

**МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра „Механіка і проектування машин”**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до самостійної роботи студентів з дисципліни  
“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**

**(змістовий модуль "Д И Н А М І К А")**

**Харків – 2011**

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до

друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин”  
27 листопада 2009 р., протокол № 4.

Укладачі:

доценти О.В. Оробінський,  
Н.А. Аксьонова,  
старші викладачі Л.М. Дунай,  
Л.В. Астахова

Рецензент

проф. О.В. Братченко

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів з дисципліни  
“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

(змістовий модуль "Д И Н А М І К А")

Відповідальний за випуск Оробінський О.В.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 22.03.10 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,25. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.



УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ  
з дисципліни “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**

**(змістовий модуль "ДИНАМІКА")**

Харків 2011 р.

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 27 листопада 2009 р., протокол № 4.

Рецензент

проф. О.В. Братченко

## ЗМІСТ

|     |  |    |
|-----|--|----|
|     | Вступ .....  | 4  |
| 1   | Методичні поради до виконання розрахунково-<br>графічних робіт ..... | 5  |
| 2   | Завдання та типові звіти .....                                       | 6  |
| 2.1 | Завдання Д 1 .....   | 6  |
| 2.2 | Завдання Д 2 .....   | 17 |
| 2.3 | Завдання Д 3 .....   | 36 |
| 2.4 | Завдання Д 4 .....   | 42 |
| 2.5 | Завдання Д 5 .....   | 54 |
| 3   | Питання для самоконтролю і підготовки до заліків та<br>іспитів ..... | 64 |
|     | Список літератури .....  | 66 |

## ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного, будівельного та АТЗ факультетів на I та II курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної

бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів “Статика”, “Кінематика”, “Динаміка”. У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять та виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР).

Усе зазначене вище зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичного забезпечення та рекомендацій для самостійної роботи з розділу "Динаміка", які дають комплексну уяву про склад, тематику та загальний обсяг задач розділу, типові звіти з принципами виконання та варіанти завдань для РГР, питання для самоконтролю та підготовки до тестування, іспитів і заліків, а також рекомендовану літературу.

Методичні вказівки призначено для студентів денної форми навчання усіх спеціальностей.

## **1 МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ**

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) з розділу „Динаміка”.

Зміст РГР, а саме номер варіанта уточнюється викладачем під час аудиторних занять.

Кожна задача супроводжується рисунками та таблицею (номери рисунка з тим самим номером, що й умова задачі в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. типові звіти до РГР здійснюються у відповідності зі встановленими вимогами, а саме на ній обов'язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання задач повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання задач повинні бути виконаними акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають всім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

## **2 ЗАВДАННЯ ТА ТИПОВІ ЗВІТИ**

### **2.1 Завдання Д 1**

#### **ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ**

#### **Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.**

## Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією постійних сил

### Варіант 1-5 (рисунок 2.1)

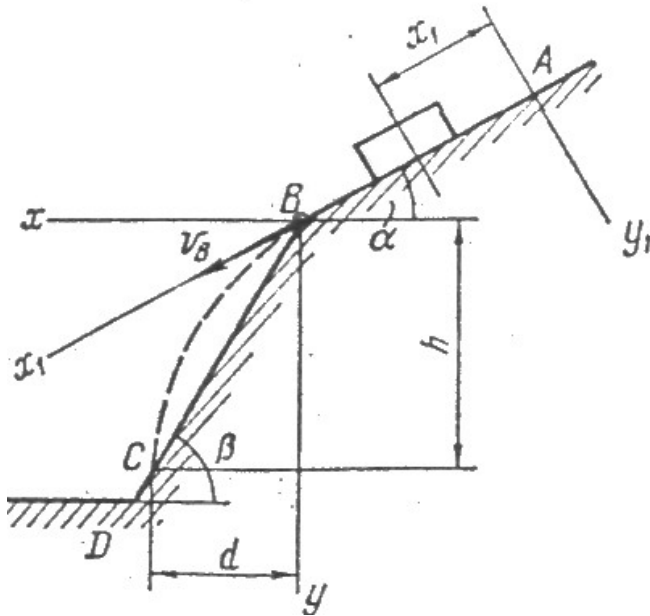


Рисунок 2.1

Тіло рухається із точки А по ділянці АВ (довжиною  $l$ ) похилої площини, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом, протягом часу  $\tau$ . Його початкова швидкість  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює  $f$ .

У точці В тіло залишає площину зі швидкістю  $v_B$  та потрапляє зі швидкістю  $v_C$  у точку С площини ВD, похилої під кутом  $\beta$  до горизонту. Час падіння тіла у повітрі складає  $T$ .

При розв'язанні задачі тіло прийняти за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_A = 0$ ,  $f = 0,2$ ,  $l = 10$  м,  $\beta = 60^\circ$ .

Визначити  $\tau$  і  $h$ .

Варіант 2. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $v_A = 2$  м/с,  $f = 0,2$ ,  $h = 4$  м,  $\beta = 45^\circ$ .

Визначити  $l$  та рівняння траєкторії точки на відрізьку ВС.

Варіант 3. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_A = 2,5$  м/с,  $f \neq 0$ ,  $l = 8$  м,  $d = 10$  м,  $\beta = 60^\circ$ .

Визначити  $\tau$  і  $v_B$ .

Варіант 4. Дано:  $v_A = 0$ ,  $f = 0$ ,  $\tau = 2$  с,  $l = 9,8$  м,  $\beta = 60^\circ$ ,  $f = 0$ .

Визначити  $\alpha$  і  $T$ .

Варіант 5. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_A = 0$ ,  $l = 9,8$  м,  $\tau = 3$  с,  $\beta = 45^\circ$ .



Визначити  $f$  і  $v_C$ .

**Варіант 6 - 10 (рисунок 2.2)**

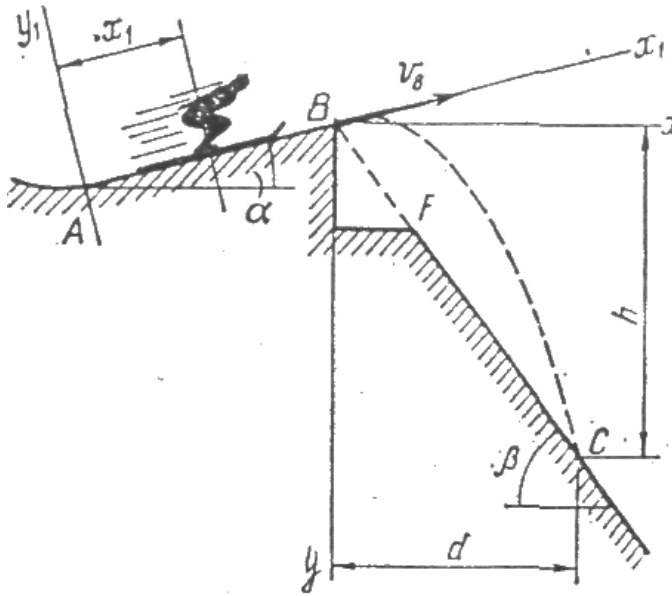


Рисунок 2.2

Лижник наближається до точки А ділянки трампліна АВ, похилого до горизонту під кутом  $\alpha$ , зі швидкістю  $v_A$ . Довжина трампліна АВ дорівнює  $l$ . Коефіцієнт тертя ковзання лиж на відріжку АВ дорівнює  $f$ . Лижник від А до В рухається  $\tau$ ; у точці В зі швидкістю  $v_B$  він залишає трамплін. Через проміжок часу  $T$  лижник приземляється зі швидкістю  $v_C$  в точці С гори, яка складає кут  $\beta$  з горизонтом.

При розв'язанні задачі прийняти лижника за матеріальну точку і не враховувати опір повітря

Варіант 6. Дано:  $\alpha = 20^\circ$ ,  $f = 0,1$ ,  $\tau = 0,2$  с,  $\beta = 30^\circ$ ,  $h = 40$  м.

Визначити  $l$  і  $v_C$ .

Варіант 7. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $f = 0,1$ ,  $l = 5$  м,  $v_A = 16$  м/с,  $\beta = 45^\circ$ .

Визначити  $T$  і  $v_B$ .

Варіант 8. Дано:  $v_A = 21$  м/с,  $f = 0$ ,  $\tau = 0,3$  с,  $v_B = 20$  м/с,  $\beta = 60^\circ$ .

Визначити  $\alpha$  і  $d$ .

Варіант 9. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\tau = 0,3$  с,  $f = 0,1$ ,  $h = 30\sqrt{2}$  м,  $\beta = 45^\circ$ .

Визначити  $v_A$  і  $v_B$ .

Варіант 10. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $f = 0$ ,  $v_A = 12$  м/с,  $d = 50$  м,  $\beta = 60^\circ$ .

Визначити  $\tau$  та рівняння траєкторії точки на відрізьку ВС.

**Варіант 11 – 15 (рисунок 2.3).**

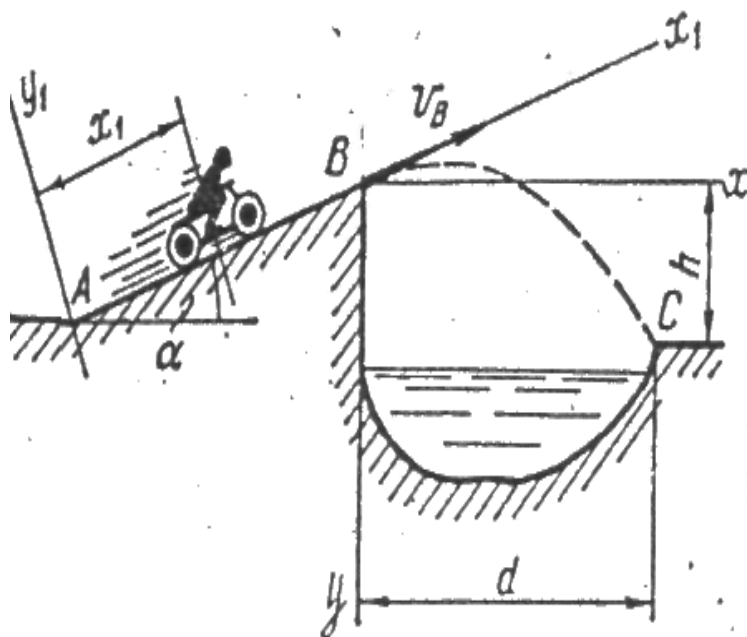


Рисунок 2.3

Маючи в точці А швидкість  $v_A$  мотоцикл піднімається за час  $\tau$  вздовж ділянки АВ довжиною  $l$ , який складає з горизонтом кут  $\alpha$ . При постійній на всьому відрізьку АВ рушійній силі  $P$  мотоцикл у точці В отримує швидкість  $v_B$  та перелітає через рів шириною  $d$ , перебуваючи в повітрі час  $T$  і приземляючись у точці С зі швидкістю  $v_C$

Маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює  $m$ .

При розв'язанні задачі вважати мотоцикл з мотоциклістом за матеріальну точку і не враховувати сили опору руху.

Варіант 11. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $P \neq 0$ ,  $l = 40$  м,  $v_A = 0$ ,  $v_B = 4,5$  м/с,  
 $d = 3$  м

Визначити  $\tau$  і  $h$ .

Варіант 12. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $P = 0$ ,  $l = 40$  м,  $v_B = 4,5$  м/с,  $h = 1,5$  м.

Визначити  $v_A$  і  $d$ .

Варіант 13. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m = 400$  кг,  $v_A = 0$ ,  $\tau = 20$  с,  $d = 3$  м,  
 $h = 1,5$  м.

Визначити  $l$  і  $P$ .

Варіант 14. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m = 400$  кг,  $P = 2,2$  кН,  $l = 40$  м,  $v_A = 0$ ,

$$d = 5 \text{ м.}$$

Визначити  $v_B$  і  $v_C$ .

Варіант 15. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $P = 2 \text{ кН}$ ,  $l = 50 \text{ м}$ ,  $v_A = 0$ ,  $d = 4 \text{ м}$ ,  
 $h = 2 \text{ м}$ .

Визначити  $T$  і  $m$ .

### Варіант 16 – 20 (рисунок 2.4)

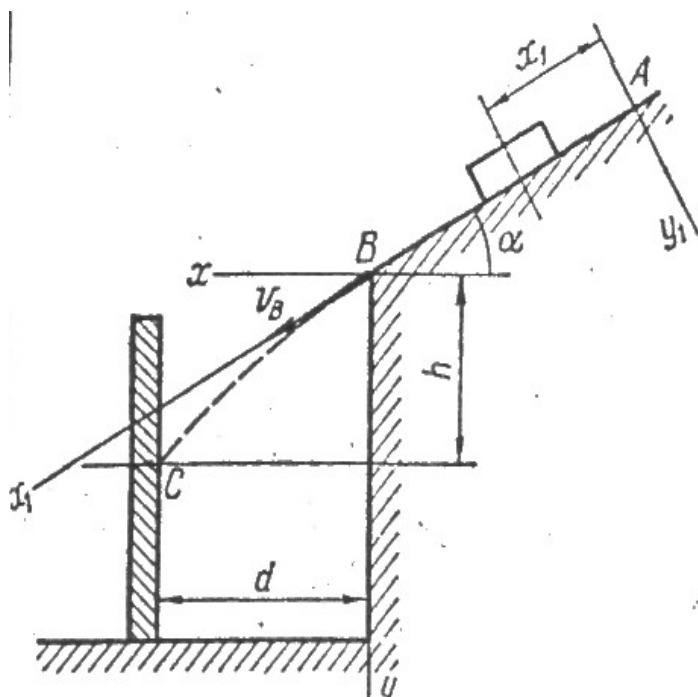


Рисунок 2.4

Камінь ковзає за період часу  $\tau$  по відрітку АВ схилу, який складає кут  $\alpha$  з горизонтом та має довжину  $l$ . Його початкова швидкість  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання каменя вздовж скосу дорівнює  $f$ .

У точці В камінь мав швидкість  $v_B$ . Через проміжок часу  $T$  він влучає в точці С у вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні задачі вважати камінь як матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 16. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_A = 1 \text{ м/с}$ ,  $l = 3 \text{ м}$ ,  $f = 0,2$ ,  $d = 2,5 \text{ м}$ .  
 Визначити  $T$  і  $h$ .

Варіант 17. Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $l = 6 \text{ м}$ ,  $v_B = 2v_A$ ,  $\tau = 1 \text{ с}$ ,  $h = 6 \text{ м}$ .  
 Визначити  $f$  і  $d$ .

Варіант 18. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 2 \text{ м}$ ,  $v_A = 0$ ,  $f = 0,1$ ,  $d = 3 \text{ м}$ .  
 Визначити  $\tau$  і  $h$ .

Варіант 19. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $l = 3$  м,  $v_B = 3$  м/с,  $f \neq 0$ ,  $d = 2$  м,  
 $\tau = 1,5$  с.

Визначити  $v_A$  і  $h$ .

Варіант 20. Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $v_A = 0$ ,  $f = 0,3$ ,  $d = 2$  м,  $h = 4$  м.

Визначити  $\tau$  і  $l$ .

**Варіант 21 – 25 (рисунок 5).**

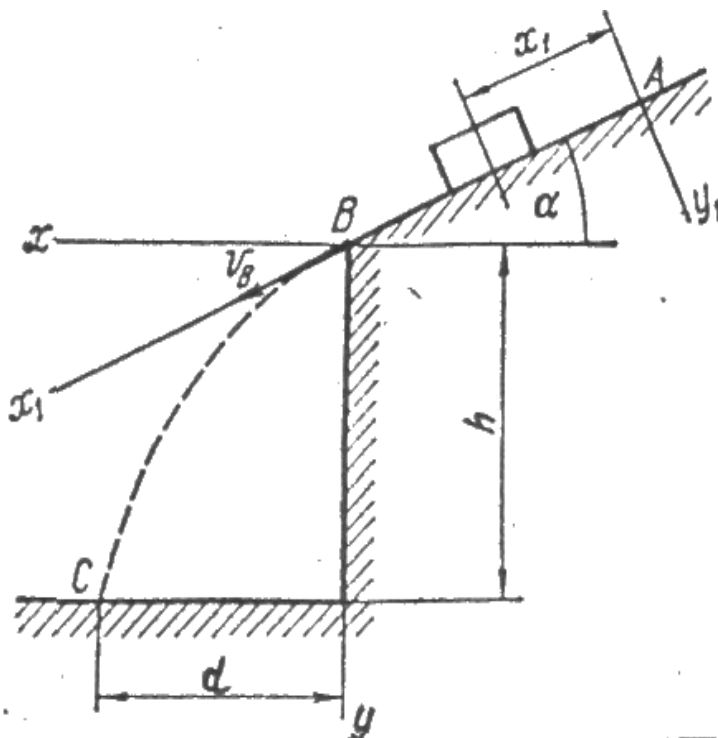


Рисунок 2.5

Тіло рухається із точки А по відрізку АВ (довжиною  $l$ ) похилої площини, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом. Його початкова швидкість  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ . Через проміжок часу  $\tau$  тіло в точці В зі швидкістю  $v_B$  залишає нахилену площину та падає на горизонтальну площину в точку С зі швидкістю  $v_C$ . Час падіння в повітрі при цьому складає  $T$ .

При розв'язанні задачі вважати тіло матеріальною точкою; опір повітря не враховувати.

Варіант 21. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $f = 0,1$ ,  $v_A = 1$  м/с,  $\tau = 1,5$  с,  $h = 10$  м.

Визначити  $d$  і  $v_B$ .

Варіант 22. Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $v_A = 0$ ,  $l = 10$  м,  $\tau = 2$  с.

Визначити  $f$  і рівняння траєкторії на ділянці ВС.

Варіант 23. Дано:  $f=0$ ,  $v_A=0$ ,  $l=9,81$  м,  $\tau=2$  с,  $h=20$  м.  
Визначити  $\alpha$  і  $T$ .

Варіант 24. Дано:  $\alpha=30^\circ$ ,  $v_A=0$ ,  $f=0,2$ ,  $d=12$  м,  $l=10$  м.  
Визначити  $\tau$  і  $h$ .

Варіант 25. Дано:  $\alpha=30^\circ$ ,  $v_A=0$ ,  $f=0,2$ ,  $l=6$  м,  $h=4,5$  м.  
Визначити  $\tau$  і  $v_C$ .

