



**УКРАИНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ  
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

**Э.Д. ЧИХЛАДЗЕ, Ю.П. КИТОВ**

**ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ  
МАТЕРИАЛОВ С РЕШЕНИЯМИ**

*Учебное пособие*

**Харьков 2011**

**УДК 620.17**  
**ББК 30.121**  
**Ч 713**

**Рецензенты:**

профессор А.Ф. Яременко (ОГАСА),  
профессор В.А. Гришин (ОНМУ)

Издание второе, переработанное и дополненное

**Чихладзе Э.Д., Китов Ю.П.**

Ч 713 Избранные задачи по сопротивлению материалов с решениями:  
Учеб. пособие. – Харьков: УкрГАЖТ, 2011. – 231 с., рис. 210.  
ISBN 978-966-2033-63-2

Данное пособие содержит задачи повышенной трудности и разнообразные подходы к их решению, что способствует более углубленному изучению курса сопротивления материалов.

Во втором издании исправлены погрешности первого издания и введен ряд новых интересных задач.

Предназначено для студентов строительных и механических специальностей.

УДК 620.17  
ББК 30.121

**ISBN 978-966-2033-63-2**

©Украинская государственная академия  
железнодорожного транспорта, 2011

## Учебное пособие

**Чихладзе** Элгуджа Давидович,  
**Китов** Юрий Петрович

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ С РЕШЕНИЯМИ

Ответственный за выпуск Ватуля Г.Л.

Редактор Ибрагимова Н.В.

---

Підписано до друку 10.01.11 р.

Формат паперу 60x84 1/8 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,25. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту

61050, Харків - 50, майдан Фейербаха, 7

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию. . . . .	3
Введение. . . . .	4
Задачи . . . . .	5
Раздел 1. <b>Растяжение и сжатие.</b> . . . . .	5
1.1. Основные понятия и формулы. . . . .	5
1.2. Задачи . . . . .	6
Раздел 2. <b>Геометрические характеристики сечений</b> . . . . .	9
2.1. Основные понятия и формулы. . . . .	9
2.2. Задачи . . . . .	11
Раздел 3. <b>Сложное напряженное состояние.</b> . . . . .	15
3.1. Основные понятия и формулы. . . . .	15
3.2. Задачи . . . . .	17
Раздел 4. <b>Сдвиг и кручение</b> . . . . .	19
4.1. Основные понятия и формулы. . . . .	19
4.2. Задачи . . . . .	21
Раздел 5. <b>Изгиб.</b> . . . . .	23
5.1. Основные понятия и формулы. . . . .	23
5.2. Задачи . . . . .	26
Раздел 6. <b>Статически неопределимые балки. Неразрезные балки.</b> . . . . .	30
6.1. Основные понятия и формулы. . . . .	30
6.2. Задачи . . . . .	31
Раздел 7. <b>Балка на упругом основании.</b> . . . . .	33
7.1. Основные понятия и формулы. . . . .	33
7.2. Задачи . . . . .	35
Раздел 8. <b>Косой изгиб.</b> . . . . .	36
8.1. Основные понятия и формулы. . . . .	36
8.2. Задачи . . . . .	37
Раздел 9. <b>Изгиб с кручением.</b> . . . . .	39
9.1. Основные понятия и формулы. . . . .	39
9.2. Задачи . . . . .	41
Раздел 10. <b>Внецентренное сжатие</b> . . . . .	42
10.1. Основные понятия и формулы. . . . .	42
10.2. Задачи . . . . .	44
Раздел 11. <b>Устойчивость</b> . . . . .	45
11.1. Основные понятия и формулы. . . . .	45
11.2. Задачи . . . . .	46
Раздел 12. <b>Динамическое действие нагрузок.</b> . . . . .	48
12.1. Основные понятия и формулы. . . . .	48
12.2. Задачи . . . . .	50
Ответы . . . . .	52
Решения . . . . .	59

Раздел 1	59
Раздел 2	73
Раздел 3	86
Раздел 4	95
Раздел 5	103
Раздел 6	136
Раздел 7	147
Раздел 8	155
Раздел 9	165
Раздел 10	170
Раздел 11	179
Раздел 12	185
Библиографический список	193
Приложение 1. Стратегия и тактика решения задач	194
Приложение 2. Сортамент прокатной стали	205
Приложение 3. Значения коэффициентов $\eta$ , $\eta_1$ , $\eta_2$ , $\eta_3$	219
Приложение 4. Таблица функций А.М. Крылова	222
Приложение 5. Значения начальных параметров для статически определимых балок	225
Приложение 6. Значения коэффициента $\varphi$	229

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени первого издания пособия прошло около 6 лет. Назрел ряд необходимых переработок и дополнений. Во втором издании исправлены некоторые погрешности первого издания, включено определенное количество новых интересных задач, увеличено число вариантов решения задач с анализом и выявлением наилучшего, введены задачи из опыта прошлых студенческих олимпиад.

В разделе, посвященном изгибу, для определения прогибов, кроме методов непосредственного интегрирования, начальных параметров и фиктивной нагрузки, дополнительно введен метод Мора с вычислением интегралов способами Верещагина и Симпсона-Корноухова, и в решениях задач дается сравнение эффективности их применения.

На основе многолетнего опыта педагогической деятельности кружковой работы и подготовки студентов к олимпиадам в приложении приводятся некоторые соображения по стратегии и тактике решения задач, в которых анализируются разнообразные особенности, например, симметрии, получение неожиданных решений и др., которые могут быть полезными при усовершенствовании умения более просто решать задачи разной сложности.

Пособие содержит 12 разделов, которые охватывают соответствующие разделы курса «Сопротивление материалов». Каждый раздел состоит из четырех частей: основные понятия и формулы, условия задач, ответы к задачам и решение задач. Наличие приложений с необходимыми таблицами для решений специфических задач обеспечивает в некоторой мере автономность издания.

Это пособие предназначено для студентов строительных, машиностроительных и транспортных специальностей. Оно может служить пособием для самостоятельных студенческих научных разработок.

Авторы высказывают признательность проф. А.Ф. Яременко и коллективу кафедры строительной механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры, которую он возглавляет, а также проф. В.А. Гришину и коллективу кафедры теоретической и прикладной механики Одесского национального морского университета, которую он возглавляет, за ценные замечания, сделанные при рецензировании рукописи. Авторы выражают искреннюю благодарность инженеру кафедры Р.Г. Павленко за подготовку электронной версии пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Каждый, кто хочет стать инженером, должен обладать следующими качествами: знаниями, мастерством, наличием собственной точки зрения и постоянным стремлением к повышению квалификации. Все эти качества взаимосвязаны – без одного нет других. Это следует из представления о работе инженера как едином процессе творчества, анализа и принятия решений. Поэтому для качественной подготовки инженера в пределах каждой дисциплины должны даваться не только фактические знания, но и вырабатываться умение решения задач, являющихся прототипами инженерных. От обычных задачник по сопротивлению материалов данный отличается, во-первых, наличием неординарных задач; во-вторых, показом нескольких решений задач, основанных на различных подходах, и в-третьих, небольшим количеством задач и поэтому возможностью их решения за обозримый период времени, отведенный для изучения соответствующих разделов сопротивления материалов. Естественно, этот задачник служит для более углубленного изучения курса сопротивления материалов, в том числе и проведения кружковой работы, а также подготовке к олимпиаде по сопротивлению материалов. Ко всем задачам даны ответы и приведены решения.

Конечно, проще всего, прочитав условие задачи, сразу же просмотреть ее решение, но толку от этого будет мало. Чтобы научиться думать, как думают инженеры, необходимо “поломать” голову. Как это ни удивительно, многие студенты не понимают, что цель обучения – не в том, чтобы узнать некий набор фактов и положений, а именно в том, чтобы выработать самостоятельный подход к решению любой инженерной проблемы, научиться глубоко понимать, думать и размышлять, развивать мастерство.

Этот задачник прежде всего рассчитан на студента, который получает удовольствие от самого процесса обдумывания и решения задачи. В идеальном случае он смотрит в решение, приведенное здесь, только после того, как закончит свое собственное. Особенно ценно, если собственное решение правильно, но отличается подходом. Тогда проанализировав различные подходы, можно выбрать наилучший. Это будет уже высшей ценностью процесса обучения. Задачи, приведенные здесь, составлены как преподавателями кафедры, а также заимствованы из различных источников, которые по мере возможности указаны в приведенной литературе.

Пособие отличается автономностью использования, так как к каждому его разделу приведены основные формулы и данные.

# ЗАДАЧИ

## Раздел 1

### РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

#### 1.1. Основные понятия и формулы

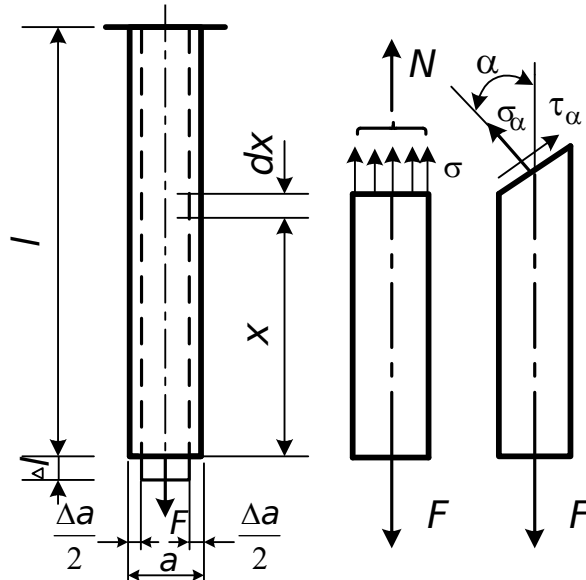


Рис. 1.1. К основным формулам при растяжении и сжатии

Нормальные напряжения  $\sigma = \frac{N}{A}$ .

Условие прочности  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$ ;  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R\gamma$ .

Допускаемые напряжения  $[\sigma] = \frac{\sigma_o}{k}$ . Расчетные сопротивления  $R = \frac{R_M}{\gamma_M}$ ,

$\gamma_M$  – коэффициент надежности по материалу;

$\gamma$  – коэффициент условий работы.

Абсолютное удлинение  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ .

Относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

Закон Гука  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ .

Относительная поперечная деформация стержня  $\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}$ .

Коэффициент Пуассона  $\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ .

Напряжения по наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha.$$



$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

## 1.2. Задачи

**1.2.1.** Опора в виде усеченного конуса высотой  $h$  и с площадями оснований  $A_0$  и  $A_1$  нагружена силой  $F$  (рис. 1.2). Насколько укоротится высота  $h$ , если действием собственного веса опоры пренебречь?

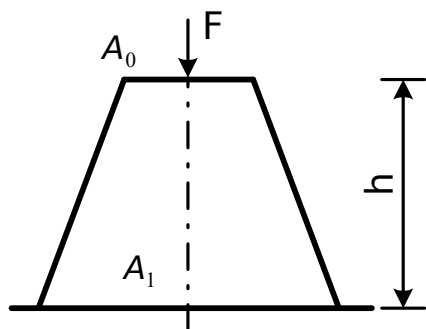


Рис. 1.2. К задаче 1.2.1

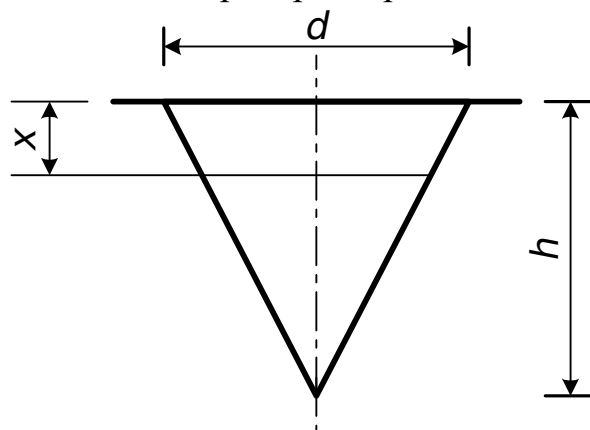


Рис. 1.3. К задаче 1.2.2

**1.2.2.** Конический стержень растягивается собственным весом (рис. 1.3). Найти зависимость между перемещением произвольного поперечного сечения и расстоянием от закрепленного основания. Дано:  $h$ ,  $d$  и  $\gamma$  – удельный вес материала конуса.

**1.2.3.** Опора в виде усеченного конуса нагружена силой  $F$ . Вес единицы объема материала опоры  $\gamma$  (рис. 1.4). Найти радиус  $r_x$  сечения с наименьшими напряжениями.

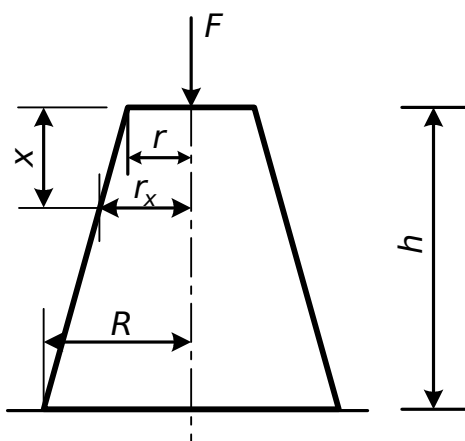


Рис. 1.4. К задаче 1.2.3

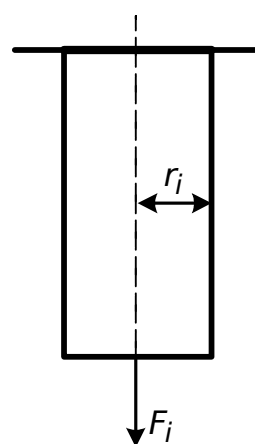


Рис. 1.5. К задаче 1.2.4

**1.2.4.** Цилиндрический образец растягивался сначала силой  $F_1$ , а потом силой  $F_2$ . В первом случае радиус поперечного сечения образца был  $r_1$ , а во втором  $r_2$ . Полагая модуль упругости  $E$  известным, найти коэффициент Пуассона  $\nu$  (рис. 1.5).

1.2.5. Прямолинейный брус постоянного поперечного сечения размещен между абсолютно жесткими опорами и предварительно сжат усилием  $F$  (рис. 1.6). Какую силу  $F_1$  необходимо приложить в сечении  $C - C$ , чтобы напряжения в сечениях I-го и II-го участков бруса имели бы одинаковые абсолютные значения?

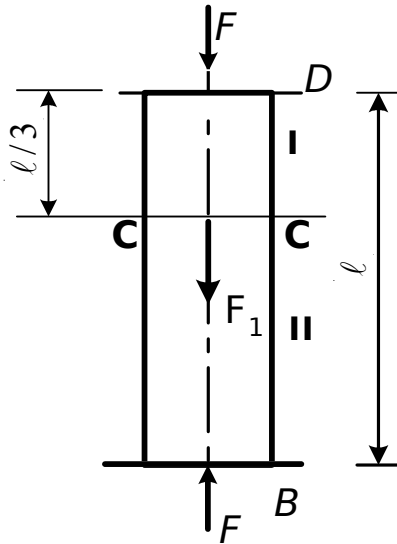


Рис. 1.6. К задаче 1.2.5

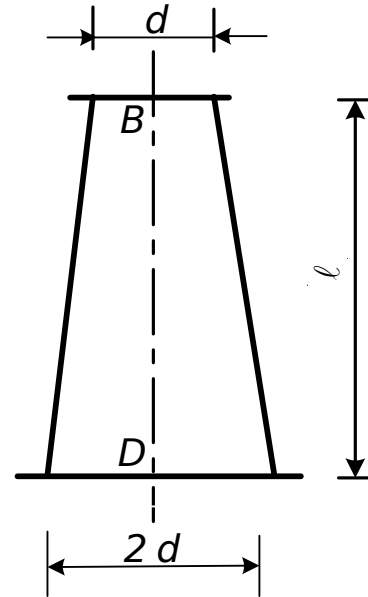


Рис. 1.7. К задаче 1.2.6

1.2.6. Стальной брус переменного сечения (прямой круговой усеченный конус) закреплен без зазора или натяга в двух абсолютно жестких опорах В и D и затем охлажден на  $50^\circ\text{C}$  (рис. 1.7).

Необходимо: 1) определить продольную силу, действующую в поперечных сечениях бруса; 2) расстояние от опоры В до сечения, перемещение которого будет максимальным. Массой стержня пренебречь.

Дано:  $d = 8 \cdot 10^{-2}$  м,  $l = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{гр}}$ .

1.2.7. Прямолинейный брус переменного сечения закреплен в абсолютно жестких опорах С и В. Построить эпюры  $N_x$ ,  $\sigma_x$  и  $\delta_x$ , учитывая только собственный вес бруса (рис. 1.8).

Дано:

$l = 1$  м,  $d = 10 \cdot 10^{-2}$  м,  $D = 20 \cdot 10^{-2}$  м,  $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  
 $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

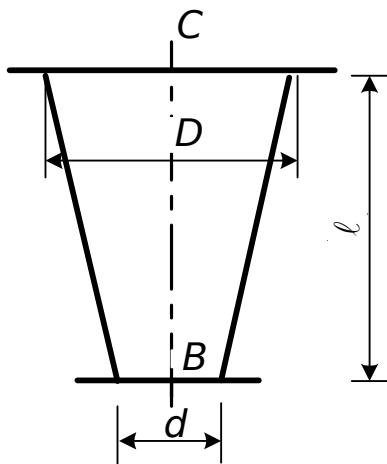


Рис. 1.8. К задаче 1.2.7

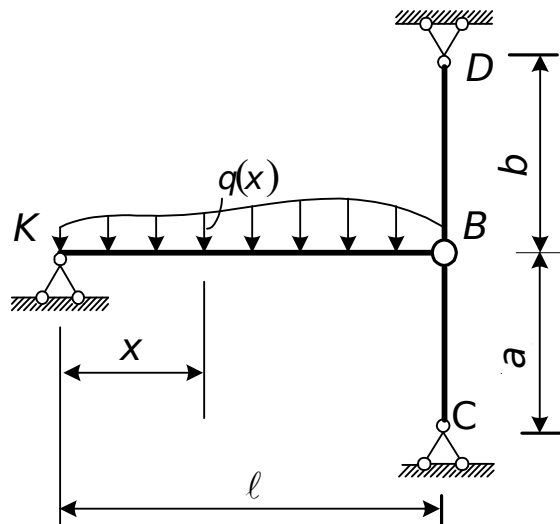


Рис. 1.9. К задаче 1.2.8

**1.2.8.** Абсолютно жесткая и невесомая балка KB находится под действием распределенной нагрузки

$$q(x) = q_0 \left( \frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right), \quad \text{где } q_0 = 100 \text{ кН/м}, \ell = 4 \text{ м.}$$

Стальной стержень VD площадью  $A$ ,  $E_c = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma]_c = 200$  МПа,  $b = 0,6$  м. Стержень BC из алюминиевого сплава площадью  $2A$ :  $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma]_{ал} = 80$  МПа,  $a = 0,4$  м. Определить  $A$  (рис. 1.9).

**1.2.9.** Перемещение узла K в направлении силы F составило 0,5 мм. Принимая  $\ell = 1$  м,  $A = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и считая брус МК недеформируемым, найти величину силы F (рис. 1.10).

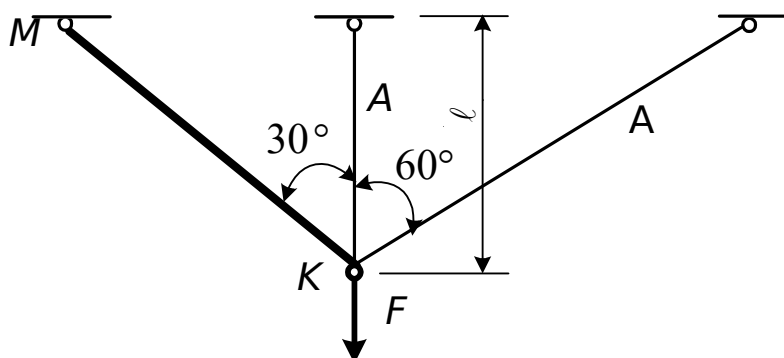


Рис. 1.10. К задаче 1.2.9

## Раздел 2

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

### 2.1. Основные понятия и формулы

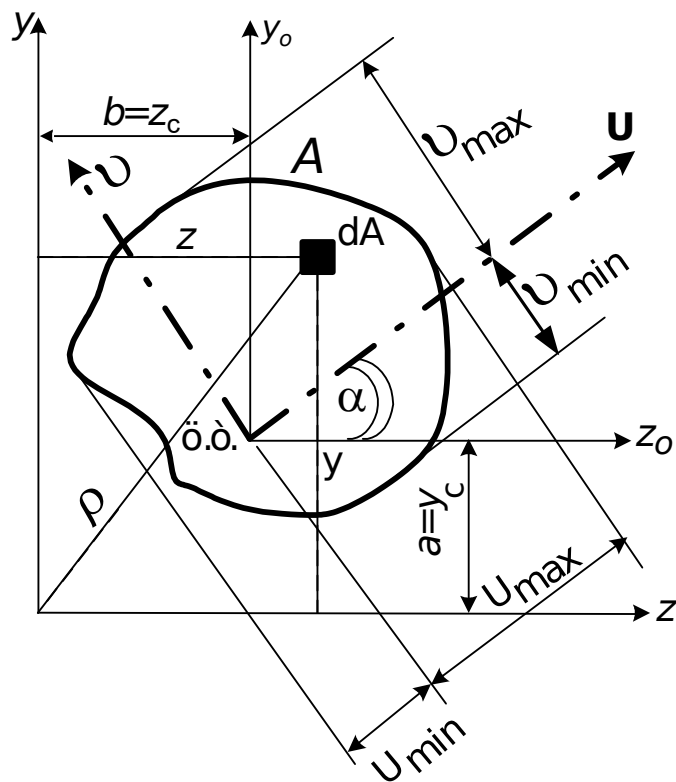


Рис. 2.1. К геометрическим характеристикам

Статические моменты площади

$$S_z = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_c, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = A \cdot z_c.$$

Осевые моменты инерции

$$J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A z^2 dA.$$

Центробежный момент инерции  $J_{zy} = \int_A zy dA.$

Полярный момент инерции  $J_\rho = \int_A \rho^2 dA = J_z + J_y.$

Формулы перехода к осям, параллельным центральным,

$$J_z = J_{z_0} + a^2 A, \quad J_y = J_{y_0} + b^2 A,$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + a b A$$

$$J_{zy} = J_{z_0 y_0} + a b A.$$

Формулы для моментов инерции при повороте координатных осей

$$J_u = J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{z_0 y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_v = J_{z_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0 y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_{uv} = \frac{J_{z_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_0 y_0} \cos 2\alpha.$$

При повороте осей сумма осевых моментов инерции остается постоянной

$$J_u + J_v = J_{z_0} + J_{y_0}.$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равняется нулю, а осевые принимают экстремальные значения, называются главными осями. Если осевые моменты инерции относительно двух главных центральных осей сечения равны между собой, то для таких сечений все оси являются главными.

Угол наклона главных осей  $\tan 2\alpha = -\frac{2J_{z_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}}.$

Главные моменты инерции

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_{z_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{z_0 y_0}^2}.$$

Моменты инерции и моменты сопротивления для часто встречающихся сечений:

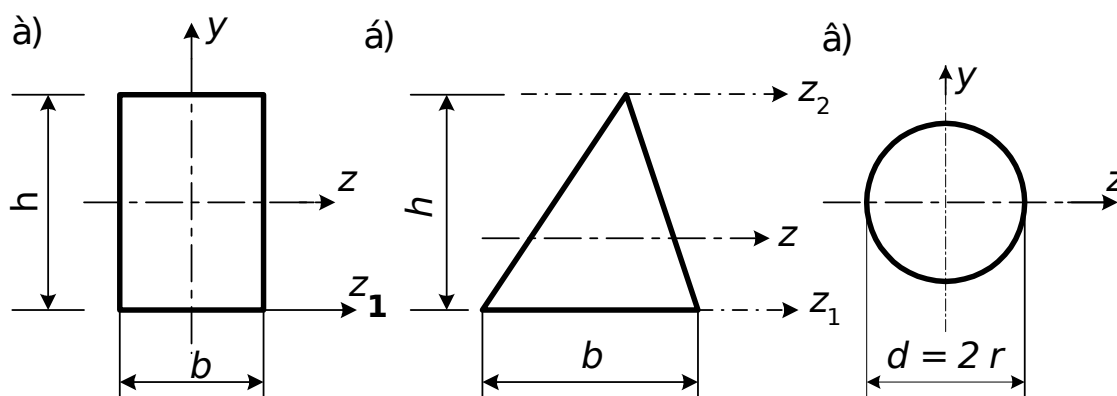


Рис. 2.2. Схемы сечений

прямоугольник (рис. 2.2, а)  $J_z = \frac{bh^3}{12}; J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; W_z = \frac{bh^2}{6};$

треугольник (рис. 2.2, б)  $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; J_{z_2} = \frac{bh^3}{4};$   
 $J_z = \frac{bh^3}{36};$

круг (рис. 2.2, в)  $J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}; J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2};$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Прямоугольное сечение при кручении

$$J_{кр} = \alpha h b^3; \quad W_{кр} = \beta h b^2.$$

Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  берутся из табл. 2.1.

Таблица 2.1

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	10	$\infty$
$\beta$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
$\alpha$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333
$\gamma_k$	1,00	0,573	0,469	0,398	0,307	0,251	0,186	0,074	0

## 2.2. Задачи

**2.2.1.** Найти площадь четверти синусоиды и положение ее центра тяжести ( $z_c$ ) (рис. 2.3).

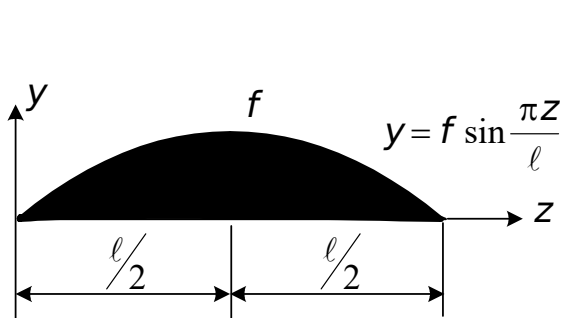


Рис. 2.3. К задаче 2.2.1

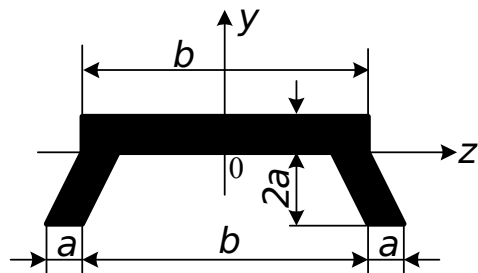


Рис. 2.4. К задаче 2.2.2

**2.2.2.** Найти размер “b” поперечного сечения балки, изображенного на чертеже, при условии, чтобы нейтральная ось совпала с осью  $Z$ , и вычислить  $J_y$  и  $J_z$  (рис. 2.4).

**2.2.3.** При каком соотношении размеров сечения  $\frac{h}{b}$  осевые моменты инерции относительно произвольных осей  $Y_i$  и  $Z_i$  будут равными (рис. 2.5)?

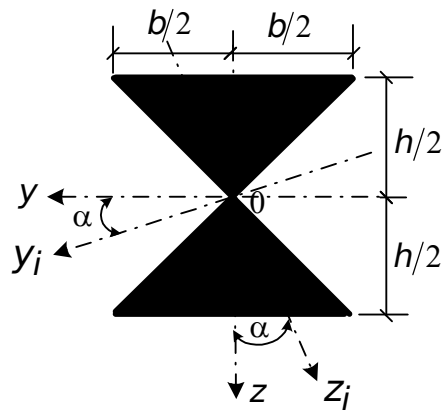


Рис. 2.5. К задаче 2.2.3

**2.2.4.** В круг радиуса  $R$  вписан равнобедренный треугольник. Какой должна быть высота этого треугольника  $h$ , чтобы момент инерции его относительно оси  $Z$  был бы наибольшим (рис. 2.6)?

**2.2.5.** Дано треугольное сечение  $ABC$ , для которого  $J_z = 54 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$  (рис. 2.7). Необходимо определить  $h$  и  $J_{yz}$ .

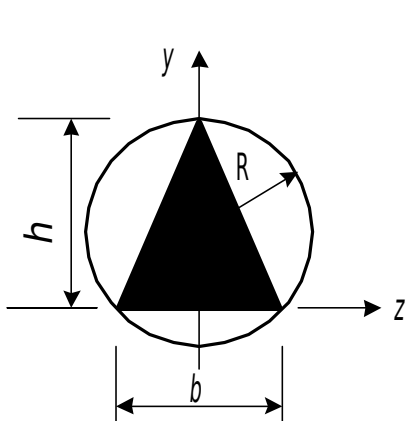


Рис. 2.6. К задаче 2.2.4

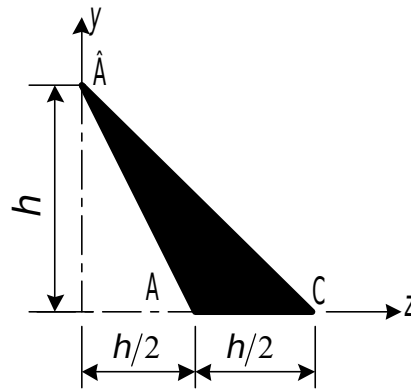


Рис. 2.7. К задаче 2.2.5

**2.2.6.** Определить, при каком значении отношения  $h/b$  ( $h \cdot b = \text{const}$ ), осевой момент инерции относительно оси  $Z$  будет (рис. 2.8):

- а) минимальным;
- б) максимальным.

**2.2.7.** На какую величину необходимо срезать углы квадратного сечения, чтобы получить сечение с наибольшим моментом сопротивления  $W_z$  (рис. 2.9).

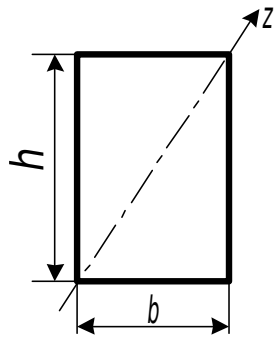


Рис. 2.8. К задаче 2.2.6

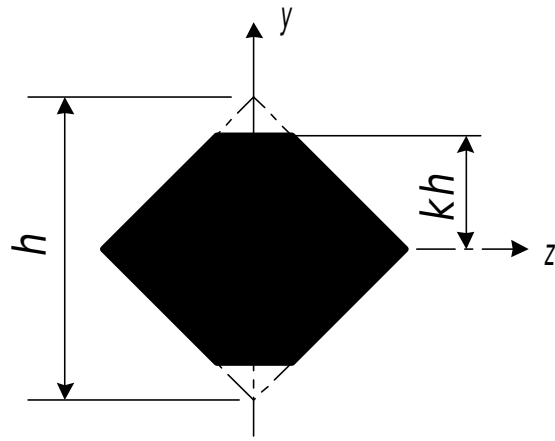


Рис. 2.9. К задаче 2.2.7

**2.2.8.** Из сплошного круглого сечения получены кольцевое (рис. 2.10, а) и прямоугольное (рис. 2.10, б) сечения одинаковой площади. Как соотносятся величины  $W_z$  этих сечений при  $b=R$ ?

