності технічних засобів : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2010. 129 с.

4 Семенов А. А., Мелкумян В. Г. Основи теорії надійності : навч. посіб. Київ : КМУЦА, 1998. 84 с.

5 ДСТУ 2860-94 Надійність техніки. Терміни та визначення. Київ : Держстандарт України, 1994. 36 с.

6 Про затвердження Технічного регламенту безпеки рухомого складу залізничного транспорту : Постанова Кабінету Міністрів України від 30 грудня 2015 р. № 1194. *Офіційний вісник України*. 2016. № 12, С. 16, ст. 501, код акта 80693/2016.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Значення χ^2 залежно від $k = 2n$ та $1-\frac{\alpha}{2}$ або $\frac{\alpha}{2}$

Ступінь вільності $k = 2n$	Значення вірогідностей $1-\frac{\alpha}{2}$ або $\frac{\alpha}{2}$						
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,34	3,00	4,35
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,99	12,34
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3
22	9,64	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3

Продовження таблиці А.1

Ступінь вільності $k = 2n$	Значення вірогідностей $1-\frac{\alpha}{2}$ або $\frac{\alpha}{2}$						
	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	3,66	4,61	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,3	16,81	22,5
7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	9,52	11,03	13,36	15,52	18,17	20,1	26,1
9	10,56	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	15,12	16,98	19,31	22,4	25,5	27,7	34,6
14	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,6
16	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,9
17	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,5	45,3
21	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

ДОДАТОК Б

Таблиця Б. 1 – Значення параметра t_γ розподілення Стьюдента

Ступінь вільності $k=n-1$	Значення довірчої вірогідності γ					
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	1,963	3,08	6,31	12,31	31,8	63,7
2	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60
5	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71
7	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50
8	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36
9	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25
10	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17
11	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11
12	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06
13	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01
14	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98
15	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95
16	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92
17	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90
18	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88
19	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86
20	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84
21	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83
22	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82
23	1,060	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81
24	1,059	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80
25	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79
30	1,055	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75
40	1,050	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70
60	1,046	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66
120	1,041	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62
∞	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58

НАДІЙНІСТЬ ЗАЛІЗНИЧНОГО
РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Клименко О. В.

Редактор Решетилова В. В,

Підписано до друку 07.07.20 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,5. Тираж 10. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.