### Варіант 26 – 30 (рисунок 2.6)

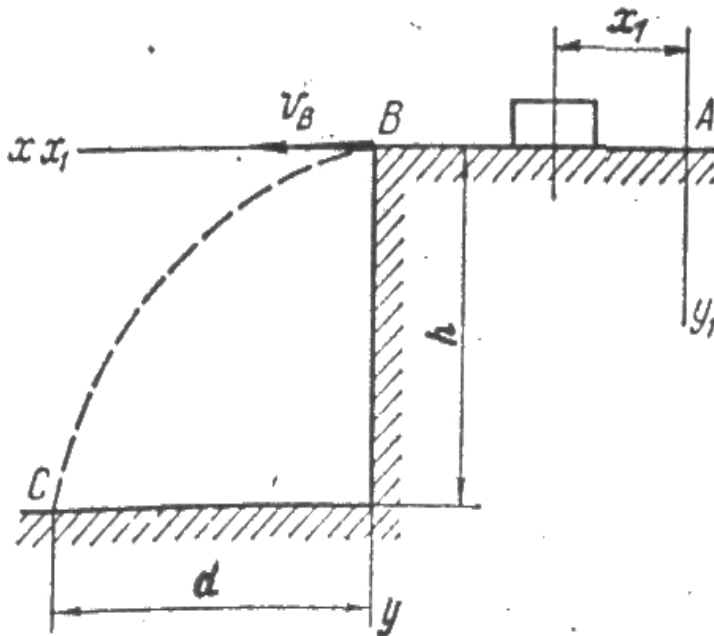


Рисунок 6.

Маючи в точці А швидкість  $v_A$ , тіло рухається по горизонтальному відрізку АВ довжиною  $l$  протягом часу  $\tau$ , с.

Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює  $f$ . Зі швидкістю  $v_B$  тіло в точці В залишає площину і потрапляє в точку С зі швидкістю  $v_C$ . Час падіння в повітрі складає  $T$ , с.

При розв'язанні задачі вважати тіло за матеріальну точку, опором повітря знехтувати.

Варіант 26. Дано:  $v_A=7$  м/с,  $f=0,2$ ,  $l=8$  м,  $h=20$  м.  
Визначити  $d$  і  $v_C$ .

Варіант 27. Дано:  $v_A=4$  м/с,  $f=0,1$ ,  $\tau=2$  с,  $d=2$  м.  
Визначити  $v_B$  і  $h$ .

Варіант 28. Дано:  $v = 3$  м/с,  $f = 0,3$ ,  $l = 3$  м,  $h = 5$  м.  
Визначити  $v_A$  і  $T$ .

Варіант 29. Дано:  $v_A = 3$  м/с,  $v_B = 1$  м/с,  $l = 2,5$  м,  $h = 20$  м.  
Визначити  $f$  і  $d$ .

Варіант 30. Дано:  $f = 0,25$ ,  $l = 4$  м,  $d = 3$  м,  $h = 5$  м.  
Визначити  $v_A$  і  $\tau$ .

### Типовий звіт завдання Д-1

У залізничних скальних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них з обкосів кам'яних осипів споруджується "полка" ДС. Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки А скосу та вважаючи при цьому його початкову швидкість  $V_0$  такою, що дорівнює нулю, визначити мінімальну ширину полки  $b$  та швидкість  $V_C$ , з якою камінь падає на неї. Вздовж ділянки АВ скосу, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом та має довжину  $l$ , камінь рухається час  $\tau$ , с.

При розв'язанні задачі вважати коефіцієнт тертя ковзання  $f$  каменя вздовж АВ постійним, а опором повітря знехтувати.

**Дано:**  $V_A = 0$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $l = 4$  м,  $\tau = 1$  с,  $f \neq 0$ ,  $h = 5$  м,  $\beta = 75^\circ$ .

**Визначити:**  $b$  та  $V_C$ .

**Розв'язання.** Розглянемо рух каменя на ділянці АВ. Вважаючи, що камінь рухається прямолінійно вздовж поверхні АВ, оберемо систему відліку  $(x_1, y_1)$  з початком у точці А в напрямку руху каменя. Приймаючи камінь за матеріальну точку, відобразимо (рисунок 2.7) сили, що діють на нього: вага  $\bar{G}$ , нормальна реакція  $\bar{N}$  та сила тертя ковзання  $\bar{F}$ .

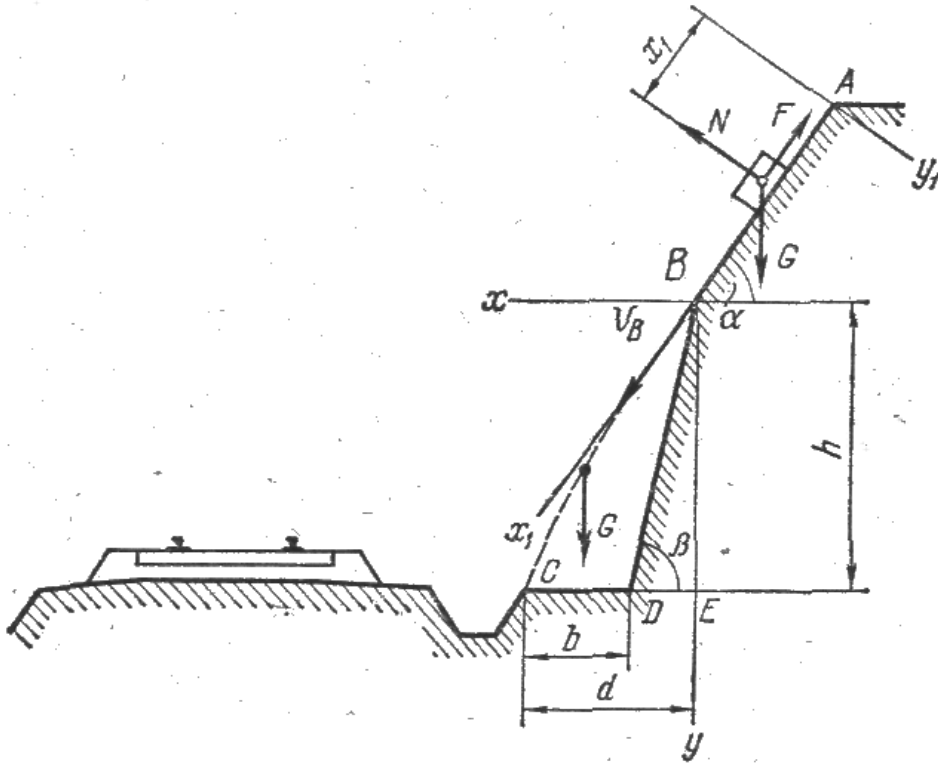


Рисунок 2.7

Складемо диференціальне рівняння руху каменя вздовж АВ:

$$mx_1'' = \sum X_{n1}, \quad mx_1'' = G \sin \alpha - F.$$

Сила тертя

$$F = fN, \quad \text{де } N = G \cos \alpha.$$

Таким чином,

$$mx_1'' = G \sin \alpha - fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad x_1'' = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння двічі, отримаємо

$$x_1' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2 + C_1t + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємось

початковими умовами задачі: при  $t=0$  початкове положення  $x_{10} = 0$  та початкова швидкість  $x'_{10} = 0$ . Склавши рівняння, отримані при інтегруванні, для  $t=0$   $x_{10} = C_1$  та  $x'_{10} = C_2$ , знайдемо постійні:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ . Тоді

$$x'_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2.$$

Для моменту  $\tau$ , коли камінь залишає ділянку АВ  $x'_1 = V_B$ , а  $x_1 = l$  (швидкість  $x'_1 = V_B$  та координата  $x_1 = l$  каменя в точці В), тобто

$$V_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)\tau^2,$$

звідки  $V_B = 2l/\tau$ , тобто  $V_B = (2 \cdot 4)/1 = 8 \text{ м/с}$ .

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С.

Систему відліку  $(xy)$  обираємо в напрямку падіння каменя з початком в точці В. Показавши силу тяжіння  $\vec{G}$ , що діє на камінь, складемо диференціальні рівняння його руху:

$$mx'' = 0, \quad my'' = G.$$

Інтегруємо перше рівняння:

$$x' = C_3, \quad x = C_3t + C_4.$$

Постійні інтегрування  $C_3$  та  $C_4$  визначимо з використанням початкових умов: при  $t=0$   $x_0 = 0$ ,  $x'_0 = V_B \cos \alpha$

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні та складених для  $t=0$ :  $x'_0 = C_3$ ,  $x_0 = C_4$ , знайдемо, що

$$C_3 = V_B \cos \alpha \quad \text{та} \quad C_4 = 0.$$

Тоді



$$x' = V_B \cos \alpha, \quad x = V_B \cos \alpha \cdot t.$$

Інтегруємо друге рівняння  $my'' = G$ :

$$y' = gt + C_5, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5t + C_6.$$

Початкові умови: при  $t = 0$   $y_0 = 0$ ,  $y'_0 = V_B \sin \alpha$ . Із рівнянь, отриманих інтегруванням та складених для  $t = 0$ ,  $y'_0 = C_5$ ,  $y_0 = C_6$ , знайдемо, що

$$C_5 = V_B \sin \alpha \quad \text{та} \quad C_6 = 0.$$

Остаточно

$$y' = gt + V_B \sin \alpha, \quad y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, виключивши параметр  $t$  з рівнянь руху. Визначивши  $t$  з першого рівняння та підставивши його в друге, отримаємо рівняння параболи

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

У момент падіння  $y = h = 5 \text{ м}$ , а  $x = d$ , тобто

$$y = \frac{9,81 \cdot d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d \cdot \sqrt{3},$$

звідки

$$d_{1,2} = -2,82 \pm 4,93,$$

тобто

$$d_1 = 2,11\text{ м}, \quad d_2 = -7,75\text{ м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то  $d_1 = 2,11\text{ м}$ .

Мінімальна ширина полки

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\operatorname{tg}45^\circ} = 2,11 - \frac{5}{3,73} = 0,77\text{ м}.$$

Скориставшись рівнянням руху каменя  $x = V_B \cos \alpha \cdot t$ , знайдемо час  $T$  руху каменя від точки В до точки С:  $2,11 = 8 \cdot 0,5 \cdot T$ , звідки

$$T = 0,53\text{ с}.$$

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$x' = V_B \cos \alpha, \quad y' = gt + V_B \sin \alpha$$

за формулою

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Для моменту падіння ( $t = T = 0,53\text{ с}$ )

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8\text{ м/с}.$$

## 2.2 Завдання Д 2

### ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.  
Дослідження коливального руху матеріальної точки

Схеми до варіантів 1=30 наведено на рисунку 2.8.

### Варіанти 1–5

Знайти рівняння руху вантажу  $D$  масою  $m_D$  (варіанти 2 та 4) чи системи вантажів  $D$  і  $E$  масами  $m_D$  і  $m_E$  (варіанти 1, 3, 5) відносно осі  $X$ , початок відліку сумістити з положенням спокою вантажу  $D$  чи відповідно вантажів  $D$  і  $E$  (при статичній деформації пружин). Стержні, які з'єднують вантажі, вважати невагомими та недеформованими.

**Варіант 1.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 2$  кг) прикріплений до бруска  $AB$ , який підвішений до двох однакових паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з них  $c = 3 \frac{H}{cm}$ . Точка прикріплення вантажу  $D$  знаходиться на рівних відстанях від осей пружин.

У деякий час до вантажу  $D$  підвішують вантаж  $E$  ( $m_E = 1$  кг). Опір руху системи двох вантажів пропорційний швидкості:  $R = 12V$  Н, де  $V$  – швидкість,  $\frac{M}{c}$ .

Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

**Варіант 2.** У момент, коли стержень, що з'єднує вантажі  $D$  ( $m_D = 1$  кг) та  $E$  ( $m_E = 2$  кг), перерізують, точка  $B$  (верхній кінець послідовно з'єднаних пружин) починає здійснювати рух за законом  $\xi = 1,5 \sin 18t$  см (вісь  $\xi$  спрямована вертикально вниз). Коефіцієнти жорсткості пружин  $c_1 = 12 \frac{H}{cm}$ ,  $c_2 = 36 \frac{H}{cm}$ .

**Варіант 3.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 0,8$  кг) висить на пружині, яка прикріплена у точці  $F$  до бруска  $AB$  та має коефіцієнт жорсткості  $c_1 = 10 \frac{H}{cm}$ . Брусок підвішений до двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких  $c_2 = 4 \frac{H}{cm}$ ,  $c_3 = 6 \frac{H}{cm}$ , точка  $F$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей цих пружин:  $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$ .

У деякий момент часу до вантажу  $D$  підвішують вантаж  $E$  ( $m_E = 1,2$  кг). У той самий момент системі вантажів надають швидкість  $V_0 = 0,2 \frac{M}{c}$ , яка спрямована донизу.

Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  нехтувати.

**Варіант 4.** Статична деформація кожної з двох однакових паралельних пружин під дією вантажів  $D$  ( $m_D = 0,5 \text{ кг}$ ) та  $E$  ( $m_E = 1,5 \text{ кг}$ )  $f_{cm} = 4 \text{ см}$ . Вантажі підвішені до пружин за допомогою жорсткого бруска  $AB$ . У деякий момент часу стержень, який з'єднує вантажі, перерізують. Опір руху вантажу  $D$  пропорційний швидкості:  $R = \sigma V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{\text{М}}{\text{с}}$ .

Масою бруска  $AB$  та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

**Варіант 5.** Водночас з підвішуванням до вантажу  $D$  ( $m_D = 1,6 \text{ кг}$ ), який висить на пружині, що має жорсткість  $c = 4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ , вантажу  $E$  ( $m_E = 2,4 \text{ кг}$ ) точка  $B$  (верхній кінець пружини) починає здійснювати рух за законом  $\xi = 2 \sin 5t \text{ см}$  (вісь  $\xi$  спрямована вертикально вниз).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

## Варіанти 6 –10

Знайти рівняння руху вантажу  $D$  масою  $m_D$ , який рухається вздовж гладкої похилої площини, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ , з моменту стикання вантажу з пружиною чи системою пружин, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від пружин не відділяється. Рух вантажу віднести до осі  $X$ , прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

**Варіант 6.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 4 \text{ кг}$ ), який пройшов без початкової швидкості по похилій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) відстань  $s = 0,1 \text{ м}$ , вдаряється об недеформовані, послідовно з'єднані, пружини, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 48 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$  та  $c_2 = 24 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ .

**Варіант 7.** У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 2 \text{ кг}$ ) приєднують без початкової швидкості до кінця  $A$

недеформованих послідовно з'єднаних пружин, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 12 \text{ Н/см}$  та  $c_2 = 6 \text{ Н/см}$ . У той самий момент часу ( $t = 0$ ) другий кінець пружин  $B$  починає здійснювати рух вздовж похилої площини ( $\alpha = 45^\circ$ ) за законом  $\xi = 0,02 \sin 20t \text{ м}$  (вісь  $\xi$  спрямована вздовж нахиленої площини вниз).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 8.** Дві паралельні пружини  $1$  і  $2$ , які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$  та  $c_2 = 6 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ , з'єднані брусом  $AB$ , у точці  $K$  якого прикріплена пружина  $3$  з коефіцієнтом жорсткості  $c_3 = 15 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . Точка  $K$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей цих пружин:  $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$ . Пружини  $1$ ,  $2$ ,  $3$  недеформовані. Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,5 \text{ кг}$ ) приєднують до кінця  $N$  пружини  $3$ , у той самий час вантажу  $D$  надають швидкість  $V_0 = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , яка спрямована вниз паралельно похилій площині ( $\alpha = 45^\circ$ ).

Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  нехтувати.

**Варіант 9.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,2 \text{ кг}$ ), який пройшов без початкової швидкості по похилій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) відстань  $s = 0,2 \text{ м}$ , ударяється об недеформовану пружину, коефіцієнт жорсткості якої  $c_2 = 4,8 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . У той самий момент часу ( $t = 0$ ) точка  $B$  (нижній кінець пружини) починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом  $\xi = 0,03 \sin 12t \text{ м}$  (вісь  $\xi$  спрямована вздовж похилої площини вниз).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 10.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 1 \text{ кг}$ ) прикріплюють до середини бруска  $AB$ , який з'єднує кінці двох однакових паралельних пружин, та не надають початкової швидкості; пружини не деформовані. Коефіцієнти жорсткості пружин  $c = 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 8V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

Масою бруска  $AB$  та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

### Варіанти 11 –15

Вантаж  $D$  масою  $m_D$  закріплений на кінці невагомому стержню, який може обертатися у площині креслення навколо осі  $E$ . Вантаж з'єднаний з пружиною чи системою пружин; вертикальне положення стержня відповідає недеформованим пружинам. Вважаючи, що вантаж  $D$ , який приймається за матеріальну точку, рухається по прямій, визначити рух цього вантажу.

Рух вантажу віднести до осі  $X$ , прийнявши за початок відліку точку, яка відповідає положенню спокою вантажу (при недеформованих пружинах).

**Варіант 11.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 2,4 \text{ кг}$ ) з'єднаний з точкою  $F$  бруска  $AB$ , який з'єднує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких  $c_1 = 1 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$  та  $c_2 = 1,4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . Точка  $F$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей цих пружин:  $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$ .

Вантаж  $D$  відхиляють на величину  $\lambda = 2 \text{ см}$  вліво від положення, яке відповідає вертикальному положенню стержня, і відпускають без початкової швидкості. Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 6V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  та масою демпфера нехтувати.

**Варіант 12.** У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 3 \text{ кг}$ ), що утримується в положенні, при якому пружина стиснута на величину  $\lambda = 2 \text{ см}$ , відпускають без початкової швидкості.

Коефіцієнт жорсткості пружини  $c = 9 \frac{H}{cm}$ . Водночас ( $t = 0$ ) точка  $B$  (правий кінець пружини) починає здійснювати рух за законом  $\xi = 1,2 \sin 8t \text{ см}$  (вісь  $\xi$  спрямована горизонтально вліво).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $x$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 13.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 1 \text{ кг}$ ) прикріплений до кінця пружини, яка має коефіцієнт жорсткості  $c_1 = 12 \frac{H}{cm}$  і з'єднана іншим кінцем з точкою  $F$  бруска  $AB$ . Брусок  $AB$  зв'язує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з яких  $c = 3 \frac{H}{cm}$ . Точка  $F$  знаходиться на рівних відстанях від осей паралельних пружин. Вантажу при вертикальному положенні стержня надають швидкість  $V_0 = 0,5 \frac{M}{c}$ , яка спрямована праворуч. Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 12V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{M}{c}$ . Шток демпфера пропущений через отвір у невагомому бруску  $AB$  та з'єднаний з вантажем  $D$ .

**Варіант 14.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,5 \text{ кг}$ ) прикріплений з одного боку до кінця пружини, яка має жорсткість  $c_1 = 4,4 \frac{H}{cm}$ , а другого – до кінця двох послідовно з'єднаних пружин, коефіцієнти жорсткості яких  $c_2 = 2 \frac{H}{cm}$  та  $c_3 = 8 \frac{H}{cm}$ .