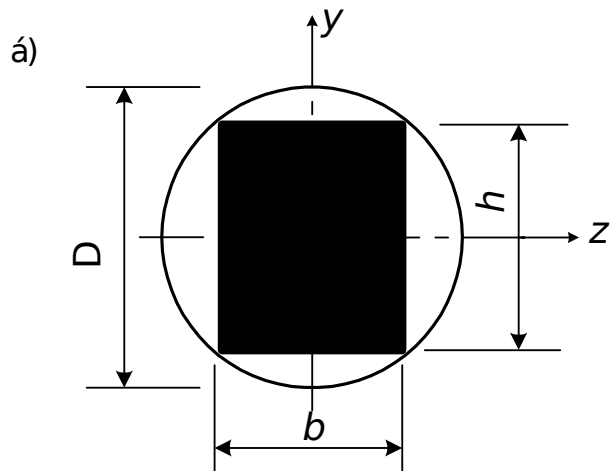
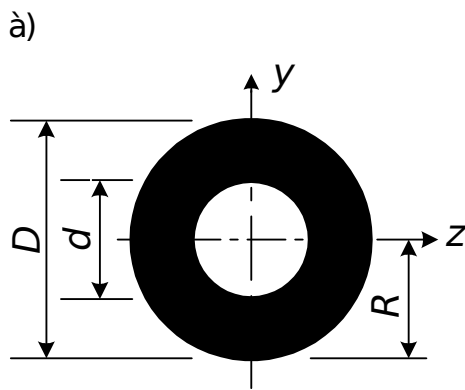


Рис. 2.10. К задаче 2.2.8

**2.2.9.** Является ли для показанных на рисунке сечений любая пара взаимно перпендикулярных центральных осей главной? Если балка имеет поперечное сечение в виде представленных на рисунке фигур, то как следует расположить нейтральную ось в каждом из них, чтобы максимальные нормальные напряжения были бы наименьшими (рис. 2.11)?



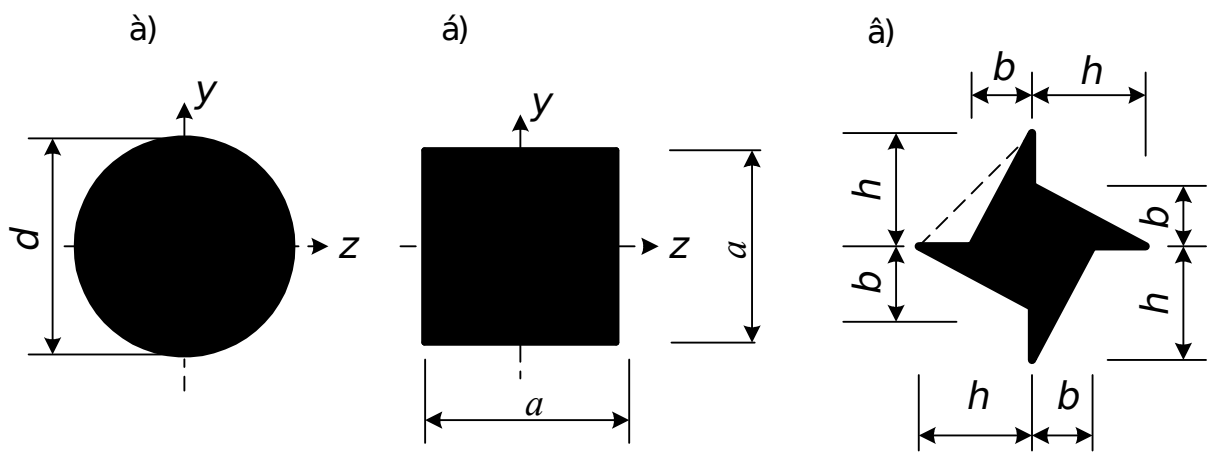


Рис. 2.11. К задаче 2.2.9

**2.2.10.** Балка прямоугольного поперечного сечения получена из заготовки круглого сечения (рис. 2.12). Какими должны быть соотношения сторон прямоугольного сечения для получения:

- балки наибольшей прочности;
- балки наибольшей жесткости?

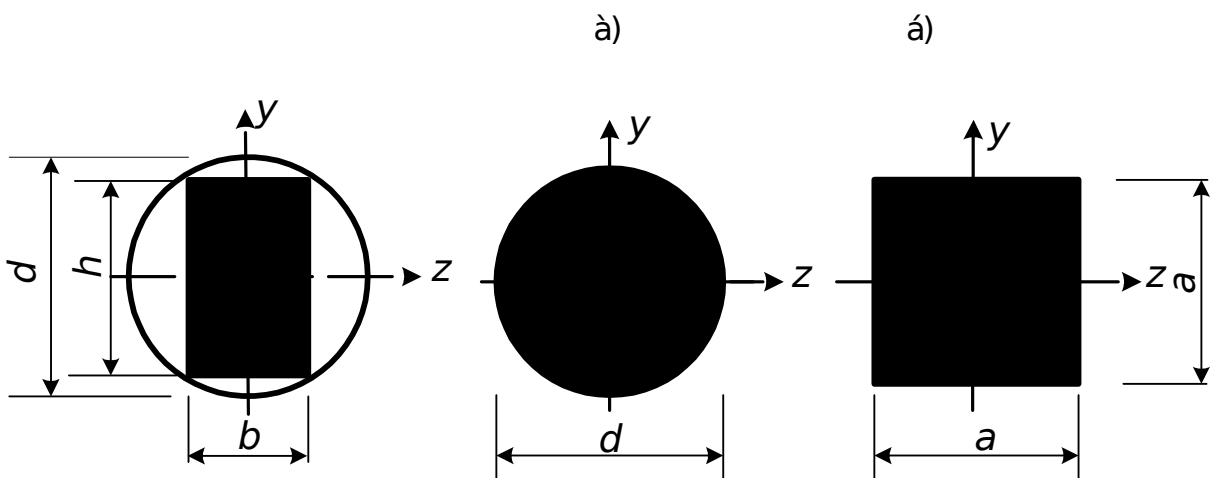


Рис. 2.12. К задаче 2.2.10

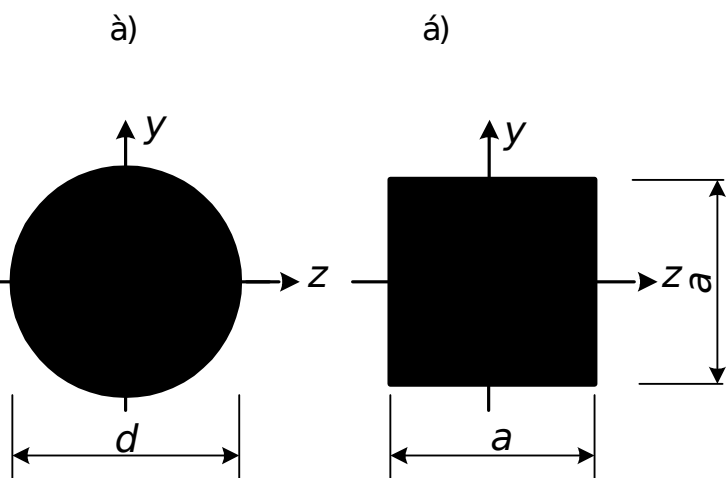


Рис. 2.13. К задаче 2.2.11

**2.2.11.** На рисунках 2.13, а, б показаны два равновеликих сечения. Какое из сечений рационально использовать:

- при работе вала такого сечения на кручение;
- при работе балки такого сечения на изгиб?

## СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

### 3.1. Основные понятия и формулы

#### Плоское напряженное состояние

Напряжения по наклонным площадкам

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha ; \\ \sigma_{\alpha+90} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha .\end{aligned}$$

Наклон главных площадок

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} .$$

Главные напряжения

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} .$$

Экстремальные касательные напряжения

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

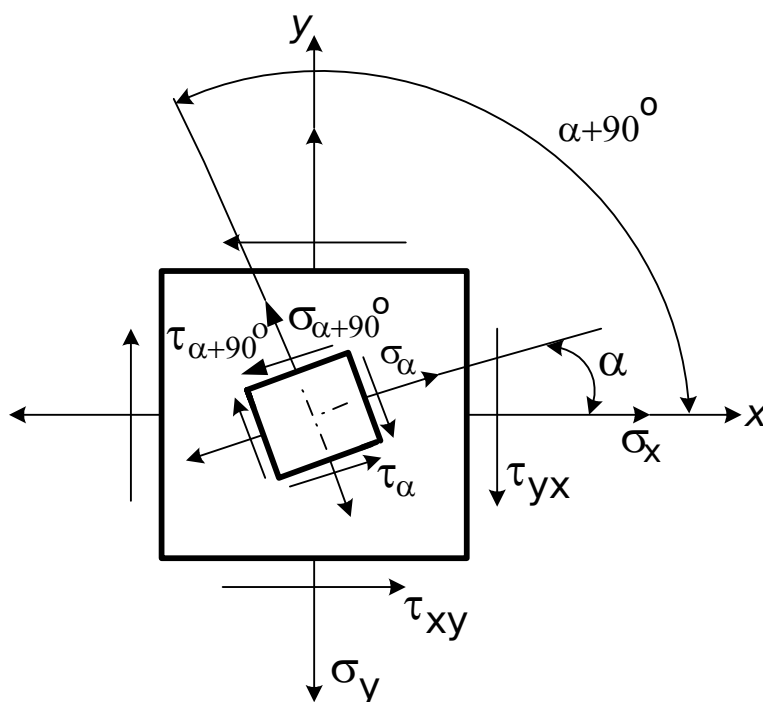


Рис. 3.1. Иллюстрации к плоскому напряженному состоянию

Формула для определения линейной деформации относительно произвольной оси, повернутой от оси  $X$  на угол  $\alpha$ ,

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m ,$$

где  $\ell = \cos \alpha$ ;  $m = \cos(\alpha + 90^\circ)$ .

Главные деформации

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

Направление главных осей деформаций

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

Закон Гука при плоском напряженном состоянии

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Закон Гука при плоской деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x].$$

### Объемное напряженное состояние

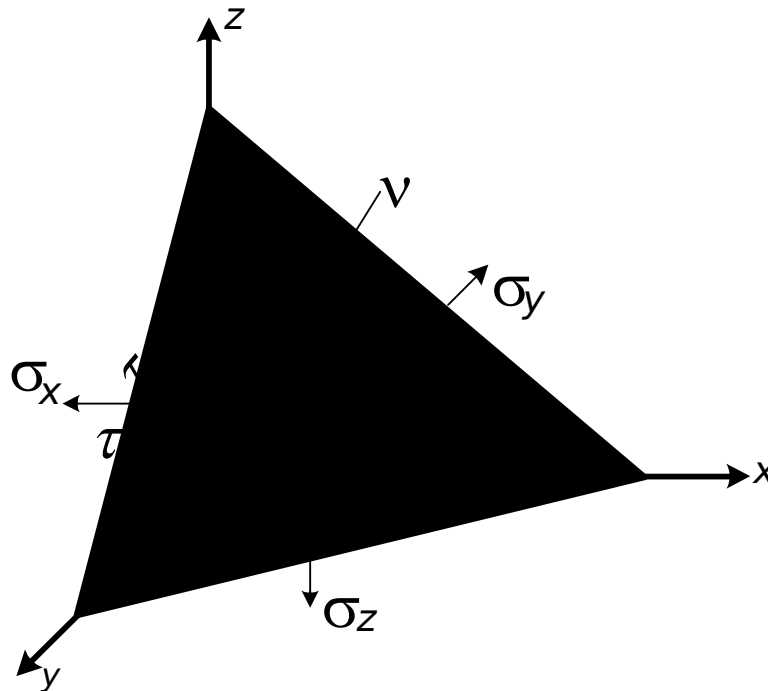


Рис. 3.2. Иллюстрации к объемному напряженному состоянию

Направляющие косинусы

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = l; \quad \cos(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = m; \quad \cos(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = n.$$

Уравнения равновесия

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0;$$

$$\tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0;$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0.$$

Связь между косинусами

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Определения главных напряжений

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0.$$

Инварианты напряженного состояния

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2;$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.$$

Закон Гука при объемном напряженном состоянии

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{G}.$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

### 3.2. Задачи

**3.2.1.** Прямолинейный брус постоянного сечения  $A$  работает в условиях центрального растяжения силой  $F$ . Необходимо определить величину нормальных напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, у которого удлинение 2-х из 3-х ребер равно нулю, если даны значения  $F$ ,  $A$  и коэффициент Пуассона.

**3.2.2.** Стальной кубик, длина ребра которого  $a = 0,1$  м сжат давлением  $p = 200$  МПа, действующим только на его нижнюю и верхнюю грани. Найти коэффициент Пуассона материала кубика, если площадь каждой из боковых граней его уменьшилась на  $7$  мм<sup>2</sup>.

**3.2.3.** На торцы стальной пластины действует равномерно распределенное давление  $p = 140$  МПа (рис. 3.3). Необходимо определить:

- 1) зависимость угловых деформаций квадрата  $ABCD$  от угла  $\alpha$ ;
- 2) зависимость относительных линейных деформаций диагоналей  $AC$  и  $BD$  от угла  $\alpha$  и значение  $\alpha$ , при котором эти деформации становятся наибольшими.

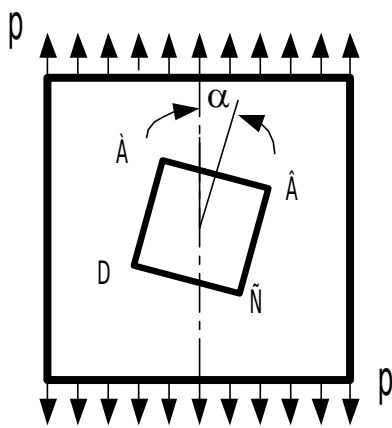


Рис. 3.3. К задаче 3.2.3

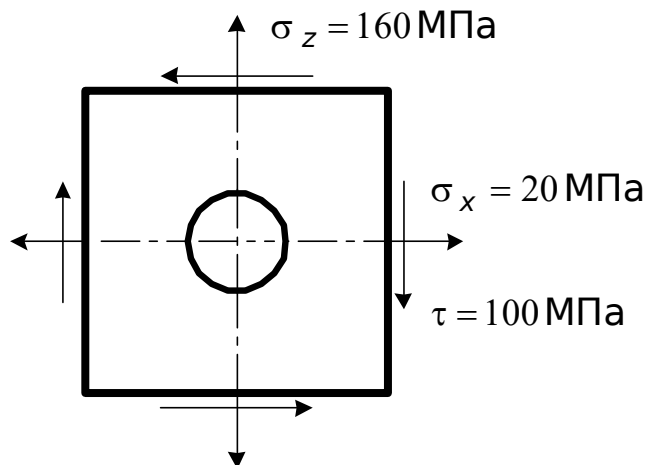


Рис. 3.4. К задаче 3.2.4

**3.2.4.** На грани стального кубика, совпадающей с плоскостью чертежа, нанесена окружность. Определить положение и относительное удлинение большой и малой осей эллипса, в который превратится окружность в процессе нагружения. Конечному значению нагрузки соответствуют указанные на рисунке напряжения. Считать для стали:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$  (рис. 3.4).

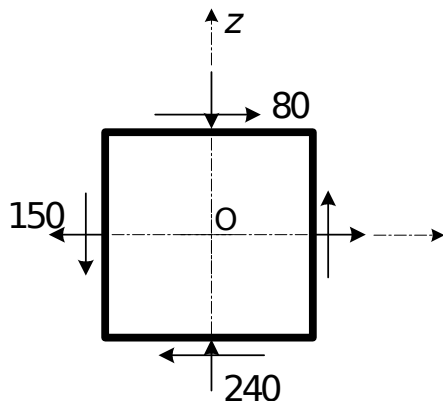


Рис. 3.5. К задаче 3.2.5

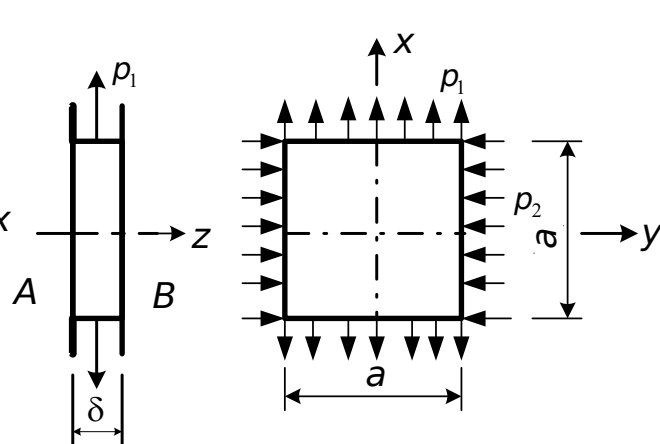


Рис. 3.6. К задаче 3.2.6

**3.2.5.** Напряженное состояние в точке “O” показано на рис. 3.5 (напряжения – МПа). Необходимо определить величины  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$  и положение главных площадок.

**3.2.6.** Дано (рис. 3.6):

$$\delta = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad a = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad p_1 = 80 \text{ МПа}; \quad p_2 = 200 \text{ МПа}; \\ \nu = 0,25; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Плиты А и В – абсолютно жесткие. Необходимо определить главные напряжения, главные деформации и относительное изменение объема.

**3.2.7.** Под действием нагружения в пластине возникает плоское напряженное состояние:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . По направлениям **a**, **b** и **c** розетки из проволочных датчиков омического сопротивления в точке **O** (рис. 3.7) с направляющими косинусами  $l_a = 0,6$ ;  $m_a = 0,8$ ;  $l_b = -0,6$ ;  $m_b = 0,8$ ;

$l_c = -1,0$ ;  $m_c = 0$  получены деформации  $\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_b = -1 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 4 \cdot 10^{-4}$ .  
 Определить главные напряжения и положение главных площадок, если  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ .

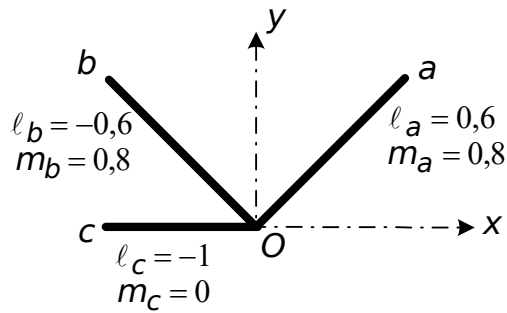


Рис. 3.7. К задаче 3.2.7

## Раздел 4

### СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

#### 4.1. Основные понятия и формулы

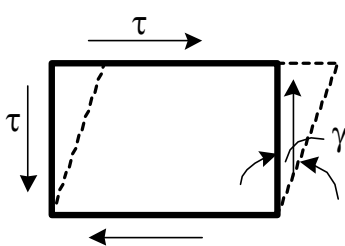


Рис. 4.1. Сдвиг  
 Закон Гука  $\tau = \gamma G$ .

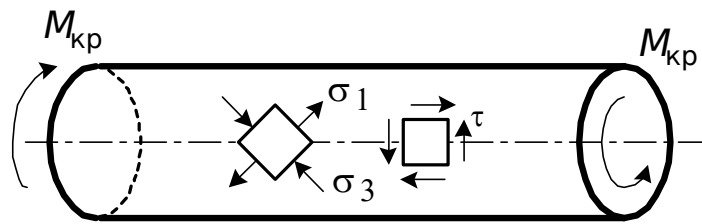


Рис. 4.2. Кручение

Зависимости между модулями упругости  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Условие прочности заклепок на срез

$$\tau = \frac{4Q}{\pi d^2 m n_{ср}} \leq [\tau]; \quad \tau = \frac{4Q}{\pi d^2 m n_{ср}} \leq R_{ср}.$$

Условие прочности сварного шва на срез

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{Q}{0,7 \ell h_{\text{ш}}} \leq [\tau_{\text{ш}}]; \quad \tau = \frac{Q}{0,7 \ell h_{\text{ш}}} \leq R_{ср}.$$

Напряжения при кручении  $\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho$ .

Угол закручивания  $\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GJ_{\rho}}$ .

Условие прочности  $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$ .

Полярный момент инерции  $J_{\rho} = \frac{\pi r^4}{2}$ .

Полярный момент сопротивления  $W_{\rho} = \frac{\pi r^3}{2}$ .

### Кручение стержней с прямоугольным сечением

Напряжения в середине длинной стороны  $\tau_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кр}}}$ .

Напряжения в середине короткой стороны  $\tau_2 = \gamma_k \tau_1$ .

Угол закручивания  $\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \ell}{GJ_{\text{кр}}}$ .

Момент сопротивления  $W_{\text{кр}} = \beta h b^2$ . Момент инерции  $J_{\text{кр}} = \alpha h b^3$ ;  $b$  – размер короткой стороны сечения; коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_k$  (см. в табл. 2.1).

## 4.2. Задачи

**4.2.1.** Невесомый коленчатый стержень ABC (см. рис. 4.3) удерживается в равновесии с помощью болта на опоре A и роликовой опоры B. Записать условие прочности болта при срезе и определить диаметр его поперечного сечения  $d$ , если  $F, \ell$  и  $[\tau]$  известны.

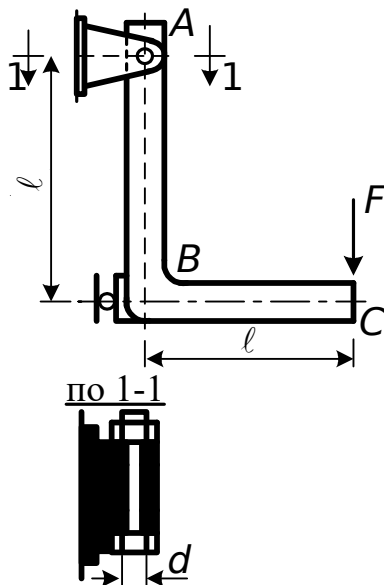


Рис. 4.3. К задаче 4.2.1

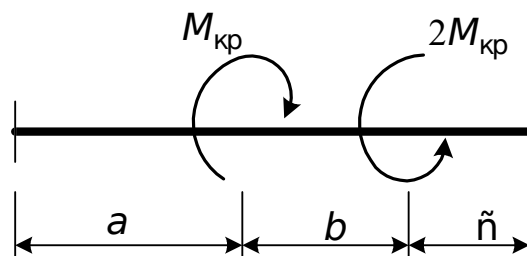


Рис. 4.4. К задаче 4.2.2

4.2.2. При каких соотношениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется условие равнопрочности вала на участках длиной  $b$  и  $c$ ? Материал и поперечное сечение вала одинаковы по всей его длине (рис. 4.4).

4.2.3. Дано:  $d_1 = 0,08$  м;  $d_2 = 0,16$  м;  $d_3 = 0,2$  м;  $M_{кр} = 120$  кНм. Стальная, наружная часть вала, и медная, внутренняя часть, скреплены по поверхности так, что исключается их относительный поворот. Необходимо построить эпюру распределения напряжений по сечению вала.  $G_{ст} = 8 \cdot 10^4$  МПа;  $G_M = 3,5 \cdot 10^4$  МПа (рис. 4.5).

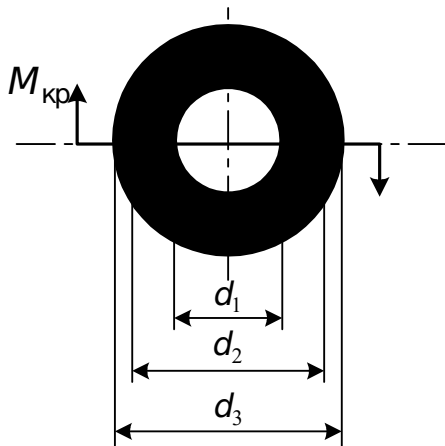


Рис. 4.5. К задаче 4.2.3

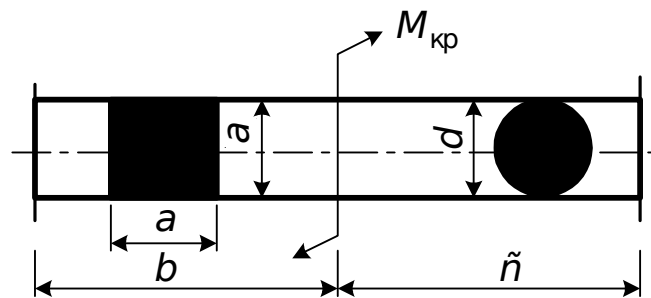


Рис. 4.6. К задаче 4.2.4

4.2.4. При каком соотношении между размерами “ $b$ ” и “ $c$ ” оба участка вала будут равнопрочными (равноопасными) (рис. 4.6)?

4.2.5. Медный стержень круглого поперечного сечения вставлен в стальную трубку так, что исключено их проворачивание друг относительно друга (рис. 4.7). Определить допустимое значение момента  $[M_{кр}]$ , если  $D = 4 \cdot 10^{-2}$  м;  $d = 3,2 \cdot 10^{-2}$  м;  $a = 0,1$  м;  $b = 0,15$  м;  $G_c = 8 \cdot 10^4$  МПа;  $G_M = 3,5 \cdot 10^4$  МПа;  $[\tau]_c = 80$  МПа;  $[\tau]_M = 40$  МПа.

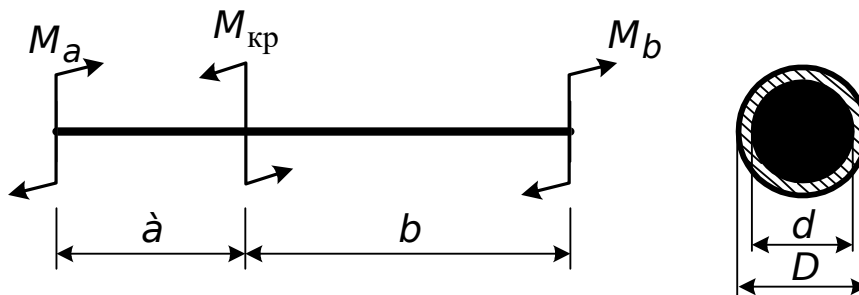


Рис. 4.7. К задаче 4.2.5

4.2.6. Дано:  $a = 40$  мм;  $\ell = 200$  мм;  $G_2 = 8 \cdot 10^4$  МПа;  $A_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>;  $\ell_1 = 400$  мм;  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7}$  1/град;  $b = 100$  мм.

Стержни 1 нагреваются на  $\Delta t = 80$  °С. Траверса ABC – абсолютно жесткая. Определить  $\tau_{max}$  в стержне 2,  $\sigma$  в стержнях 1 и угол поворота



сечения В стержня 2. Моменты инерции и моменты сопротивления при кручении для квадратного сечения равны  $J_{кр} = \alpha a^4$ ;  $W_{кр} = \beta a^3$  (рис. 4.8).

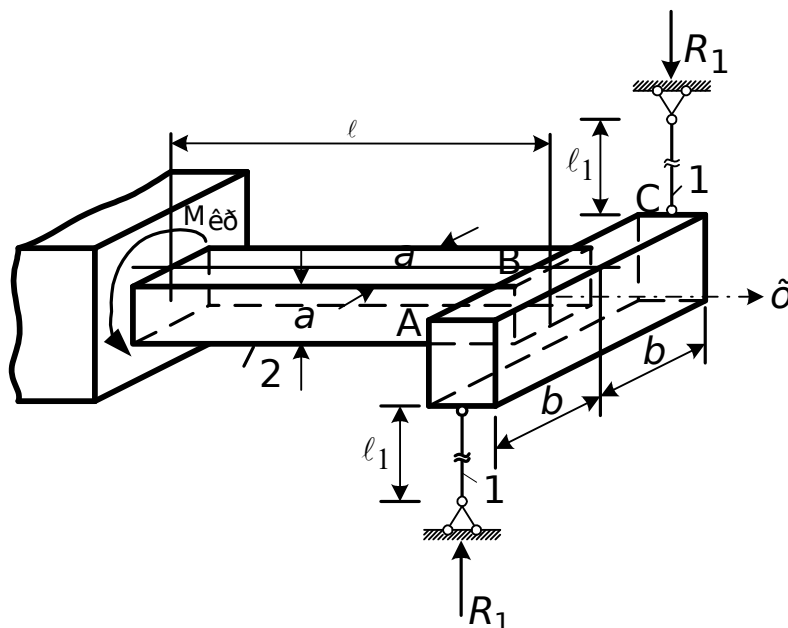


Рис. 4.8. К задаче 4.2.6

## Раздел 5

### ИЗГИБ

#### 5.1. Основные понятия и формулы

Относительное удлинение волокон  $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ .

Нормальные напряжения  $\sigma = E \frac{y}{\rho}$ ;  $\sigma = \frac{M}{J_z} y$ .

Кривизна  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}$ .

Максимальные напряжения  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$ .

Касательные напряжения  $\tau = \frac{QS_z^{отс}}{bj_z}$ .

Дифференциальные зависимости

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -q.$$

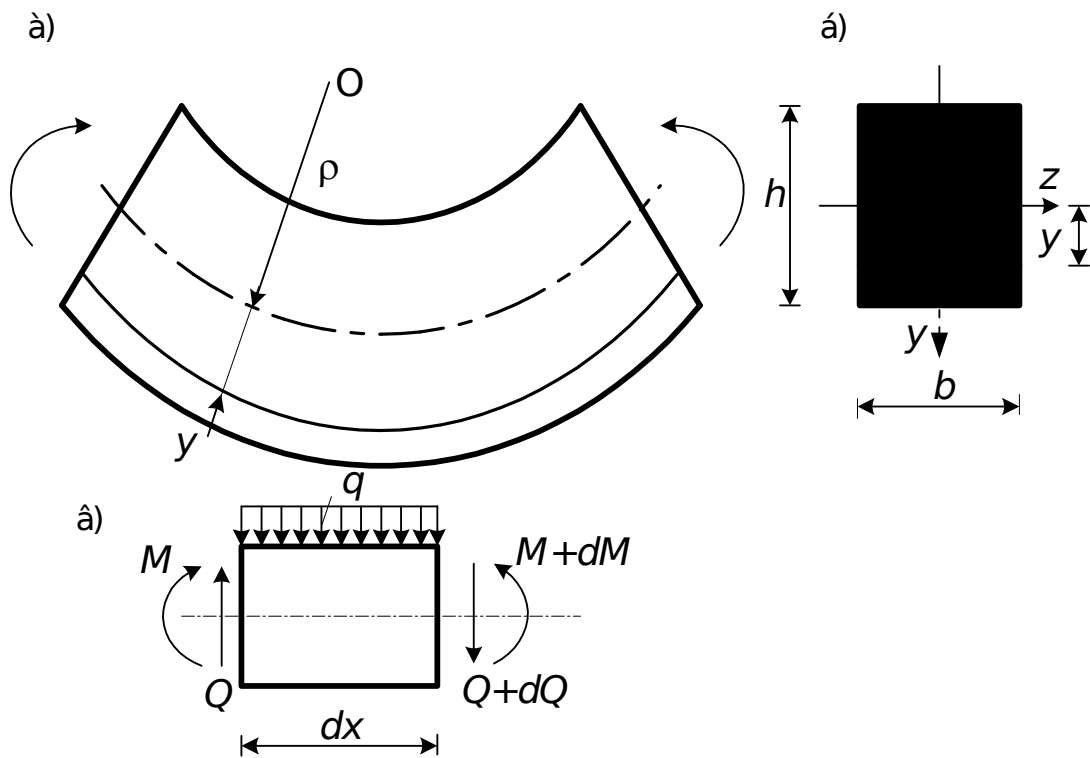


Рис. 5.1. Иллюстрации к изгибу

Главные напряжения

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Условия прочности:

по нормальным напряжениям  $\frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]; \quad \frac{M_{\max}}{W_z} \leq R;$

по касательным напряжениям  $\frac{Q_{\max} S_z^{0,5}}{bJ_z} \leq [\tau]; \quad \frac{Q_{\max} S_z^{0,5}}{bJ_z} \leq R_{\text{ср}};$

по главным напряжениям

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} \leq [\sigma]; \quad \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M.$$

Методы определения перемещений:

а) метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения:

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M;$$

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = \int M dx + C;$$

$$EJ_z y = \int [\int M dx] dx + Cx + D;$$

б) метод начальных параметров (рис. 5.2)

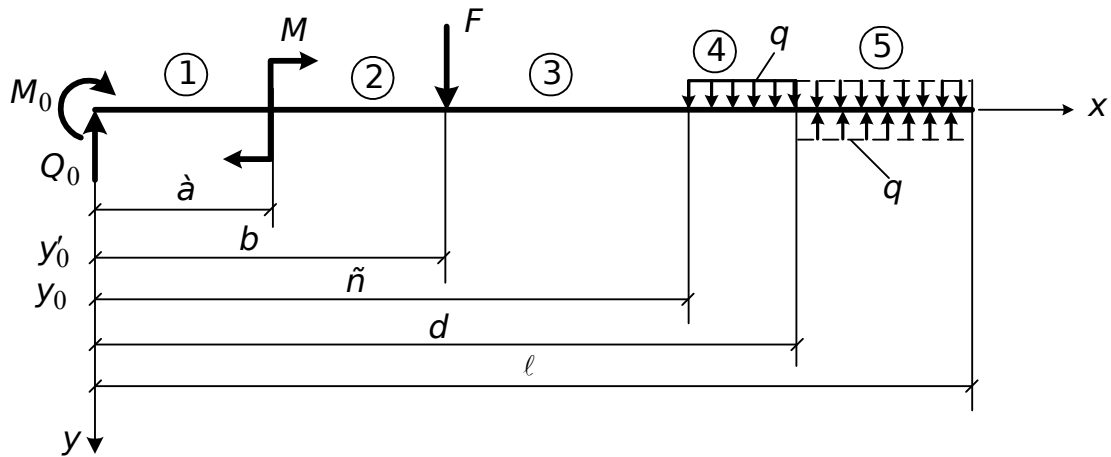


Рис. 5.2. К определению перемещений методом начальных параметров

$$EJ_z y(x) = y_0 + y_0' x - \frac{M_0 x^2}{2} - \frac{Q_0 x^3}{6} \Big|_1 - \frac{M(x-a)^2}{2} \Big|_2 + \frac{F(x-b)^3}{6} \Big|_3 +$$

$$+ \frac{q(x-c)^4}{24} \Big|_4 - \frac{q(x-d)^4}{24} \Big|_5;$$

$$EJ_z y'(x) = y_0' - M_0 x - \frac{Q_0 x^2}{2} \Big|_1 - M(x-a) \Big|_2 + \frac{F(x-b)^3}{6} \Big|_3 +$$

$$+ \frac{q(x-c)^3}{6} \Big|_4 - \frac{q(x-d)^3}{6} \Big|_5;$$

в) графоаналитический метод определения перемещений

$$y = \frac{M \phi}{EJ_z}; \quad y' = \frac{Q \phi}{EJ_z};$$

г) метод Мора (способы Верещагина и Симпсона-Корноухова вычисления интегралов) (рис. 5.3).

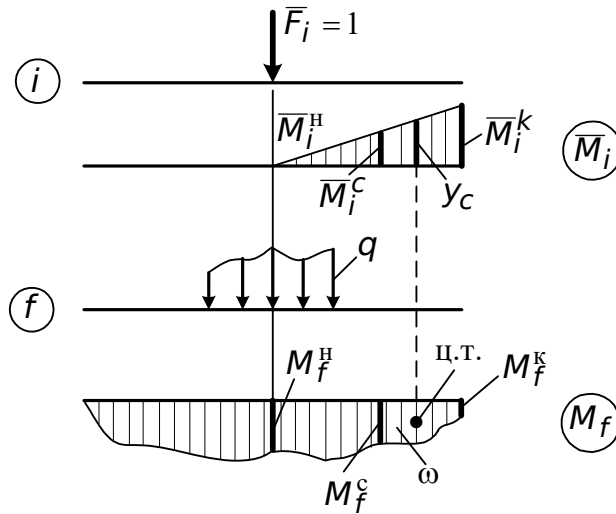


Рис. 5.3. К определению перемещений методом Мора

$$\Delta_{if} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_f dx}{EJ_z};$$

$$\Delta_{if} = \sum \frac{\omega \cdot y_C}{EJ_z};$$

$$\Delta_{if} = \sum \frac{\ell_i}{6EJ_z} \times (\bar{M}_i^H M_f^H + 4\bar{M}_i^C M_f^C + \bar{M}_i^K M_f^K).$$

## 5.2. Задачи

**5.2.1.** Используя принцип суперпозиции и не определяя опорные реакции, для каждой из представленных на рисунке балок построить эпюры изгибающих моментов (рис. 5.4).

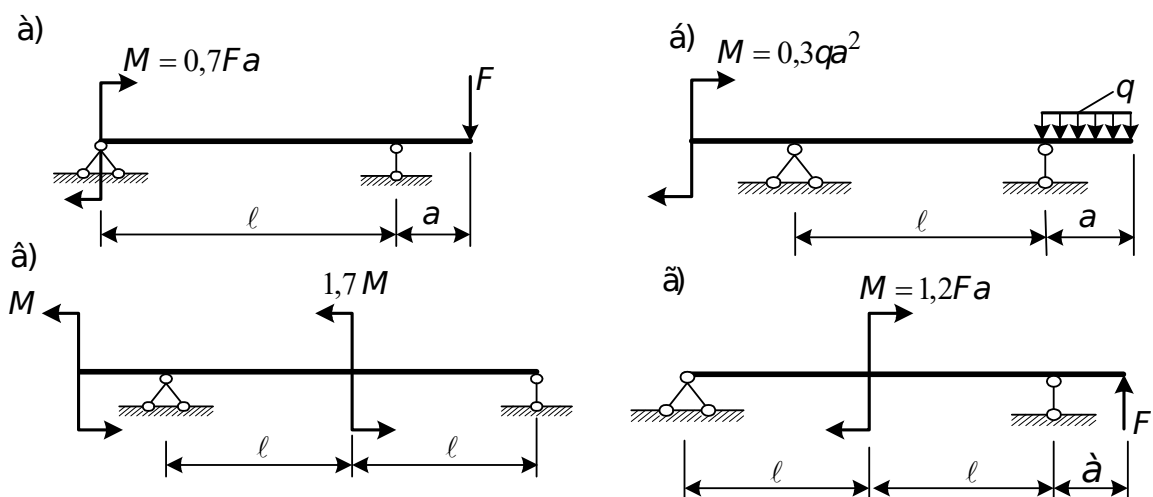


Рис. 5.4. К задаче 5.2.1

**5.2.2.** Каким расчетным схемам балок соответствуют эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, представленных на рис. 5.5?

**5.2.3.** На участке балки AC действует распределенная нагрузка (рис. 5.6), изменяющаяся по закону

$$q(x) = q_0 \left( \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right),$$

где  $q_0 = 20$  кН/м,  $\ell = 2$  м. Определить опорные реакции и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

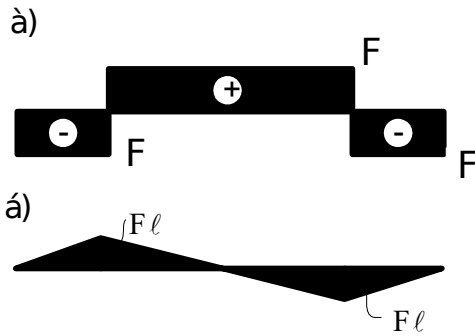


Рис. 5.5. К задаче 5.2.2

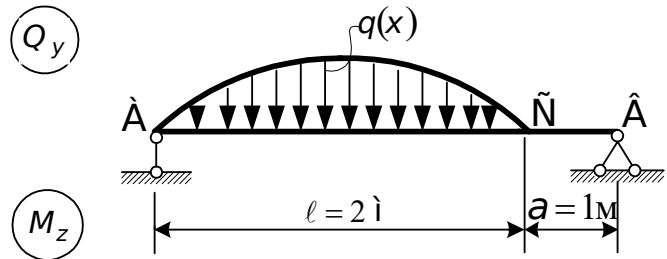


Рис. 5.6. К задаче 5.2.3

**5.2.4.** Найти такое значение “к”, при котором максимальный изгибающий момент имел бы наименьшее значение (рис. 5.7).

**5.2.5.** Дано:  $M, \ell, EJ_z = const$  Необходимо построить эпюры распределения угловых и линейных перемещений сечений бруса по его длине. Определить максимальные значения углового и линейного перемещений (рис. 5.8).

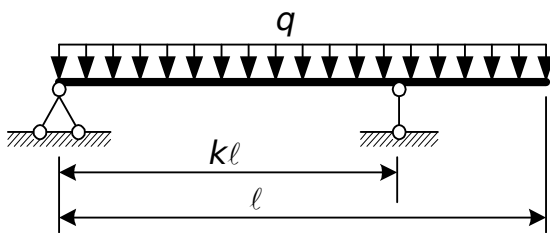


Рис. 5.7. К задаче 5.2.4

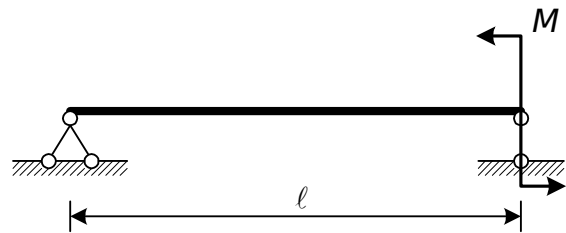


Рис. 5.8. К задаче 5.2.5

**5.2.6.** Балка, пролет которой равен  $\ell$ , с постоянной по длине высотой сечений  $h$  нагружена в концевых сечениях А и В парами сил  $2M$  и  $M$  (рис. 5.9). Допускаемое напряжение для материала балки –  $[\sigma]$ . Определить закон изменения ширины прямоугольного сечения балки при условии обеспечения равнопрочности. Показать на рисунке вид балки сверху.

**5.2.7.** Принимая  $\ell = 400$  мм,  $a = 10$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $J_z = 20 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>, установить, при каком значении  $M$  концы бруса будут касаться опор А и В (рис. 5.10).

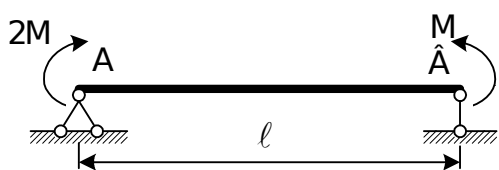


Рис. 5.9. К задаче 5.2.6

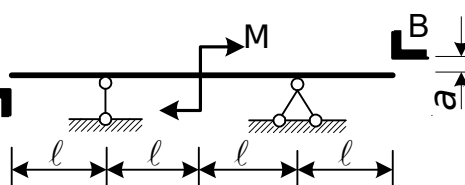


Рис. 5.10. К задаче 5.2.7

**5.2.8.** Консоль, имеющая форму усеченного конуса, нагружена силой  $F$  (рис. 5.11). Определить максимальные нормальные напряжения в балке, если  $D/d = 2$ .

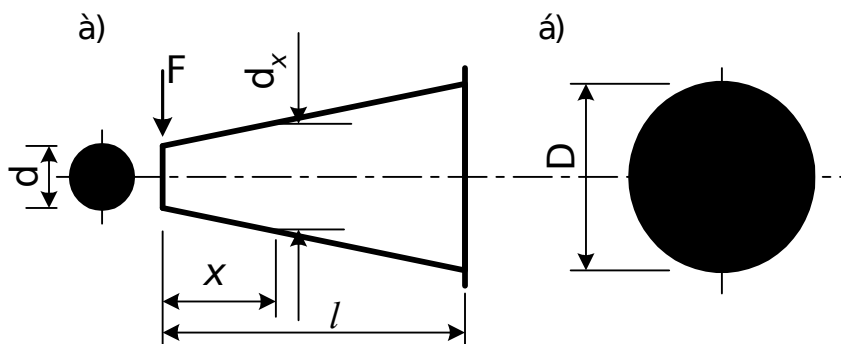


Рис. 5.11. К задаче 5.2.8

**5.2.9.** Определить касательное напряжение в точке  $C$  на площадке нормальной к оси бруса по измеренной деформации в точке  $K$  в заданном направлении. Материал бруса известен (рис. 5.12).

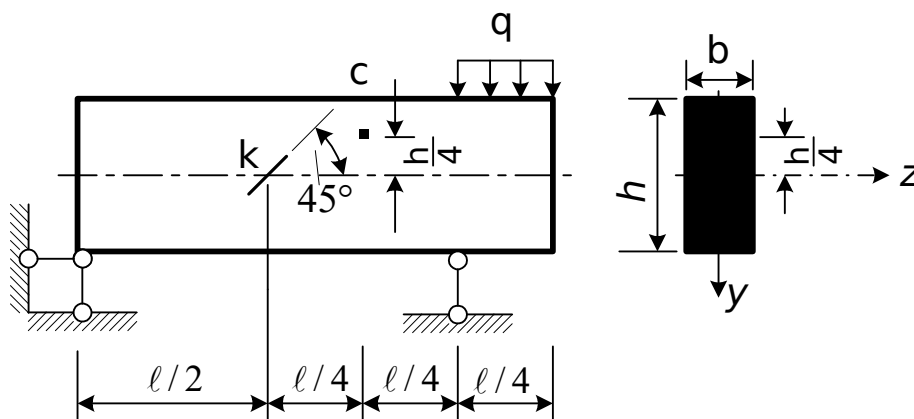


Рис. 5.12. К задаче 5.2.9

**5.2.10.** Дано:  $M_z = 34 \text{ кНм}$ ;  $Q_y = 28 \text{ кН}$ ;  $h = 24 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $b = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $t = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $c = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  (рис. 5.13). Определить напряженное состояние в точке  $B$  сечения.

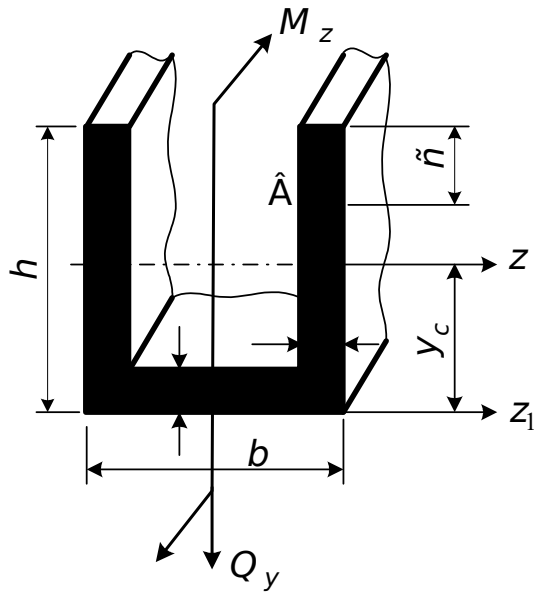


Рис. 5.13. К задаче 5.2.10

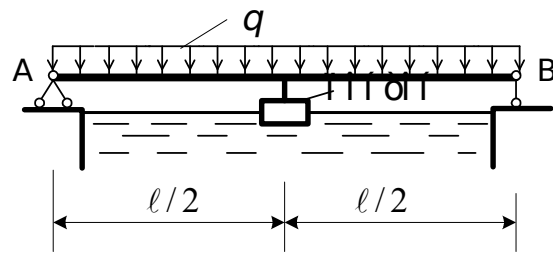


Рис. 5.14. К задаче 5.2.11

**5.2.11.** Мост через реку, несущей конструкцией которого является балка АВ, усилен с помощью понтона. Определить площадь понтона в плане  $S_{\text{п}}$ , при которой воспринимаемая им нагрузка составит 25 % полной нагрузки на мост (рис. 5.14).

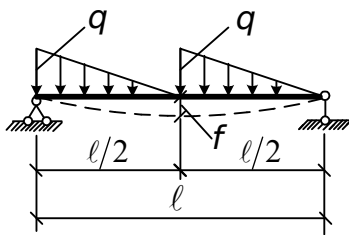


Рис. 5.15. К задаче 5.2.12

**5.2.12.** Дано: балка на двух опорах пролетом  $l$  с жесткостью сечений  $EJ$  загружена нагрузкой  $q$ , которая изменяется по кусочно-линейному закону (рис. 5.15). Определить прогиб балки посередине пролета.

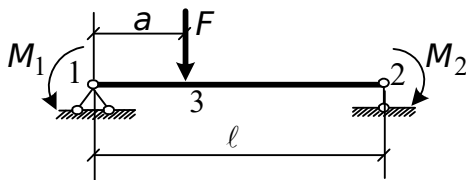


Рис. 5.16. К задаче 5.2.13

**5.2.13.** Для заданной схемы закрепления стержня найти такие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , при которых прогиб и угол поворота поперечного сечения в точке 3 равняется нулю. Жесткость стержня  $EJ = \text{const}$ , сила  $F$  и размеры  $a, l$  известны (рис. 5.16).

**5.2.14.** Определить максимальные напряжения в стальных ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) трубчатой консоли и сплошном круглом стержне, а также максимальный прогиб системы (стержень может свободно, без трения перемещаться внутри отверстия консоли) (рис. 5.17).

**5.2.15.** Упругая балка плотно, но без трения вставлена в отверстие, высверленное в жестком основании. Интуитивно представляется, что при нагружении поперечной силой  $F$  балка выскользнет из заделки. Но непонятно под действием каких сил? Что покажет динамометр, если силы трения отсутствуют (рис. 5.18)?

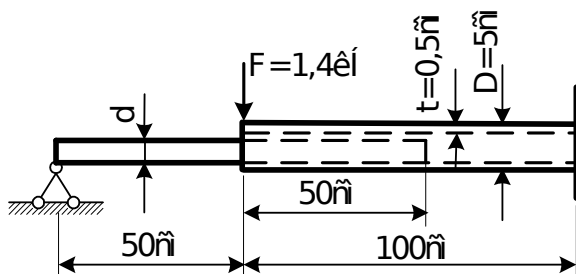


Рис. 5.17. К задаче 5.2.14

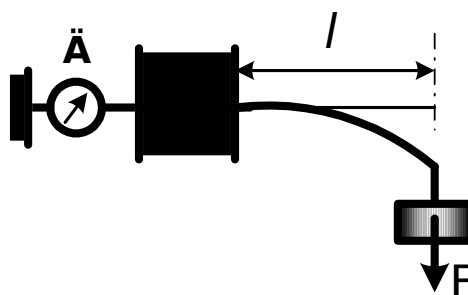


Рис. 5.18. К задаче 5.2.15

**5.2.16.** Двутавр № 20 поднимается за середину длины.

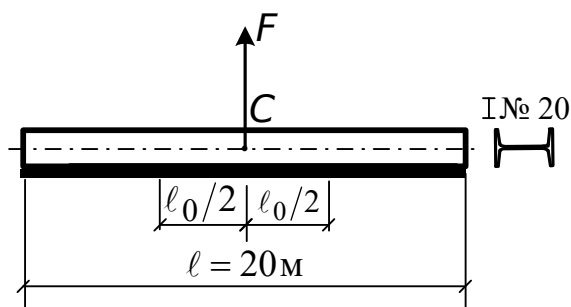


Рис. 5.19. К задаче 5.2.16

Определить перемещение точки  $C$  и длину  $l_0$  части стержня, которая изгибается в то время, когда сила  $F$  достигает четверти веса двутавра (рис. 5.19).

## Раздел 6

### СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ.

#### НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ

##### 6.1. Основные понятия и формулы

Статически неопределимыми балками называются такие балки, в которых не все реакции и усилия можно определить при помощи уравнений статики твердого тела.

Для определения усилий в статически неопределимых балках необходимо составить, помимо уравнений статики, уравнения совместности деформаций (геометрические уравнения) и уравнения связи между усилиями и деформациями (физические уравнения).

Статически неопределимая неразрезная балка показана на рис. 6.1.



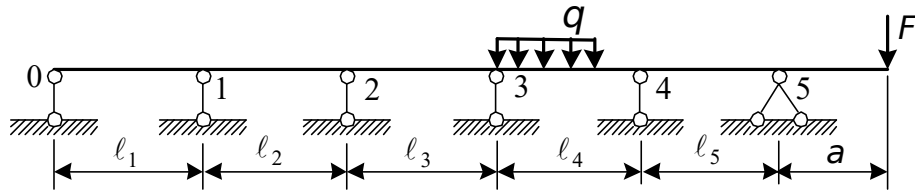


Рис. 6.1 Расчетная схема неразрезной балки

Уравнения трех моментов:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi).$$

Таких уравнений составляется столько, сколько имеется неизвестных опорных моментов. Например, для балки, изображенной на рис. 6.1, имеем

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = 0,$$

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = 0,$$

$$M_2l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4l_4 = -6R_3^\phi$$

$$M_3l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) - M_5l_5 = -6R_4^\phi,$$

где  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  и  $M_5$  – опорные моменты,  $M_0 = 0, M_5 = -Fa$ ,  $R_3^\phi$  и  $R_4^\phi$  – фиктивные опорные реакции. Для определения этих реакций необходимо построить эпюру моментов на загруженном пролете (рис. 6.2), принять ее за фиктивную нагрузку и составить уравнения статики.

## 6.2. Задачи

**6.2.1.** Балка  $AC$  прямоугольного сечения (рис. 6.3) концом  $A$  закреплена в стену и на протяжении  $AB = l_1$  поддерживается подбалкой того же сечения. Как распределится давление между балкой и подбалкой, если балку изгибать силой  $F$  на конце? (Будет ли давление непрерывно распределено по длине подбалки или давление приведет к одной сосредоточенной силе, приложенной к концу ее?)

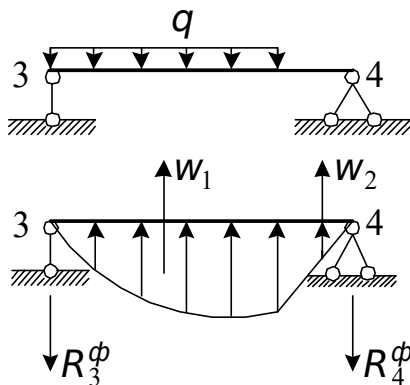


Рис. 6.2. К определению фиктивных опорных реакций

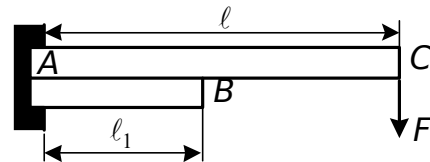


Рис. 6.3. К задаче 6.2.1

**6.2.2.** Две накрест лежащие балки двутаврового сечения перекрывают помещение размерами 8х4 м (рис. 6.4). На верхнюю балку действует равномерно распределенная нагрузка  $q = 8,1$  кН/м. Модуль упругости материала балок  $2 \cdot 10^5$  МПа, допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

1. Подобрать сечения балок, если при изгибе они все время плотно соприкасаются между собой.
2. Какую конструктивную особенность необходимо внести в систему этих балок, чтобы получить наибольшую экономию материала их по сравнению с первым случаем?

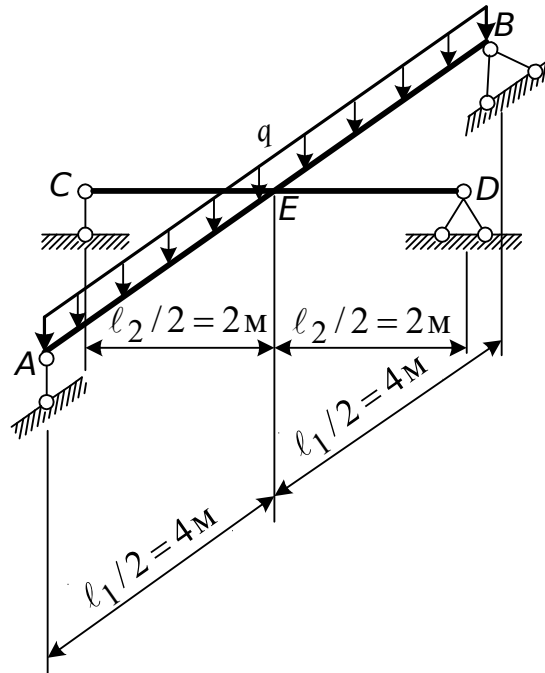


Рис. 6.4. К задаче 6.2.2

**6.2.3.** Балка усилена тремя шарнирно соединенными стержнями (шпренгелем) (рис. 6.5, б). Определить площадь сечения стержней, при которой вертикальное перемещение точки С будет в 2 раза меньше максимального прогиба балки, показанной на рис. 6.5, а. Жесткость балки  $EJ$  и параметры  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\ell$  заданы. Площади всех стержней шпренгеля одинаковы.

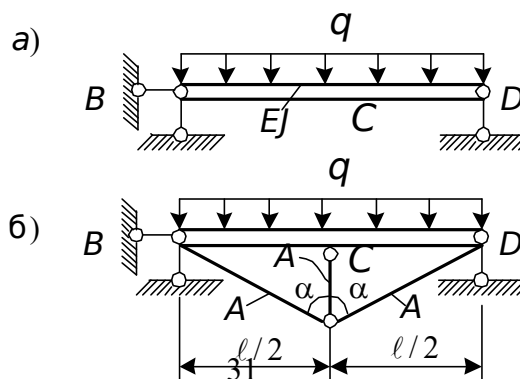


Рис. 6.5. К задаче 6.2.3

**6.2.4.** Трехпролетная неразрезная балка постоянного сечения длиной  $L = 90\text{ м}$  несет равномерно распределенную нагрузку  $q$  (рис. 6.6). Как должны соотноситься между собой ее пролеты, чтобы масса балки была наименьшей?

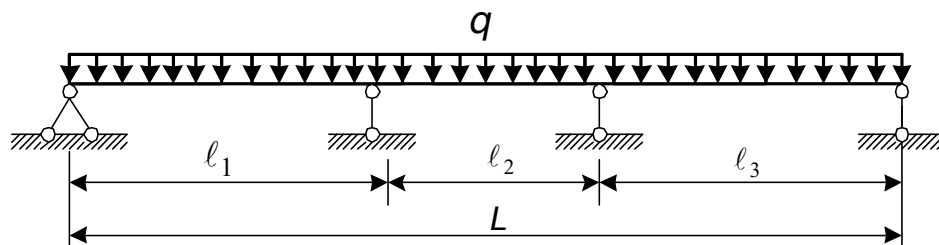


Рис. 6.6. К задаче 6.2.4

## Раздел 7

### БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

#### 7.1. Основные понятия и формулы

Балкой, лежащей на сплошном упругом основании, называется такая балка, которая опирается по всей своей длине на упругую среду, сопротивляющуюся перемещениям, вызванным изгибом балки.

Упругим основанием называется такое основание балки, которое деформируется под действием массы балки и расположенной на ней нагрузки (рис. 7.1) и при этом оказывает упругое противодействие — отпор.

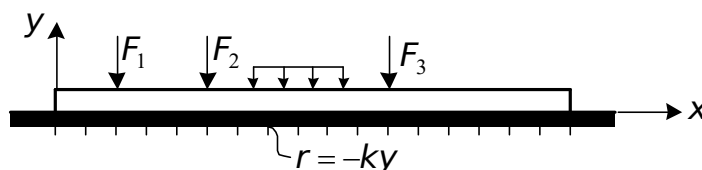


Рис. 7.1. Расчетная схема балки на упругом основании

Дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = \frac{q}{EJ},$$

где  $s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$  — параметр, характеризующий упругие свойства балки и основания.

Бесконечно длинная балка при действии на нее одной сосредоточенной силы  $F$  :

$$\text{прогиб } y = -\frac{F}{8s^3EJ} e^{-sx} (\sin sx + \cos sx) = -\frac{F}{8s^3EJ} \eta_1(sx);$$

$$\text{угол поворота } \frac{dy}{dx} = \varphi = \frac{F}{4s^2EJ} e^{-sx} \sin sx = \frac{F}{4s^2EJ} \eta_3(sx);$$

$$\text{изгибающий момент } M = \frac{F}{4s} e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) = \frac{F}{4s} \eta_1(sx);$$

$$\text{поперечная сила } Q = -\frac{F}{2} e^{-sx} \cos sx = -\frac{F}{2} \eta_2(sx).$$

*Короткая балка (метод начальных параметров):*

$$\begin{aligned} \text{прогиб } y(x) = & y_0 Y_{1sx} + \frac{y'_0}{s} Y_{2sx} - \frac{M_0}{s^2EJ} Y_{3sx} - \frac{Q_0}{s^3EJ} Y_{4sx} - \frac{q}{4s^4EJ} [Y_{1s(x-a)} - 1] + \\ & + \frac{q}{4s^4EJ} [Y_{1s(x-b)} - 1] + \frac{F}{s^3EJ} Y_{4s(x-c)} - \frac{M}{s^2EJ} Y_{3s(x-d)}, \end{aligned}$$

угол поворота

$$\begin{aligned} y'(x) = & -4sy_0 Y_{4sx} + y'_0 Y_{1sx} - \frac{M_0}{sEJ} Y_{2sx} - \frac{Q_0}{s^2EJ} Y_{3sx} + \\ & + \frac{q}{s^3EJ} Y_{4s(x-a)} - \frac{q}{s^3EJ} Y_{4s(x-b)} + \frac{F}{s^2EJ} Y_{3s(x-c)} - \frac{M}{sEJ} Y_{2s(x-d)}, \end{aligned}$$

изгибающий момент

$$\begin{aligned} M(x) = & 4EJs^2 y_0 Y_{3sx} + 4EJs y'_0 Y_{4sx} + M_0 Y_{1sx} + \frac{Q_0}{s} Y_{2sx} - \\ & - \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-a)} + \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-b)} - \frac{F}{s} Y_{2s(x-c)} + M Y_{1s(x-d)}, \end{aligned}$$

поперечная сила

$$\begin{aligned} Q(x) = & 4EJs^3 y_0 Y_{2sx} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3sx} - 4M_0 s Y_{4sx} + Q_0 Y_{1sx} - \\ & - \frac{q}{s} Y_{2s(x-a)} + \frac{q}{s} Y_{2s(x-b)} - F Y_{1s(x-c)} - 4Ms Y_{4s(x-d)}. \end{aligned}$$

А.Фрейд рекомендует следующие критерии для выбора метода расчета.

Если  $l$  – длина балки, то

- 1) при  $l < 0,8sx$  балка рассчитывается как абсолютно жесткая;
- 2) при  $1,2sx < l < 4sx$  – как короткая;
- 3) при  $l > 6sx$  – как бесконечно длинная.

## 7.2. Задачи

**7.2.1.** Балка (рельс,  $J = 1223 \text{ см}^4$ ,  $W = 180 \text{ см}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ) длиной  $\ell = 15 \text{ м}$  лежит на сплошном упругом основании и нагружена сосредоточенной силой  $F = 100 \text{ кН}$  посередине (рис. 7.2). Жесткость основания  $k = 30 \text{ МПа}$ . Построить эпюры прогибов и изгибающих моментов.

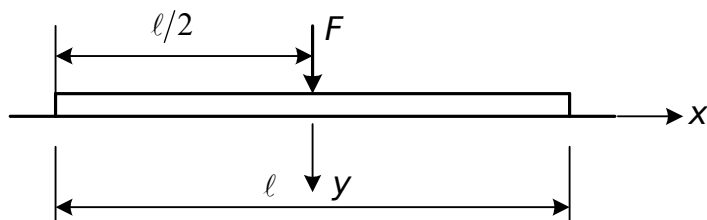


Рис. 7.2. К задаче 7.2.1

**7.2.2.** Решить задачу 7.2.1 при длине рельса  $\ell = 2 \text{ м}$ .

**7.2.3.** Прямой деревянный брус прямоугольного поперечного сечения плавает на поверхности воды (рис. 7.3). Определите напряжения, возникающие в брус, и перемещение точки приложения силы, если  $F = 0,5 \text{ кН}$ ,  $\ell = 10 \text{ м}$ ,  $b = 20 \text{ см}$ ,  $h = 10 \text{ см}$ . Дерево – сосна с удельным весом  $0,6 \text{ г/см}^3$  и модулем упругости  $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

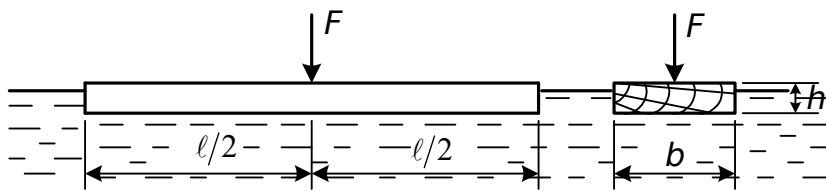


Рис. 7.3. К задаче 7.2.3

**7.2.4.** Стальной понтон, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, длиной  $\ell = 10 \text{ м}$  и шириной  $b = 3 \text{ м}$  нагружен сосредоточенной силой  $F = 200 \text{ кН}$  на своей оси в расстоянии  $a = 6 \text{ м}$  от носа (рис. 7.4). Определить осадки  $y_1$  и  $y_2$  понтона и построить эпюру изгибающих моментов. Момент инерции сечения  $10^6 \text{ см}^4$ . Удельный вес воды  $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

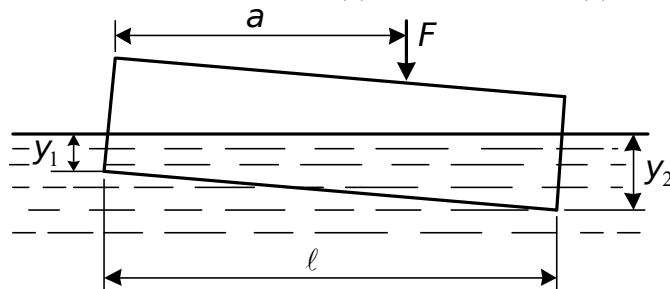


Рис. 7.4. К задаче 7.2.4

## Раздел 8 КОСОЙ ИЗГИБ

### 8.1. Основные понятия и формулы

Косым изгибом называется такой вид деформации, при котором плоскость действия нагрузки не совпадает ни с одной из главных плоскостей, проходящих через главные оси сечений стержня (рис. 8.1).