Вантаж відхиляють на величину  $\lambda = 2,5 \text{ см}$  ліворуч від його положення, яке відповідає вертикальному положенню стержня, і відпускають, водночас надаючи початкову швидкість  $V_0 = 0,4 \frac{M}{c}$ , що спрямована праворуч.

**Варіант 15.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,0 \text{ кг}$ ) прикріплений до кінця  $A$  послідовно з'єднаних пружин. Другий кінець пружин  $B$  рухається за законом  $\xi = 1,8 \sin 12t \text{ см}$  (вісь  $\xi$  спрямована горизонтально ліворуч). Коефіцієнти жорсткості пружин:  $c_1 = 4 \frac{H}{cm}$  та  $c_2 = 12 \frac{H}{cm}$ .

При  $t = 0$  вантаж знаходиться в положенні спокою, яке відповідає недеформованим пружинам.

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

## Варіанти 16 –20

Знайти рівняння руху вантажу  $D$  масою  $m_D$  (варіанти 17 та 19) чи системи вантажів  $D$  і  $E$  масами  $m_D$  і  $m_E$  (варіанти 16, 18, 20) відносно осі  $X$ , початок відліку сумістити з положенням спокою вантажу  $D$  чи відповідно вантажів  $D$  і  $E$  (при статичній деформації пружин). Вважається, що вантажі  $D$  і  $E$  при сумісному русі не відділяються.

**Варіант 16.** Пружина  $1$ , на якій знаходиться вантаж  $D$  ( $m_D = 10$  кг), опирається у точці  $F$  на брусок  $AB$ , що з'єднує кінці двох паралельних пружин  $2$  і  $3$ . Коефіцієнти жорсткості пружин  $1$ ,  $2$ ,  $3$  відповідно дорівнюють  $c_1 = 200 \frac{H}{cm}$ ,  $c_2 = 160 \frac{H}{cm}$ ,  $c_3 = 140 \frac{H}{cm}$ . Точка  $F$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей пружин:  $\frac{a}{b} = \frac{c_3}{c_2}$ .

У деякий момент часу на вантаж  $D$  встановлюють вантаж  $E$  ( $m_E = 20$  кг), водночас системі вантажів надають швидкість  $V_0 = 0,4 \frac{M}{c}$ , яка спрямована вниз.

Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  нехтувати.

**Варіант 17.** У деякий момент часу вантаж  $E$  знімають з вантажу  $D$  (обидва вантажі знаходяться у стані спокою, який відповідає статичній деформації пружини). Циклічна частота власних коливань системи вантажів  $D$  і  $E$  на пружині  $\omega = 20$  с<sup>-1</sup>, відношення мас  $\frac{m_D}{m_E} = \frac{2}{3}$ .

**Варіант 18.** Статична деформація кожної з двох однакових паралельних пружин під дією вантажу  $D$  ( $m_D = 20$  кг) дорівнює  $f_{cmD} = 2$  см. У деякий момент часу на вантаж  $D$  встановлюють вантаж  $E$  ( $m_E = 10$  кг). Опір руху системи двох вантажів



пропорційний швидкості:  $R = 60\sqrt{3}V$  Н, де  $V$  – швидкість,  $\frac{M}{c}$ .

Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  та масою частини демпфера, яка прикріплена до бруска, нехтувати.

**Варіант 19.** Два вантажі  $D$  ( $m_D = 15$  кг) та  $E$  ( $m_E = 25$  кг) покояться на послідовно розташованих пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 250 \frac{H}{cm}$ ,  $c_2 = 375 \frac{H}{cm}$ . У момент часу, коли знімають вантаж  $E$ , точка  $B$  обпирання пружин починає здійснювати рух за законом  $\xi = 0,5 \sin 30t$  см (вісь  $\xi$  спрямована вертикально вниз).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 20.** На вантаж  $D$ , який знаходиться у стані спокою, що відповідає статичній деформації пружини, у деякий момент часу встановлюють вантаж  $E$ . Водночас системі двох вантажів надають швидкість  $V_0 = 0,3 \frac{M}{c}$ , яка спрямована вниз. Циклічна частота власних коливань вантажу  $D$  на пружині  $\omega_D = 24$   $c^{-1}$ , відношення мас  $\frac{m_E}{m_D} = 3$ .

## Варіанти 21 –25

Знайти рівняння руху вантажу  $D$  масою  $m_D$ , що рухається по гладкій похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ . Рух вантажу віднести до осі  $X$ , прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

**Варіант 21.** У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 2$  кг) прикріплюють до кінців недеформованих пружин, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 7 \frac{H}{cm}$ ,  $c_2 = 3 \frac{H}{cm}$ . Водночас вантажу надають швидкість  $V_0 = 0,4 \frac{M}{c}$ , яка спрямована вздовж похилої площини вниз ( $\alpha = 45^\circ$ ).

**Варіант 22.** Вантаж  $D$  знаходиться на похилій площині (

$\alpha = 30^\circ$ ) у стані спокою, який відповідає статичній деформації пружини  $f_{cm} = 2 \text{ см}$ . У деякий момент часу ( $t = 0$ ) точка  $B$  починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом  $\xi = 0,01 \sin 10t \text{ м}$  (вісь  $\xi$  спрямована вздовж похилої площини вниз).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 23.** Вантаж  $D$  ( $m_D = 3 \text{ кг}$ ) прикріплюють до точки  $F$  бруска  $AB$ , який з'єднує кінці двох недеформованих паралельних пружин, та відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості пружин:  $c_1 = 2 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ ,  $c_2 = 4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . Точка  $F$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей пружин  $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 12V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Масою бруска  $AB$  та масою демпфера нехтувати.

**Варіант 24.** У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 1 \text{ кг}$ ) прикріплюють до кінця  $A$  недеформованих послідовно з'єднаних пружин, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 12 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ ,  $c_2 = 4 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$  і відпускають без початкової швидкості.

Водночас ( $t = 0$ ) інший кінець пружин  $B$  починає здійснювати рух вздовж похилої площини за законом  $\xi = 1,5 \sin 10t \text{ см}$ . Вісь  $\xi$  спрямована вздовж похилої площини вниз ( $\alpha = 30^\circ$ ).

**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).

**Варіант 25.** Кінці двох однакових паралельних пружин з'єднані бруском  $AB$ . Статична деформація кожної з пружин під дією вантажу  $D$  ( $m_D = 1,5 \text{ кг}$ ), який знаходиться на похилій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ),  $f_{cm} = 4,9 \text{ см}$ . У деякий момент часу вантажу  $D$  надають швидкість  $V_0 = 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , яка спрямована вздовж похилої площини вгору.

Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 6V \text{ Н}$ , де

$V$  – швидкість,  $\frac{M}{c}$ . Масою абсолютно жорсткого бруска  $AB$  та масою частини демпфера, яка зв'язана з ним, нехтувати.

### Варіанти 26 –30

Нехтуючи масою плити та вважаючи плиту абсолютно жорсткою, знайти рівняння руху вантажу  $D$  масою  $m_D$  в момент стикання його з плитою, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється.

Рух вантажу віднести до осі  $X$ , прийнявши за початок відліку положення спокою цього вантажу (при статичній деформації пружини).

**Варіант 26.** Плита лежить на двох паралельних пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = 600 \frac{H}{cm}$ ,  $c_2 = 400 \frac{H}{cm}$ . Вантаж  $D$  ( $m_D = 50 \text{ кг}$ ) падає без початкової швидкості з висоти  $h = 0,1 \text{ м}$  в точку  $F$  плити. Точка  $F$  знаходиться на відстані  $a$  та  $b$  від осей пружин:  $\frac{a}{b} = \frac{c_2}{c_1}$ .

**Варіант 27.** Коефіцієнт жорсткості кожної з двох паралельних пружин, на яких лежить плита,  $c = 130 \frac{H}{cm}$ . Вантаж  $D$  ( $m_D = 40 \text{ кг}$ ) встановлюють на середину плити та відпускають без початкової швидкості при недеформованих пружинах. Опір руху вантажу пропорційний швидкості:  $R = 400V \text{ Н}$ , де  $V$  – швидкість,  $\frac{M}{c}$ . Масою демпфера нехтувати.

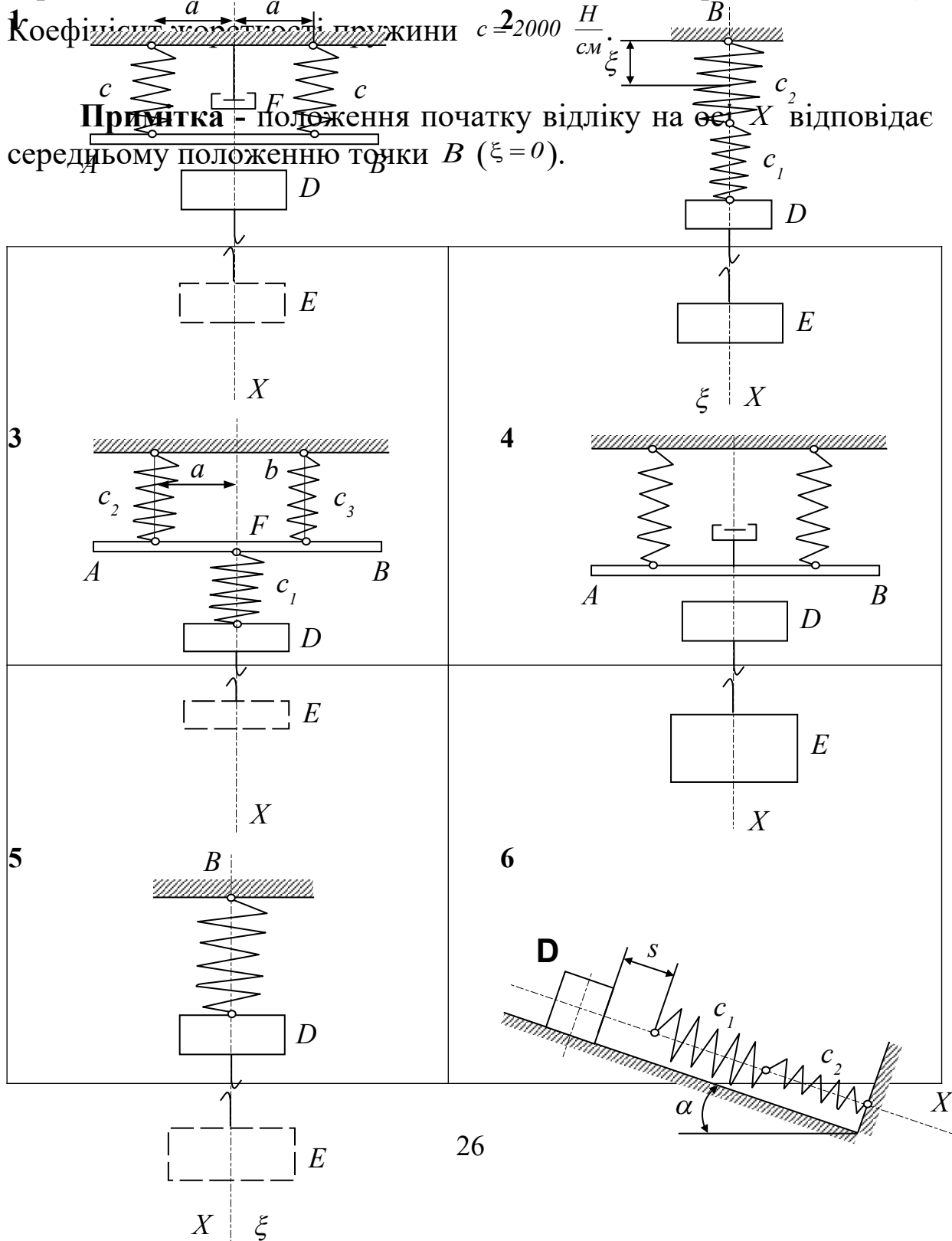
**Варіант 28.** Вантаж  $D$  падає на плиту з висоти  $h = 5 \text{ см}$ . Статичний прогин пружини під дією ваги  $D$  дорівнює:  $f_{cm} = 1 \text{ см}$ .

**Варіант 29.** Плита лежить на двох однакових паралельних пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості  $c_1 = c_2 = c = 400 \frac{H}{cm}$ . У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 200 \text{ кг}$ ) встановлюють на середину плити і водночас прикріплюють до недеформованої пружини  $3$ , яка має коефіцієнт жорсткості  $c_3 = 200 \frac{H}{cm}$ . У той самий

час (при недеформованих пружинах) вантажу надають швидкість  $V_0 = 0,6 \frac{M}{c}$ , яка спрямована вниз.

**Варіант 30.** У деякий момент часу вантаж  $D$  ( $m_D = 100 \text{ кг}$ ) встановлюють на плиту і відпускають (при недеформованих пружинах) без початкової швидкості. У той самий момент часу точка  $B$  (нижній кінець пружини) починає здійснювати рух по вертикалі за законом  $\xi = 0,5 \sin 20t \text{ см}$  (вісь  $\xi$  спрямована вниз).

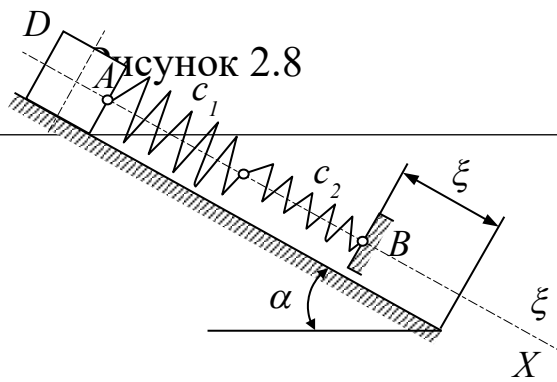
Коефіцієнти жорсткості пружини  $c = 22000 \frac{H}{\text{см}}$ .  
**Примітка** - положення початку відліку на осі  $X$  відповідає середньому положенню точки  $B$  ( $\xi = 0$ ).



7

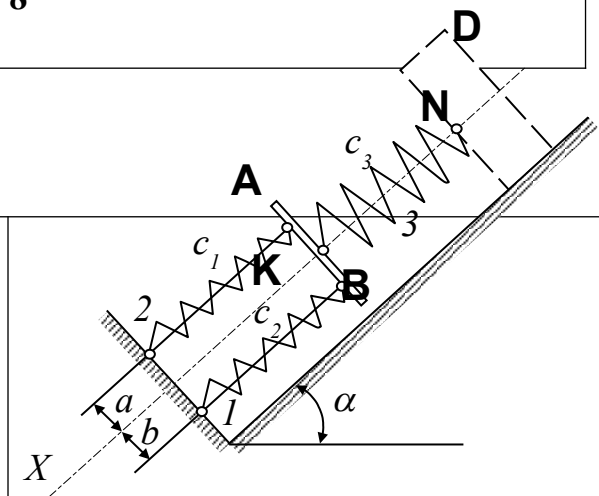
8

Рисунок 2.8



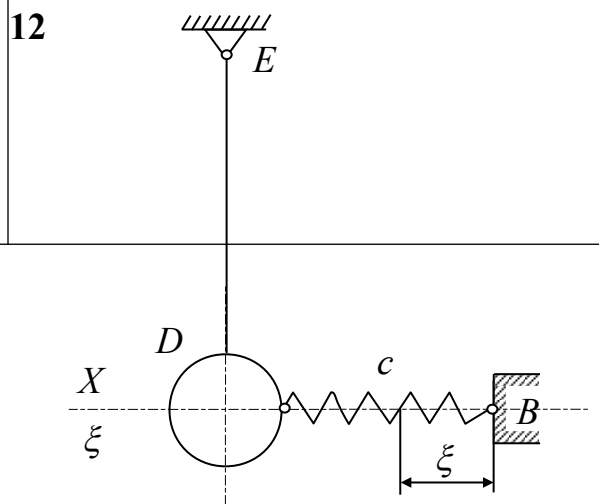
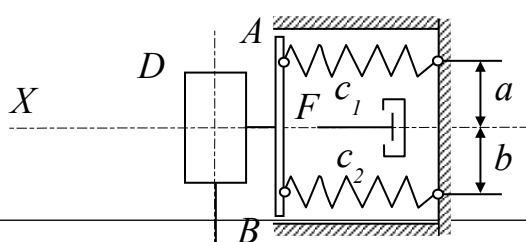
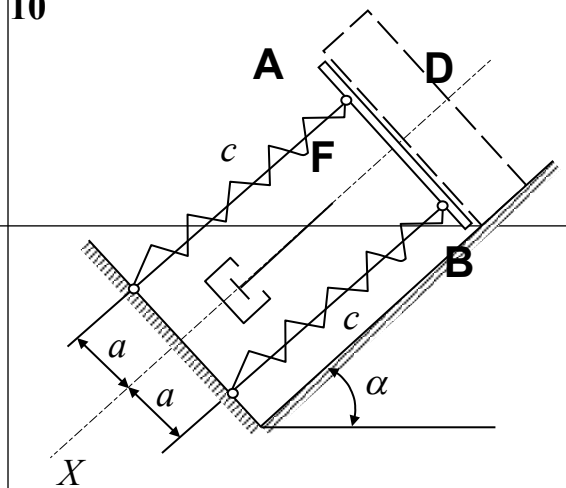
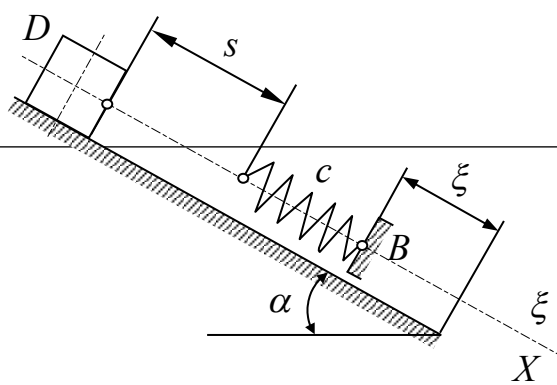
9