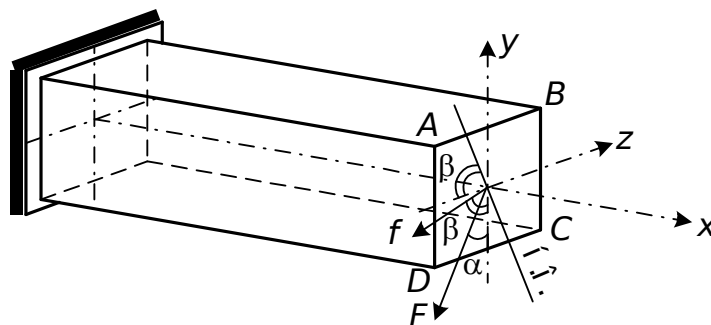


Рис. 8.1. Расчетная схема стержня

Нормальные напряжения

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{J_z} \pm \frac{M_y z}{J_y},$$

$$\sigma = \pm M \left( \frac{y \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \sin \alpha}{J_y} \right).$$

Положение нейтральной оси

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_z y_b}{J_z} + \frac{M_y z_b}{J_y} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_{\max}}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma].$$

Полный прогиб

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

Направление полного прогиба

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg}\alpha.$$

## 8.2. Задачи

**8.2.1.** Балка прямоугольного сечения  $b \times h$  см изгибается поперечной нагрузкой, действующей в диагональной плоскости  $\rho - \rho$  балки (рис. 8.2). Определить положение нейтральной оси.

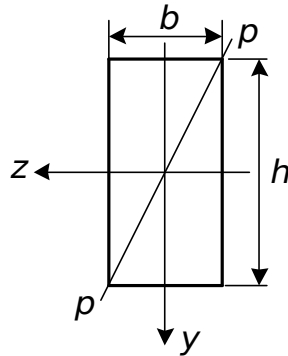


Рис. 8.2. К задаче 8.2.1

**8.2.2.** Балка прямоугольного сечения изгибается нагрузкой, плоскость действия которой составляет угол  $\alpha$  с осью  $Y$  (рис. 8.3). Подобрать соотношение сторон сечения так, чтобы при заданном допуске напряжении  $[\sigma]$  площадь сечения, а следовательно, и масса балки были наименьшими.

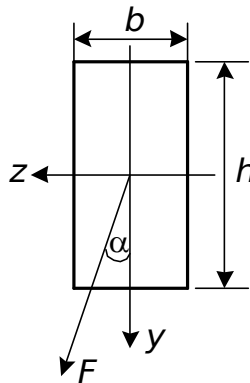


Рис. 8.3. К задаче 8.2.2

**8.2.3.** Балка швеллерного сечения из листа и двух уголков (рис. 8.4, а), работавшая на нагрузку, расположенную в плоскости  $XOY$ , была усилена приваркой дополнительного уголка (рис. 8.4, б). Как изменятся максимальные напряжения после усиления? Геометрические характеристики

первоначального сечения  $J_y = 623 \text{ см}^4$ ;  $J_z = 49735 \text{ см}^4$ ;  $A = 98,4 \text{ см}^2$ ;  $z_0 = 1,80 \text{ см}$ . Дать соображения по поводу такого усиления балки.

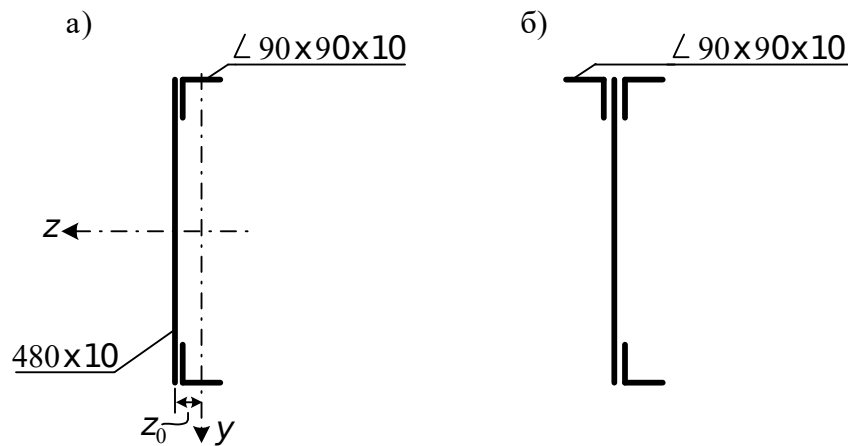
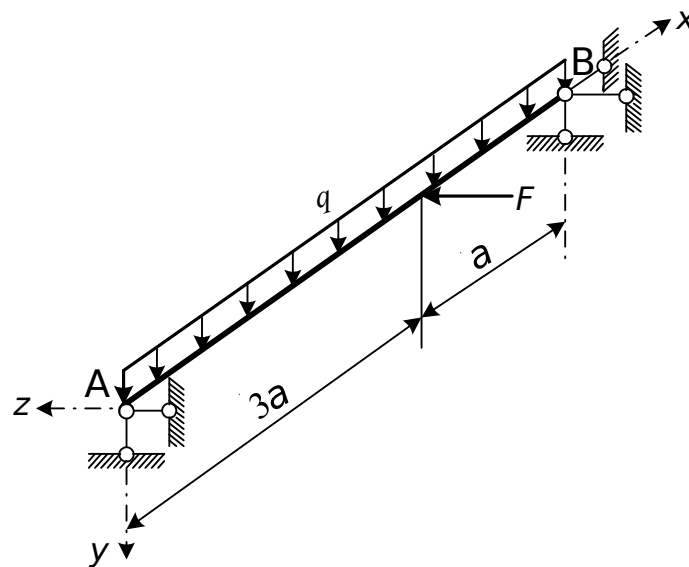


Рис. 8.4. К задаче 8.2.3

**8.2.4.** Балка прямоугольного поперечного сечения, имеющая пролет  $\ell = 4a$ , шарнирно закреплена обоими концами, причем опора В шарнирно неподвижна, а опора А может перемещаться вдоль оси  $X$  балки. Балка нагружена в вертикальной плоскости  $XU$  равномерной нагрузкой  $q$  и в горизонтальной плоскости  $XZ$  – грузом  $F = 2qa$ , приложенным на расстоянии  $a$  от опоры В (рис. 8.5). Прямоугольное сечение балки имеет вертикальную сторону " $h$ " и горизонтальную " $b$ " с соотношением  $\frac{h}{b} = k$ . Найти опасное сечение бруса и определить наибольшее нормальное напряжение в балке, если  $k = 2$ .



**8.2.5.** При каком угле изгибающего момента ( $M$ ) к вертикальной плоскости грузоподъемность балок (рис. 8.6) окажется наименьшей?



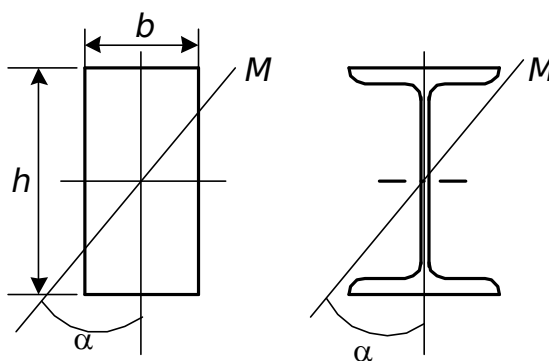


Рис. 8.6. К задаче 8.2.5

**8.2.6.** Балка с поперечным сечением в виде полукруга диаметром 16 см, имеющая длину 2 м и свободно опертая по концам, нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 2$  кН/м (рис. 8.7). Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в балке.

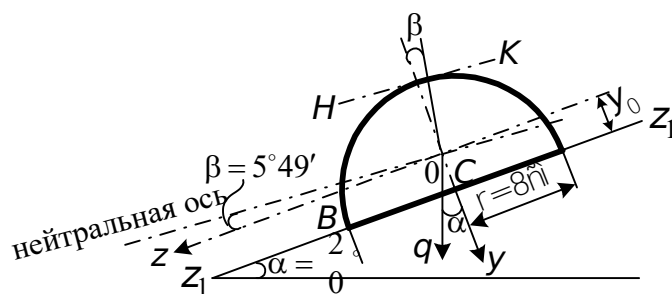


Рис. 8.7. К задаче 8.2.6

## Раздел 9

### ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

#### 9.1. Основные понятия и формулы

Изгибом с кручением называется деформация стержня под действием внешних сил, приложенных перпендикулярно к оси стержня и лежащих в плоскости, параллельной его оси. При определении напряжений используется принцип независимости действия сил.

*Круглый брус* (рис. 9.1). Максимальные нормальные напряжения в т. С<sub>1</sub> и т. С<sub>3</sub>

$$\sigma_{и} = \frac{M_{и}}{W}.$$

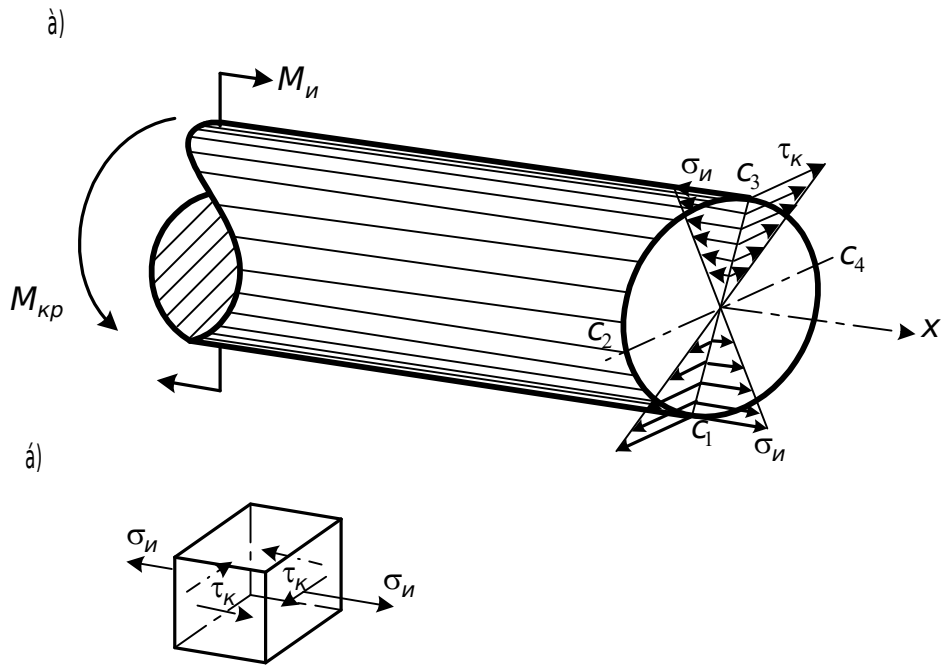


Рис. 9.1. Схема стержня

Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{р}}}.$$

Условие прочности  $\frac{M_{\text{р}}}{W} \leq [\sigma]$ .

Расчетные моменты:

– по теории наибольших касательных напряжений

$$M_{\text{р3}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2};$$

– по энергетической теории

$$M_{\text{р4}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}.$$

Брус прямоугольного сечения (рис. 9.2).

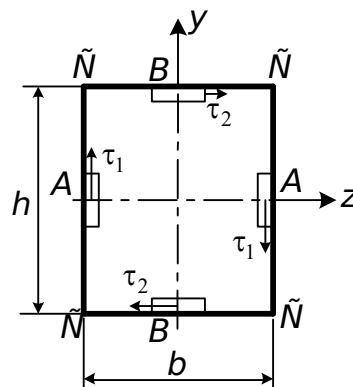


Рис. 9.2. Схема сечения бруса

Напряжения в опасных точках:

– точка А:  $\sigma = \frac{M_y}{W_y}$ ,  $\tau_k = \tau_1 = \frac{M_k}{\beta hb^2}$ ;

– точка В:  $\sigma = \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau_k = \tau_2 = \gamma \tau_1$ ;

– точка С:  $\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau_k = 0$ .

*Условия прочности:*

– по теории наибольших касательных напряжений

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma];$$

– по энергетической теории

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma].$$

## 9.2. Задачи

**9.2.1.** Определить наибольшее расчетное напряжение в круглом стальном стержне АВ длиной 40 см и диаметром 4 см, нагруженном двумя одинаковыми грузами  $F = 1$  кН (рис. 9.3). Чему будет равно расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Сделать выводы. Использовать четвертую теорию прочности.

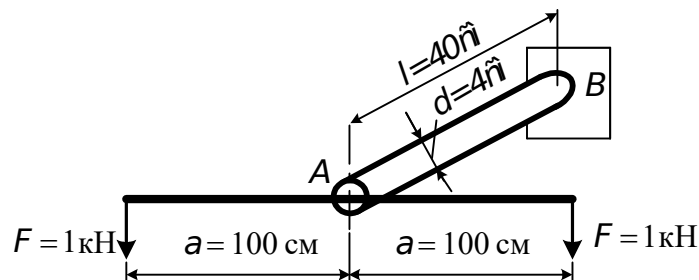


Рис. 9.3. К задаче 9.2.1

**9.2.2.** Сравнить вес двух брусьев круглого и квадратного сечений, воспринимающих изгибающий  $M_{и}$  и крутящий  $M_{к}$  моменты при условии  $M_{и} = 3M_{к}$  (рис. 9.4). Предполагается, что указанные брусья рассчитываются по теории наибольших касательных напряжений.

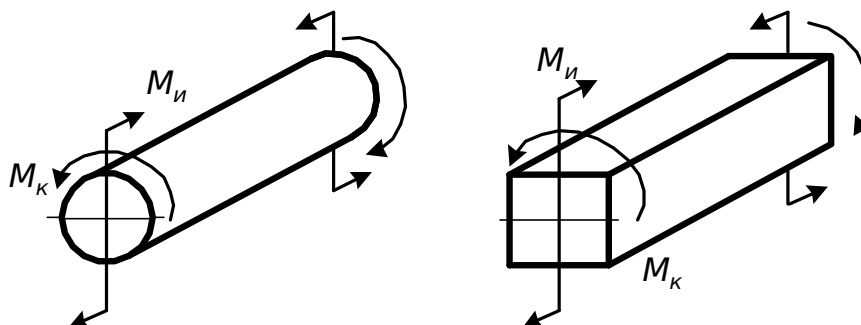


Рис. 9.4. К задачам 9.2.2 и 9.2.3

**9.2.3.** При каких соотношениях между изгибающим  $M_{и}$  и крутящим  $M_{к}$  моментами более прочен брус круглого сечения и при каких – брус квадратного сечения (рис. 9.4)? Предполагается, что указанные брусья имеют одинаковый вес и длину. Сравнение произвести, исходя из теории наибольших касательных напряжений.

**9.2.4.** Стальная скоба, имеющая в плане вид прямоугольника (рис. 9.5) со сторонами  $\frac{\ell}{2}$  и  $\ell$ , закреплена своими концами А и В и несет груз  $F$ . Определить диаметр скобы, если  $F = 0,8$  кН,  $\ell = 40$  см, а допустимое напряжение для расчета по теории наибольших касательных напряжений  $[\sigma] = 120$  МПа,  $G = 0,4E$ .

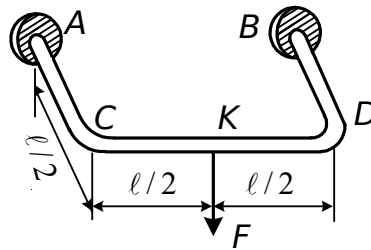


Рис. 9.5. К задаче 9.2.4

## Раздел 10

### ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

#### 10.1. Основные понятия и формулы

На брус действует сила  $F$ , параллельная продольной оси, но линия ее действия не совпадает с ней. Брус испытывает внецентренное сжатие (рис. 10.1).

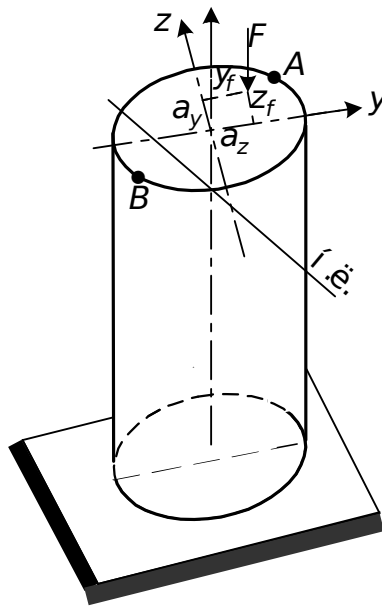


Рис. 10.1. Схема бруса

Нормальные напряжения

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_f z}{i_y^2} + \frac{y_f y}{i_z^2} \right).$$

Уравнение нулевой линии

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_f}; \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_f}.$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_f z_a}{i_y^2} + \frac{y_f y_a}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{\text{сж}}];$$

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_f z_b}{i_y^2} + \frac{y_f y_b}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Ядровые точки  $z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a_z}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{a_y}.$

Радиусы инерции  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}.$

## 10.2. Задачи

**10.2.1.** Определить положение нулевой линии и величину наибольшего нормального напряжения в поперечном сечении стойки, изображенной на рис. 10.2.

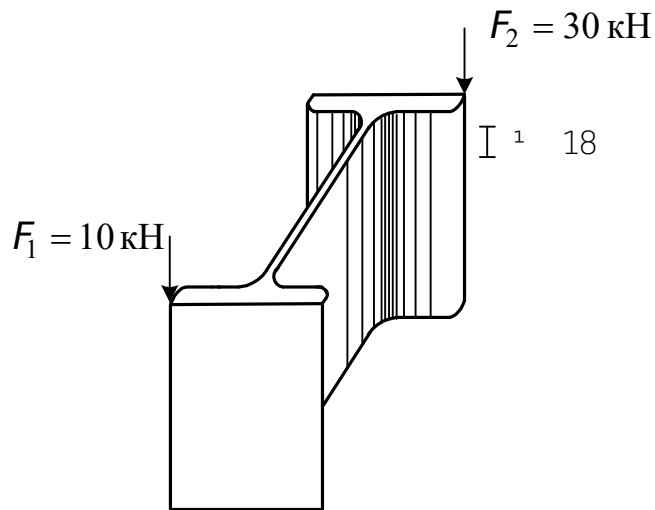


Рис. 10.2. К задаче 10.2.1

**10.2.2.** Короткая двутавровая стойка № 55, нагруженная центрально приложенной сжимающей силой  $F = 1800$  кН (рис. 10.3, а), усилена швеллером № 18, приваренным к стойке по всей ее длине (рис. 10.3, б). К усиленной стойке нагрузка  $F = 1800$  кН приложена также посередине высоты двутавра. Чему было равно наибольшее сжимающее напряжение в двутавровой стойке и чему оно равно в стойке, усиленной швеллером?

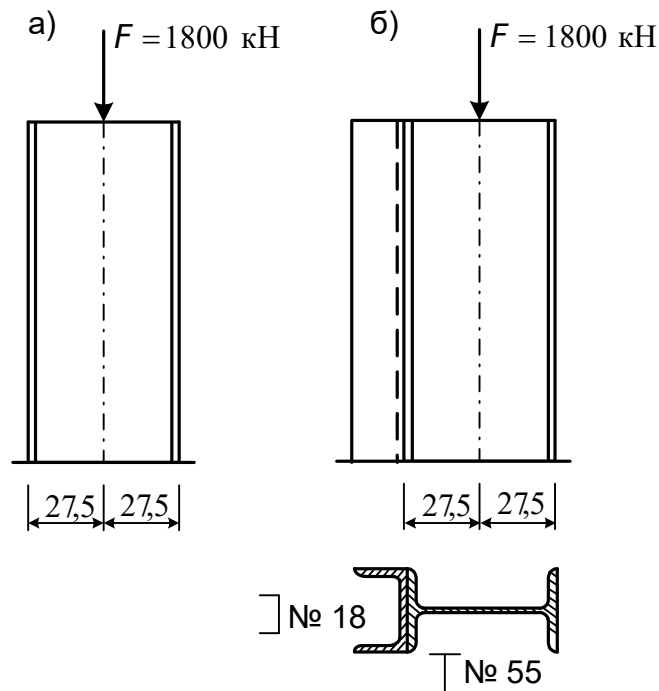


Рис. 10.3. К задаче 10.2.2

**10.2.3.** На рис. 10.4 изображены горизонтальные сечения быка двухпутного железнодорожного моста. Вес быка 32000 кН. В точках 1-8 на бык передаются одинаковые силы веса пролетных строений моста, каждая из которых равна 1200 кН. Кроме того, в точках 1 и 2 на бык передаются

одинаковые силы веса поезда, проходящего по одному из пролетных строений, каждая из которых равна 2100 кН. Определить наибольшее и наименьшее сжимающие напряжения в горизонтальном сечении быка у основания и построить ядро сечения.

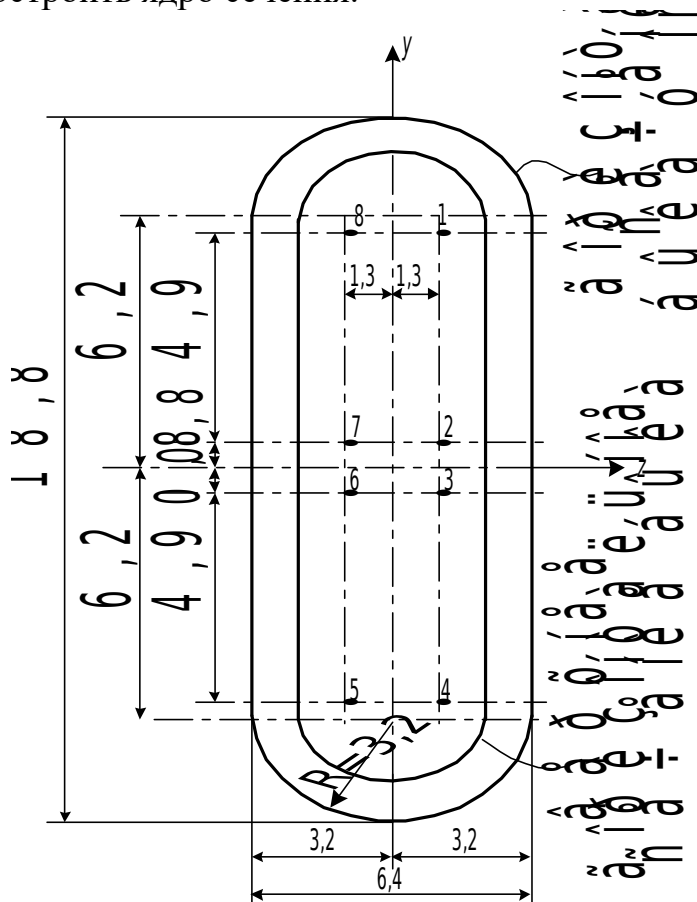


Рис. 10.4. К задаче 10.2.3

## Раздел 11

### УСТОЙЧИВОСТЬ

#### 11.1. Основные понятия и формулы

Формула Эйлера для определения критической силы

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины (рис. 11.1).

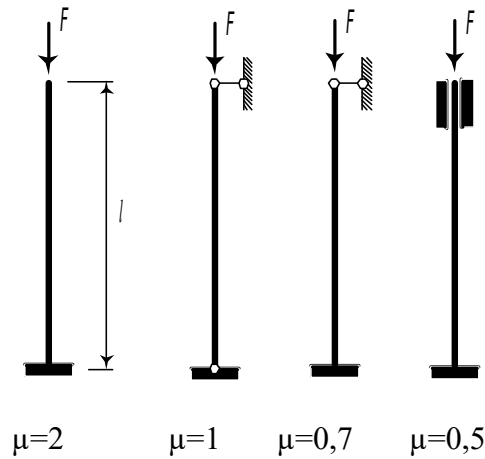


Рис. 11.1

Критическое напряжение  $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ .

Приведенная гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ .

Применимость формулы Эйлера:  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{\pi}$ ,  $\lambda \geq \lambda_{кр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\pi}}}$ .

Формула Ясинского для определения критической силы  $F_{кр} = \sigma_{кр} A = A(a - b\lambda)$ .

Условие устойчивости сжатых стержней  $\sigma = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma]$ , где  $\varphi$  – коэффициент понижения допускаемого напряжения на сжатие, зависящий от материала стержня и его гибкости.

## 11.2. Задачи

**11.2.1.** Стойка, защемленная нижним концом, на свободном конце нагружена вертикальной силой, передающейся через трос (рис. 11.2). Передача усилия через трос осуществляется в двух вариантах. В первом случае (рис. 11.2, а) трос опускается вниз свободно. Во втором случае (рис. 11.2, б) – перекинут без трения через два жестких блока. В каком случае критическая сила  $F_{кр}$  для стойки будет больше?



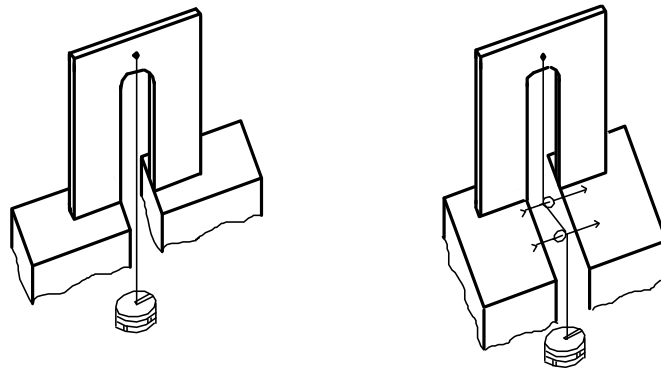


Рис. 11.2. К задаче 11.2.1

**11.2.2.** Предохранительный клапан В удерживается стержнем CD, работающим на сжатие (рис. 11.3). Определить наименьший момент инерции поперечного сечения стержня из условия, чтобы в нем при давлении на клапан  $p = 12$  атм получался продольный изгиб (стержень терял устойчивость). Найти прогиб  $f$  стержня CD при подъеме клапана на 5 мм и определить, насколько при этом возрастет сопротивление стержня CD по сравнению с критической силой. Рабочая площадь клапана  $A = 50$  см<sup>2</sup>.

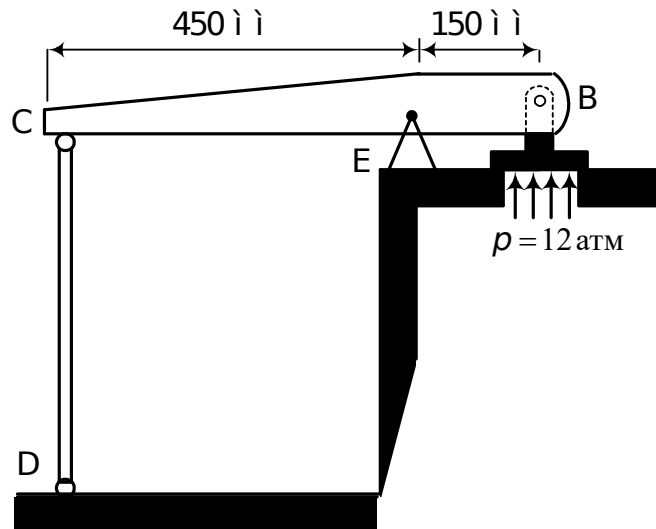


Рис. 11.3. К задаче 11.2.2

**11.2.3.** Составить дифференциальное уравнение изогнутой оси шарнирно закрепленного стержня, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 11.4). Жесткость стержня  $EJ$ . Указать возможные пути решения.

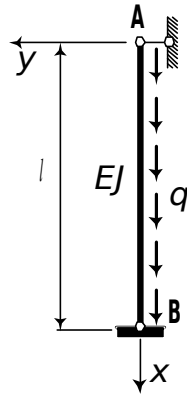


Рис. 11.4. К задаче 11.2.3

**11.2.4.** Колонна, концы которой можно считать опирающимися на шаровые опоры, образована из двух стальных швеллеров (рис. 11.5). Длина колонны  $\ell = 4$  м. Она несет нагрузку  $F = 800$  кН. Подобрать номера швеллеров, найти расстояние  $2b$  между ними и расстояние между соединительными планками, если  $[\sigma] = 120$  МПа.

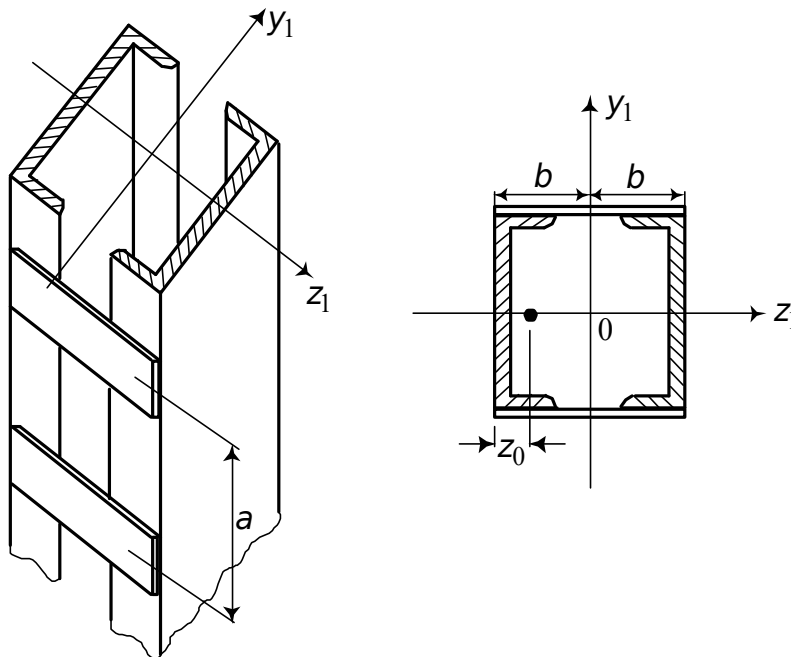


Рис. 11.5. К задаче 11.2.4

## Раздел 12

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

#### 12.1. Основные понятия и формулы

Нагрузка, которая сравнительно быстро меняет свою величину или положение, называется динамической. При динамическом действии нагру-

зок возникают дополнительные инерционные силы. Учет динамичности нагрузок производится с помощью динамического коэффициента.

Виды динамических нагрузок:

1. Учет сил инерции при движении с ускорением.

– при подъеме груза

$$k_{\text{дин}} = 1 + \frac{a}{g},$$

где  $a$  – ускорение движения;

– при равномерном вращении груза

$$w_n = \omega^2 r, \quad \omega = \frac{2\pi n}{60},$$

где  $w_n$  – центростремительное ускорение;

$\omega$  – угловая скорость;

$n$  – число оборотов в минуту.