10

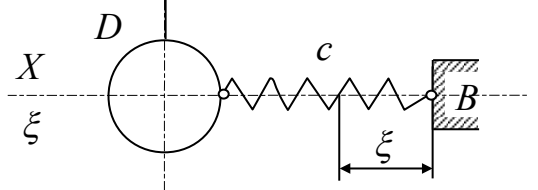


11

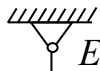
12



27



13



14

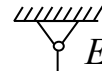
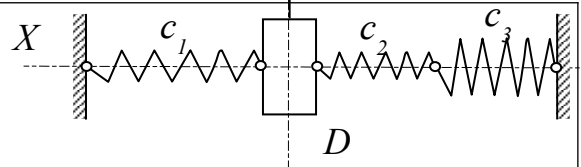
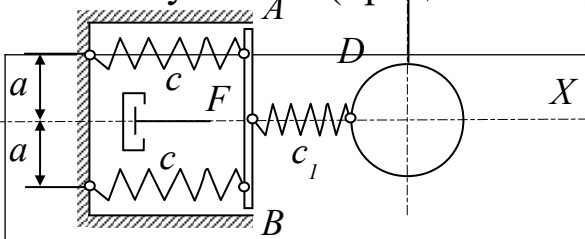
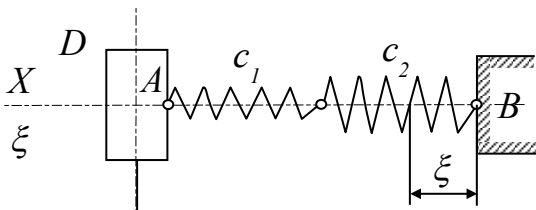


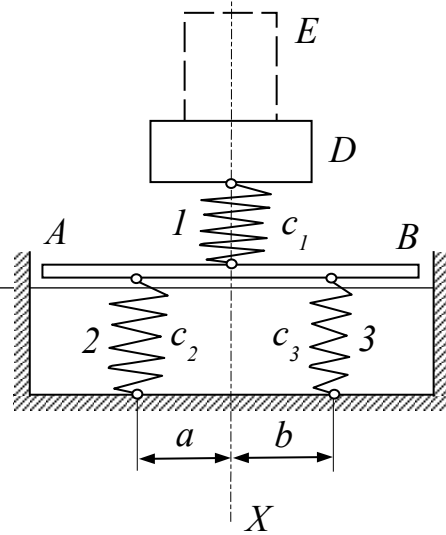
Рисунок 2.8 (продовження)



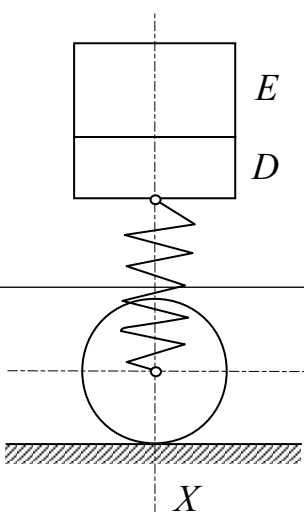
15



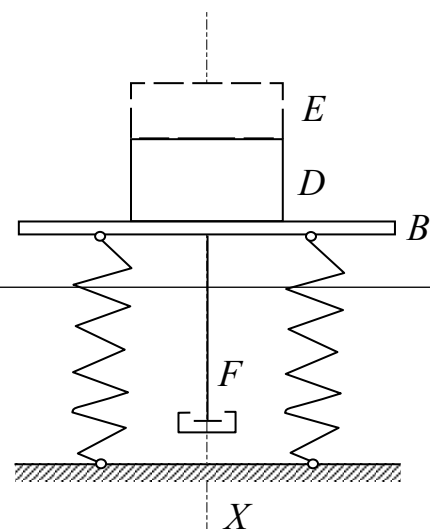
16



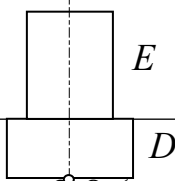
17



18



19



20

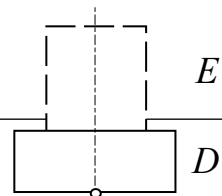
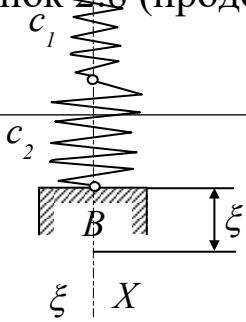
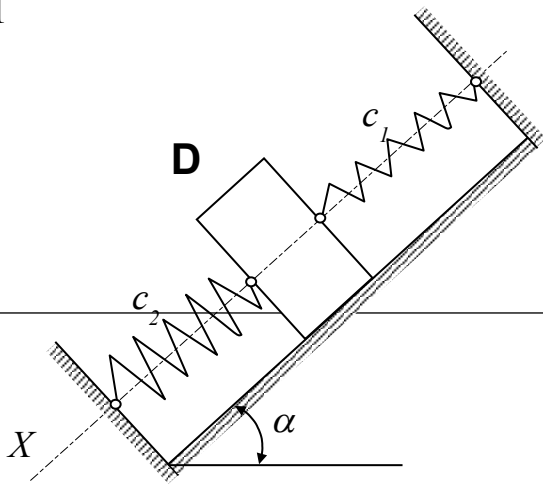


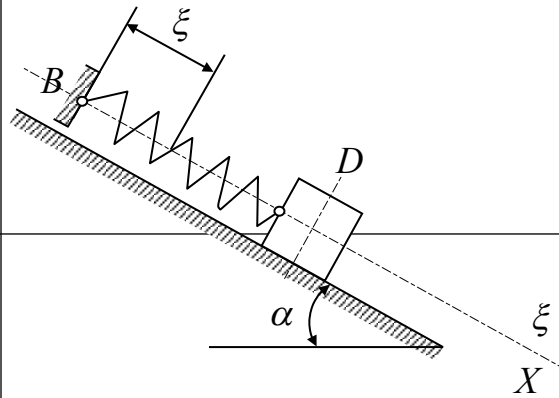
Рисунок 28 (продовження)



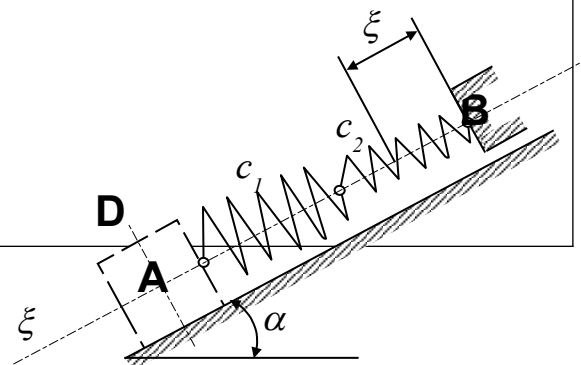
21



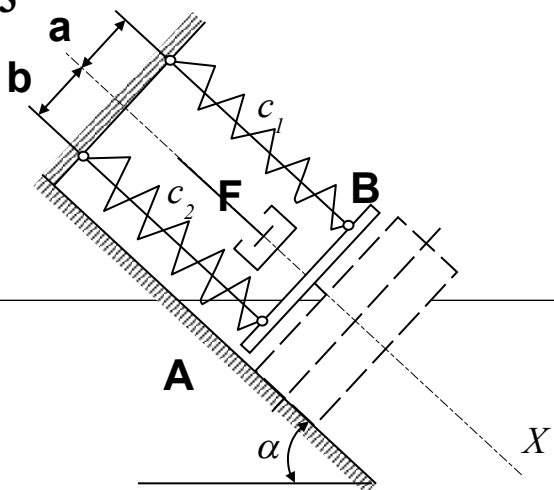
22



24



23



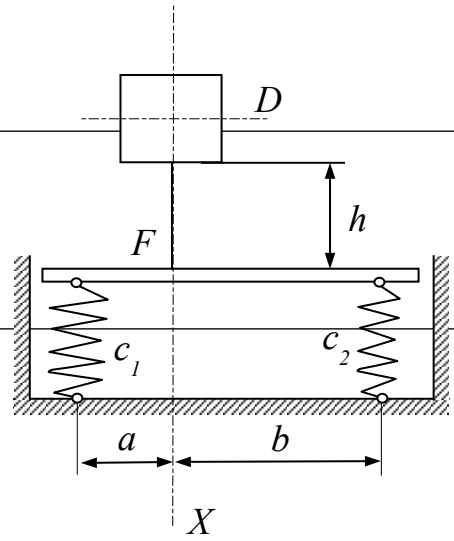
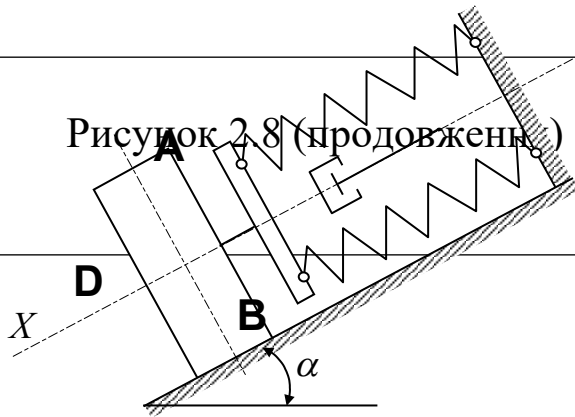
29



25

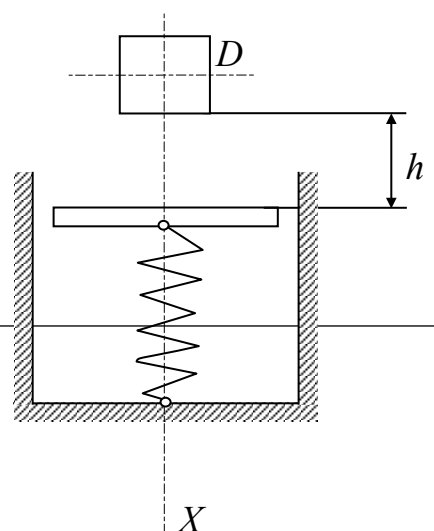
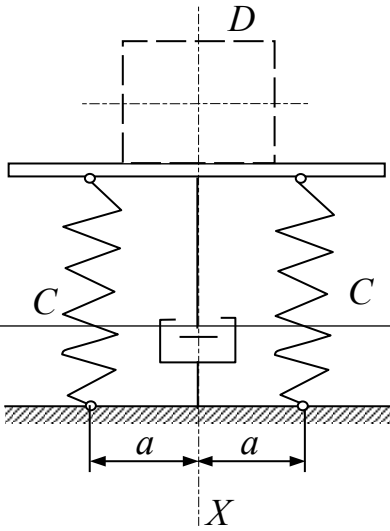
26

Рисунок 2.8 (продовження)



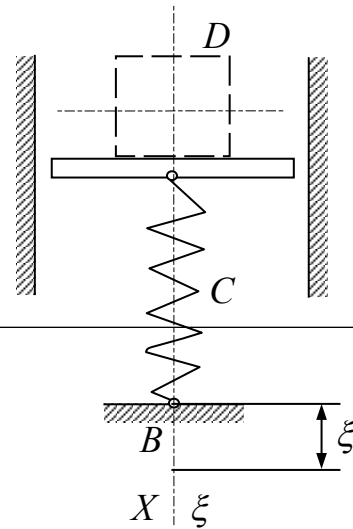
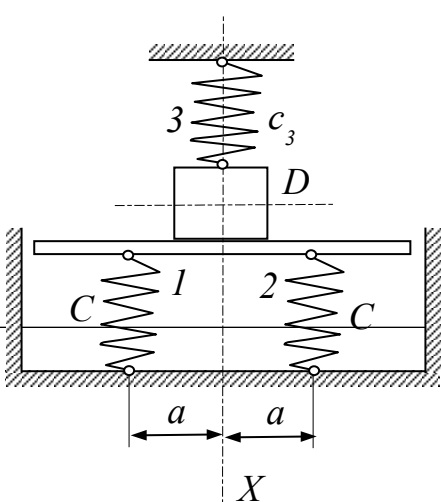
27

28



29

30



30



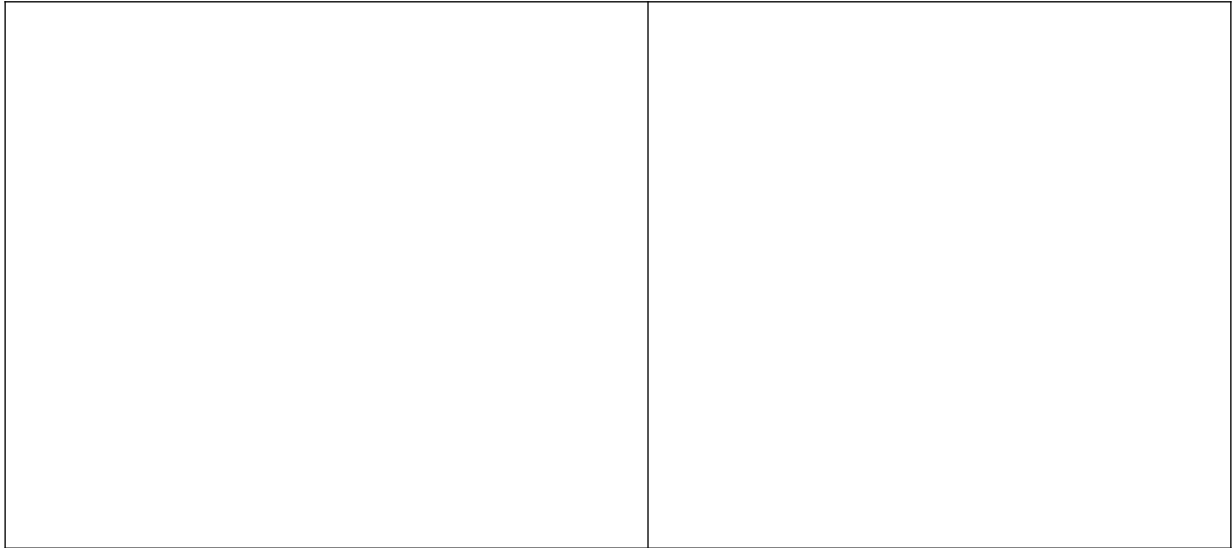


Рисунок 2.8 (закінчення)

### Типовий звіт завдання Д 2

Дано (рисунок 2.9):

$$c_1 = c_2 = 400 \frac{\text{H}}{\text{см}} = 40000 \frac{\text{H}}{\text{м}},$$

$$c_3 = 200 \frac{\text{H}}{\text{см}} = 20000 \frac{\text{H}}{\text{м}},$$

$$V_0 = 0,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad m = 200 \text{ кг},$$

$$x_0 = -f_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c}$$

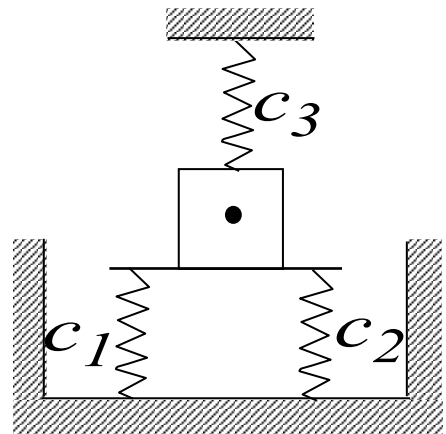


Рисунок 2.9

**Знайти:**  $x = x(t)$ .

## Розв'язання

1 Замінюємо систему пружин однією еквівалентною жорсткістю:

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = 2 \cdot 40000 + 20000 = 100000 \frac{H}{m}.$$

2 Обираємо початок координат  $O$  (рисунок 2.10) в положенні статичної рівноваги вантажу. Вісь  $X$  спрямуємо вниз:

$$mg = cf_{cm},$$

$$f_{cm} = \frac{mg}{c} = \frac{200 \cdot 10}{100000} = 0,02 \text{ м.}$$

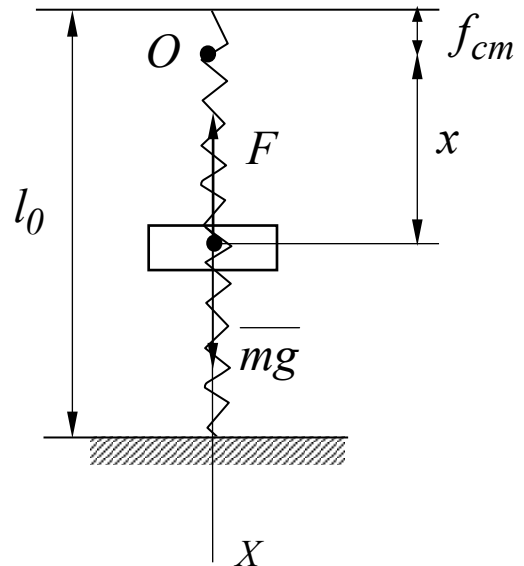


Рисунок 2.10

3 Зображуємо вантаж у проміжному положенні та діючі на нього сили  $mg$  і  $F = c\Delta$ .

4 Складаємо диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = mg - F = mg - c(f_{cm} + x) = mg - cf_{cm} - cx,$$

$m\ddot{x} + cx = 0$  – диференціальне рівняння вільних коливань,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{100000}{200} = 500,$$

$$\omega = \sqrt{500} = 22,4 \text{ с}^{-1}.$$

5 Записуємо розв'язок цього рівняння:

$$x = A \cos 22,4t + B \sin 22,4t.$$

За початковими умовами визначаємо сталі  $A$  і  $B$ .

Якщо  $t = 0$ ,  $x_0 = -f_{cm} = -0,02$  м, отже,  $A = x_0 = -0,02$ .