2. Ударное действие нагрузки

– на невесомую преграду  $k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$ ,

где  $V$  – скорость падения перед ударом;

$\Delta_{\text{ст}}$  – статическое перемещение точки удара;

$h$  – высота падения груза;

– на преграду, обладающую значительной массой,

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{Q_0}{G}}},$$

где  $Q_0$  – вес преграды,

$G$  – вес груза,

$k$  – коэффициент приведения, зависящий от способов закрепления

стержня и вида удара ( $k = \frac{1}{3}$  при продольном ударе,  $k = \frac{17}{35}$  при поперечном

ударе посередине пролета балки с шарнирными опираниями на опорах).

3. Колебания систем с одной степенью свободы

$$k_g = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \text{ – динамический коэффициент,}$$

где  $\theta$  – частота вынужденных колебаний;

$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{F\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}$  – круговая частота свободных колебаний;

$m$  – сосредоточенная масса мотора;

$C$  – жесткость системы;

$\delta_{11}$  – перемещение от силы, равной единице, приложенной в точке расположения центра тяжести массы;

$\Delta_{\text{ст}}$  – перемещение груза при статическом его приложении;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  – период свободных колебаний.

## 12.2. Задачи

**12.2.1.** Стальной стержень постоянного сечения вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 12.1). Определить допустимую по условию прочности наибольшую длину стержня  $\ell_{\text{пр}}$  при частоте вращения  $n = 1200$  об/мин и частоту вращения  $n_{\text{max}}$ , при которой стержень разорвется, если  $\ell = \ell_{\text{пр}}$ . Дано:  $[\sigma] = 100$  МПа,  $\sigma_b = 800$  МПа,  $\gamma = 7,83 \frac{\text{Т}}{\text{м}^3}$ .

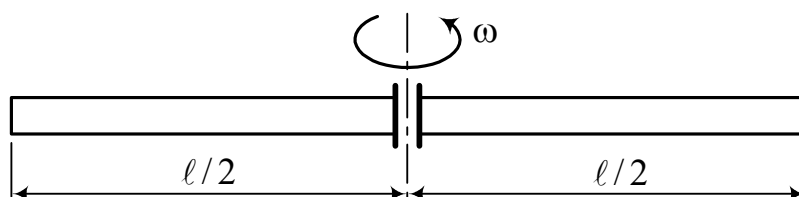


Рис. 12.1. К задаче 12.2.1

**12.2.2.** Три стальных балки одинакового поперечного сечения расположены, как указано на рис. 12.2. Каждая балка имеет квадратное поперечное сечение  $60 \times 60$  мм<sup>2</sup> и длину 120 см.

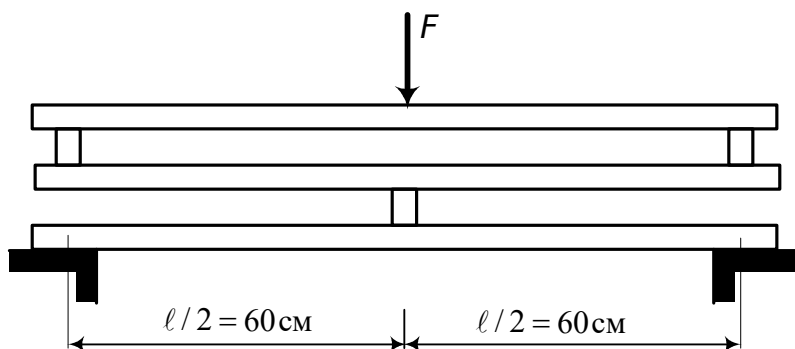


Рис. 12.2. К задаче 12.2.2

Требуется определить:

а) какая статическая нагрузка, приложенная на середине пролета, вызывает нормальное допускаемое напряжение  $[\sigma] = 140$  МПа;

б) будут ли балки, расположенные, как указано на рис. 12.2, вместе сопротивляться большей статической нагрузке, чем каждая балка в отдельности;

в) каков должен быть вес тела, падающего с высоты 20 см при  $[\sigma] = 140$  МПа;

г) какие напряжения вызвал бы этот груз, если бы он падал лишь на одну из балок?

**12.2.3.** Один конец двутавровой балки №16, имеющей пролет 3 м, опирается на жесткую шарнирную опору, второй – на стальную цилиндрическую винтовую пружину, имеющую 10 витков при среднем диаметре витка 10 см и диаметре проволоки 20 мм (рис. 12.3). С какой высоты  $h$  может упасть на балку груз  $F = 2$  кН, не вызывая в балке и пружине напряжений, превышающих допускаемые напряжения, если  $[\sigma] = 160$  МПа (для материала балки) и  $[\tau] = 200$  МПа (для материала пружины)?

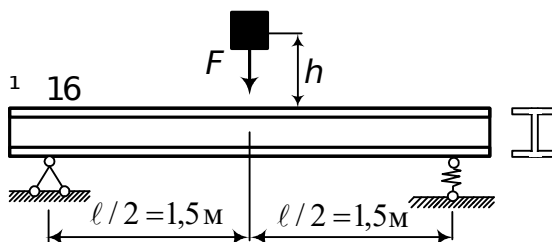


Рис. 12.3. К задаче 12.2.3

**12.2.4.** Электромотор установлен на двух двутавровых балках посередине пролета (рис. 12.4). Частота вращения ротора электродвигателя  $n = 1200$  об/мин. Подобрать сечения балок, исходя из условия, чтобы частота собственных поперечных колебаний системы была на 30% выше частоты возмущающей силы, возникающей вследствие динамической неуравновешенности ротора. Учесть массу балок. Дано:  $m = 1000$  кг,  $\ell = 5$  м,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

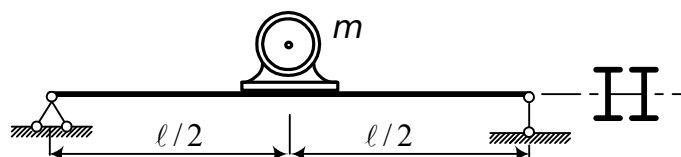


Рис. 12.4. К задаче 12.2.4

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } \int_0^{\ell} \frac{G_{\xi} d \xi}{A_{\xi}} &= \int_0^{\ell} \frac{\gamma \pi \xi 4 [a^2 + a(a + b \xi) + (a + b \xi)^2] d \xi}{12 \pi (a + b \xi)^2} = \\
&= \frac{\gamma}{3} \int_0^{\ell} \left[ \frac{a^2 \xi}{(a + b \xi)^2} + \frac{a \xi}{a + b \xi} + \xi \right] d \xi = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[ \frac{a^3}{b^2 (a + b \xi)} + \frac{a^2}{b^2} \ln (a + b \xi) + \frac{a \xi}{b} - \frac{a^2}{b^2} \ln (a + b \xi) + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{\ell} = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[ \frac{a^3}{b^2 (a + b \xi)} + \frac{a \xi}{b} + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{\ell}. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\ell} \frac{d \xi}{A_{\xi}} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\ell} \frac{d \xi}{d_{\xi}^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\ell} \frac{d \xi}{(a + b \xi)^2} = - \frac{\pi}{4} \frac{1}{b(a + b \xi)} \Big|_0^{\ell}. \quad (1.15)$$

Прежде чем подставлять пределы, вернемся к прежним обозначениям. Тогда интеграл формулы (1.14) запишется так:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{3} \left[ \frac{d^3}{\frac{(D-d)^2}{\ell^2} \left( d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} + \frac{d}{D-d} \xi + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{\ell} = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[ \frac{d^3 \ell^2}{D(D-d)^2} + \frac{d \ell^2}{(D-d)} + \frac{\ell^2}{2} - \frac{d^2 \ell^2}{(D-d)^2} \right] = \\
&= \frac{\gamma \ell^2}{3} \left[ - \frac{d^2}{D(D-d)} + \frac{d}{D-d} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\gamma \ell^2}{3} \cdot \frac{-2d^2 + 2Dd + D^2 - Dd}{2D(D-d)} = \\
&= \frac{\gamma \ell^2}{6} \cdot \frac{D^2 + Dd - 2d^2}{D(D-d)} = \frac{\gamma \ell^2}{6} \cdot \frac{D + 2d}{D},
\end{aligned}$$

а интеграл формулы (1.15) будет

$$\begin{aligned}
& - \frac{4}{\pi} \frac{1}{\frac{D-d}{\ell} \left( d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} \Big|_0^{\ell} = - \frac{4\ell}{\pi} \left[ \frac{1}{D(D-d)} - \frac{1}{d(D-d)} \right] = \\
&= - \frac{4\ell}{\pi} \frac{d-D}{Dd(D-d)} = \frac{4\ell}{\pi dD}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение (1.10), найдем

$$R_b = \frac{\gamma \ell^2 (D + 2d) \pi D d}{6 D \cdot 4 \ell} = \frac{\pi \gamma \ell d}{24} (D + 2d) \quad (1.16)$$

Теперь получим функции для построения эпюр  $N_x, \sigma_x, \delta_x$  в любом сечении на расстоянии  $X$  от нижней опоры. Согласно выражению (1.9)  $N_x = G_x - R_b$ . Подставляя сюда  $G_x$  по формуле (1.11) и, учитывая формулу (1.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{\pi \gamma \ell}{24} \left[ d^2 + a \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right) \cdot \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right) \right] \cdot \frac{\pi \gamma \ell (D+2d)}{24} - \\
&= \frac{\pi \gamma \ell}{24} \left[ 2x d^2 + 2d^2 x + 2 \frac{D-d}{\ell} d x^2 + 2d^2 x + 4d \frac{D-d}{\ell} x^2 + \frac{D-d}{\ell} x^3 \right] - \\
&= \frac{\pi \gamma \ell (D+2d)}{24} \left[ 6d + D x^2 + (D-d)^2 x - d^3 (D+2d) \right] - \\
&= \frac{\pi \gamma \ell}{24} \left[ \frac{D-d}{\ell} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - d^3 (D+2d) \right]. \quad (1.17)
\end{aligned}$$

нормальное напряжение

Нормальное напряжение в сечении на расстоянии  $X$  от

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A_x} = \frac{\frac{\pi \gamma}{24} \left[ \frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - \frac{\pi}{4} \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2 \right]}{\frac{\pi}{4} \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2}$$

$$= \frac{\gamma}{6} \frac{\frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - \frac{\pi}{4} \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2}{\left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2}$$

Перемещение сечения  $\delta_x$ , находящегося на расстоянии  $X$  от нижней опоры, найдем, используя выражение для удлинения  $\Delta \xi$ , но в пределах изменения  $\xi$  от  $X$  до  $\ell$ .

$$\delta_x = \Delta \xi_x^\ell = \int_x^\ell \frac{N_\xi d \xi}{EA_\xi} = \int_x^\ell \frac{G_\xi d \xi}{EA_\xi} - \frac{R_b}{E} \int_x^\ell \frac{d \xi}{A_\xi}.$$

Составляющие это выражение интегралы уже взяты (см. формулы (1.14) и (1.15)), только нужно изменить пределы интегрирования.

$$\delta_x = \Delta \xi_x^\ell = \frac{\gamma}{3E} \left[ \frac{d^3}{(D-d)^2 \left( d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} + \frac{d}{D-d} \xi + \frac{\xi^2}{2} \right]_x^\ell +$$

$$+ \frac{4R_b}{\pi E} \frac{1}{\frac{D-d}{\ell} \left( d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} \Big|_x^\ell = \frac{\gamma}{3E} \left[ \frac{d^3 \ell^2}{D(D-d)^2} + \frac{d \ell^2}{D-d} +$$

$$+ \frac{\ell^2}{2} - \frac{d^3 \ell^2}{(D-d)^2 \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} - \frac{d \ell x}{D-d} - \frac{x^2}{2} \right] +$$

$$+ \frac{4R_b}{\pi E} \left[ \frac{\ell}{D(D-d)} - \frac{\ell}{(D-d) \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} \right].$$

Учитывая формулу (1.16), будем иметь

$$\delta_x = \frac{\gamma}{3E} \left\{ \left[ \frac{\ell^2 d^3}{D(D-d)^2} - \frac{\ell^2 d^3}{(D-d)^2 \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{d \ell (\ell - x)}{D-d} + \frac{\ell^2 - x^2}{2} + \frac{\ell^2 d (D+2d)}{2D(D-d)} - \frac{\ell^2 d (D+2d)}{2(D-d) \left( d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} \right] \right\}.$$

Имея функции, вычислим ординаты (табл. 1.1) и построим эпюры (рис. 1.18).

Таблица 1.1

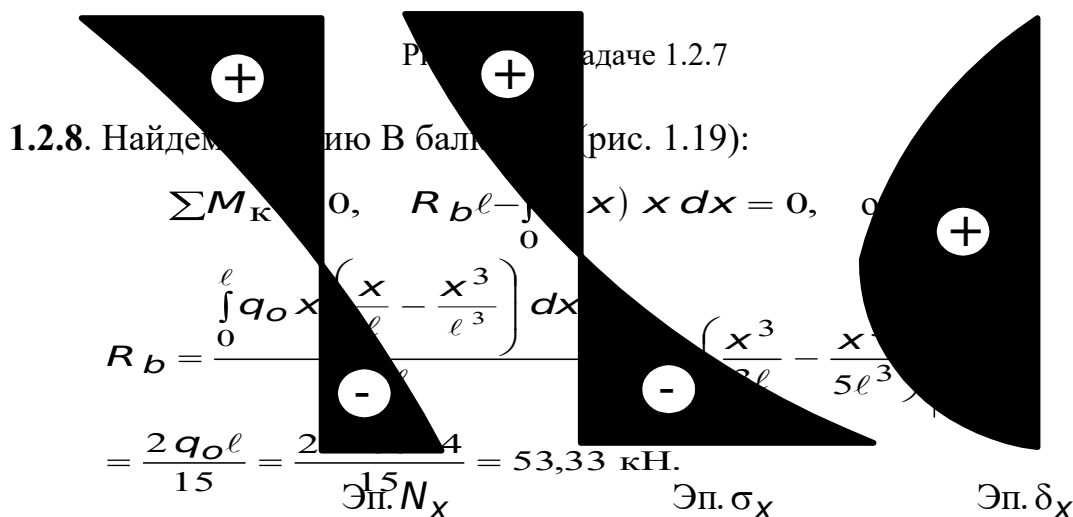
Ординаты эпюр  $N_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\delta_x$

$x$	$N_x$ (кг)	$\sigma_x$ (Па)	$10^7 \cdot \delta_x$ (м)
1	2	3	4
1,0	91,89	29250	0
0,9	71,36	25168	0,116

0,8	52,60	20672	0,213
0,7	35,56	15667	0,290
0,6	20,17	10034	0,345
0,5	6,38	3611	0,375

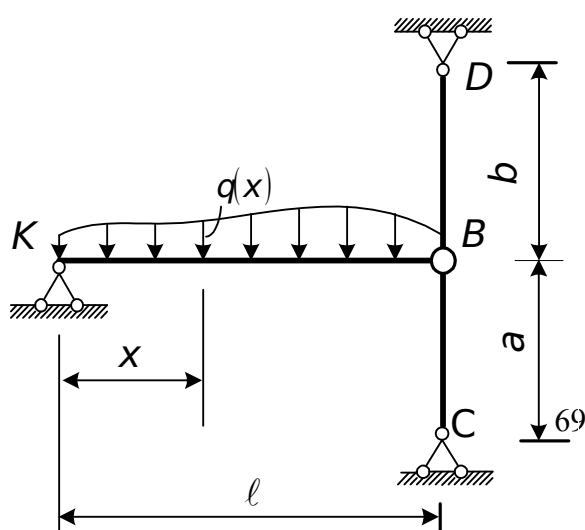
Продолжение табл. 1.1

1	2	3	4
0,4	-5,88	-3820	0,377
0,3	-16,67	-12562	0,347
0,2	-26,06	-23039	0,280
0,1	-34,09	-35874	0,168
0,0	-40,0	-52000	0



Нагрузкой, равной  $R_b$ , но направленной вниз, загружаем стержень DC. По концам его возникают реакции  $R_c$  и  $R_d$ , для определения которых имеется одно уравнение статики  $\sum Y=0$ . Задача по их определению статически неопределима:

$$1) \sum Y=0, R_c + R_d + (-R_b) = 0.$$



Составляем уравнение совместности деформаций – на сколько удлинится стержень BD, на столько же укоротится стержень BC:

$$2) \Delta l_{bd} = \Delta l_{bc} \text{ по закону}$$

$$\text{Гука } \frac{R_d b}{E_c A} = \frac{R_c a}{E_{ал} 2A}, \text{ отсюда}$$



$$R_d = R_c \frac{E_c a}{2E_{ал} b} =$$

$$= R_c \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot 0,6} = 0,95 R_c$$

Рис. 1.19. К задаче 1.2.8                      Подставив  $R_d$  в первое уравнение, получим

$$R_c + 0,95 R_c - R_b = 0, \quad R_c = \frac{53,33}{1,95} = 27,34 \text{ кН}.$$

Тогда  $R_d = 53,33 - 27,34 \approx 26,0$  кН.

Найдем площадь  $A$  из условий прочности одного и другого стержней

$$A \geq \frac{R_d}{[\sigma]_{ст}} = \frac{26 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

$$2A \geq \frac{R_c}{[\sigma]_{ал}} = \frac{27,34 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 3,41 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \text{ или } A \geq 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из двух значений  $A$  принимаем большее, т. е.  $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

**1.2.9.**      Задача статически неопределима – в узле А сходятся три стержня. Составим уравнения равновесия и совместности деформаций:

$$1. \sum X = 0, \quad -N_1 \sin 30^\circ + N_3 \sin 60^\circ = 0.$$

$$2. \sum Y = 0, \quad -N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - F = 0.$$

Под действием силы  $F$  точка А переместится вниз – влево, так как стержень АВ не деформируется. Перемещение будет происходить по окружности с радиусом МК или, приближенно при малых деформациях, по перпендикуляру к МК, т. е. по направлению стержня 3.  $KK_1 = \Delta_3$  - это удлинение стержня 3 (рис. 1.20). Проекция этого удлинения на вертикаль и будет удлинением стержня 2.

Исходя из изложенного, уравнение совместности деформаций будет

$$3. \Delta_2 = \Delta_3 \cos 60^\circ.$$

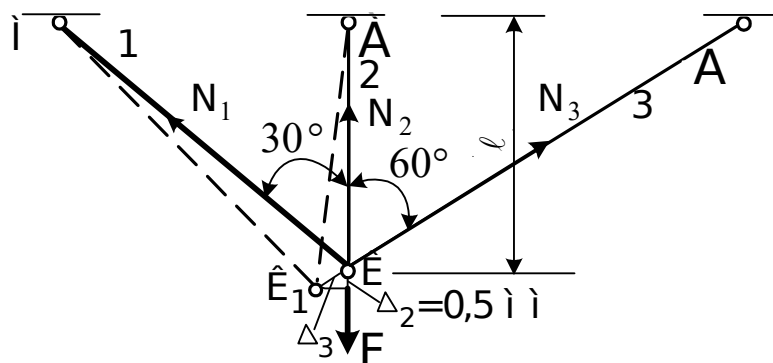


Рис. 1.20. К задаче 1.2.9

Исключим их первых двух уравнений  $N_1$ , умножая первое на  $\cos 30^\circ$ , а второе - на  $\sin 30^\circ$  и складывая,

$$N_2 \sin 30^\circ + N_3 (\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ) - F \sin 30^\circ = 0, \quad (1.17)$$

где  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin(60^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ .

Из формулы (1.17) следует

$$F = N_2 + \frac{N_3}{\sin 30^\circ} = N_2 + 2 N_3, \quad \text{т. к. } \sin 30^\circ = 0,5.$$

По закону Гука  $\Delta_2 = \frac{N_2 \ell}{EA}$ , откуда

$$N_2 = \frac{\Delta_2 EA}{\ell} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{1} \cdot 10^{-3} = 10 \text{ кН.}$$

$$\Delta_3 = \frac{N_3 \ell}{EA \cos 60^\circ}, \quad \text{откуда } N_3 = \frac{\Delta_3 EA}{2 \ell}, \quad \text{но из третьего уравнения } \Delta_3 = \frac{N_2}{\cos 60^\circ} = 2 \Delta_2.$$

Тогда

$$N_3 = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1} \cdot 10^{-3} = 10 \text{ кН.}$$

Следовательно,  $F = 10 + 2 \cdot 10 = 30 \text{ кН.}$

## Раздел 2

**2.2.1.** Выделим двумя сечениями синусоиды на расстоянии  $z$  и  $z + dz$  элементарную площадь  $dA = y dz$  (рис. 2.14).

Площадь четверти синусоиды найдется как

$$A = \int_0^{\ell/2} y dz = f \int_0^{\ell/2} \sin \frac{\pi z}{\ell} dz = -\frac{f \ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} \Big|_0^{\ell/2} = \frac{f \ell}{\pi}.$$

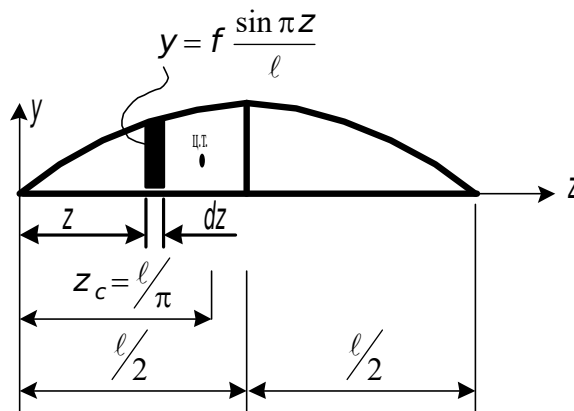


Рис. 2.14. К задаче 2.2.1

Для определения положения центра тяжести этой площади вычислим статический момент площади относительно оси  $y$ . По определению,

$$S_y = \int_0^{\ell/2} z dA = f \int_0^{\ell/2} z \sin \frac{\pi z}{\ell} dz = f \left( \frac{\ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{\ell} - \frac{\ell z}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} \right) \Big|_0^{\ell/2} = f \frac{\ell^2}{\pi^2}.$$

Тогда 
$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{f \frac{\ell^2}{\pi^2}}{f \frac{\ell}{\pi}} = \frac{\ell}{\pi}.$$

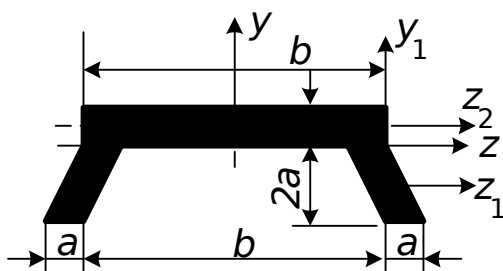
Примечание. Интеграл  $\int_0^{\ell/2} z \sin \frac{\pi z}{\ell} dz$  взят, используя таблицу интегралов от тригонометрических функций математического справочника. Если же справочника под рукой нет, можно найти интеграл, зная таблицу основных интегралов и применяя интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Обозначим  $z = u$ ,  $\sin \frac{\pi z}{\ell} dz = dv$ , тогда  $dz = du$  и  $v = -\frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell}$ ; произведя подстановки и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} S_y &= f \left| -z \cdot \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} + \frac{\ell}{\pi} \int \cos \frac{\pi z}{\ell} dz \right| \\ &= f \left| \frac{\ell z}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right| \Big|_0^{\ell/2} = f \frac{\ell^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

**2.2.2.** Чтобы нейтральная ось совпала с осью  $Z$ , ось  $Z$  должна проходить через центр тяжести сечения, т. е. статический момент всего сечения относительно оси  $Z$  должен быть равным нулю. Из этого условия и найдем размер сечения “ $b$ ” (рис. 2.15):



$$S_z = 0; \quad b \cdot a \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot a = 0. \quad \text{Откуда } b = 8a.$$

Осевые моменты инерции сечения

Рис. 2.15. К задаче 2.2.2

относительно осей  $y$  и  $Z$  найдем,

используя зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей:

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = 2 \frac{2a \cdot a^3}{12} + 2 \cdot 2a \cdot a \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{ab^3}{12} = \frac{a^4}{3} + 64a^4 + \frac{16a^4}{3} = \frac{209a^4}{3}.$$

Здесь  $J_{y_1}$  принят как два момента инерции треугольников, образующих параллелепипед, относительно их оснований.

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = 2 \frac{a(2a)^3}{12} + 2a \cdot 2a \cdot a^2 + \frac{ba^3}{12} + ba \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^4}{3} + 4a^4 + \frac{2a^4}{3} + 2a^4 = 8a^4.$$

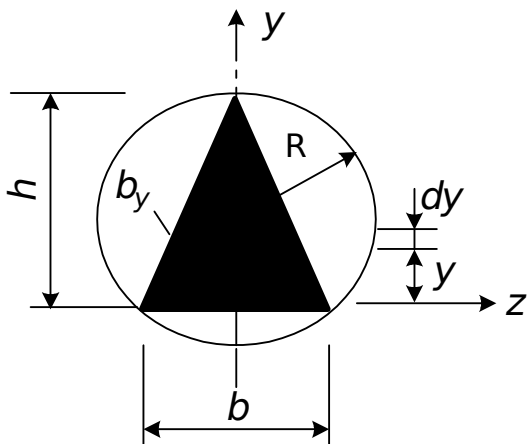
Момент инерции  $J_{z_1}$  не зависит от перемещения частей сечения параллельно оси, относительно которой вычисляется момент инерции, т. е. принимается равным для прямоугольника со сторонами  $a$  и  $2a$ .

**2.2.3.** Осевые моменты инерции относительно произвольных осей сечения  $Y_i$  и  $Z_i$  будут равны, если они будут равны относительно главных осей, каковыми являются оси симметрии сечения  $Z$  и  $Y$ . Действительно, если оси  $Z$  и  $Y$  – главные и  $J_z = J_y$ , тогда  $J_{z_i} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha = J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_z$ . То же имеем и для  $J_{y_i}$ . Следовательно,  $J_{z_i} = J_{y_i}$ . Запишем формулы для определения осевых моментов относительно осей  $Z$  и  $Y$ :

$$J_z = 4 \frac{\left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}; \quad J_y = 2 \frac{b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{4} = \frac{bh^3}{16}.$$

Приравняем найденные моменты инерции и найдем соотношения сторон сечения  $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$ .

**2.2.4.** Запишем общее выражение для осевого момента инерции относительно оси  $Z$  (рис. 2.16):



$$J_z = \int_0^h y^2 dA,$$

где  $dA = b_y dx = \frac{b(h-y)}{h} dy$ ,

но

$$\frac{b}{2} = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Тогда

Рис. 2.16. К задаче 2.2.4

$$J_z = \frac{2\sqrt{2Rh-h^2}}{h} \int_0^h y^2(h-y) dy = \frac{2\sqrt{2Rh-h^2}}{h} \left( \frac{y^3 h}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{h^3 \sqrt{2Rh-h^2}}{6}.$$

Условие экстремума момента инерции будет  $\frac{dJ_z}{dh} = 0$ .

Возьмем производную по  $h$  от  $J_z$

$$3h^2 \sqrt{2Rh-h^2} + h^3 \frac{2R-2h}{2\sqrt{2Rh-h^2}} = 0, \quad \text{тогда}$$

$$3(2R-h) + (R-h) = 0, \quad 6R - 3h + R - h = 0.$$

Откуда 
$$h = \frac{7}{4} R = 1,75 R.$$

**2.2.5.** Основываясь на свойстве интеграла (интеграл суммы равен сумме интегралов), представим треугольное сечение ABC как разность двух сечений в виде прямоугольных треугольников OBC и OBA (рис. 2.17). Для определения  $h$  запишем формулу для  $J_z^{ABC} = J_z^{OBC} - J_z^{OBA}$ :

$$J_z^{ABC} = \frac{h \cdot h^3}{12} - \frac{(h/2) \cdot h^3}{12} = \frac{h^4}{24} = 54 \cdot 10^{-8}.$$

Откуда

$$h = \sqrt[4]{24 \cdot 54 \cdot 10^{-8}} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

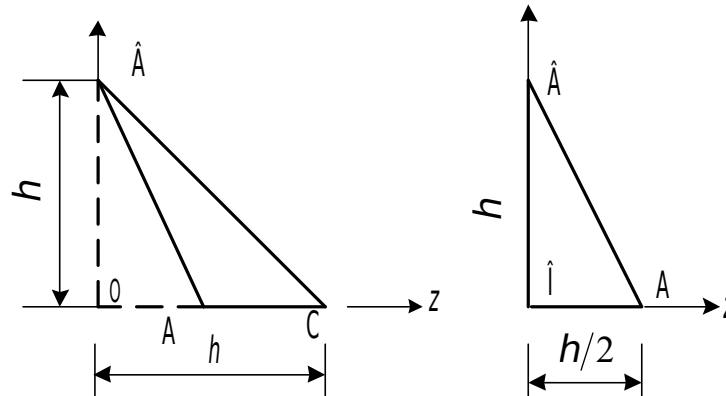


Рис. 2.17. К задаче 2.2.5

Центробежный момент инерции

$$J_{yz}^{ABC} = J_{yz}^{OBC} - J_{yz}^{OBA} = \frac{h^2 \cdot h^2}{24} - \frac{(h/2)^2 \cdot h^2}{24} = \frac{h^4}{32} = \frac{6^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 40,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Если не помните формул для определения моментов инерции треугольного сечения, можно их получить по определению.

Осевой момент инерции относительно Z

$$J_z = \int_A y^2 dA.$$

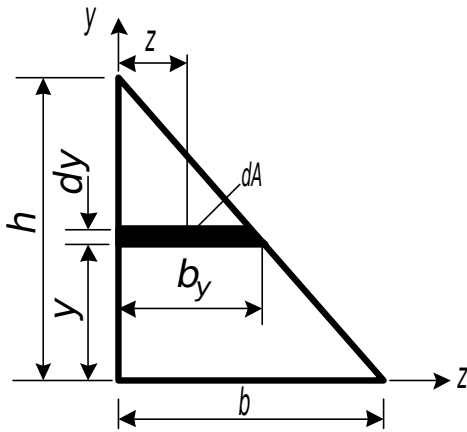


Рис. 2.18. К задаче 2.2.5

Для элементарной площадки  $dA = b_y dy$  (см. заштрихованную полосу на рис. 2.18)  $y$  есть величина постоянная.

Так как  $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$ ,

то  $b_y = \frac{b}{h}(h-y)$ .

Поэтому

$$J_z = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} \left| \frac{h y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b h^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \int_A y z dA.$$

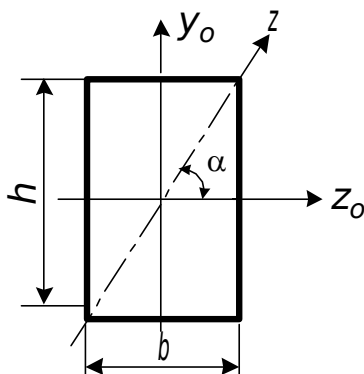
Выражаем все подинтегральные величины в функции одного аргумента  $y$ :

$$dA = b_y dy = \frac{b}{h} (h-y) dy; \quad z = \frac{b_y}{2} = \frac{b(h-y)}{2h};$$

тогда

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int_0^h y \frac{b(h-y)}{2h} \cdot \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h-y)^2 y dy = \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \left| \frac{h^2 y^2}{2} - 2 \frac{h y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b^2 h^2}{24}. \end{aligned}$$

**2.2.6.** Проведем центральные оси, параллельные сторонам прямоугольника, они будут и главными, так как являются осями симметрии. Учитывая это, запишем выражение для осевого момента относительно оси Z, повернутой на угол  $\alpha$  по отношению к оси  $Z_0$  (рис. 2.19).



$$J_z = J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha,$$

но

$$J_{z_0} = \frac{bh^3}{12}, \quad J_{y_0} = \frac{hb^3}{12}.$$

Тогда

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \cos^2 \alpha + \frac{hb^3}{12} \sin^2 \alpha.$$

Рис. 2.19. К задаче 2.2.6

Дальше решение можно осуществлять двумя путями, используя в качестве переменных либо тригонометрические функции, либо соотношения сторон. Покажем сначала первое решение.