$V_0 = 0,6 \frac{м}{с}$ , отже,

$$\dot{x} = -22,4 A \sin 22,4t + -22,4 B \cos 22,4t,$$

$$\dot{x}_0 = V_0 = 0,6 = 22,4 B,$$

$$B = \frac{0,6}{22,4} = 0,027.$$

Звідси рівняння руху вільних коливань, що шукається, буде мати вигляд

$$x = -0,02 \cos 22,4t + 0,027 \sin 22,4t \text{ м.}$$

6 Визначаємо параметри коливань:

- власна частота коливань (число коливань, які здійснюються за  $2\pi$  с)

$$\omega = 22,4 \text{ с}^{-1};$$

- період коливань (час одного повного коливання)

$$T = \frac{2\pi}{22,4} = 0,28 \text{ с};$$

- амплітуда коливань (максимальне відхилення вантажу від положення рівноваги)

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0,02^2 + 0,027^2} = 0,034 \text{ м} = 3,4 \text{ см};$$

- початкова фаза коливань

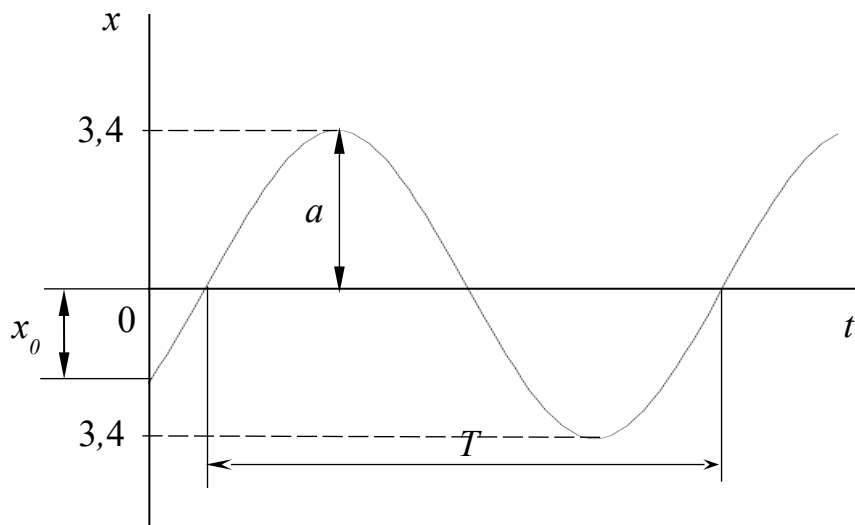
$$\alpha = \arctg \frac{A}{B} = \arctg \frac{-0,02}{0,027} = \arctg(-0,74) = 324^\circ,$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{a} = -0,58,$$

$$\cos \alpha = \frac{V_0}{\omega a} = \frac{0,6}{22,4 \cdot 0,034} = 0,78.$$

7 Будемо графік вільних коливань (рисунок 2.11):

$$x = 3,4 \sin(22,4t + 324^\circ) \text{ см}$$



### 2.3 Завдання Д 3

#### Основні теореми динаміки матеріальної точки

Використання теореми про зміну кількості руху до визначення швидкості матеріальної точки

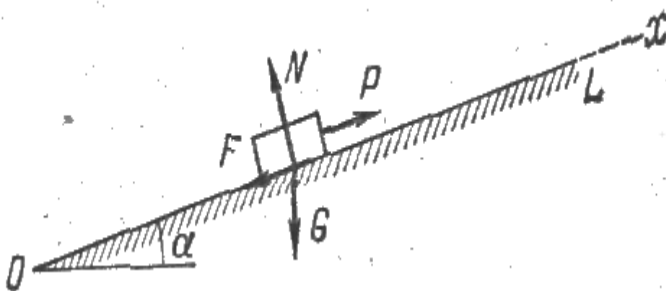


Рисунок 2.12

Тілу маси  $m$  надана початкова швидкість  $V_0$ , спрямована ввєрх по похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ . На тіло діє сила  $\vec{P}$ , спрямована в тому самому напрямку (рисунок 2.12).

Знаючи закон зміни сили  $P = P(t)$  та коефіцієнт тертя ковзання  $f$ , визначити швидкість тіла в моменти часу  $t_1, t_2, t_3$  та перевірити отриманий результат для моменту часу  $t_1$  за допомогою диференційного рівняння руху.

Необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 2.1.

При побудові графіка зміни сили  $P$  за заданими їй значеннями  $P_0, P_1, P_2, P_3$  для моментів часу  $t_0, t_1, t_2, t_3$  вважати залежність  $P = P(t)$  між вказаними моментами часу лінійною. Значення сили  $P$ , надане в таблиці 2.1 у вигляді дроби, вказує на те, що модуль сили в заданий момент часу має "стрибок": у чисельнику вказаний модуль сили в кінці проміжку часу, а в знаменники - на початку наступного проміжку часу.

Таблиця 2.1

| Варіант | $m$ ,<br>кг | $v_0$ ,<br>м/с | $t_1$ | $T_2$ | $t_3$ | $P_0$ | $P_1$   | $P_2$ | $P_3$ | $\alpha$ ,<br>град | $f$  |
|---------|-------------|----------------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|--------------------|------|
|         |             |                | С     |       |       | Н     |         |       |       |                    |      |
| 1       | 35          | 5,4            | 4     | 10    | 18    | 100   | 200     | 150   | 250   | 25                 | 0,10 |
| 2       | 20          | 0              | 6     | 10    | 15    | 200   | 160     | 160   | 180   | 37                 | 0,25 |
| 3       | 25          | 0              | 4     | 10    | 16    | 200   | 200/120 | 120   | 0     | 21                 | 0,10 |
| 4       | 10          | 4,5            | 5     | 10    | 16    | 0     | 180     | 40    | 100   | 32                 | 0,12 |
| 5       | 16          | 9,0            | 4     | 8     | 16    | 120   | 120/0   | 0     | 160   | 24                 | 0,08 |
| 6       | 40          | 4,0            | 4     | 8     | 12    | 400   | 300     | 300   | 0     | 40                 | 0,06 |
| 7       | 20          | 8,0            | 5     | 8     | 11    | 0     | 300     | 0     | 0     | 25                 | 0,20 |
| 8       | 16          | 7,6            | 6     | 11    | 13    | 75    | 200     | 0     | 0     | 23                 | 0,12 |
| 9       | 12          | 0              | 6     | 10    | 14    | 100   | 140     | 0     | 0     | 20                 | 0,20 |
| 10      | 50          | 12,0           | 2     | 6     | 12    | 0     | 300     | 200   | 200   | 27                 | 0,08 |
| 11      | 10          | 5,0            | 6     | 10    | 16    | 50    | 100     | 100   | 200   | 35                 | 0,24 |
| 12      | 12          | 3,0            | 3     | 8     | 14    | 60    | 180     | 120   | 120   | 42                 | 0,15 |
| 13      | 10          | 8,0            | 4     | 12    | 16    | 0     | 150     | 150   | 100   | 30                 | 0,18 |
| 14      | 20          | 8,5            | 5     | 8     | 15    | 40    | 100     | 150   | 0     | 23                 | 0,07 |
| 15      | 14          | 9,0            | 7     | 12    | 18    | 0     | 140     | 0     | 100   | 18                 | 0,15 |
| 16      | 20          | 3,0            | 5     | 9     | 17    | 300   | 150     | 100   | 100   | 39                 | 0,12 |
| 17      | 24          | 10,0           | 6     | 10    | 15    | 0     | 180     | 60    | 140   | 15                 | 0,20 |
| 18      | 15          | 13,0           | 8     | 16    | 20    | 110   | 150     | 0     | 90    | 26                 | 0,22 |
| 19      | 15          | 7,2            | 3     | 10    | 16    | 150   | 110     | 90    | 120   | 30                 | 0,30 |
| 20      | 22          | 8,2            | 2     | 9     | 11    | 70    | 110     | 110   | 50    | 15                 | 0,15 |
| 21      | 13          | 10,0           | 8     | 12    | 16    | 0     | 200/0   | 0/200 | 100   | 28                 | 0,14 |
| 22      | 11          | 6,0            | 7     | 9     | 14    | 160   | 0       | 0/100 | 120   | 31                 | 0,11 |

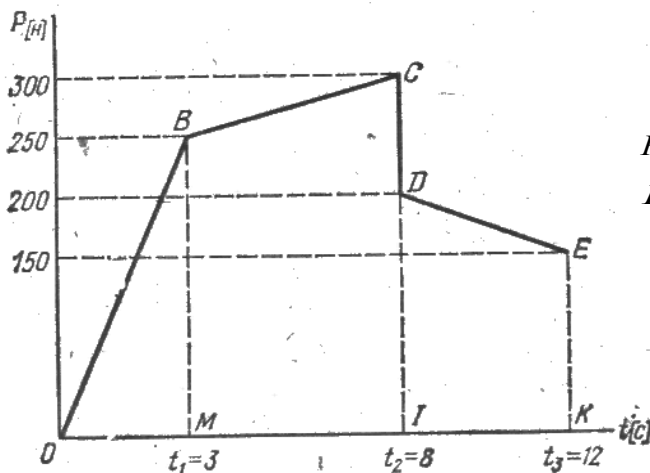
|    |    |      |   |    |    |     |        |         |     |    |      |
|----|----|------|---|----|----|-----|--------|---------|-----|----|------|
| 23 | 12 | 4,5  | 5 | 10 | 16 | 50  | 120    | 40      | 80  | 21 | 0,22 |
| 24 | 10 | 7,0  | 4 | 14 | 29 | 100 | 50     | 50      | 0   | 18 | 0,09 |
| 25 | 18 | 0    | 8 | 10 | 16 | 180 | 160/0  | 0/140   | 180 | 33 | 0,17 |
| 26 | 8  | 9,0  | 4 | 8  | 12 | 0   | 150    | 0       | 120 | 45 | 0,10 |
| 27 | 17 | 5,0  | 7 | 10 | 18 | 190 | 170/0  | 100     | 280 | 38 | 0,21 |
| 28 | 9  | 7,5  | 4 | 12 | 17 | 0   | 140/70 | 100/70  | 70  | 26 | 0,20 |
| 29 | 20 | 9,5  | 5 | 6  | 11 | 0   | 400    | 400/100 | 200 | 15 | 0,25 |
| 30 | 10 | 10,2 | 6 | 7  | 10 | 120 | 70     | 0       | 120 | 33 | 0,15 |

### Типовий звіт завдання Д-3

**Дано:**  $m=40$  кг,  $V_0=10$  м/с,  $t_1=3$  с,  $t_2=8$  с,  $t_3=12$  с,  $P_0=0$ ,  $P_1=250$  Н,  $P_2=300/200$  Н,  $P_3=150$  Н,  $\alpha=30^\circ$ ,  $f=0,1$ .

**Визначити:**  $V_1$ ,  $V_2$  та  $V_3$  для  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ .

**Розв'язання.** Вкажемо сили, які діють на тіло (рисунок 2.8): вагу  $\vec{G}$ , силу  $\vec{P}$  та силу тертя ковзання  $\vec{F}$ , спрямувавши її протилежно початковій швидкості, тобто вниз вздовж похилої площини.



Побудуємо графік  $P = P(t)$  за заданим значеннями  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (рисунок 2.13).

Рисунок 2.13

1 Для тіла, прийнятого за матеріальну точку, що рухається прямолінійно вздовж осі  $X$ , складемо рівняння, яке виражає теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь  $X$  для проміжку часу від 0 до  $t_1$ :

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{nx}, \quad (2.1)$$

де

$$\sum S_{nx} = -Gt_1 \sin \alpha - Ft_1 + S_{Px}.$$

Проекція імпульсу змінної сили  $P$  за час  $t_1$ , с,

$$S_{Px} = \int_0^{t_1} P dt.$$

Такий інтеграл визначається площею трикутника ОВМ на графіку  $P = P(t)$  (рисунок 2.8):

$$S_{Px} = \frac{3 \cdot 250}{2} = 375 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Враховуючи, що сила тертя ковзання  $F = fN = fG \cos \alpha$ , отримаємо рівняння (2.1) у вигляді:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = -mgt_1 \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot t_1 + 375,$$

звідки

$$V_{1x} = V_{0x} - gt_1 \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot t_1 + \frac{375}{m},$$

тобто

$$V_{1x} = 10 - 9,81 \cdot 3 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 3 + \frac{375}{40} = 2,10 \text{ м/с}.$$

Таким чином,

$$V_1 = V_{1x} = 2,10 \text{ м/с}.$$

2 Для визначення швидкості тіла в момент часу  $t_2$  складемо рівняння, яке виражає теорему про зміну кількості руху, для проміжку часу  $t_1 - t_2$ :

$$mV_{2x} - mV_{1x} = \sum S_{nx}, \quad (2.2)$$

де

$$\sum S_{nx} = -G(t_2 - t_1) \sin \alpha - F(t_2 - t_1) + S_{Px}.$$

Проекція імпульсу змінної сили  $P$  за  $(t_2 - t_1)$ , с, визначається площею трапеції МВСІ на графіку  $P = P(t)$  (рисунок 2.13):

$$S_{Px} = \frac{5(250+300)}{2} = 1375 \text{ Н} \cdot \text{с} .$$

Тоді рівняння (2.2) має вигляд

$$mV_{2x} - mV_{1x} = -mg(t_2 - t_1) \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + 1375 ,$$

звідки

$$\begin{aligned} V_{2x} &= V_{1x} - g(t_2 - t_1) \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1375}{m} = \\ &= 2,10 - 9,81 \cdot 5 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 5 + \frac{1375}{40} = 7,68 \text{ м/с} . \end{aligned}$$

Таким чином,

$$V_2 = V_{2x} = 7,68 \text{ м/с} .$$

З Рівняння, що виражає теорему про зміну кількості руху, складене для проміжку часу  $(t_3 - t_2)$ , дає можливість визначити швидкість  $V_3$  тіла в момент часу  $t_3$  :

$$mV_{3x} - mV_{2x} = \sum S_{nx} \quad (2.3)$$

де

$$\sum S_{nx} = -G(t_3 - t_2) \sin \alpha - fG \cos \alpha (t_3 - t_2) + S_{Px} .$$

Проекція змінної сили  $P$  за час  $(t_3 - t_2)$ , с, дорівнює площі трапеції ІДЕК на графіку  $P = P(t)$  (рисунок 2.13):

$$S_{Px} = \frac{4(200+150)}{2} = 700 \text{ Н} \cdot \text{с} .$$

Тоді

$$\begin{aligned} V_{3x} &= V_{2x} - g(t_3 - t_2) \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot (t_3 - t_2) + \frac{700}{40} = \\ &= 7,68 - 9,81 \cdot 4 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 4 + 17,5 = 2,15 \text{ м/с} . \end{aligned}$$



Таким чином,

$$V_3 = V_{3x} = 2,15 \text{ м/с} .$$

4 Перевіримо отримане для моменту  $t_1$  значення швидкості  $V_1$  за допомогою диференціального рівняння

$$mx'' = \sum X_n , \quad mx'' = -G \sin \alpha - F + P$$

або

$$mx'' = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha + P ,$$

тобто

$$x'' = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + \frac{P}{m} ,$$

де  $P = P_0 + \left(\frac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0}\right)t = \frac{250}{3}t$  - рівняння прямої ОВ (рисунок 2.13),

а тоді

$$x'' = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + \frac{25}{12}t .$$

Інтегруючи отримане диференціальне рівняння, маємо

$$x' = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + \frac{25}{24}t^2 + C .$$

Для визначення постійної інтегрування  $C$  використаємо початкові умови задачі: при  $t = 0$   $V_{0x} = x_0' = 10 \text{ м/с}$  .

Складемо рівняння, отримане інтегруванням, для  $t = 0$ , знайдемо що  $C = 10 \text{ м/с}$  . Таким чином, рівняння, яке визначає зміну швидкості за проміжок часу від 0 до  $t_1$ , має вигляд

$$x' = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + \frac{25}{24}t^2 + 10 .$$

При  $t = 3 \text{ с}$

$$V_1 = x_1' = -9,81 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87) \cdot 3 + \frac{25}{24} \cdot 9 + 10 = 2,10 \text{ м/с} .$$

## 2.4 Завдання Д 4

### ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ.

#### Основні теореми динаміки механічної системи.

**Використання теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи (таблиця 2, рисунки 15, 16, 17).**

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29) (рисунок 2.14), нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях дорівнюватиме  $s$ .

У завданні прийнято такі визначення:

$m_1, m_2, m_3, m_4$  - маси тіл 1, 2, 3, 4;

$R_2, r_2, R_3, r_3$  - радіуси великих та малих кіл (коліс);

$i_{2x}, i_{3\xi}$  - радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через центри їх ваги;

$\alpha, \beta$  - кути нахилу площин до горизонту;

$f$  - коефіцієнт тертя ковзання;

$\delta$  - коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані наведені в таблиці 2.2. Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилені частки ниток паралельні відповідним похилим площинам.





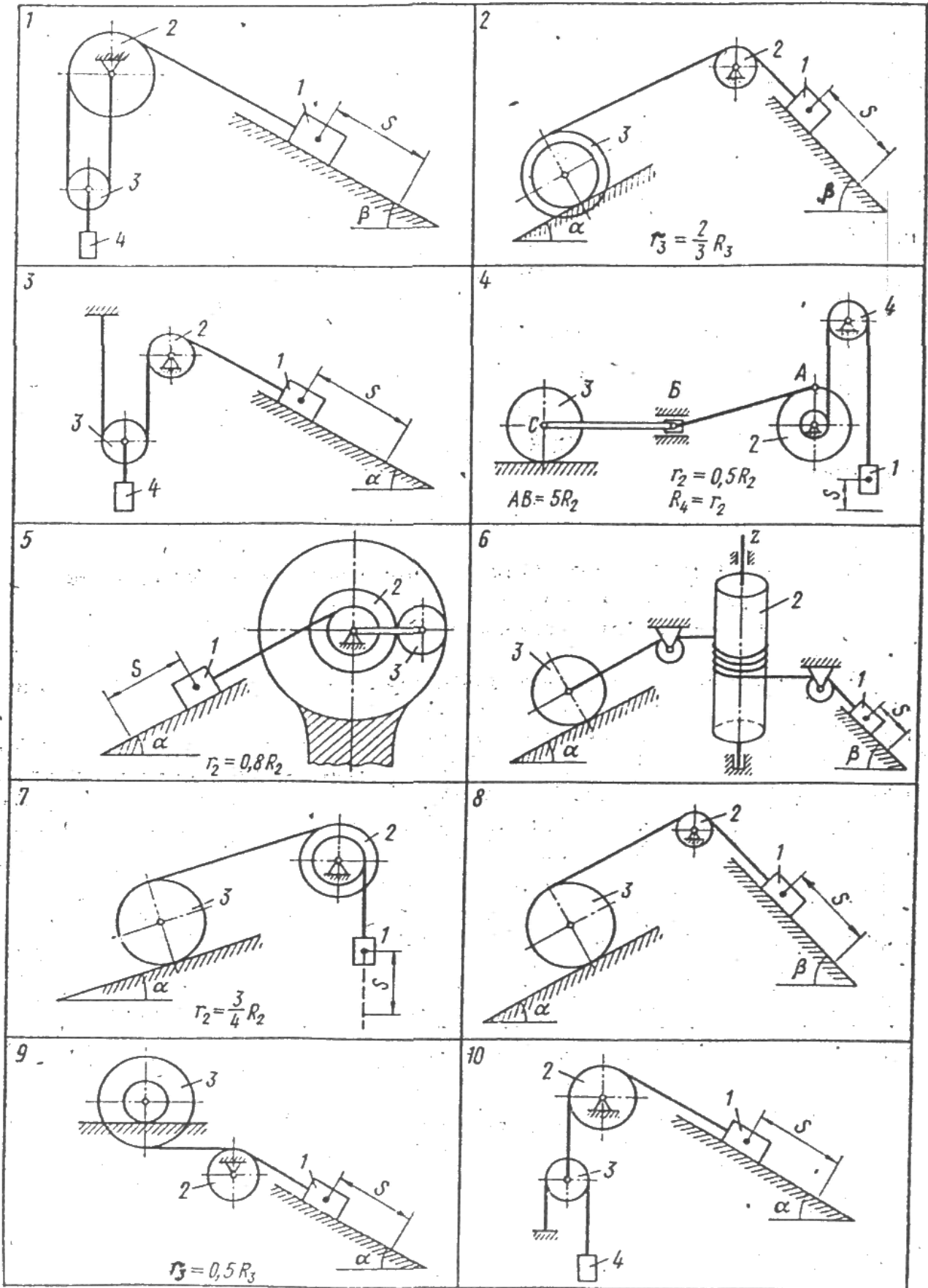


Рисунок 2.14

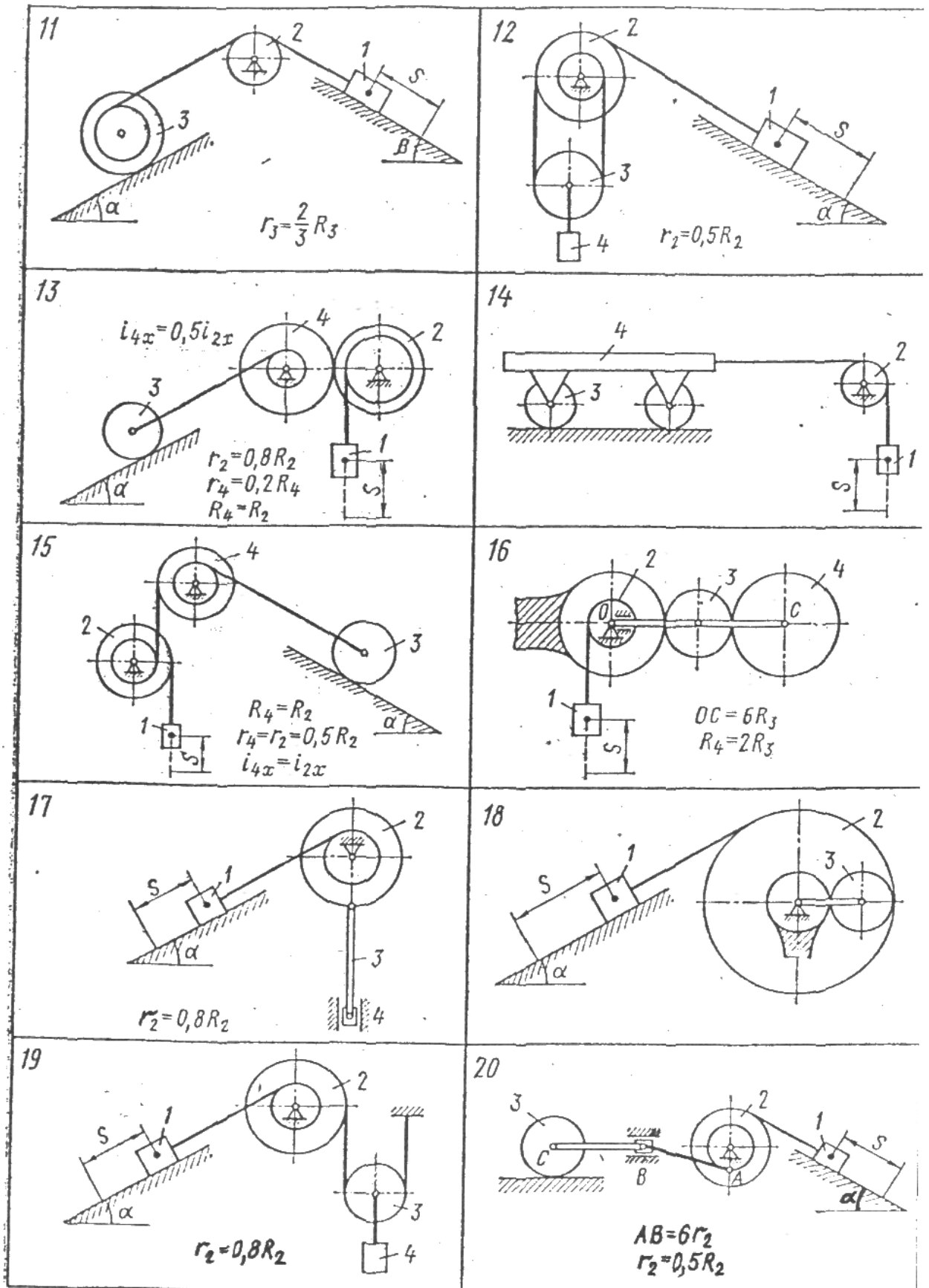


Рисунок 2.14 (продовження)

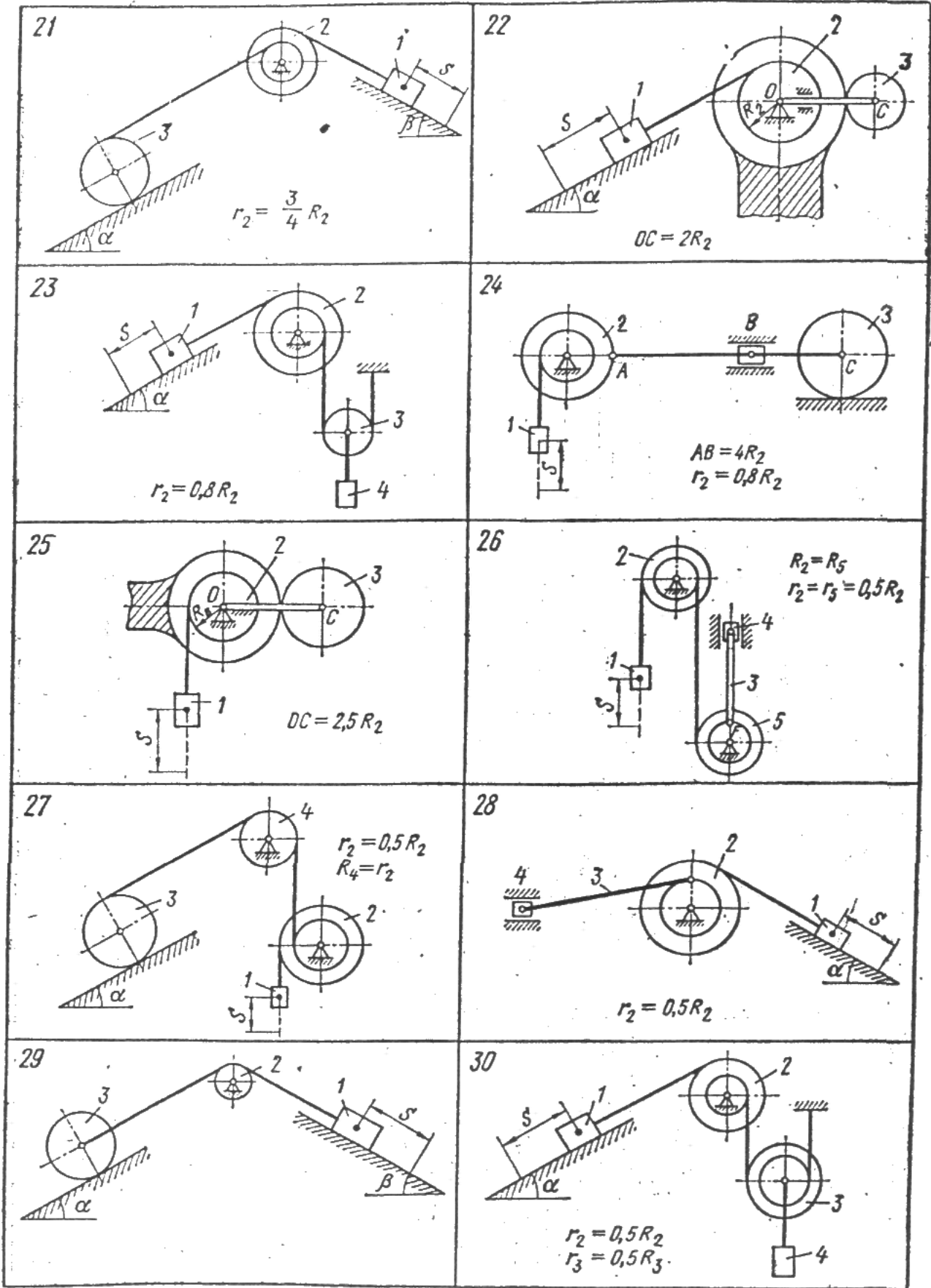


Рисунок 2.14 (закінчення)

## Типовий звіт завдання Д-4

Дано:  $m_1 = 3 m_2 = \frac{1}{2} m_3$ ,  $R_3 = 30$  см,  $R_2 = 20$  см,  $r_2 = 15$  см,  
 $i_{2x} = 17$  см;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $f = 0,2$ ,  $\delta = 0,25$ ,  $s = 6$  м.

Визначити  $V_1$  (рисунок 2.15, а).

### Розв'язання.

Скористуємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_1 - T_0 = \sum A_n, \quad (2.4)$$

де  $T_0$  та  $T_1$  - кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum A_n$  - сума робіт всіх сил, прикладених до системи.

Враховуючи, що на початку система знаходилась в стані спокою,  $T_0 = 0$ , рівняння (2.4) набуває вигляду

$$T_1 = \sum A_n. \quad (2.5)$$

Знайдемо кінетичну енергію системи  $T_1$  в кінцевому її положенні.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3:

$$T_1 = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2.6)$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально, дорівнює

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$



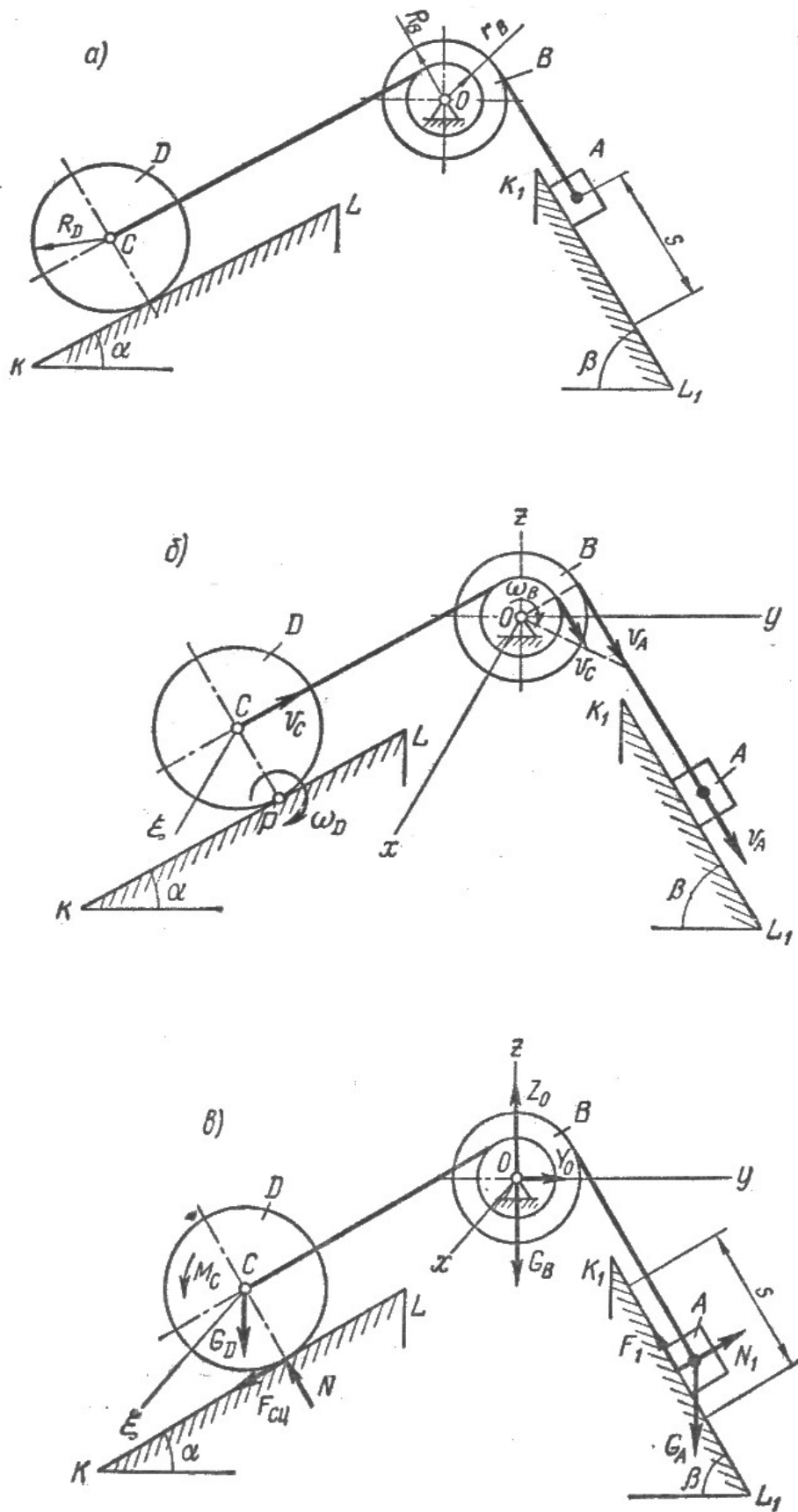


Рисунок 2.15

Кінетична енергія блока 2, який рухається обертально навколо нерухомої осі, визначається як

$$T_2 = \frac{J_{2x} \omega_2^2}{2},$$

де  $J_{2x}$  - момент інерції блока відносно осі обертання  $Ox$ :

$$J_{2x} = m_2 \cdot i_{2x}^2,$$

де  $\omega_2$  - кутова швидкість блока;  
 $i_{2x}$  - радіус інерції блока.

Кінетична енергія котка 3, який здійснює плоский рух,

$$T_3 = \frac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \frac{J_{3\xi} \omega_3^2}{2},$$

де  $V_{C3}$  - швидкість центра мас (центра ваги)  $C$  котка;  
 $J_{3\xi}$  - момент інерції котка (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної продольної осі  $C\xi$ ,

$$J_{3\xi} = \frac{m_3 R_3^2}{2};$$

$\omega_3$  - кутова швидкість котка.

Підставляючи завдані значення мас та значення моментів інерції у формулу (2.6) для кінетичної енергії системи, отримаємо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + m_1 \cdot V_{C3}^2 + \frac{m_1 \cdot R_3^2 \cdot \omega_3^2}{2} = \\ &= m_1 \left( \frac{V_1^2}{2} + \frac{i_{2x}^2 \cdot \omega_2^2}{6} + V_{C3}^2 + \frac{R_3^2 \cdot \omega_3^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обертальна швидкість точок обода кожного з барабанів блоку дорівнює швидкості руху, отримуваної з блока нитки (рисунок 2.15,б).

Виразимо швидкість  $V_{C3}$  та кутові швидкості  $\omega_2$  та  $\omega_3$  через швидкість  $V_1$ .

Тобто,

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} \text{ та } \frac{V_{C3}}{V_1} = \frac{r_2}{R_2},$$

звідки

$$V_{C3} = \frac{r_2}{R_2} \cdot V_1.$$

Оскільки коток котиться без ковзання, миттєвий центр швидкостей котка знаходиться в точці Р.

Тому

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{CP} = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot V_1.$$

Після підстановки до формули (2.7) знайдених величин  $V_{C3}$ ,  $\omega_2$  та  $\omega_3$  отримаємо таке значення кінетичної енергії системи:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{i_{2x}^2}{R_2^2} + 3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \text{ або } T_1 = 2,93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}. \quad (2.8)$$

Знайдемо суму робіт всіх сил, прикладених до системи, на заданому переміщенні.

На вантаж 1 (рисунок 2.15, в в) діють такі сили:

- вага  $\overline{G}_1$ ;
- нормальна реакція  $\overline{N}_1$  площі  $K_1 L_1$ ;
- сила тертя  $\overline{F}_1$ , спрямована протилежно швидкості вантажу 1;
- реакція нитки.

Силами, що діють на барабани 2, є їх вага  $\overline{G}_2$ , складові реакцій підшипників  $\overline{Y}_O$  та  $\overline{Z}_O$ , а також реакції ниток.

До котка 3 прикладені такі сили: вага  $\overline{G}_3$ , сила зчеплення  $\overline{F}_{34}$  (сила тертя спокою), яка протистоїть ковзанню котка, нормальна реакція  $\overline{N}$  площі  $KL$ , пара сил опору коченню з моментом  $M_C$ , а також реакція нитки.

Реакції ниток, прикладені до вантажу 1, барабанів 2 та котка 3, є внутрішніми силами розглянутої системи, робота яких при нерозтяжних нитках дорівнює нулю, тому реакції ниток на рисунку 2.15,в не вказані.

Робота сили  $\overline{G}_1$  визначається рівнянням  $A_{G_1} = G_1 \cdot h$ , де  $h = s \cdot \sin \beta$  - відповідає вертикальному переміщенню вантажу 1, тоді

$$A_{G_1} = G_1 \cdot h = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta .$$

Робота нормальних реакцій  $\overline{N}_1$  та  $\overline{N}$  дорівнює нулю оскільки кут між переміщенням  $s$  та цими силами дорівнює  $90^\circ$ .

Робота сили тертя ковзання  $\overline{F}_1$

$$A_F = -F_1 \cdot s .$$

Оскільки  $F_1 = fN_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos \beta$ ,

$$A_F = -f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s .$$

Сили  $\overline{G}_2$ ,  $\overline{Y}_O$  та  $\overline{Z}_O$  не створюють роботи, тому що вони прикладені до нерухомої точки.

Робота  $\overline{G}_3$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot h_C = -G_3 \cdot s_C \cdot \sin \alpha ,$$

де  $s_C$  - переміщення центра мас котка.

Робота сили  $\overline{F}_{34}$  дорівнює нулю, оскільки вона прикладена в миттєвому центрі швидкостей.

Робота пари сил опору коченню

$$A_{M_C} = -M_C \cdot \varphi_3 ,$$

де  $M_c = \delta \cdot N = \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha$  - момент пари сил опору кочення;  
 $\varphi_3$  - кутове переміщення котка 3 (кут обертання).

Таким чином,

$$A_{M_c} = -\delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \varphi_3.$$

Сума робіт всіх сил, прикладених до системи, яка розглядається,

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta - f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s - G_3 \cdot s_c \cdot \sin \alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \varphi_3. \quad (2.9)$$

Переміщення центра мас котка  $s_c$  та кут обертання  $\varphi_3$  виразимо через переміщення вантажу  $s$ .