Вынесем за скобки  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ :

$$\begin{aligned} J_z &= \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{bh^3}{12} \cdot ctq\alpha + \frac{hb^3}{12} \cdot tq\alpha \right), \\ \text{но } ctq\alpha &= \frac{b}{h}, \quad \text{а } tq\alpha = \frac{h}{b}. \end{aligned}$$

Подставляя это в  $J_z$ , произведя сокращение и учитывая, что  $bh=A=const$  получим  $J_z = \frac{A^2}{6} \sin \alpha \cos \alpha$ .

Иследуем на экстремум эту функцию по  $\alpha$ .

$$\frac{dJ_z}{d\alpha} = \frac{A^2}{6} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{A^2}{6} \cos 2\alpha,$$

$$\frac{dJ_z}{d\alpha} = 0, \quad \text{следовательно, } \cos 2\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Возьмем вторую производную

$$\frac{d^2 J_z}{d\alpha^2} = \frac{A^2}{6} (-2 \sin 2\alpha).$$

При  $\alpha = 45^\circ$   $\frac{d^2 J_z}{d\alpha^2} = -\frac{A^2}{3} < 0$ , значит, при  $\alpha = 45^\circ$   $J_z$  при-

нимает максимальное значение

$$J_z^{\max} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{A^2}{12}.$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $J_z \rightarrow 0$ .

Максимальное значение  $J_z$  будет при  $\frac{h}{b} = 1$ .

Теперь покажем решение с другими переменными. Учитывая, что

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}},$$

запишем выражение осевого момента в следующем виде:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \frac{b^2}{h^2 + b^2} + \frac{b^3h}{12} \frac{h^2}{h^2 + b^2} = \frac{(bh)^2}{12 \left( \frac{h}{b} + \frac{b}{h} \right)}.$$

Обозначив через  $u = \frac{h}{b}$  и учитывая, что  $bh = A = \text{const}$ , получим

$$J_z = \frac{A^2}{12} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} = \frac{\text{const}}{f(u)}.$$

Исследуем знаменатель  $J_z$ , т. е.  $f(u)$ .

Найдем  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \left( u + \frac{1}{u} \right) = \infty$  и  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$ .

Таким образом, знаменатель  $f(u)$  бесконечно возрастает при  $\frac{h}{b} \rightarrow 0$  и  $\frac{h}{b} \rightarrow \infty$ .

Это указывает на то, что значения  $J_z$  уменьшаются как для сечений «вытянутых» вдоль оси  $X$ , так и вдоль оси  $Y$ .

Теперь исследуем  $f(u)$  на экстремум:

$$\frac{df(u)}{du} = \left( 1 + \frac{1}{u} \right)' = 1 - \frac{1}{u^2} \text{ — будет равняться нулю при } u = 1,$$

$$\frac{d^2f(u)}{du^2} = \frac{2}{u^3} > 0 \text{ при } u = 1.$$

Значит, функция  $f(u)$  принимает при  $u = 1$  минимальное значение, а она стоит в знаменателе для  $J_z$ . Следовательно, при  $u = 1$ , т. е.  $b = h$ , осевой момент принимает максимальное значение.

Рассмотрим еще вариант решения. Обозначим  $h/b = n$ ,  $h \cdot b = A$  — площадь сечения. Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей прямоугольника равны

$$J_{z_o} = \frac{bh^3}{12}, \quad J_{y_o} = \frac{hb^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции  $J_{z_o y_o} = 0$ . Для определения момента инерции воспользуемся формулой преобразования моментов инерции при повороте осей:

$$J_z = J_{z_o} \cos^2 \alpha + J_{y_o} \sin^2 \alpha - J_{z_o y_o} \sin 2\alpha.$$

Выразим тригонометрические функции через размеры  $h$  и  $b$ :

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

$$\text{Теперь } J_z = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{b^2}{b^2 + h^2} + \frac{hb^3}{12} \frac{h^2}{b^2 + h^2} = \frac{A^3}{6} \cdot \frac{1}{b^2 + h^2}.$$

Выразим  $J_z$  через  $A$  и  $n$ , используя зависимости  $h/b = n$  и  $bh = A$ .



$b = \frac{h}{n}$  подставляем в  $bh = A$ , получим  $\frac{h^2}{n} = A$ , откуда  $h = \sqrt{nA}$

. Преобразуем выражение для  $J_z$ :

$$J_z = \frac{A^3}{6} \cdot \frac{1}{b^2 + h^2} = \frac{A^3}{6} \frac{1}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = \frac{A^3}{6} \frac{h^2}{b^2 h^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \frac{A^3}{6} \frac{nA}{A^2 (1 + n^2)} = \frac{A^2}{6} \frac{n}{1 + n^2}.$$

Итак, окончательно получили выражение  $J_z$  в функции от  $n$ .

Исследуем  $J_z$  на экстремум, т. е.  $\frac{dJ_z}{dn} = 0$ :

$$\frac{dJ_z}{dn} = \frac{A^2}{6} \frac{1 \cdot (1 + n^2) - 2n \cdot n}{(1 + n^2)^2} = \frac{A^2}{6} \frac{1 + n^2 - 2n^2}{(1 + n^2)^2} = \frac{A^2}{6} \frac{1 - n^2}{(1 + n^2)^2}.$$

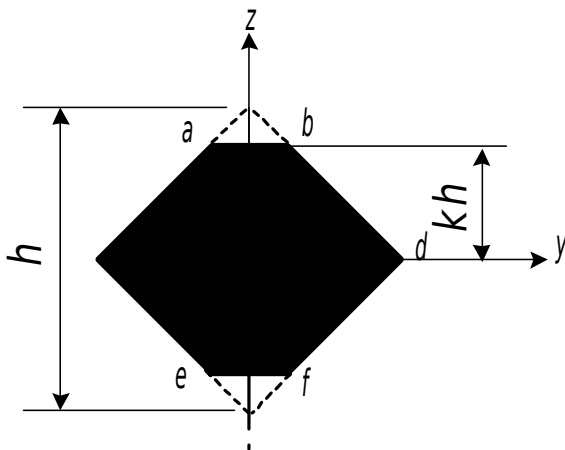
Приравняем производную к нулю. Но так как  $(1 + n^2)^2 \neq 0$ , значит,  $1 - n^2 = 0$ . Откуда  $n = 1$ . Чтобы установить, максимальное или минимальное значение  $J_z$  будет при  $n = 1$ , исследуем вторую производную на знак.

$$\frac{d^2 J_z}{dn^2} = \frac{A^2}{6} \frac{-2n \cdot (1 + n^2)^2 - 4n \cdot (1 + n^2)(1 - n^2)}{(1 + n^2)^4} = -\frac{A^2}{6} 8 < 0.$$

Значит,  $J_z = \frac{A^2}{12}$  (при  $n = 1$ ) является max.

При  $n \rightarrow 0, J_z \rightarrow 0$ . Но так как осевой момент инерции  $J_z = \int_A y^2 dA$  – сумма положительных величин и не может быть равным нулю, следовательно, минимума  $J_z$  не существует.

**2.2.7.** Для получения момента инерции усеченной фигуры разобьем



ее на квадрат и два параллелограмма  $abcc$  и  $cdef$  (рис. 2.20). Стороны квадрата равны  $kh\sqrt{2}$ , а основание параллелограмма, например,  $ab = h(1 - 2k)$ . Момент инерции уменьшенного сечения относительно оси  $Y$  равен сумме моментов инерции квадрата относительно диагонали и двух параллелограммов относительно оси, проходящей через основание:

Рис. 2.20. К задаче 2.2.7

$$J_y = \frac{(kh\sqrt{2})^4}{12} + 2 \frac{h(1 - 2k)(kh)^3}{3} = \frac{k^3 h^4 (2 - 3k)}{3},$$

а соответствующий момент сопротивления изгибу составляет

$$W_y = \frac{J_y}{Z_{\max}} = \frac{k^3 h^4 (2 - 3k)}{3kh} = \frac{k^2 h^3 (2 - 3k)}{3}.$$

Запишем условие максимума момента сопротивления от  $k$

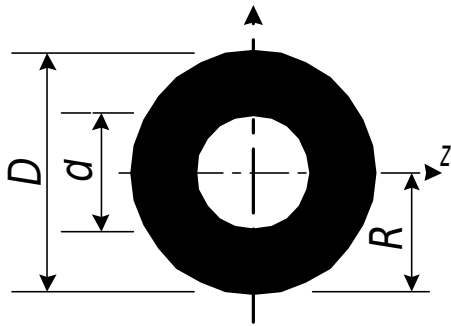
$$\frac{dW_y}{dk} = 0, \quad \frac{h^3}{3} [2k(2 - 3k) - 3k^2] = 0.$$

Реальное значение корня этого уравнения будет  $k = \frac{4}{9}$ . Таким образом, каждый угол квадратного сечения надо срезать на величину  $\frac{h}{2}(1 - 2k) = \frac{1}{18}h$ .

**2.2.8.** Найдем высоту вписанного в круг прямоугольного сечения (рис. 2.22) при  $b = R$   $h = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$ .

Площадь сечения  $A = bh = R^2 \sqrt{3}$ .

Получим величину внутреннего диаметра кольцевого сечения (рис. 2.21) из условия равенства площадей:



$$\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = R^2 \sqrt{3},$$

$$\frac{\pi D^2}{4} - R^2 \sqrt{3} = \frac{\pi d^2}{4},$$

Рис. 2.21. К задаче 2.2.8

$$d^2 = D^2 - \frac{4R^2}{\pi} \sqrt{3} = 4R^2 - \frac{4R^2}{\pi} \sqrt{3} = 4R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right).$$

Вычислим моменты сопротивления сечений относительно осей Z:

$$\begin{aligned} W_z^{\text{к.с.}} &= \frac{J_z}{R} = \frac{\pi D^4}{64R} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{\pi R^3}{4} \left(1 - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3}{\pi^2}\right) = \\ &= \frac{R^3}{4} \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{\pi}\right), \end{aligned}$$

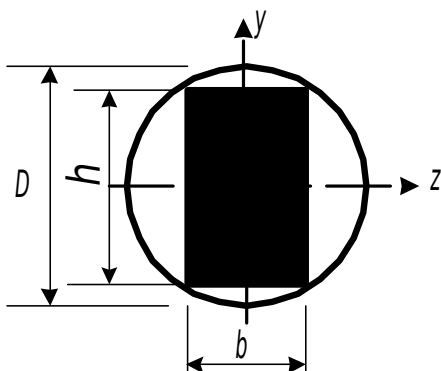
где

$$\frac{d^4}{D^4} = \frac{16R^4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^2}{(2R)^4} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^2.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_z^{\text{пр.с.}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{3R^3}{6} = \frac{R^3}{2}.$$

Отношение



$$\frac{W_z^{\text{к.с.}}}{W_z^{\text{пр.с.}}} = \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{\pi}}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2\pi} =$$

Рис. 2.22. К задаче 2.2.8

$$= 1,732 - 0,478 = 1,254.$$

2.2.9. В круглом сечении все оси являются осями симметрии, следовательно, все они главные. В квадратном сечении горизонтальная и вертикальная оси являются осями симметрии, значит они – главные. Осевые моменты относительно них равны между собой. Следовательно, для квадрата любая пара взаимно перпендикулярных осей является главной. В третьем сечении горизонтальная и вертикальная оси будут главными, так как относительно них центробежный момент инерции сечения равен нулю (рис. 2.23). Действительно,

$$J_{zy} = 2J_{zy}^{\text{гор.тр.}} + 2J_{zy}^{\text{верт.тр.}} = 0, \quad \text{но} \quad J_{zy}^{\text{гор.тр.}} = \int_A yz dA > 0,$$

так как координаты элементарных площадок у правого треугольника  $y > 0$  и  $z > 0$ , а у левого –  $y < 0$  и  $z < 0$ . А  $J_{zy}^{\text{верт.тр.}} = \int_A yz dA < 0$ , так как координаты  $dA$  у верхнего треугольника  $y > 0$ , а  $z < 0$ , а у нижнего – наоборот.

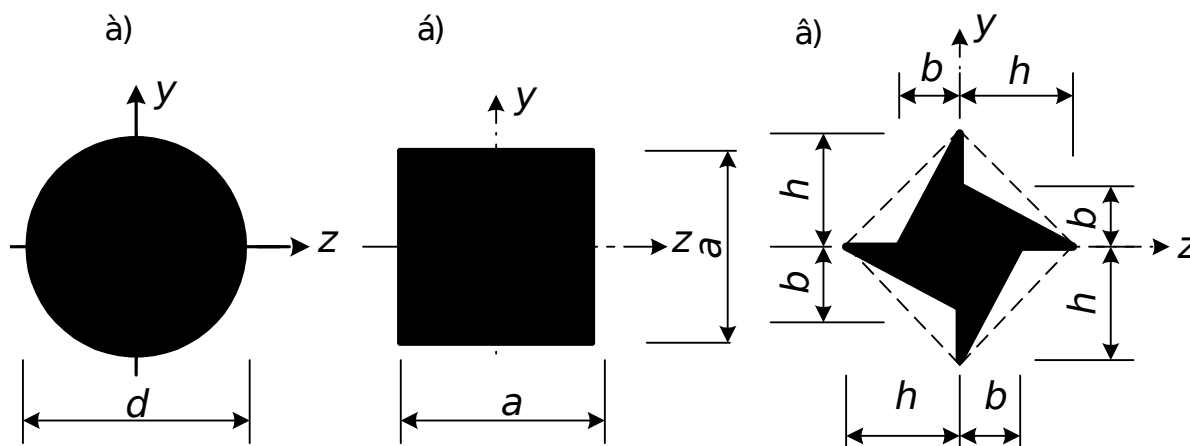


Рис. 2.23. К задаче 2.2.9

Абсолютные же значения  $|J_{zy}^{\text{гор.тр.}}| = |J_{zy}^{\text{верт.тр.}}|$  ввиду равенства треугольников. Осевые моменты инерции сечения будут равны между собой ( $J_y = J_z$ ), так составляющие сечение треугольники одинаково расположены относительно главных осей  $y$  и  $z$ . Из этого следует, что любая пара взаимно перпендикулярных осей будет главной. Момент сопротивления относительно нейтральной оси  $W_z = \frac{J_z}{y_{\text{max}}}$ .

Максимальные нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле  $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$ . Следовательно, эти напряжения будут тем меньше, чем больше будет момент сопротивления. А момент сопротивления будет больше относительно нейтральной оси, расстояние относительно которой наиболее удаленных точек является наименьшим. Отсюда следует, что для круглого сечения нейтральная ось может располагаться произвольным образом, так как  $y_{\max} = \text{const}$ ; для квадратного сечения нейтральная ось должна совпадать с горизонтальной главной осью, при которой  $y_{\max} = \frac{a}{2}$  (при других положениях нейтральных осей  $y_{\max} > \frac{a}{2}$ ); для третьего сечения нейтральную ось необходимо расположить под углом  $45^\circ$  к горизонтали. При таком ее положении  $y_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} h = 0,707 h$  – наименьшее значение из всех для других положений нейтральных осей.

**2.2.10.** Прочность балки характеризуется нормальными напряжениями  $\sigma = \frac{M}{W_z}$  (рис. 2.24). Прочность увеличивается с уменьшением напряжений, т. е. с увеличением момента сопротивления  $W_z$ . Момент сопротивления  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ . Выразим  $W_z$  только через  $h$ , используя условие  $b^2 + h^2 = d^2$ . Отсюда  $b = \sqrt{d^2 - h^2}$  и  $W_z = \frac{h^2 \sqrt{d^2 - h^2}}{6}$ . Найдем  $h$ , при котором  $W_z$  будет принимать экстремальные значения:

$$\frac{dW_z}{dh} = 0, \quad \frac{2h\sqrt{d^2 - h^2}}{6} - \frac{2h^3}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0.$$

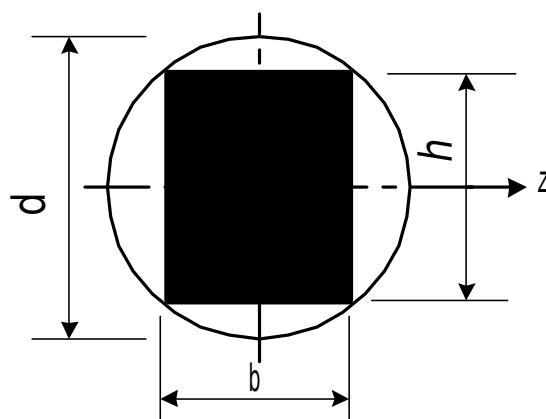


Рис.2. 24. К задаче 2.2.10

Приведем к одному знаменателю и приравняем числитель к нулю:

$$\frac{4h(d^2 - h^2) - 2h^3}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0,$$

$$4hd^2 - h^3 - 2h^3 = 0$$

или  $h(2d^2 - 3h^2) = 0$ . Откуда  $h_1 = 0$ ;  $h_{2,3} = \pm d\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Реальным будет только одно значение  $h = d\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816d$ , при этом  $b = 0,577d$ , а  $\frac{h}{b} = 1,414$ . Можно не сомневаться, что в этом случае  $W_z = W_{\max}$ .

Жесткость балки  $EJ$  зависит от модуля упругости и от момента инерции сечения. Поэтому исследуем  $J_z$  на экстремум. Для прямоугольного сечения  $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3\sqrt{d^2 - h^2}}{12}$ . Тогда  $\frac{dJ_z}{dh} = 0$ ,  
 $\frac{3h^2\sqrt{d^2 - h^2}}{12} - \frac{2h^4}{24\sqrt{d^2 - h^2}} = 0$ , или  $\frac{6h^2(d^2 - h^2) - 2h^4}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0$ , или  
 $h^2(3d^2 - 4h^2) = 0$ .

Нас будет удовлетворять только одно значение  $h$ , а именно  $h = d\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866d$ . Тогда  $b = 0,5d$ , а  $\frac{h}{b} = 1,732$ .

Естественно, при этом  $J_z = J_{\max}$ .

**2.2.11.** Выразим размеры квадратного сечения через диаметр круглого (рис. 2.25)

$$\frac{\pi d^4}{4} = a^2, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{d\sqrt{\pi}}{2}.$$

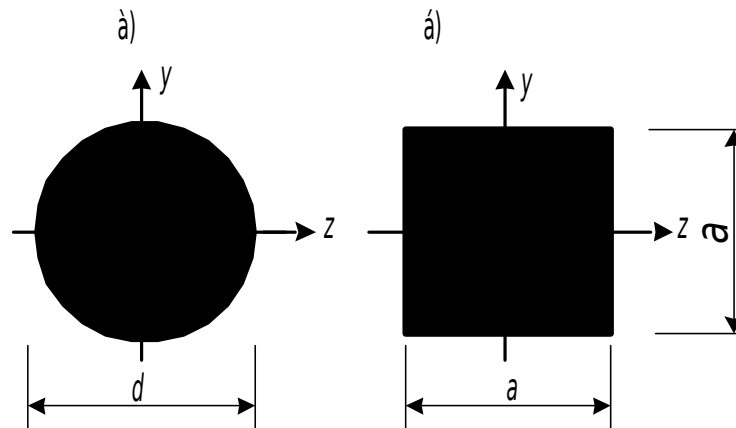


Рис. 2.25. К задаче 2.2.11

Моменты сопротивления сечений при кручении  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  – круглого;  $W_k = \beta a^3 = \beta \frac{\pi d^3 \sqrt{\pi}}{8}$  – квадратного, где  $\beta = 0,208$  (см. с. 11).  
 $W_p = 0,196 d^3$ ;  $W_k = \frac{0,208 \pi \sqrt{\pi}}{8} d^3 = 0,145 d^3$ ,  $W_p > W_k$ , следовательно, круглое сечение рационально при кручении. Моменты сопротивления сечений при изгибе  $W_y^{kp} = \frac{\pi d^3}{32}$  – круглого;  $W_y^{kb} = \frac{a^3}{6} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{48} d^3$  – квадратного,  $W_y^{kp} = 0,098 d^3$ ;  $W_y^{kb} = 0,116 d^3$ . Следовательно, при работе на изгиб рациональнее квадратное сечение  $W_y^{kb} > W_y^{kp}$ .

### Раздел 3

**3.2.1.** При центральном растяжении три взаимно перпендикулярные главные площадки располагаются так: одна перпендикулярно к оси стержня и две параллельно ей. При этом главные напряжения будут равны  $\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A}$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , а главные относительные деформации  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma}{E}$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma}{E}$ .

Запишем выражения обобщенного закона Гука для искомого параллелепипеда, направления нормальных напряжений обозначив через X, Y и Z:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

По условию, удлинения двух из трех ребер, допустим  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ , равны нулю. Тогда согласно обобщенному закону Гука

$$\begin{aligned}\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) &= 0, \\ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) &= 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения вычтем второе:

$$\sigma_x - \sigma_y - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z + \nu\sigma_z + \nu\sigma_x = 0. \quad \text{Откуда следует, что } \sigma_x = \sigma_y.$$

Теперь из первого уравнения находим  $\sigma_z = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_y$ .

Выразим относительное удлинение  $\varepsilon_z$  через  $\sigma_y$ :

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_y - 2\nu\sigma_y \right] = \frac{\sigma_y}{E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{\nu}. \quad \text{Относительное изменение объема, с одной стороны, равно}$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E} \sigma,$$

с другой –

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E\nu} \sigma_y.$$

Откуда нормальные напряжения по граням заданного элементарного параллелепипеда будут равны

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{\nu(1-2\nu)}{1-\nu-2\nu^2} \sigma = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma, \\ \sigma_x &= \sigma_y = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma, \\ \sigma_z &= \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\nu}{1+\nu} \sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma.\end{aligned}$$

**3.2.2.** При вертикальном давлении вертикальные ребра становятся короче, а горизонтальные – длиннее. Относительные деформации их будут

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\frac{\rho}{E}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \nu \frac{\rho}{E}. \quad \text{Уменьшение площади каждой боковой грани} \\ \Delta A &= A - A_1 = a^2 - (a + \Delta a)(a + \Delta b) = a^2 - a^2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) = \\ &= a^2(1 - 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2).\end{aligned}$$

Так как величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  весьма малы, то их произведением можно пренебречь. Тогда получим

$$\Delta A = -A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\text{или } \Delta A = -A \left( -\frac{\rho}{E} + \nu \frac{\rho}{E} \right) = \frac{A\rho}{E}(1-\nu).$$

$$\text{Откуда } \nu = 1 - \frac{\Delta A E}{A\rho} = 1 - \frac{7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5}{0,1^2 \cdot 200} = 0,3.$$

3.2.3. При действии на стальную пластину равномерно распределенного давления « $p$ » по сторонам выделенного квадрата ABCD, наклоненного под углом  $\alpha$  к направлению действия давления, будут возникать нормальные и касательные напряжения (рис. 3.8).

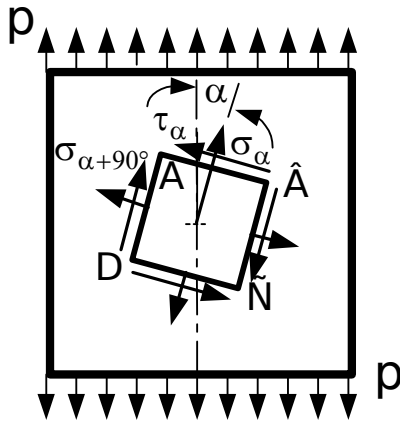


Рис. 3.8. К задаче 3.2.3

$$\sigma_{\alpha} = p \cos^2 \alpha; \quad \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = p \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{p}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.1)$$

Угловые деформации квадрата ABCD в зависимости от угла  $\alpha$  найдутся по закону Гука с учетом выражения (3.1)

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\tau_{\alpha}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{p}{2} \sin 2\alpha = \frac{1+\nu}{E} p \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

Для вывода зависимости линейных деформаций диагоналей AC и BD от угла  $\alpha$  рассмотрим деформации ABCD  $\varepsilon_{\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\alpha+90^{\circ}}$ ,  $\gamma_{\alpha}$ . Каждая из этих трех деформаций будет вызывать изменение длины диагонали. Соответствующие увеличения длины диагонали AC, как показано на рис. 3.9, а, б, в, равны  $\varepsilon_{\alpha} dx \cos \theta$ ,  $\varepsilon_{\alpha+90^{\circ}} dy \sin \theta$  и  $\gamma_{\alpha} dy \cos \theta$ . Таким образом, полное увеличение длины диагонали равно сумме этих трех величин, а соответствующая деформация  $\varepsilon_{\theta}$  диагонали получается делением этой суммы на длину  $ds$  диагонали. Учитывая, что  $dy/ds = \sin \theta$  и  $dx/ds = \cos \theta$ , получаем

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\alpha} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\alpha+90^{\circ}} \sin^2 \theta + \gamma_{\alpha} \sin \theta \cos \theta. \quad (3.3)$$



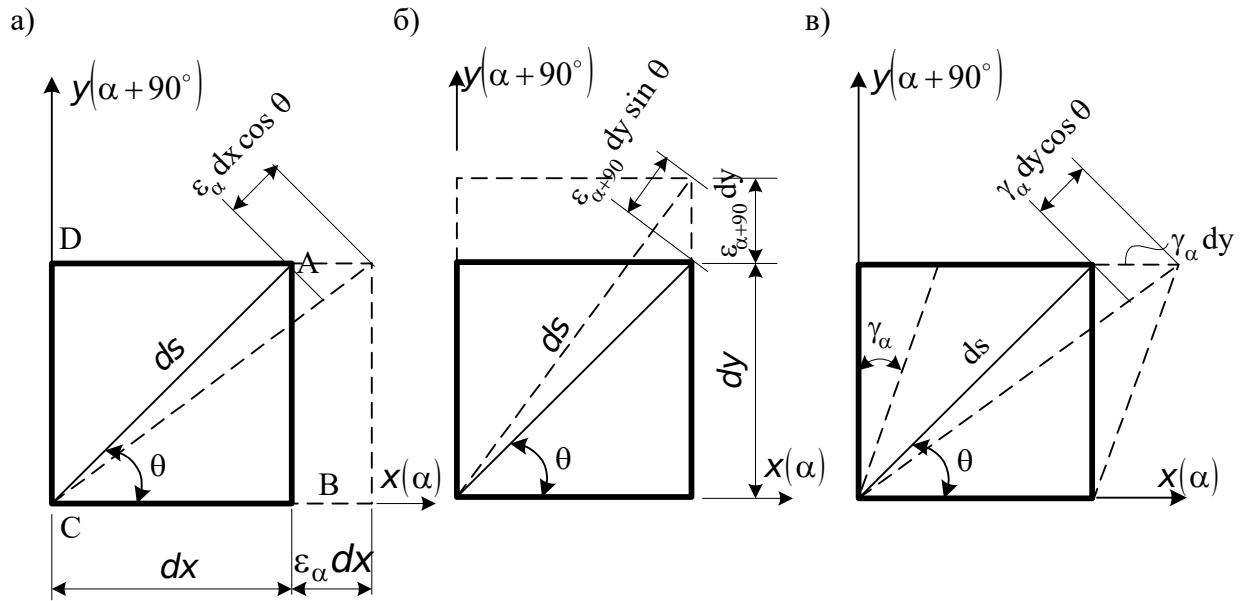


Рис. 3.9. К задаче 3.2.3

В нашем случае ABCD – квадрат, а значит, для диагонали AC  $\theta = 45^0$  и

$$\varepsilon_{45^0} = \frac{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha+90^0} + \gamma_{\alpha}}{2}. \quad (3.4)$$

Для диагонали BD угол равен  $\theta + 90^0$

$$\varepsilon_{\theta+90^0} = \varepsilon_{\alpha} \cos^2(\theta + 90^0) + \varepsilon_{\alpha+90^0} \sin^2(\theta + 90^0) + \gamma_{\alpha} \sin(\theta + 90^0) \cos(\theta + 90^0).$$

Но  $\sin(\theta + 90^0) = \cos \theta$ , а  $\cos(\theta + 90^0) = -\sin \theta$ , а поэтому относительная линейная деформация диагонали BD будет

$$\varepsilon_{135^0} = \frac{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha+90^0} - \gamma_{\alpha}}{2}. \quad (3.5)$$

Относительные линейные деформации сторон квадрата  $\varepsilon_{\alpha}$  и  $\varepsilon_{\alpha+90^0}$  выразятся через давление «р» по закону Гука и с учетом выражения (3.1) будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\alpha} - \nu \sigma_{\alpha+90^0}) = \frac{1}{E} (\rho \cos^2 \alpha - \nu \rho \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{\rho}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\alpha+90^0} = \frac{\rho}{E} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha).$$

Подставляя выражение (3.2) и (3.6) в выражение (3.4) и (3.5), получим

$$\varepsilon_{\substack{45^0 \\ 135^0}} = \frac{\rho}{E} [1 - \nu \pm (1 + \nu) \sin 2 \alpha]. \quad (3.7)$$

Найдем угол  $\alpha$ , при котором относительные линейные деформации диагоналей AC и BD будут принимать экстремальные значения:

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \pm \frac{\rho}{E} (1 + \nu) 2 \cos 2\alpha = 0.$$

Откуда  $\cos 2\alpha = 0$  и  $\alpha = \pm 45^\circ$ .

Вторая производная  $\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2} = \mp \frac{\rho}{E} 4 \sin 2\alpha$  при  $\alpha = +45^\circ$  для диагонали AC будет  $< 0$  и она примет максимальное значение, а диагональ BD, соответственно, минимальное значение.

Для  $\alpha = -45^\circ$  будет наоборот.

**3.2.4.** Относительные удлинения большой и малой осей эллипса будут происходить в направлении главных напряжений. Найдем величины и направления главных напряжений (рис. 3.10). При плоском напряженном состоянии

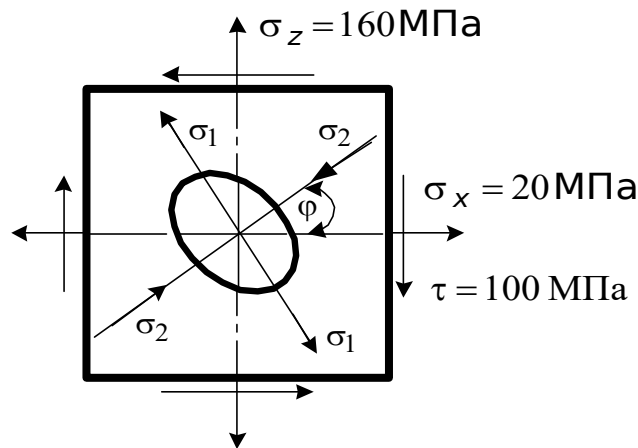


Рис. 3.10. К задаче 3.2.4

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{20 + 160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 - 160}{2}\right)^2 + 100^2} = 90 \pm 122 = \begin{cases} 212 \text{ МПа} \\ -32 \text{ МПа} \end{cases}.$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_z} = -\frac{2 \cdot 100}{20 - 160} = 1,43, \quad 2\varphi = 55^\circ.$$

$$\varphi_1 = 27^\circ 30', \quad \varphi_2 = 27^\circ 30' + 90^\circ = 117^\circ 30'.$$

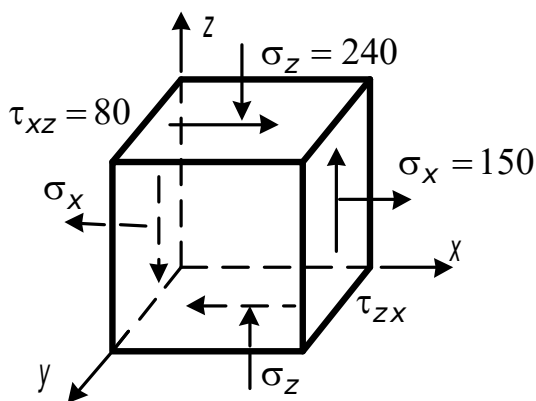
Первое направление  $\sigma_{\min}$ , второе —  $\sigma_{\max}$ . Направление  $\sigma_{\max}$  всегда проходит через две четверти осей координат, в которых стрелки ка-

сательных напряжений сходятся. В этих же направлениях будут происходить и главные деформации, образуя большую и малую оси эллипса. Большой оси эллипса соответствует угол  $\varphi = 117^{\circ}30'$ , малой –  $27^{\circ}30'$ . Относительные деформации найдем, используя зависимости закона Гука при плоском напряженном состоянии:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{212 + 0,3 \cdot 32}{2 \cdot 10^5} = 1,1 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = - \frac{32 + 0,3 \cdot 212}{2 \cdot 10^5} = -0,48 \cdot 10^{-3}.$$

**3.2.5.** По площадкам, перпендикулярным оси «У», касательные напряжения равны нулю, значит они – главные. Нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, будут главными. Но так как по этим площадкам нормальные напряжения равны нулю, значит, одно из искомых



главных напряжений равно нулю, а заданное напряженное состояние является плоским (рис. 3.11).