Оскільки лінійні (або кутові) переміщення знаходяться в такій самій залежності, як відповідні лінійні (або кутові) швидкості, то

$$s_c = \frac{r_2}{R_2} \cdot s \quad \text{та} \quad \varphi_3 = \frac{s_c}{R_3} = \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s.$$

Підставимо ці значення в рівняння (2.9)

$$\sum A_n = G_1 \cdot s \cdot \sin \beta - f \cdot G_1 \cdot \cos \beta \cdot s - G_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot s \cdot \sin \alpha - \delta \cdot G_3 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \cdot s$$

або

$$\begin{aligned} \sum A_n &= m_1 \cdot g \cdot s \left( \sin \beta - f \cdot \cos \beta - 2 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha - 2\delta \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \right) = \\ &= 0,004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s \end{aligned} \quad (2.10)$$

Прирівнюючи значення  $T_1$  та  $\sum A_n$ , визначені формулами (2.8) та (2.10) отримаємо

$$2,93 \cdot \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} = 0,004 \cdot m_1 \cdot g \cdot s,$$

звідки

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,004}{2,93} g s} = \sqrt{\frac{0,008}{2,93} \cdot 9,81 \cdot 6} = 0,40 \text{ м/с} .$$

## 2.5 Завдання Д 5

### **АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА** **Загальне рівняння динаміки**

#### **Використання загального рівняння динаміки до дослідження механічної системи з одним ступенем вільності**

Для заданої механічної системи визначити прискорення вантажів та натягання в гілках ниток, до яких причеплені вантажі. Масами ниток знехтувати. Тертя кочення та сили опору в підшипниках не враховувати (рисунок 2.16).

Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці 2.3 не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

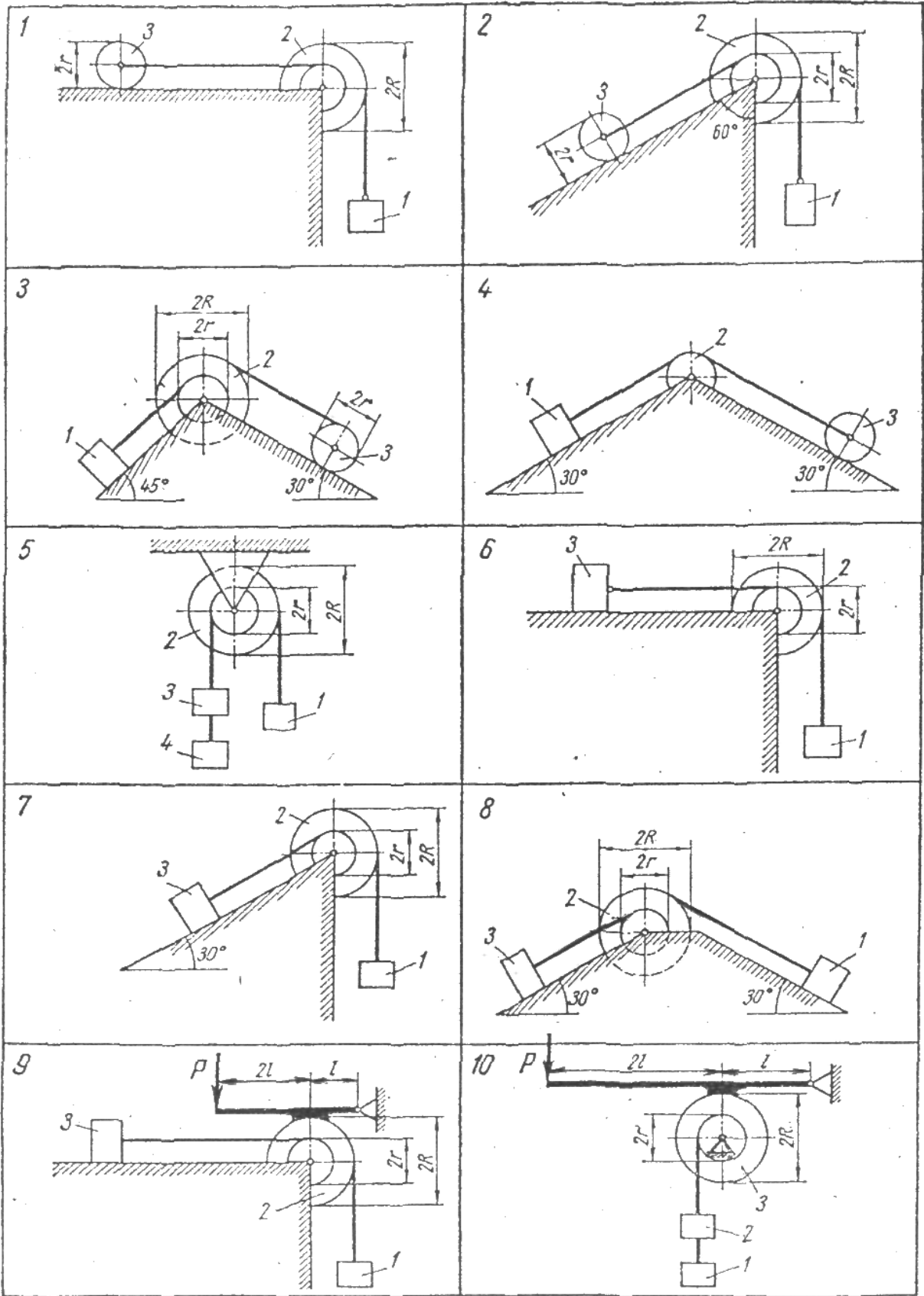


Рисунок 2.16

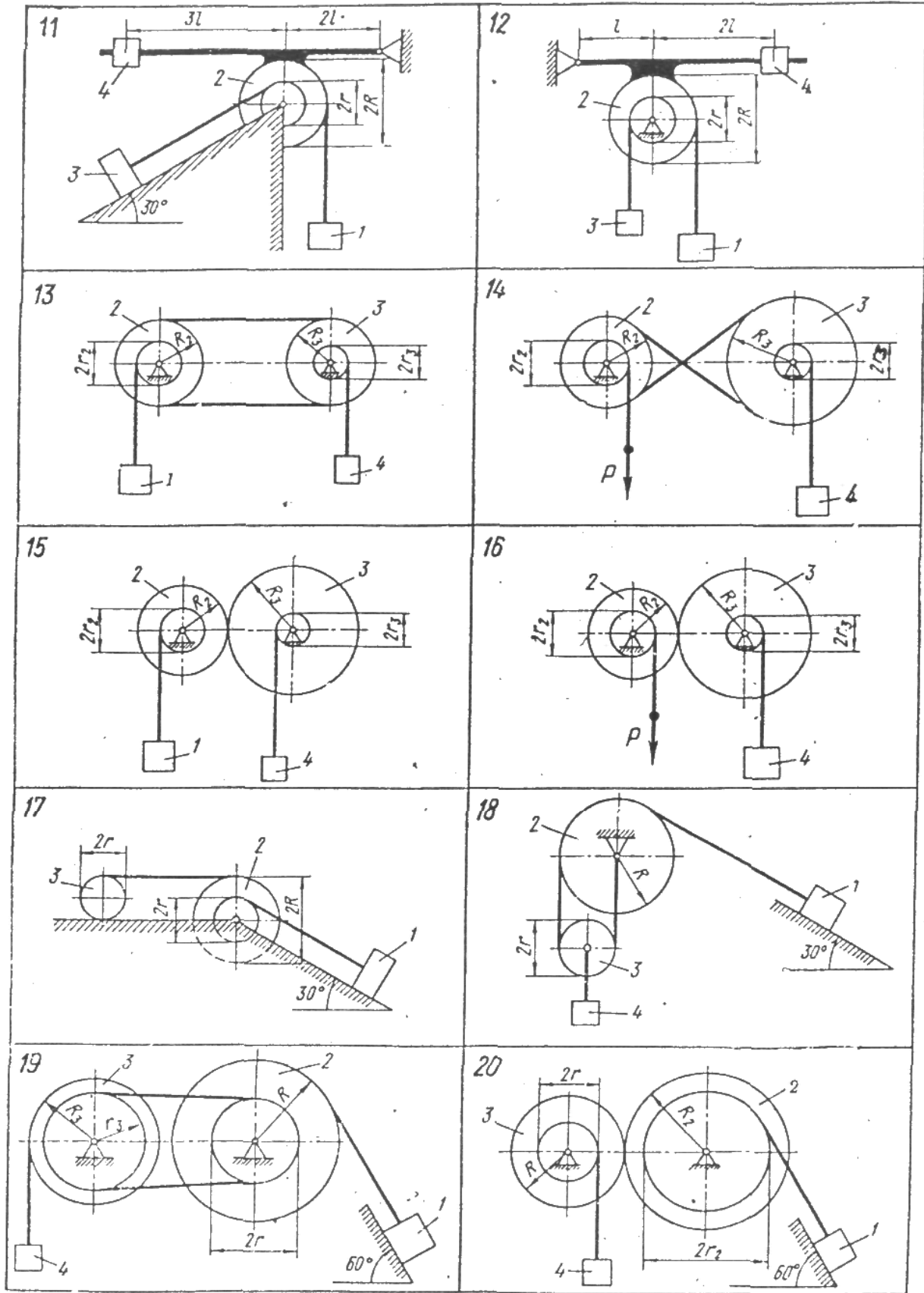


Рисунок 2.16 (продовження)



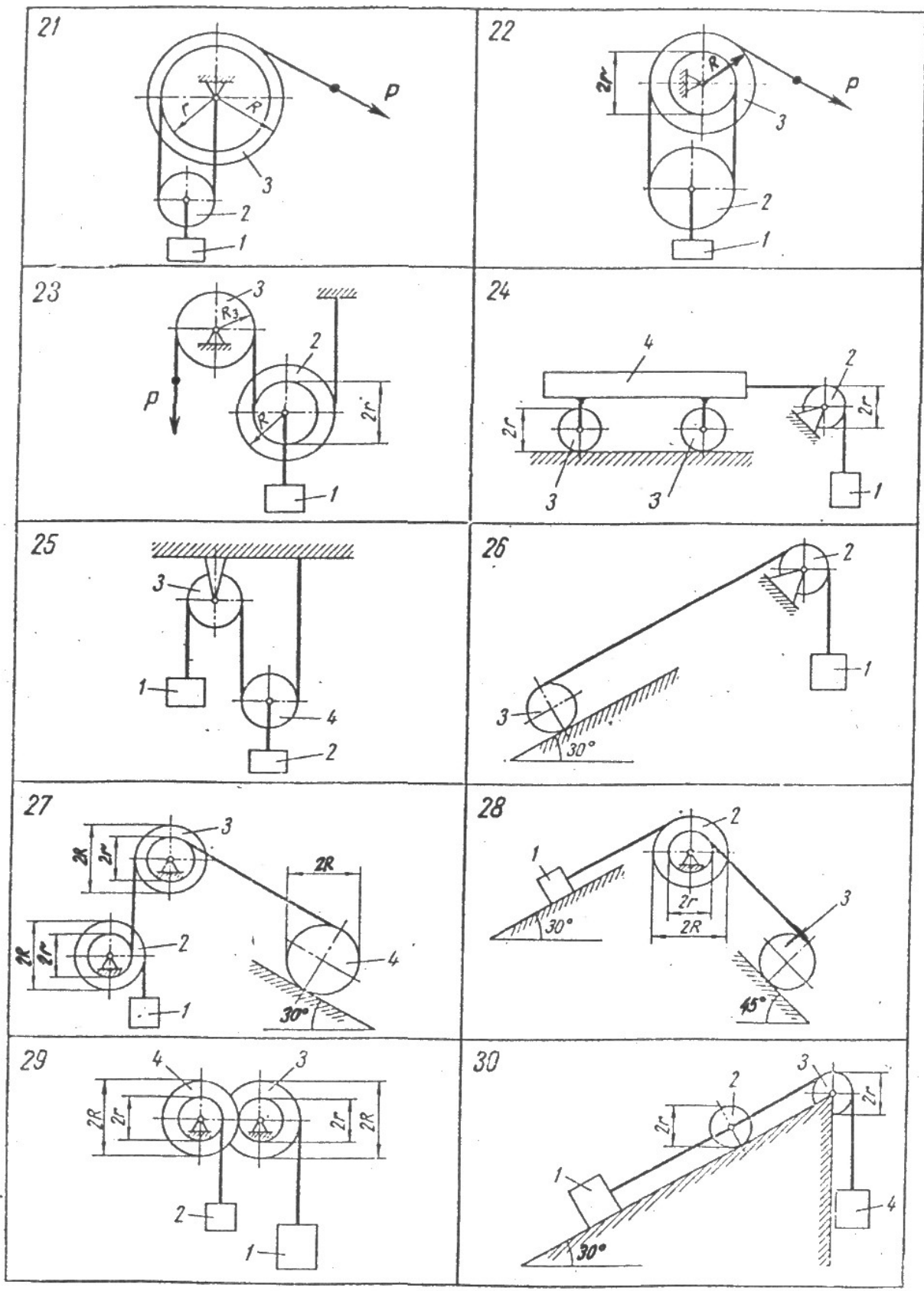


Рисунок 2.16 (закінчення)

Таблиця 2.3

| Варіант | Вага  |        |        |        | $R/r$ | Радіус інерції |          | $P$    | Коефіцієнт тертя, $f$ | Додаткові дані             |
|---------|-------|--------|--------|--------|-------|----------------|----------|--------|-----------------------|----------------------------|
|         | $G_1$ | $G_2$  | $G_3$  | $G_4$  |       | $i_{2x}$       | $i_{3x}$ |        |                       |                            |
| 1       | 2     | 3      | 4      | 5      | 6     | 7              | 8        | 9      | 10                    | 11                         |
| 1       | $G$   | $G$    | $3G$   | -      | 2     | $r\sqrt{2}$    | -        | -      | -                     |                            |
| 2       | $G$   | $G$    | $G$    | -      | 2     | $r\sqrt{2}$    | -        | -      | -                     |                            |
| 3       | $3G$  | $G$    | $G$    | -      | 2     | $r\sqrt{2}$    | -        | -      | 0,1                   |                            |
| 4       | $G$   | $G$    | $2G$   | -      | -     | -              | -        | -      | 0,2                   | $r_2=r_3$                  |
| 5       | $2G$  | $G$    | $G$    | $G$    | 3     | $2r$           | -        | -      | -                     |                            |
| 6       | $2G$  | $G$    | $2G$   | -      | 3     | $2r$           | -        | -      | 0,2                   |                            |
| 7       | $2G$  | $G$    | $2G$   | -      | 3     | $2r$           | -        | -      | 0,2                   |                            |
| 8       | $2G$  | $G$    | $2G$   | -      | 3     | $2r$           | -        | -      | 0,2                   |                            |
| 9       | $2G$  | $G$    | $2G$   | -      | 3     | $2r$           | -        | $0,2G$ | 0,2                   |                            |
| 10      | $2G$  | $2G$   | $G$    | -      | 4     | -              | $2r$     | $G/3$  | 0,4                   |                            |
| 11      | $2G$  | $G$    | $2G$   | $0,2G$ | 3     | $2r$           | -        | -      | 0,2                   |                            |
| 12      | $2G$  | $G$    | $2G$   | $0,2G$ | 3     | $2r$           | -        | -      | 0,2                   |                            |
| 13      | $4G$  | $2G$   | $G$    | $4G$   | -     | $r_2\sqrt{2}$  | $2r_3$   | -      | -                     | $r_2=2r_3$<br>$R_2=R_3$    |
| 14      | -     | $2G$   | $G$    | $4G$   | -     | $r_2\sqrt{2}$  | $2r_3$   | $8G$   | -                     | $r_2=2r_3$<br>$R_3=1,5R_2$ |
| 15      | $4G$  | $G$    | $2G$   | $4G$   | -     | $r_2\sqrt{2}$  | $2r_3$   | -      | -                     | $r_2=2r_3$<br>$R_3=1,5R_2$ |
| 16      | -     | $G$    | $2G$   | $4G$   | -     | $r_2\sqrt{2}$  | $2r_3$   | $4G$   | -                     | $r_2=2r_3$<br>$R_3=1,5R_2$ |
| 17      | $2G$  | $G$    | $G$    | -      | 2     | $r\sqrt{2}$    | -        | -      | 0,1                   |                            |
| 18      | $3G$  | $0,2G$ | $0,1G$ | $0,5G$ | 2     | -              | -        | -      | 0,4                   |                            |
| 19      | 4     | 0,3    | 0,2    | $3G$   | 3     | $2r$           | 1,2      | -      | 0,1                   | $r_3=1,2r$                 |

|           |            |              |              |      |     |        |             |   |       |                            |
|-----------|------------|--------------|--------------|------|-----|--------|-------------|---|-------|----------------------------|
|           | $G$        | $G$          | $G$          |      |     |        | $r$         |   |       | $R_3=1,2r_3$               |
| <b>20</b> | $4$<br>$G$ | $0,2$<br>$G$ | $0,1$<br>$G$ | $3G$ | $2$ | $1,6r$ | $r\sqrt{2}$ | - | $0,2$ | $r_2=1,5r$<br>$R_2=1,2r_2$ |

Продовження таблиці 2.3

| 1         | 2          | 3            | 4            | 5    | 6     | 7           | 8           | 9    | 10    | 11                           |
|-----------|------------|--------------|--------------|------|-------|-------------|-------------|------|-------|------------------------------|
| <b>21</b> | $5$<br>$G$ | $0,1$<br>$G$ | $0,2$<br>$G$ | -    | $3$   | -           | $r\sqrt{2}$ | $G$  | -     |                              |
| <b>22</b> | $G$        | $0,2$<br>$G$ | $0,3$<br>$G$ | -    | $2$   | -           | $r\sqrt{2}$ | $G$  | -     |                              |
| <b>23</b> | $G$        | $0,2$<br>$G$ | $0,1$<br>$G$ | -    | $1,5$ | $1,2r$      | -           | $2G$ | -     | $R_3=1,2r$                   |
| <b>24</b> | $2$<br>$G$ | $G$          | $G$          | $8G$ | -     | -           | -           | -    | -     | Маси чотирьох коліс однакові |
| <b>25</b> | $6$<br>$G$ | $2G$         | $2G$         | $G$  | -     | -           | -           | -    | -     | $r_3=r_4$                    |
| <b>26</b> | $6$<br>$G$ | $G$          | $2G$         | -    | -     | -           | -           | -    | -     | $r_3=r_2$                    |
| <b>27</b> | $G$        | $G$          | $G$          | $4G$ | $2$   | $r\sqrt{2}$ | $r\sqrt{2}$ | -    | -     |                              |
| <b>28</b> | $3$<br>$G$ | $G$          | $G$          | -    | $2$   | $r\sqrt{2}$ | -           | -    | $0,1$ |                              |
| <b>29</b> | $6$<br>$G$ | $3G$         | $G$          | $G$  | $2$   | -           | $r\sqrt{2}$ | -    | -     | $i_{4x}=i_{3x}$              |
| <b>30</b> | $8$<br>$G$ | $G$          | $G$          | $2G$ | -     | -           | -           | -    | $0,1$ |                              |

### Типовий звіт завдання Д-5

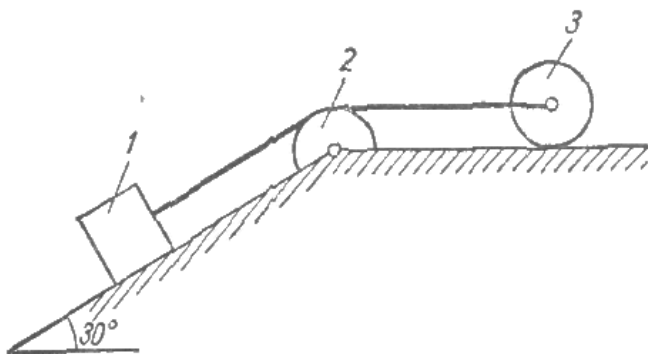


Рисунок 2.17

**Дано:**  $G_1 = G_2 = G_3 = G$ ,  
 $r_2 = r_3 = r$ ,  $f = 0.2$

Блок 2 та коток 3 - суцільні однорідні циліндри (рисунок 2.17).

**Визначити:**

прискорення  $a$  вантажу 1 та натягання  $T_{1-2}$  і  $T_{2-3}$  гілок 1-2 та 2-3 ниток.

### Розв'язання.

Використаємо для розв'язання задачі загальне рівняння динаміки.

Вкажемо задані сили (рисунок 2.18):

- сили ваги  $\overline{G_1}$  (вантаж 1),  $\overline{G_2}$  (блока 2),  $\overline{G_3}$  (котка 3);
- сила тертя ковзання  $\overline{F}$  вантажу по похилій площині.

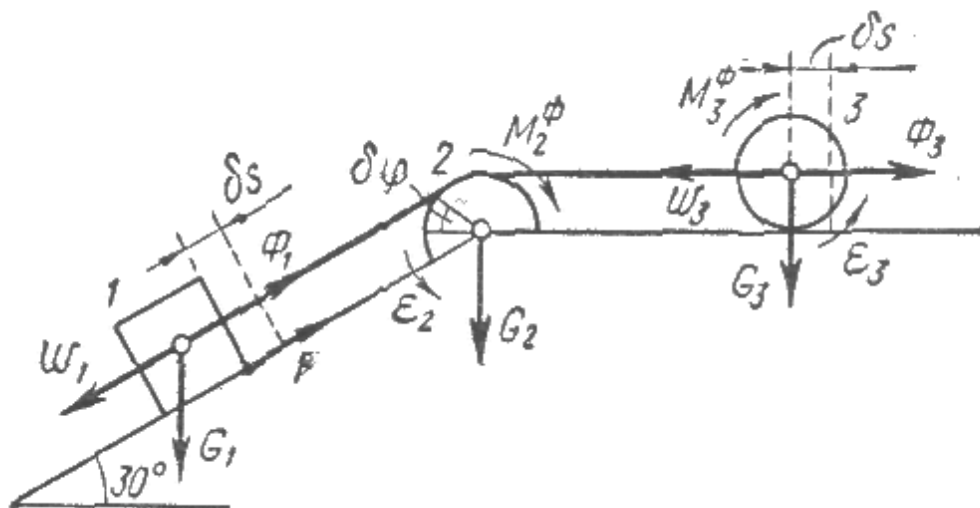


Рисунок 23.

Прикладемо відповідні сили інерції.

Сила інерції вантажу 1, який рухається поступально з прискоренням  $\overline{a_1}$  виражається вектором:  $\overline{\Phi_1} = -m_1 \cdot \overline{a_1}$ .

Сила інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням  $\varepsilon_2$ , приводиться до пари з моментом

$$M_2^\Phi = -J_{2X} \cdot \varepsilon_2.$$

Сили інерції котка 3, який зверхує плоский рух, приводяться до вектора

$$\overline{\Phi_3} = -m_3 \cdot \overline{a_{C3}},$$

де  $\overline{a_{C3}}$  - прискорення центра мас котка, та до пари сил, момент якої

$$M_3^\Phi = -J_{C3} \cdot \varepsilon_3,$$

де  $\varepsilon_3$  - кутове прискорення котка;

$J_{C3}$  - момент інерції котка відносно центра його інерції С.

Надамо системі можливе переміщення (рисунок 2.18) і складемо загальне рівняння динаміки:

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \delta s + \Phi_1 \cdot \delta s + M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 + \Phi_3 \delta s + M_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0, \quad (2.11)$$

де  $\delta \varphi_2$  та  $\delta \varphi_3$  - кути обертання блока 2 та котка 3.

Враховуючи, що в даній задачі  $G_1 = G_2 = G_3 = G = mg$ , нитка нерозтяжна, а тоді  $a_3 = a_1 = a$ , отримаємо такі рівняння:

$$\Phi_1 = ma,$$

$$M_2^\Phi = J_{2X} \cdot \varepsilon_2 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2},$$

$$\Phi_3 = ma,$$

$$M_3^\phi = J_{C3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{m \cdot r \cdot a}{2}.$$

Сила тертя

$$F = fG_1 \cdot \cos 30^\circ = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ.$$

Рівняння (2.11) набуває вигляду

$$-mg \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + fmg \cos 30^\circ \cdot \delta s + ma \cdot \delta s + \frac{mra}{2} \cdot \delta \varphi_2 + ma \delta s + \frac{mra}{2} \delta \varphi_3 = 0.$$

Встановимо залежність між можливими переміщеннями, які входять до рівняння (2.11):

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \frac{\delta s}{r}$$

та підставимо ці формули для кутів обертання в рівняння (2.11).

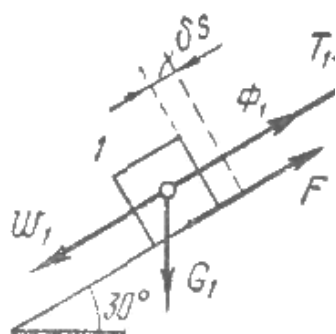
Розділимо всі члени рівняння (2.11) на  $m$  і  $\delta s$  та отримаємо

$$-g \cdot \sin 30^\circ + fg \cos 30^\circ + a + \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 0,$$

звідки

$$a = \frac{g}{3} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = \frac{9,81}{3} (0,5 - 0,2 \cdot 0,87) = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення натягу в гілках 1-2 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на вантаж 1 реакцією  $\overline{T_{1-2}}$  (рисунок 2.13).



Показавши силу інерції  $\overline{\Phi}_1$  вантажу та надавши вантажу 1 можливе переміщення, складемо загальне рівняння динаміки:

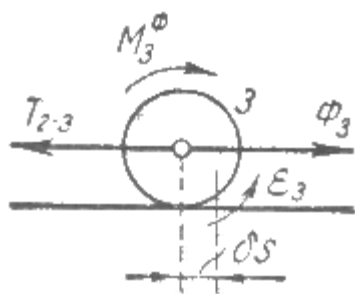
$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + \Phi_1 \cdot \delta s + F \delta s + T_{1-2} \delta s = 0,$$

звідки потрібне зусилля

Рисунок 24.

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \cdot \sin 30^\circ - \Phi_1 - F = \\ &= mg \sin 30^\circ - ma - fmg \cos 30^\circ = \\ &= mg(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) - \frac{1}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = \\ &= G \frac{2}{3}(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,22G. \end{aligned}$$

Для визначення натягу в гілках 2-3 нитки уявно розріжемо цю нитку та замінимо її дію на коток 3 реакцією  $\overline{T_{2-3}}$  (рисунок 2.20).



Показавши  $\overline{\Phi}_3$  та  $M_3^\phi$  і надавши котка 3 можливе переміщення, отримаємо:

$$\Phi_3 \cdot \delta s + M_3^\phi \delta \varphi - T_{2-3} \delta s = 0,$$

$$\text{де } \Phi_3 = ma, \quad M_3^\phi = \frac{mra}{2}, \quad \delta \varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

Рисунок 2.20

Таким чином,

$$m \cdot a + \frac{m \cdot a}{2} - T_{2-3} = 0,$$

тобто

$$T_{2-3} = \frac{3}{2}m \cdot a = \frac{3}{2} \frac{m \cdot g}{3} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 0,17 \cdot G.$$

### 3 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ І ПІДГОТОВКИ

## ДО ЗАЛКІВ ТА ІСПИТІВ

- 1 Який зміст двох задач динаміки?
- 2 У яких випадках зручно користатись натуральними рівняннями руху матеріальної точки?
- 3 Які коливання матеріальної точки називають гармонійними?
- 4 Чому дорівнюють головний вектор і головний момент внутрішніх сил?
- 5 За якими формулами визначають радіус-вектор та координати центра мас системи?
- 6 Як сформулювати теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі; у кінцевій формі? Як виразити теорему у векторній формі та в проєкціях на осі координат?
- 7 Що називається кількістю руху механічної системи? Як виразити кількість руху системи через її масу та швидкість центра мас?
- 8 У якому випадку проєкція кількості руху системи на задану вісь залишається незмінною?
- 9 Надати диференціальні рівняння руху центра мас системи у векторній та координатній формах?
- 10 Чи залежать зміна кількості руху та рух центра мас від внутрішніх сил?
- 11 При яких умовах одна з координат центра мас системи буде постійною?
- 12 Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра?
- 13 Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно осі?
- 14 Як сформулювати теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?
- 15 Що називається кінетичним моментом механічної системи відносно центра, відносно осі?
- 16 Як сформулювати теорему про зміну кінетичного моменту системи?
- 17 Що називається моментом інерції твердого тіла



відносно осі; радіусом інерції?

18 Що називається елементарною роботою сили?

19 Як визначити елементарну роботу сили через проекцію цієї сили на осі координат і диференціали координат точки її прикладання?

20 Як визначити роботу сили при кінцевому переміщенні точки її прикладання?

21 Який зміст теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки (у диференціальній та інтегральній формах)?

22 Що називається кінетичною енергією системи?

23 Як розрахувати кінетичну енергію твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

24 Як розрахувати кінетичну енергію твердого тіла, що рухається плоско паралельно?

25 Який зміст теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи (у диференціальній і кінцевій формах)?

26 Яка величина називається силою інерції матеріальної точки?

27 Чому дорівнює модуль сили інерції матеріальної точки?

28 У чому полягає принцип Даламбера для матеріальної точки?

29 У чому полягає принцип Даламбера для механічної системи?

30 Чому дорівнює головний вектор сил інерції точок твердого тіла в загальному випадку руху?

31 Чому дорівнює головний момент сил інерції точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання?

32 Що називається в механіці зв'язками?

33 Які переміщення механічної системи називаються можливими (віртуальними)?

34 Чому дорівнюють проекції вектора можливого переміщення на осі декартових координат?

35 Що називається числом ступенів вільності механічної системи?

36 Які зв'язки називають ідеальними? Надати приклади.

37 У чому полягає принцип можливих переміщень?

38 Що означає загальне рівняння динаміки системи? Як можна записати це рівняння?

39 Які величини називають узагальненими силами?

40 Які величини називають узагальненими швидкостями?

41 Який вигляд мають рівняння Лагранжа II роду в незалежних узагальнених координатах? Чому дорівнює число рівнянь Лагранжа II роду в незалежних узагальнених координатах та скільки невідомих функцій можна знайти із цих рівнянь?

42 Яке явище називають ударом?

43 Які сили називають ударними? Яке допущення про величину цих сил робиться в теорії удару?

44 Що таке ударний імпульс?

45 У яких випадках удар тіл називається абсолютно пружним; абсолютно не пружним?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [текст]: учебник для ВТУЗов / С.М. Тарг – 19-е изд., М., 2009. - 416 с.

2 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [текст] / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. - М., 1984. - ч. 1-2.

3 Іванова, З.О. Динаміка [текст]: конспект лекцій з теоретичної механіки / З.О. Іванова. - Харків: УкрДАЗТ, 2001. - 54 с.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [текст] / под ред. А.А. Яблонского. М.: «Интеграл-Пресс», 2006, 382 с.

5 Комплексне методичне забезпечення до вивчення дисципліни „Теоретична механіка”: УкрДАЗТ, 2004. – 66 с.

6 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни "Теоретична механіка" [текст] / Н.А. Аксьонова. Харків: УкрДАЗТ, 2005. – 122 с.

**Таблиця 2**

| Варіант | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $R_2$ | $R_3$ | $I_{2x}$ | $i_{3\xi}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f$  | $\delta, \text{ см}$ | $S, \text{ м}$ | Примітки                                   |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|------------|----------|---------|------|----------------------|----------------|--|
|         | кг    |       |       |       | см    |       | см       |            | град     |         |      |                      |                |  |
| 1       | 2     |       |       |       | 3     |       | 4        |            | 5        |         | 6    | 7                    | 8              | 9  |
| 1       | m     | 4m    | 1/5m  | 4/3m  | -     | -     | -        | -          | 60       | -       | 0,10 | -                    | 2              |  |
| 2       | m     | 1/2m  | 1/3m  | -     | -     | 30    | -        | 20         | 30       | 45      | 0,22 | 0,20                 | 2              |  |
| 3       | m     | m     | 1/10m | m     | -     | -     | -        | -          | 45       | -       | 0,10 | -                    | 2              |  |
| 4       | m     | 2m    | 40m   | m     | 20    | 40    | 18       | -          | -        | -       | -    | 0,30                 | 0,1π           | Масами ланок АВ, ВС і повзуна В знехтувати |
| 5       | m     | 2m    | m     | -     | 20    | 15    | 18       | -          | 60       | -       | 0,12 | -                    | 0,28π          | Масою водила знехтувати                    |
| 6       | m     | 3m    | m     | -     | -     | 28    | -        | -          | 30       | 45      | 0,10 | 0,28                 | 1,5            |  |
| 7       | m     | 2m    | 2m    | -     | 16    | 25    | 14       | -          | 30       | -       | -    | 0,20                 | 2              |  |
| 8       | m     | 1/2m  | 1/3m  | -     | -     | 30    | -        | -          | 30       | 45      | 0,15 | 0,20                 | 1,75           |  |
| 9       | m     | 2m    | 9m    | -     | -     | 30    | -        | 20         | 30       | -       | 0,12 | 0,25                 | 1,5            |  |
| 10      | m     | 1/4m  | 1/4m  | 1/5m  | -     | -     | -        | -          | 60       | -       | 0,10 | -                    | 3              |  |
| 11      | m     | 1/2m  | 1/4m  | -     | -     | 30    | -        | 25         | 30       | 45      | 0,17 | 0,20                 | 2,5            |  |
| 12      | m     | 1/2m  | 1/5m  | m     | 30    | -     | 20       | -          | 30       | -       | 0,20 | -                    | 2,5            |  |
| 13      | m     | 2m    | 5m    | 2m    | 30    | 20    | 26       | -          | 30       | -       | -    | 0,24                 | 2              |  |
| 14      | m     | 1/2m  | 5m    | 4m    | -     | 25    | -        | -          | -        | -       | -    | 0,20                 | 2              | Маси кожного з чотирьох коліс однакові     |
| 15      | m     | 1/2m  | 4m    | 1/2m  | 20    | 15    | 18       | -          | 60       | -       | -    | 0,25                 | 1,5            |  |
| 16      | m     | 1/10m | 1/20m | 1/10m | 10    | 12    | -        | -          | -        | -       | -    | -                    | 0,05π          | Масою водила знехтувати                    |
| 17      | m     | 1/4m  | 1/5m  | 1/10m | 20    | -     | 15       | -          | 60       | -       | 0,10 | -                    | 0,16π          | Шатун 3 розглядати                         |

|                       |   |      |       |      |    |    |    |   |    |    |      |      |       | як тонкий<br>однорідний<br>стержень   |
|-----------------------|---|------|-------|------|----|----|----|---|----|----|------|------|-------|---|
| Продовження таблиці 2 |   |      |       |      |    |    |    |   |    |    |      |      |       |   |
| 1                     | 2 |      |       |      | 3  |    | 4  |   | 5  |    | 6    | 7    | 8     | 9   |
| 18                    | m | 3m   | m     | -    | 35 | 15 | 32 | - | 60 | -  | 0,15 | -    | 0,2π  | Масою водила<br>знехтувати  |
| 19                    | m | 1/3m | 1/10m | m    | 24 | -  | 20 | - | 60 | -  | 0,15 | -    | 1,5   |   |
| 20                    | m | 2m   | 20m   | -    | 20 | 15 | 16 | - | 30 | -  | 0,10 | 0,20 | 0,2π  | Масами ланок АВ,<br>ВС та повзуна В<br>знехтувати   |
| 21                    | m | m    | 2m    | -    | 20 | 20 | 16 | - | 30 | 45 | 0,20 | 0,32 | 1,2   |   |
| 22                    | m | 1/2m | 1/4m  | -    | 20 | 10 | -  | - | 60 | -  | 0,17 | -    | 0,1π  | Масою водила<br>знехтувати  |
| 23                    | m | m    | 1/10m | 4/5m | 20 | -  | 18 | - | 30 | -  | 0,10 | -    | 1     |   |
| 24                    | m | 3m   | 20m   | -    | 20 | 30 | 18 | - | -  | -  | -    | 0,60 | 0,08π | Масами ланок АВ,<br>ВС та повзуна В<br>знехтувати   |
| 25                    | m | 1/3m | 1/4m  | -    | 16 | 20 | -  | - | -  | -  | -    | -    | 0,04π | Масою водила<br>знехтувати  |
| 26                    | m | 1/2m | m     | 1/3m | 30 | -  | 20 | - | -  | -  | -    | -    | 0,6π  | Маси та моменти<br>інерції блоків 2 та 3<br>однакові. Шатун 3<br>розглядати як<br>тонкий однорідний<br>стержень |
| 27                    | m | m    | 6m    | 1/2m | 20 | 20 | 16 | - | 30 | -  | -    | 0,20 | 2     |   |
| 28                    | m | 2m   | 3m    | -    | 20 | -  | 14 | - | 60 | -  | 0,10 | -    | 0,1π  | Шатун 3 розглядати<br>як тонкий<br>однорідний<br>стержень   |
| 29                    | m | 1/4m | 1/8m  | -    | -  | 35 | -  | - | 15 | 30 | 0,20 | 0,20 | 2,4   |   |

|           |   |      |       |      |    |    |    |    |    |   |      |   |   |  |
|-----------|---|------|-------|------|----|----|----|----|----|---|------|---|---|--|
| <b>30</b> | m | 1/2m | 3/10m | 3/2m | 26 | 20 | 20 | 18 | 30 | - | 0,12 | - | 2 |  |
|-----------|---|------|-------|------|----|----|----|----|----|---|------|---|---|--|