Найдем положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2 \tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} = - \frac{2(-80)}{150 - (-240)} = 0,41,$$

Рис. 3.11. К задаче 3.2.5

$$2\alpha_0 = 22^{\circ} 20', \quad \alpha_0 = 11^{\circ} 10'.$$

Таким образом, одна главная площадка к оси X будет наклонена под углом  $\alpha_0 = 11^{\circ} 10'$ , а вторая –  $\alpha_0 + 90^{\circ} = 101^{\circ} 10'$ .

Величины главных напряжений

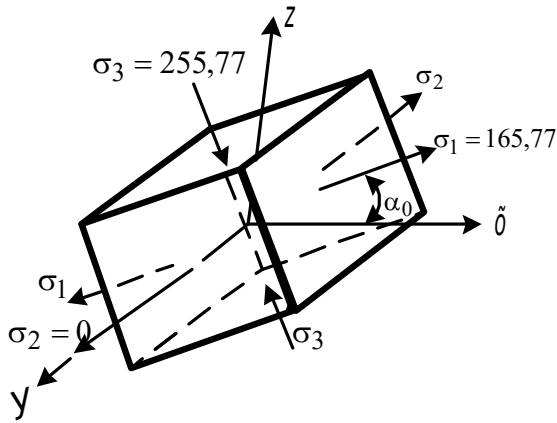
$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \\ &= \frac{150 - 240}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(150 + 240)^2 + 4 \cdot 80^2} = \\ &= -45 \pm 210,77 = \begin{cases} 165,77 \text{ МПа,} \\ -255,77 \text{ МПа.} \end{cases} \end{aligned}$$

С учетом ранее отмеченного главные напряжения ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  – алгебраически) имеют следующие значения (рис. 3.12):

$$\sigma_1 = 165,77 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -255,77 \text{ МПа}.$$

Положения главных площадок

$$\ell_1 = \cos(v_1, x) = \cos 11^\circ 10' = 0,981, \quad m_1 = \cos(v_1, y) = \cos 90^\circ = 0, \\ n_1 = \cos(v_1, z) = \cos 78^\circ 50' = 0,194.$$



$$\ell_2 = \cos(v_2, x) = \cos 90^\circ = 0, \\ m_2 = \cos(v_2, y) = \cos 0^\circ = 1, \\ n_2 = 0,$$

$$\ell_3 = \cos(v_3, x) = \cos 101^\circ 10' = -0,194, \quad \text{Рис. 3.12. К задаче 3.2.5} \\ m_3 = \cos(v_3, y) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$n_3 = \cos(v_3, z) = \cos 11^\circ 10' = 0,981.$$

**3.2.6.** Найдем напряжение по граням, соприкасающимся с плитами А и В. Обозначим напряжение  $p_1$  через  $\sigma_x$ ,  $p_2$  через  $\sigma_y$ . Условием для определения напряжения, возникающего по граням А и В, будет равенство нулю относительной деформации, направленной перпендикулярно к плитам А и В –  $\varepsilon_z = 0$ . Воспользуемся обобщенным законом Гука (рис. 3.13):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0.$$

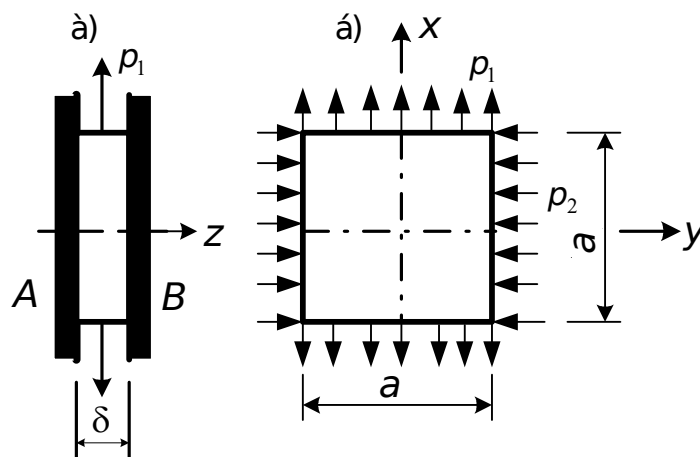


Рис. 3.13. К задаче 3.2.6

Отсюда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0,25(80 - 200) = -30 \text{ МПа}.$$

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  являются главными, так как по этим же площадкам отсутствуют касательные напряжения. Их согласно принятому условию  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  алгебраически обозначим  $\sigma_1 = 80$  МПа;  $\sigma_2 = -30$  МПа;  $\sigma_3 = -200$  МПа.

Используя обобщенный закон Гука, найдем главные деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [80 - 0,25(-30 - 200)] = \\ &= 68,75 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-200 - 0,25(80 - 30)] = \\ &= -106,25 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 68,75 \cdot 10^{-5} + 0 - 106,25 \cdot 10^{-5} = -37,5 \cdot 10^{-5}.$$

**3.2.7.** Используем формулу для определения линейных деформаций по произвольному направлению:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m.$$

На основании этой формулы составим систему уравнений деформаций для розетки (рис. 3.7) с учетом показаний соответствующих датчиков:

$$2 \cdot 10^{-4} = 0,6^2 \varepsilon_x + 0,8^2 \varepsilon_y + 0,6 \cdot 0,8 \gamma_{xy},$$

$$-1 \cdot 10^{-4} = (-0,6)^2 \varepsilon_x + 0,8^2 \varepsilon_y + (-0,6) \cdot (0,8) \gamma_{xy},$$

$$4 \cdot 10^{-4} = (-1)^2 \varepsilon_x + (0)^2 \varepsilon_y + (-1) \cdot (0) \gamma_{xy}.$$

Решая систему, найдем

$$\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_y = -1,47 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma_{xy} = 3,13 \cdot 10^{-4}.$$

Вычисляем величины и направление главных деформаций:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} =$$

$$= \left[ \frac{4 - 1,47}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 1,47)^2 + 3,13^2} \right] \cdot 10^{-4} = \begin{cases} 4,416 \cdot 10^{-4}; \\ -1,886 \cdot 10^{-4}, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{3,13 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4} + 1,47 \cdot 10^{-4}} = 0,572,$$

$$2\alpha \approx 33,1^\circ, \quad \alpha = 16^\circ 33'.$$

Зная главные деформации, определяем и главные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(4,416 - 0,3 \cdot 1,886) \cdot 10^{-4} = 84,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(-1,886 + 0,3 \cdot 4,416) \cdot 10^{-4} = -12,3 \text{ МПа}.$$

*Вариант решения.*

Начало решения до определения деформаций по осям  $X, Y$  будет таким же:

$$\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_y = -1,47 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma_{xy} = 3,13 \cdot 10^{-4}.$$

Продолжая решение, по закону Гука найдем компоненты напряженного состояния:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(4 - 0,3 \cdot 1,47) \cdot 10^{-4} = 78,2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(-1,47 + 0,3 \cdot 4) \cdot 10^{-4} = -5,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} \cdot \frac{1-0,3}{2} \cdot 3,13 \cdot 10^{-4} = 24,1 \text{ МПа}.$$

Вычисляем главные напряжения и направления главных осей:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{78,2 - 5,9}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(78,2 + 5,9)^2 + 4 \cdot 24,1^2} = \begin{cases} 84,6 \text{ МПа}, \\ -12,3 \text{ МПа}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 24,1}{78,2 + 5,9} = 0,573,$$

$$2\alpha \approx 33,1^\circ, \quad \alpha = 16^\circ 33'.$$

Варианты решения почти одинаковые во всех отношениях.

## Раздел 4

**4.2.1.** Из условий равновесия определяем реакции опор коленчатого стержня (рис. 4.9):

$$1) \sum Y = 0, \quad R_a - F = 0, \quad R_a = F;$$

$$2) \sum M_b = 0, \quad F \cdot \ell - H_a \cdot \ell = 0, \quad H_a = F;$$

$$3) \sum X = 0, \quad -H_a + H_b = 0, \quad H_b = H_a = F.$$

Усилие, возникающее в болте опоры А, будет равно геометрической сумме реакций опоры А

$$Q = \sqrt{R_a^2 + H_a^2} = \sqrt{F^2 + F^2} = F \sqrt{2}.$$

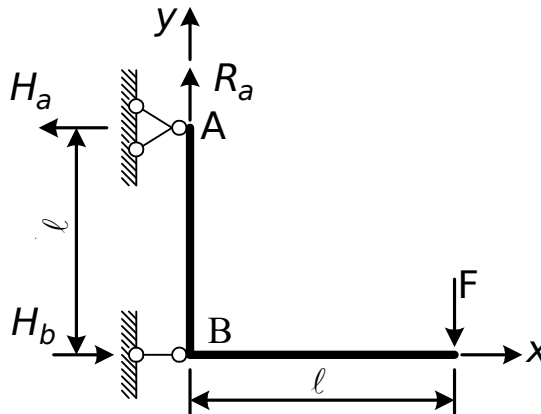


Рис. 4.9. К задаче 4.2.1

Условие прочности болта при срезе

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} = \frac{4Q}{\pi d^2 m} \leq [\tau],$$

где  $m$  – количество плоскостей среза.

Болт срезается по двум плоскостям –  $m = 2$ . Отсюда определяем диаметр поперечного сечения болта:  $d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi m [\tau]}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}F}{\pi [\tau]}}$ .

**4.2.2.** Для определения опорных крутящих моментов запишем уравнения равновесия:

$$1) \sum M_x = 0;$$

$$M_a + M_{\text{кр}} - 2M_{\text{кр}} + M_c = 0,$$

$$M_a + M_c = M_{\text{кр}}. \tag{4.1}$$

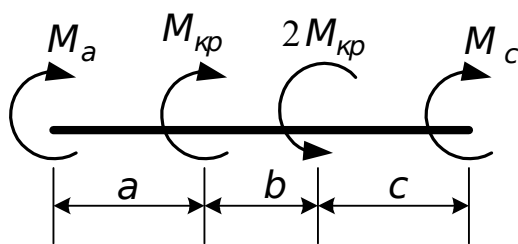


Рис. 4.10. К задаче 4.2.2

Задача статически неопределима – уравнение одно, а неизвестных два. Для ее решения составляем второе уравнение – совместности деформаций. Например, угол закручивания от действия опорного крутящего момента  $M_c$  и заданных внешних крутящих моментов должен быть равен нулю, так как в конце «С» имеется опора:

$$2) \varphi_c = 0. \quad (4.2)$$

Раскрываем это уравнение, записывая выражения для углов закручивания,

$$\frac{M_c(a+b+c)}{GJ_\rho} - \frac{2M_{кр}(a+b)}{GJ_\rho} + \frac{M_{кр}a}{GJ_\rho} = 0.$$

Откуда

$$M_c = M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c}. \quad (4.3)$$

Условие равнопрочности вала на участках  $c$  и  $b$  при одинаковых материале и поперечном сечении будет соответствовать равенству абсолютных значений крутящих моментов на этих участках

$$|M_c| = |M_b|. \quad (4.4)$$

Крутящий момент на участке «с» равен опорному моменту  $M_c$ . На участке «b»

$$\begin{aligned} M_b &= M_c - 2M_{кр} = M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c} - 2M_{кр} = \\ &= -M_{кр} \frac{a+2c}{a+b+c}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя в выражение (4.4) значения крутящих моментов из выражений (4.3) и (4.5), имеем

$$M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c} = M_{кр} \frac{a+2c}{a+b+c}.$$

Откуда следует, что равнопрочность будет обеспечена, если длины участков «b» и «с» будут одинаковыми, т. е.  $b = c$ .

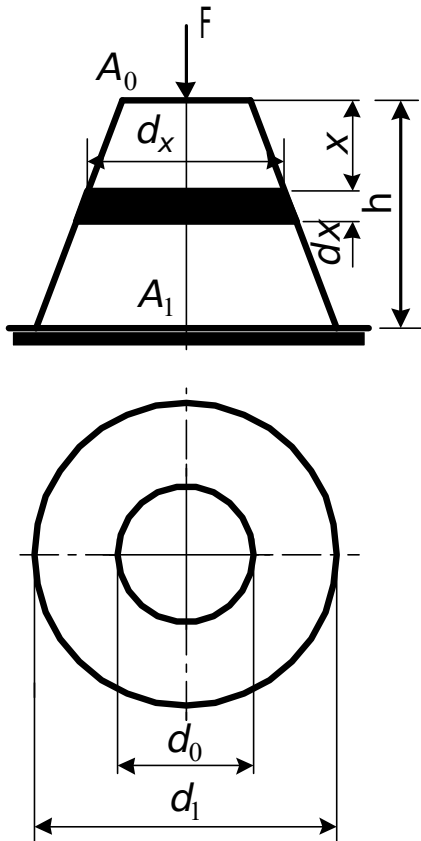




## РЕШЕНИЯ

### Раздел I

1.2.1. Обозначим диаметр верхнего сечения через  $d_0$ , тогда площадь



сечения будет равна  $A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ .

Для нижнего сечения с диаметром  $d_1$  будем иметь  $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$  (рис. 1.11).

Возьмем элемент  $dx$  на расстоянии  $x$  от свободного конца усеченного конуса. Площадь поперечного сечения этого элемента обозначим  $A_x$  и запишем ее значение через диаметр  $d_x$

$$A_x = \frac{\pi d_x^2}{4}.$$

Выразим диаметр сечения  $d_x$  через известные диаметры  $d_0$  и  $d_1$

$$d_x = d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x.$$

Укорочение элемента  $dx$  под

Рис. 1.11. К задаче 1.2.1

действием силы  $F$  будет равно по закону Гука

$$\Delta dx = \frac{F dx}{EA_x} = \frac{4F dx}{E\pi \left( d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x \right)^2}.$$

Полное укорочение опоры найдем, интегрируя  $\Delta dx$ ,

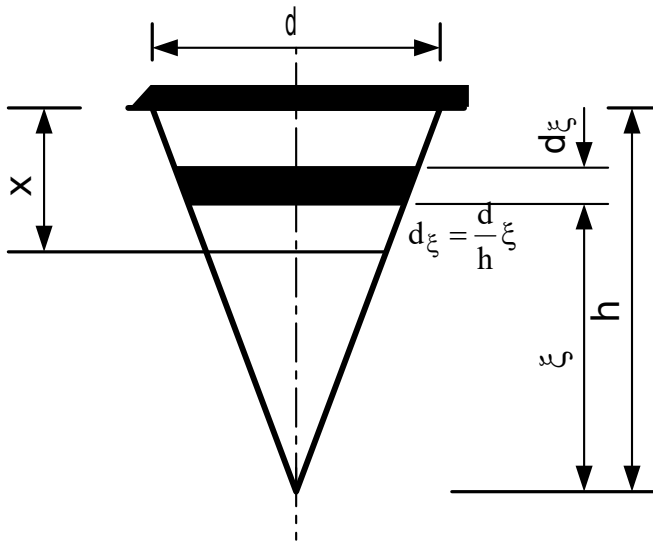
$$\begin{aligned} \Delta h &= \int_0^h \Delta dx = \frac{4Fh}{\pi E} \int_0^h \frac{dx}{\left( d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x \right)^2} = - \frac{4Fh}{\pi E (d_1 - d_0)} \cdot \frac{1}{d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x} \Bigg|_0^h = \\ &= \frac{4Fh}{\pi E (d_1 - d_0)} \left( - \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_0} \right) = \frac{4Fh}{\pi E d_1 d_0} = \frac{Fh}{E \sqrt{A_0 A_1}}. \end{aligned}$$

*Примечание.* Интеграл взят из работы [11, с. 341] для случая  $x = ax + b$  и  $n = -2$ .

$$\int x^n dx = \frac{1}{a(n+1)} x^{n+1} \quad (n \neq -1).$$

1.2.2. Вес бруса равняется (рис. 1.12)

$$Q = \gamma V_k = \gamma \frac{\pi d^2 h}{4 \cdot 3}.$$



Для какого-либо поперечного сечения на расстоянии  $\xi$  от нижнего конца бруса растягивающее усилие, равное весу нижней части бруса, будет

$$\begin{aligned} Q_\xi &= \frac{Q \xi^3}{h^3} = \gamma \frac{\pi d_\xi^2}{4} \cdot \frac{\xi}{3} = \\ &= \gamma \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\xi^3}{3h^2}. \end{aligned}$$

Рис. 1.12. К задаче 1.2.2

Полагая, что растягивающие напряжения равномерно распределены по поперечному сечению (такое допущение справедливо, когда угол конуса мал), и рассматривая элемент длиной  $d_\xi$  как призматический брусок,

находим удлинение этого элемента  $\Delta d_\xi = \frac{Q_\xi d_\xi}{E A_\xi} = \frac{\gamma \xi d_\xi}{3E}$

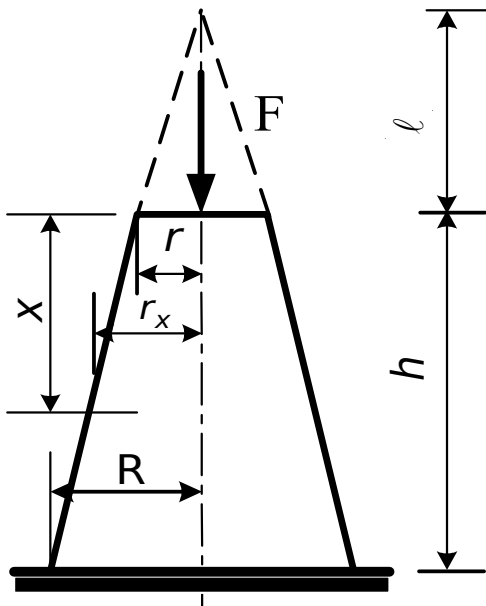
и удлинение бруса длиной  $X$ , отсчитываемого от закрепленного основания,

$$\Delta x = \frac{\gamma}{3E} \int_{h-x}^h \xi d_\xi = \frac{\gamma}{3E} \cdot \frac{\xi^2}{2} \Big|_{h-x}^h = \frac{\gamma x (2h - x)}{6E}.$$

Это и есть зависимость между перемещением произвольного поперечного сечения и расстоянием от закрепленного основания.

1.2.3. Дополним усеченный конус до полного и обозначим эту длину через  $\ell$  (рис. 1.13).

Напряжение в сечении на расстоянии  $X$  от верха усеченного конуса будет



$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F + G_x}{A_x} = \frac{F}{A_x} + \frac{G_x}{A_x} = \\ &= \frac{F}{\pi r_x^2} + \frac{\gamma}{3}(\ell + X) = \frac{\gamma}{3} \frac{r^2 \ell}{r_x^2}. \end{aligned}$$

Выразим радиус  $r_x$  через

$$r \frac{\ell + X}{\ell} = \frac{r_x}{r} \quad \text{или} \quad r_x = \frac{\ell + X}{\ell} r.$$

Рис. 1.13. К задаче 1.2.3

Тогда 
$$\sigma_x = \frac{F}{\pi r^2} \frac{\ell^2}{(\ell+x)^2} + \frac{\gamma}{3}(\ell+x) - \frac{\gamma}{3} \frac{\ell^3}{(\ell+x)^2}.$$

Найдем сечение с экстремальным значением напряжения, для чего первую производную от  $\sigma_x$  по  $X$  приравняем к нулю

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{F\ell^2}{\pi r^2} \frac{2(\ell+x)}{(\ell+x)^4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma\ell^3}{3} \frac{2(\ell+x)}{(\ell+x)^4} = 0.$$

Так как  $\ell+x \neq 0$ , сократим все на  $\frac{\gamma}{3(\ell+x)^3}$  и получим

$$-\frac{6F\ell^2}{\gamma\pi r^2} + (\ell+x)^3 + 2\ell^3 = 0.$$

Откуда

$$\ell + x = \sqrt[3]{\frac{6F\ell^2}{\pi\gamma r^2} - 2\ell^3}. \quad (1.2)$$

Вынесем из-под радикала  $\ell$ , заменим  $\ell$  из соотношения  $\ell = \frac{hr}{R-r}$  и найдем  $X$ :

$$x = \frac{hr}{R-r} \left( \sqrt[3]{\frac{6F(R-r)}{\pi\gamma hr^3} - 2} - 1 \right). \quad (1.3)$$

Действительным будет значение  $X > 0$ , откуда

$$F > \frac{\pi\gamma r^3 h}{2(R-r)}. \quad (1.4)$$

Из формулы (1.2), учитывая формулу (1.1) и делая преобразования, найдем выражение для определения радиуса  $r_x$  в сечении  $X$ :

$$r_x = r \sqrt[3]{\frac{6F(R-r)}{\pi\gamma hr^3} - 2}.$$

Исследуем, будет ли  $X$ , полученное по формуле (1.3), соответствовать сечению с  $\min \sigma_x$ , для чего возьмем вторую производную от  $\sigma_x$  по  $X$ , используя найденное значение первой производной,

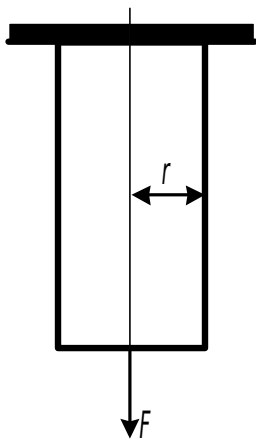
$$\frac{d^2\sigma_x}{dx^2} = \left( -\frac{\gamma\ell^3}{3} + \frac{F\ell^2}{\pi r^2} \right) \frac{6}{(\ell+x)^4}.$$

При  $\min \frac{d^2\sigma_x}{dx^2} > 0$ . Так как  $(\ell+x)^4$  при любом  $X$  – величина положительная, следовательно, должно быть  $\left( \frac{F\ell^2}{\pi r^2} - \frac{\gamma\ell^3}{3} \right) > 0$ .

Делая преобразования, подобные ранее рассмотренным, получаем условие  $\min$  при  $F > \frac{\gamma\pi r^3}{3} \frac{h}{R-r}$ .

Так как условие существования решения выражения (1.4) дает значение  $F$  больше, чем условие  $\min$ , следовательно, имеем в сечении  $X$  минимальное значение напряжения.

**1.2.4.** Коэффициент Пуассона  $\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$  (рис. 1.14), где  $\varepsilon'$  – относительное изменение (уменьшение) попереч-

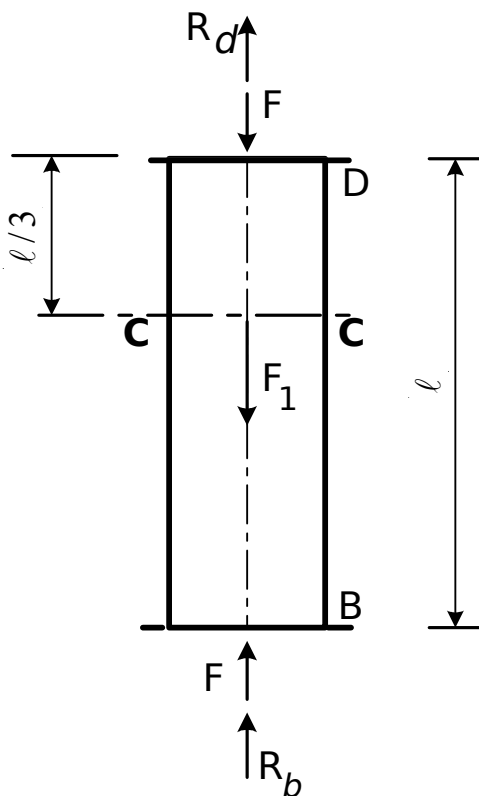


ного сечения  $\varepsilon' = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$ ;  $\varepsilon$  – относительное удлинение стержня  $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{F_2 - F_1}{E \pi r_1^2}$ .

Следовательно,  $\nu = \frac{r_1 - r_2}{F_2 - F_1} E \pi r_1$ .

Рис. 1.14. К задаче 1.2.4

**1.2.5.** От предварительного сжатия стержня силой  $F$  реакции в опорах  $D$  и  $B$  будут равны  $F$  и противоположно направлены (рис. 1.15). При приложении в сечении  $C-C$  силы  $F_1$  к прежним реакциям присоединятся реакции, вызванные этой силой,  $-R_d$  и  $R_b$ . Для нахождения этих реакций составим уравнение равновесия:  $\sum X = 0$ ;  $R_d + R_b + F_1 = 0$ . А так как задача по отысканию реакций статически неопределима (две реакции; одно уравнение равновесия), составим дополнительное уравнение совместности деформаций, исходя из равенства деформации частей стержня выше и ниже сечения  $C-C$ , т. е.



$\Delta \ell_v = \Delta \ell_n$ .

Верхние деформации будут вызываться внутренними силами, равными  $R_d$ , а нижние  $-R_b$ . В соответствии с законом Гука имеем

$$\frac{R_d \frac{\ell}{3}}{EA} = \frac{R_b \frac{2}{3} \ell}{EA}, \text{ откуда } R_d =$$

$2 R_b$ .

Рис. 1.15. К задаче 1.2.5

Теперь из уравнения равновесия выражаем реакции через силу  $F_1$  :

$$R_d = \frac{2}{3} F_1, \quad R_b = \frac{1}{3} F_1 .$$

Присоединим эти значения реакций к прежним от предварительного сжатия силой  $F$  .

$$\text{Верхняя реакция } R_{\text{верхн}} = R_d - F = \frac{2}{3} F_1 - F ,$$

$$\text{нижняя реакция } R_{\text{нижн}} = R_b + F = \frac{1}{3} F_1 + F .$$

Напряжения в верхней части будут возникать от продольной силы, равной  $R_{\text{верхн}}$ , а в нижней -  $R_{\text{нижн}}$ . Ввиду того что площадь поперечного сечения постоянна, следовательно, равенству напряжений будет соответствовать равенство реакции, т. е.

$$R_{\text{верхн}} = R_{\text{нижн}} ,$$

$$\text{или } \frac{2}{3} F_1 - F = \frac{1}{3} F_1 + F , \text{ откуда } F_1 = 6 F .$$

**1.2.6.** При понижении температуры стержень стремится сократить длину, чему препятствуют опоры (рис. 1.16). В результате этого в опорах возникают реакции. Для их определения составляем уравнение равновесия:  $\sum X = 0, R_b - R_c = 0, R_b = R_c = R$ .

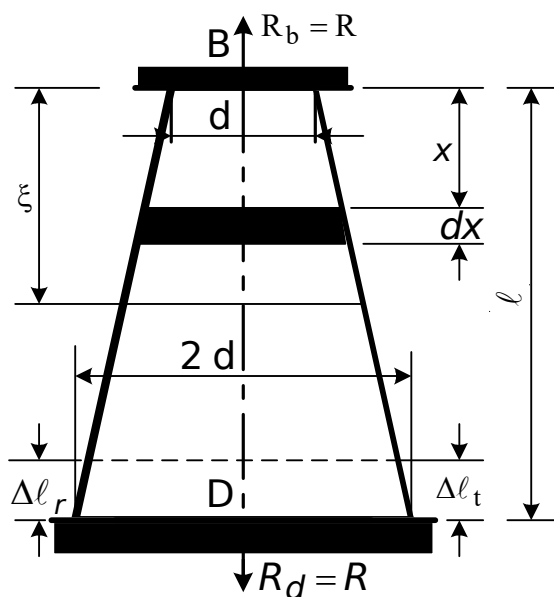


Рис.1. 16. К задаче 1.2.6

Отсюда мы узнали, что реакции в опорах равны, а величины их вычислить не можем. Значит, задача статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости составляем дополнительное уравнение совместности деформаций. Допустим, что опора D снята, тогда под действием температуры стержень укоротится на величину  $\Delta l_t = \alpha_t l t$ . Но так как опора на самом деле существует, к стержню надо приложить такую величину силы, равной реакции, чтобы длина стержня осталась неизменной, т.е. сила должна удлинить стержень на

$$\text{величину } \Delta l_r = \Delta l_t \text{ (рис. 1.16).} \quad (1.5)$$

Это и есть уравнение совместности деформаций. Теперь выразим перемещение  $\Delta l_r$  в явной форме через реакцию  $R$ . Двумя сечениями на расстояниях от опоры B  $X$  и  $x+dx$  вырежем элемент длиной  $dx$  и запишем его удлинение под действием продольной силы, равной реакции  $R$  :

$$\Delta d x = \frac{R d x}{E A_x} = \frac{4 R d x}{\pi E d_x^2} = \frac{R l^2 d x}{E A_b (l + x)^2}, \quad (1.6)$$

где из пропорции  $\frac{2d - d}{l} = \frac{d_x - d}{x}$   $d_x = \frac{d}{l}(l + x)$ .

Найдем удлинение стержня от реакции на длине  $\xi$ , которое может быть использовано для решения как первого, так и второго пунктов задачи. Для этого проинтегрируем выражение (1.6) в пределах от 0 до  $\xi$ :

$$\Delta l_{\xi r} = \int_0^{\xi} \frac{R l^2 d x}{E A_b (l + x)^2} = \frac{R l^2}{E A_b} \cdot \int_0^{\xi} \frac{d x}{(l + x)^2} = \frac{R l^2}{E A_b} \left| -\frac{1}{l + x} \right|_0^{\xi} = \frac{R l^2}{E A_b} \cdot \frac{\xi}{l + \xi}. \quad (1.7)$$

Для решения первого пункта задачи приравняем  $\xi = l$  и раскроем уравнение совместности деформаций (1.5):

$$\frac{R l}{2 E A_b} = \alpha_t l t.$$

Откуда найдем продольную силу, действующую в сечениях бруса, которая равна реакции  $R$ :

$$N = R = 2 \alpha_t E A_b t = 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 8^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 1206 \text{ кН}.$$

Для решения второго пункта задачи рассмотрим перемещение сечения  $\xi$  под совместным действием продольной силы и температуры:

$$\Delta l_{\xi} = \Delta l_{\xi r} - \Delta l_{\xi t} = \frac{R l}{E A_b} \cdot \frac{\xi}{l + \xi} - \alpha_t \xi t = \frac{2 \alpha_t E A_b t l}{E A_b} \cdot \frac{\xi}{l + \xi} - \alpha_t \xi t = \alpha_t \cdot t \left( \frac{2 l \xi}{l + \xi} - \xi \right).$$

Чтобы найти расстояние от опоры В сечения, перемещение которого будет максимальным, первую производную (формулы 1.7) приравняем к нулю

$$\frac{d \Delta l_{\xi}}{d \xi} = \alpha_t \cdot t \left[ \frac{2 l (l + \xi) - 2 l \xi}{(l + \xi)^2} - 1 \right] = 0.$$

Откуда  $2 l^2 - (l + \xi)^2 = 0$ , или  $l \sqrt{2} = l + \xi$ .

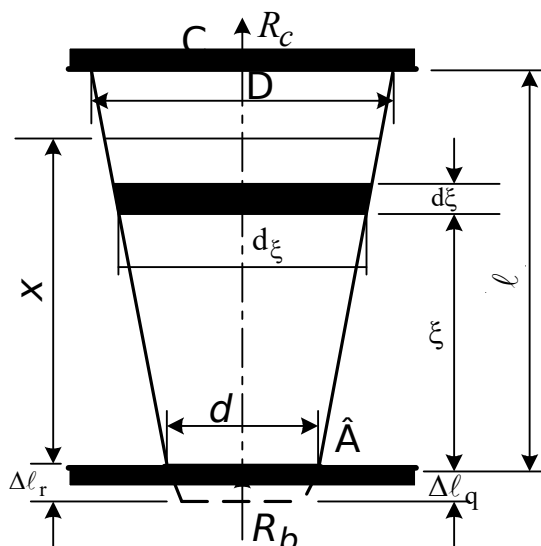
Тогда  $\xi = (\sqrt{2} - 1) l = 0,414 l = 0,414 \text{ м}$ .

**1.2.7.** Проведем два сечения на расстоянии  $\xi$  и  $d\xi$  от нижней опоры В и выразим диаметр сечения конуса  $d_{\xi}$  на уровне  $\xi$  (рис. 1.17). Из подобия треугольников

$$\frac{D - d}{2 l} = \frac{d_{\xi} - d}{2 \xi}, \quad \text{откуда}$$

$$d_{\xi} = d + \frac{D - d}{l} \xi. \quad (1.8)$$

Найдем реакции опор  $R_b$  и  $R_c$ . Их две, а уравнение равновесия только



одно -  $\sum X=0$ . Следовательно, задача статически неопределима. Необходимо составить еще одно дополнительное уравнение (совместности деформаций). Итак,

Рис. 1.17. К задаче 1.2.7

$$1) \quad \sum X = 0; \quad R_c + R_b - G = 0,$$

где  $G$  – вес усеченного конуса (вес стержня);

$$2) \quad \Delta l_q = \Delta l_r.$$

Суть второго уравнения заключается в следующем. Если отбросить нижнюю опору В, стержень под действием собственного веса удлинится на  $\Delta l_q$ . Для восстановления первоначального положения опоры В, к стержню надо приложить такую силу  $R_b$ , чтобы стержень под ее действием укоротился на  $\Delta l_r$ . Причем должно соблюдаться условие 2.

Раскроем условие 2. Для этого найдем деформацию элемента  $d\xi$  под действием продольной силы  $N_\xi$ , равной собственному весу нижней части стержня  $G_\xi$ , от которого необходимо отнять реакцию  $R_b$  нижней опоры:

$$N_\xi = G_\xi - R_b. \quad (1.9)$$

Тогда по закону Гука  $\Delta d\xi = \frac{N_\xi d\xi}{EA_\xi}$ , а полное удлинение стержня при изменении  $\xi$  от 0 до  $l$  должно быть равно нулю.

$$\Delta \xi_0^l = \int_0^l \frac{N_\xi d\xi}{EA_\xi} = \int_0^l \frac{G_\xi d\xi}{EA_\xi} - \int_0^l \frac{R_b d\xi}{EA_\xi} = \Delta l_q - \Delta l_r = 0$$

Из этого условия находим  $R_b$ :

$$R_b = \frac{\int_0^l \frac{G_\xi d\xi}{A_\xi}}{\int_0^l \frac{d\xi}{A_\xi}}. \quad (1.10)$$

Для вычисления интегралов записываем функции

$$G_\xi = \gamma V_\xi = \gamma \frac{\pi \xi}{12} \left( d^2 + d d_\xi + d_\xi^2 \right), \quad (1.11)$$

где  $V_\xi$  – объем усеченного конуса;

$$A_\xi = \frac{\pi d_\xi^2}{4}. \quad (1.12)$$

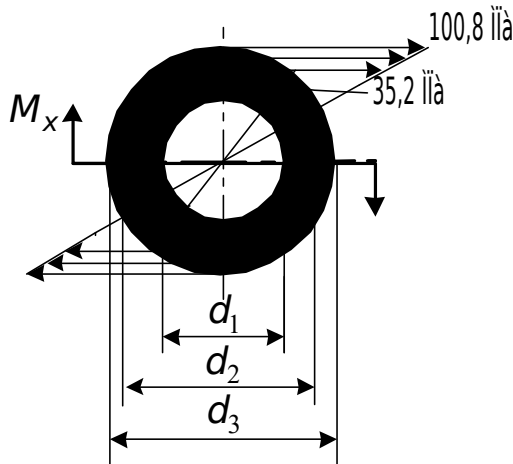
Найдем интегралы, обозначив для простоты в формуле (1.8)

$$d_\xi = d + \frac{D-d}{l} \xi = a + b \xi, \quad (1.13)$$



где  $a = d$ ,  $b = \frac{D - d}{\ell}$ .

4.2.3. Внешний крутящий момент распределяется между частями вала. Уравнение равновесия запишется:



$$1) \quad \sum M_x = 0, \\ M_{ст} + M_M - M_x = 0.$$

Здесь два неизвестных – задача статически неопределима. Составляем второе уравнение совместности деформаций. По условию относительный поворот равен нулю, т. е. относительные углы поворота сечений – одинаковы:

$$2) \quad \theta = \theta \quad \text{или}$$

Рис. 4.11. К задаче 4.2.3

$$\frac{M_{ст}}{G_{ст} J_{\rho ст}} = \frac{M_M}{G_M J_{\rho М}}, \quad \text{откуда}$$

$$M_{ст} = M_M \frac{G_{ст} J_{\rho ст}}{G_M J_{\rho М}} = M_M \frac{G_{ст}}{G_M} \cdot \frac{\pi d_3^4 \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right) \cdot 32}{32 \pi d_2^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)} = \\ = M_M \frac{8 \cdot 10^4}{3,5 \cdot 10^4} \cdot \frac{0,2^4 \left(1 - \left(\frac{0,16}{0,20}\right)^4\right)}{0,16^4 \left(1 - \left(\frac{0,08}{0,16}\right)^4\right)} = 3,51 M_M.$$

$$\text{Из уравнения равновесия 1) } 3,51 M_M + M_M = M_x,$$

$$M_M = \frac{M_x}{4,51} = \frac{120}{4,51} = 26,60 \text{ кНм.}$$

$$\text{Значит, } M_{ст} = M_x - M_M = 120 - 26,60 = 93,40 \text{ кНм.}$$

Определим максимальные напряжения в каждой части вала:

$$\tau_{\max}^M = \frac{M_M}{W_{\rho}^M} = \frac{16 M_M}{\pi d_2^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)} = \frac{16 \cdot 26,6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,16^3 \left(1 - \left(\frac{0,08}{0,16}\right)^4\right)} \cdot 10^{-6} = 35,2 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{\max}^{ст} = \frac{M_{ст}}{W_{\rho}^{ст}} = \frac{16 M_{ст}}{\pi d_3^3 \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right)} = \frac{16 \cdot 93,4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,2^3 \left(1 - \left(\frac{0,16}{0,2}\right)^4\right)} \cdot 10^{-6} = 100,8 \text{ МПа.}$$

Напряжения распределяются по линейному закону и показаны на рис. 4.11.

**4.2.4.** Вал защемлен с двух сторон. В заделках возникают опорные крутящие моменты. Для их определения можно записать только одно уравнение статики  $\Sigma M_x = 0$  (рис. 4.12). Следовательно, задача статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить дополнительное уравнение совместности деформаций. Итак, имеем

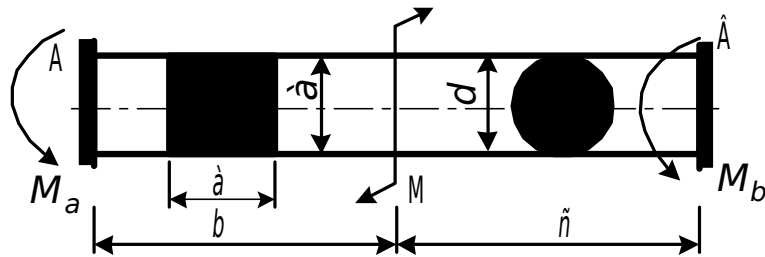


Рис. 4.12. К задаче 4.2.4

$$1) \Sigma M_x = 0, \quad M_a + M_b - M = 0 ;$$

$$2) \varphi_b = \varphi_c \quad \frac{M_a b}{G J_k} = \frac{M_b c}{G J_p}, \quad \text{откуда} \quad M_b = M_a \frac{b}{c} \cdot \frac{J_p}{J_k}.$$

Подставив в первое уравнение значение  $M_b$ , получим

$$M_a = \frac{M}{1 + \frac{b J_p}{c J_k}}. \quad \text{Тогда} \quad M_b = \frac{M \frac{b J_p}{c J_k}}{1 + \frac{b J_p}{c J_k}}.$$

Равнопрочными (равноопасными) участки будут тогда, когда максимальные касательные напряжения в их сечениях будут одинаковыми:

$$\tau_{\max}^b = \frac{M_a}{W_k}, \quad \text{где} \quad W_k = \alpha a^3 \quad - \text{ для прямоугольного сечения;}$$

$$\tau_{\max}^c = \frac{M_b}{W_p}, \quad \text{где} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad - \text{ для круглого сечения.}$$

$$\text{Из условия } \tau_{\max}^b = \tau_{\max}^c \quad \text{имеем} \quad \frac{M}{\left(1 + \frac{b J_p}{c J_k}\right) W_k} = \frac{M \frac{b J_p}{c J_k}}{\left(1 + \frac{b J_p}{c J_k}\right) W_p}.$$

$$\text{Отсюда найдем соотношение между } b \text{ и } c \quad \frac{b}{c} = \frac{W_p}{W_k} \cdot \frac{J_k}{J_p}.$$

$$\text{Подставив значения } W_p, \quad W_k, \quad J_k = \alpha a^4 \quad \text{и} \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$\text{получим} \quad \frac{b}{c} = \frac{\pi d^3}{16 \beta a^3} \cdot \frac{\alpha a^4 \cdot 32}{\pi d^4}. \quad \text{Но} \quad a = d \quad \text{и для квадратного сечения}$$

$$\beta = 0,208, \quad \alpha = 0,141 \quad (\text{см. таблицу на с. 11}). \quad \text{Тогда} \quad \frac{b}{c} = \frac{2 \cdot 0,141}{0,208} \approx 1,36.$$

4.2.5. Определяем опорные крутящие моменты (рис. 4.13). Из условия равновесия

$$1) \sum X = 0; \quad M_a + M_b - M_{кр} = 0.$$

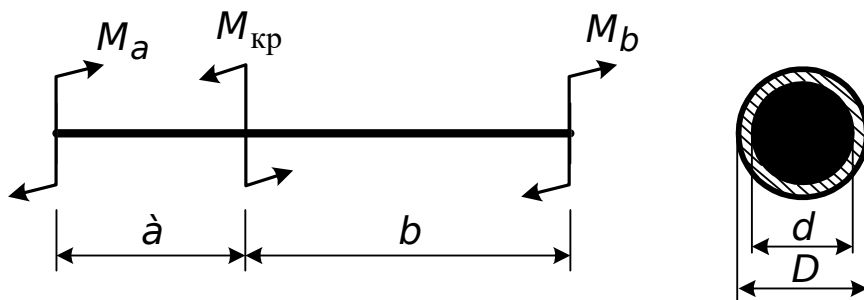


Рис. 4.13. К задаче 4.2.5

Задача статически неопределима. Составляем уравнение совместности деформаций – угол закручивания на опоре «b» равен нулю:

$$2) \varphi_b = 0.$$

Запишем это уравнение в явной форме через крутящие моменты. Учитывая, что жесткость по длине постоянна, обозначаем ее условно  $GJ_\rho$ . Итак,

$$\frac{M_b(a+b)}{GJ_\rho} - \frac{M_{кр}a}{GJ_\rho} = 0.$$

$$\text{Откуда } M_b = M_{кр} \frac{a}{a+b} = M_{кр} \frac{0,1}{0,1+0,15} = 0,4 M_{кр},$$

$$\text{а } M_a = M_{кр} - M_b = 0,6 M_{кр}.$$

Наибольший момент будет действовать на участке «a». Найдем распределение этого момента между составляющими сечения:

$$\sum X = 0, \quad M_c + M_m - 0,6 M_{кр} = 0. \quad (4.6)$$

Так как проворачивание исключено, их относительные углы поворота будут одинаковыми  $\theta_{ст} = \theta_m$  или  $\frac{M_c}{G_c J_\rho^c} = \frac{M_m}{G_m J_\rho^m}$ .

$$\begin{aligned} \text{Откуда } M_c &= M_m \frac{G_c J_\rho^c}{G_m J_\rho^m} = M_m \frac{G_c}{G_m} \frac{\pi D^4 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \cdot 32}{32 \pi d^4} = \\ &= M_m \frac{8 \cdot 10^4}{3,5 \cdot 10^4} \cdot \frac{4^4 \cdot 10^{-8} \left[1 - \left(\frac{3,2}{4}\right)^4\right]}{3,2^4 \cdot 10^{-8}} = 3,3 M_m. \end{aligned}$$

Из выражения (4.6)  $3,3 M_m + M_m - 0,6 M_{кр} = 0$  имеем

$$M_m = \frac{0,6}{4,3} M_{кр} = 0,14 M_{кр}.$$

$$\text{Тогда } M_c = 0,6 M_{кр} - 0,14 M_{кр} = 0,46 M_{кр}.$$

Определяем допускаемое значение  $M_{кр}$  из условия прочности стальной трубки:

$$\tau_c = \frac{M_c}{W_\rho^c} \leq [\tau]_c, \quad \frac{0,46 M_{кр}}{W_\rho^c} \leq [\tau]_c.$$

Откуда

$$\begin{aligned} [M_{кр}]_c &\leq \frac{W_\rho^c [\tau]_c}{0,46} = \frac{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] [\tau]_c}{16 \cdot 0,46} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,8^4) \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 0,46} = 1,29 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Аналогично – медного стержня.

$$\tau_m = \frac{M_m}{W_\rho^m} \leq [\tau]_m, \quad \frac{0,14 M_{кр}}{W_\rho^m} \leq [\tau]_m.$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда } [M_{кр}]_m &\leq \frac{W_\rho^m [\tau]_m}{0,14} = \frac{\pi d^3 [\tau]_m}{16 \cdot 0,14} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 3,2^3 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 0,14} = 1,84 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Допускаемое значение  $[M_{кр}]$  для комплексного стержня будет наименьшим из двух полученных, т. е.  $[M_{кр}] = 1,29 \text{ кНм}$ .

**4.2.6.** При нагревании стержней 1 они увеличивают свои длины и поворачивают траверсу ABC. Повороту траверсы препятствует стержень 2, который при этом испытывает деформацию кручения (рис. 4.14). В стержнях 1 возникают усилия  $R_1$ , а в стержне 2 – крутящий момент  $M_{кр}$ . Для их определения можно записать только одно уравнение статики. Незвестных же 2, значит, задача статически неопределима и необходимо составить дополнительное уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned} 1) \Sigma M_x &= 0; \quad M_{кр} - R_1 \cdot 2b = 0 \\ 2) \Delta_{1r} + \Delta_{1M} &= \Delta_{1t}, \end{aligned}$$

где  $\Delta_{1t} = \alpha_1 \ell_1 \Delta t$  – увеличение длины стержней 1 от  $t$ ;

$\Delta_{1r} = \frac{R_1 \ell_1}{E_1 A_1}$  – укорочение длин стержней 1 от возникающих в них усилий  $R_1$ ;

$\Delta_{1M} = \varphi_{кр} b$  – укорочение длин стержней 1 в результате деформации кручения стержня 2, а  $\varphi_{кр} = \frac{M_{кр} \ell}{G_2 J_k}$  – угол закручивания.

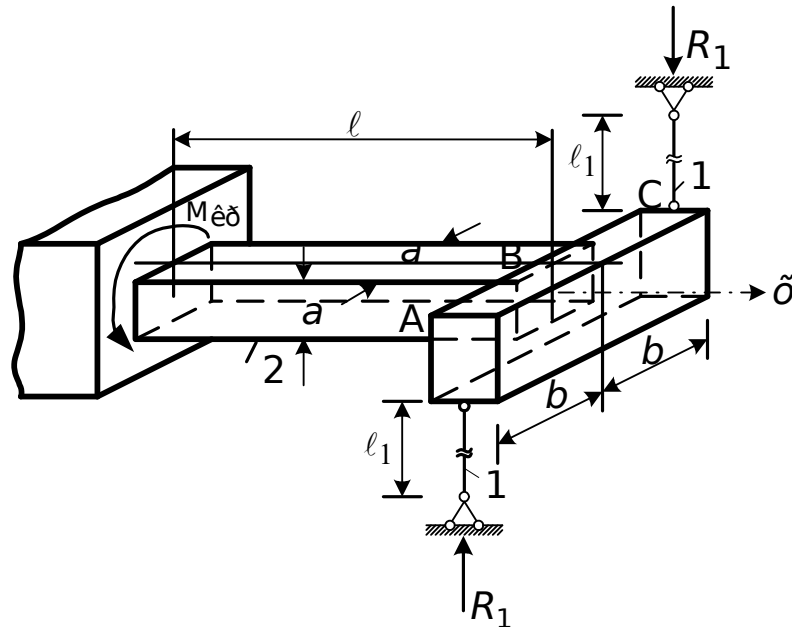


Рис. 4.14. К задаче 4.2.6

Из 1 уравнения находим  $M_{кр} = R_1 \cdot 2b$  и подставляем во 2 с учетом значений  $\Delta$ :  $\frac{R_1 \ell_1}{E_1 A_1} + \frac{R_1 2b^2 \ell}{G_2 J_k} = \alpha_1 \ell_1 \Delta t$ , откуда

$$R_1 = \frac{\alpha_1 \ell_1 \Delta t}{\frac{\ell_1}{E_1 A_1} + \frac{2b^2 \ell}{G_2 J_k}} = \frac{125 \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{\frac{400 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{2(100 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,14(40 \cdot 10^{-3})^4}} = 2,67 \text{ кН.}$$

Теперь определяем требуемое:

$$1. \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{R_1 2b}{0,21 a^3} = \frac{2,67 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{0,21(40 \cdot 10^{-3})^3} \cdot 10^{-6} = 39,73 \text{ МПа.}$$

$$2. \sigma = -\frac{R_1}{A_1} = -\frac{2,67 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -13,35 \text{ МПа.}$$

$$3. \quad \varphi_{кр} = \frac{M_{кр} \ell}{G_2 J_k} = \frac{R_1 \cdot 2bl}{G_2 \cdot 0,14 a^4} = \frac{2,67 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,14 \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= 0,0037 \text{ рад} = 0,21^\circ.$$

### Раздел 5

**5.2.1.** Построим эпюру изгибающих моментов в первой балке отдельно при действии момента, а потом – силы (рис. 5.20).

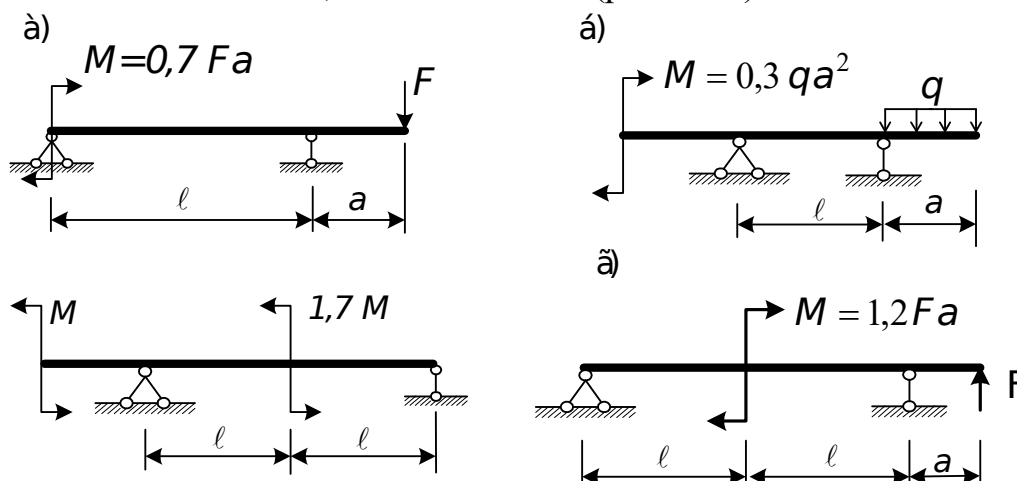


Рис. 5.20. К задаче 5.2.1

а) от момента  $M = 0,7 F a$  изгибающий момент в опорном сечении левой опоры будет равен этому моменту, а на правой опоре и во всех сечениях консоли изгибающие моменты равны нулю. Между опорами изгибающие моменты изменяются по прямой;

б) от силы  $F$  изгибающий момент на конце консоли равен нулю и в сечении над правой опорой –  $F a$ . Между ними – изменяется по прямой. На левой опоре изгибающий момент равен нулю. Между левой и правой опорами изгибающие моменты также изменяются по прямой. Теперь сложим эти две эпюры (рис. 5.21).

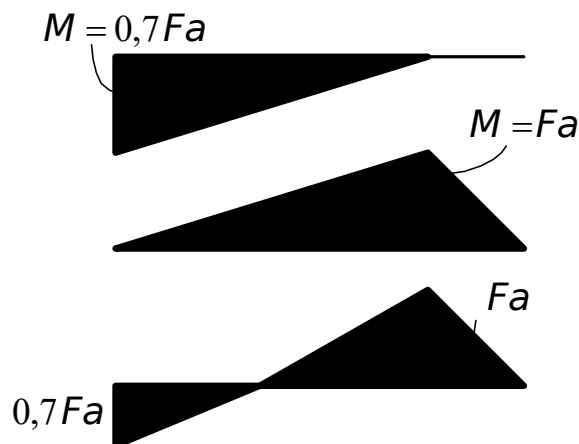


Рис. 5.21. К задаче 5.2.1

Во второй балке от момента изгибающие моменты в сечениях левой консоли одинаковы, положительны и равны этому моменту. В сечениях правой консоли – равны нулю. Между опорами – прямая.

От распределенной нагрузки нулю будут равны моменты в сечениях левой опоры. Наибольший момент над правой опорой от распределенной нагрузки  $M = -\frac{qa^2}{2}$ , на правой консоли эпюра моментов – квадратная парабола, между опорами – прямая. Складываем эпюры, приведенные на рис. 5.22.

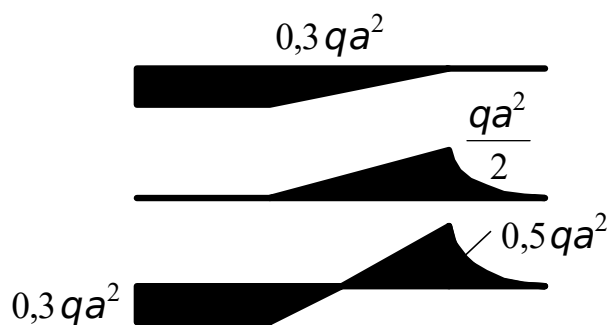


Рис. 5.22. К задаче 5.2.1

В двух других балках эпюры строятся аналогично (рис. 5.23, 5.24).

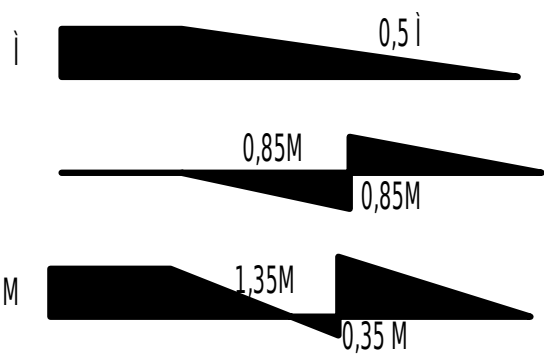


Рис. 5.23. Эпюры в третьей балке

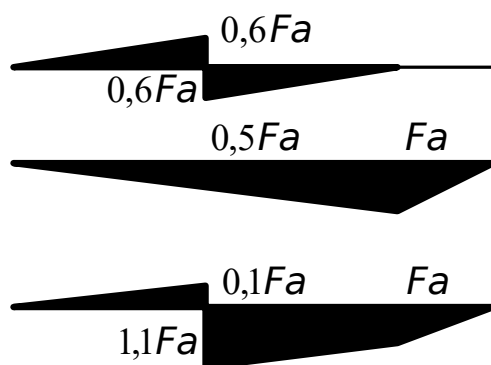
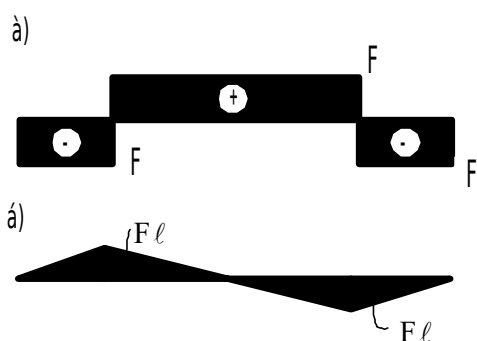


Рис. 5.24. Эпюры в четвертой балке

**5.2.2.** В сечениях, где на эпюре поперечных сил имеются «скачки»



$Q_y$

(конечные разрывы), должны действовать сосредоточенные силы (внешние или реакции опор), равные величинам конечных разрывов и направленные согласно правилу знаков  $Q$  (рис. 5.25).

$M_z$



Опорные закрепления могут быть произвольными. Например, как на рис. 5.26, а, б, в.

Рис. 5.25. К задаче 5.2.2

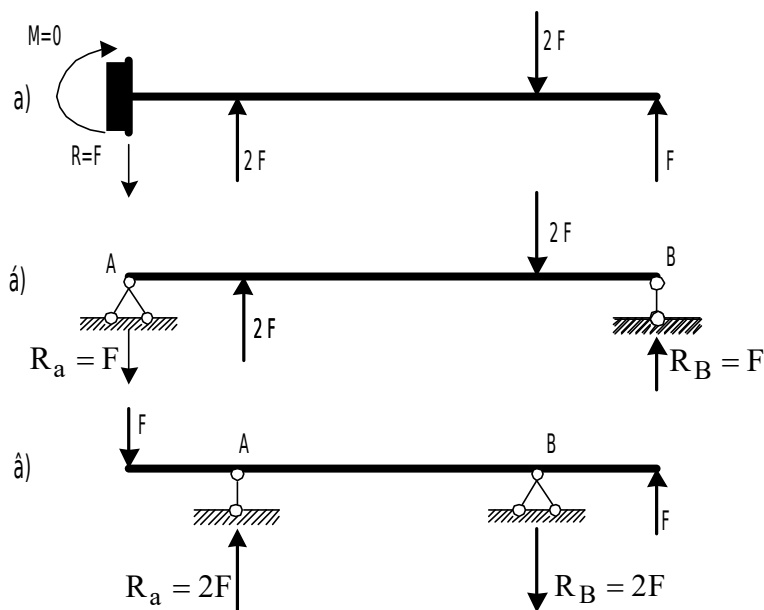


Рис. 5.26. К задаче 5.2.2

**5.2.3.** Равнодействующая параболической распределенной нагрузки  $R_q = \frac{2}{3} q_{\max} \ell = \frac{2}{3} q_0 \cdot \frac{1}{4} \ell = \frac{q_0 \cdot \ell}{6} = \frac{20 \cdot 2}{6} = 6,67$  кН и расположена по середине участка AC (рис. 5.27). Зная ее величину и положение, найдем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \quad R_b(\ell + a) - R_q \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_b = R_q \frac{\ell}{2(\ell + a)} = \\ = \frac{6,67 \cdot 2}{2(2 + 1)} = 2,22 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\text{Из } \Sigma Y = 0 \quad R_a = R_q - R_b = 6,67 - 2,22 = 4,45 \text{ кН.}$$

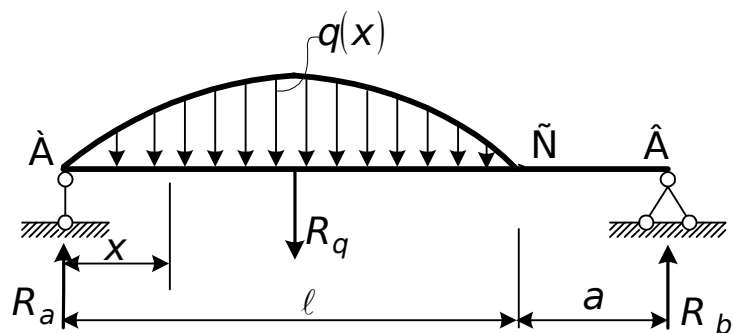


Рис. 5.27. К задаче 5.2.3

Найдем функции поперечных сил и изгибающих моментов на участке AC (рис. 5.28):

1) из  $\Sigma Y = 0$

$$Q_y = R_a - \int_0^x q(\xi) d\xi = R_a - \int_0^x q_0 \left( \frac{\xi}{\ell} - \frac{\xi^2}{\ell^2} \right) d\xi =$$

$$= R_a - \frac{q_0}{\ell^2} \left( \frac{\xi^2 \ell}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_0^x = R_a - \frac{q_0 x^2}{6 \ell^2} (3\ell - 2x).$$

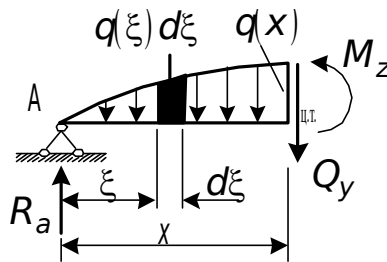


Рис. 5.28. К задаче 5.2.3

Исследуем на экстремум:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -\frac{q_0}{6\ell^2} (6x\ell - 6x^2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \ell.$$

Вычисляем ординаты для построения эпюры:

при  $x = 0$ ,  $Q_0 = R_a = 4,45$  кН,

при  $x = \ell/2$ ,  $Q_{\ell/2} = R_a - \frac{q_0 \ell}{12} = 4,45 - \frac{20 \cdot 2}{12} = 1,12$  кН,

при  $x = \ell$ ,  $Q_\ell = R_a - \frac{q_0 \ell}{6} = 4,45 - \frac{20 \cdot 2}{6} = -2,22$  кН.

На участке CB поперечная сила постоянна  $Q_b = -R_b = -2,22$  кН.  
Строим эпюру  $Q_y$ ;

2) из  $\Sigma M_{ц.т.} = 0$

$$M_z = R_a x - \int_0^x q(\xi) (x - \xi) d\xi = R_a x - \int_0^x q_0 \left( \frac{\xi}{\ell} - \frac{\xi^2}{\ell^2} \right) (x - \xi) d\xi =$$

$$= R_a x - \frac{q_0}{\ell^2} \left( \frac{\ell x \xi^2}{2} - \frac{x \xi^3}{3} - \frac{\ell \xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) \Big|_0^x =$$

$$= R_a x - \frac{q_0}{\ell^2} \left( \frac{\ell x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{\ell x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) =$$

$$= R_a x - \frac{q_0 x^3}{12 \ell^2} (2\ell - x).$$

Найдем, прежде всего, положение сечения, где возникает экстремальное значение момента:

$$\frac{dM_z}{dy} = Q = 0, \quad R_a - \frac{q_0 x^2}{6 \ell^2} (3\ell - 2x) = 0.$$

Решая это алгебраическое уравнение третьей степени каким-либо способом, в том числе можно и способом подбора, получаем  $x = 1,226$  м.

Вычисляем ординаты эпюры изгибающих моментов:

при  $x = 0$   $M_0 = 0$ ,

при  $x = 1,226$  м

$$M_{\max} = 4,45 \cdot 1,226 - \frac{20 \cdot 1,226^3}{12 \cdot 2^2} (2 \cdot 2 - 1,226) = 3,32 \text{ кНм},$$

при  $x = \ell$   $M_\ell = 4,45 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^3}{12 \cdot 2^2} (2 \cdot 2 - 2) = 2,22 \text{ кНм}.$

На опоре В  $M_b = 0$ , на участке СВ момент изменяется по линейному закону. Эпюры  $M$  и  $Q$  показаны на рис. 5.29.

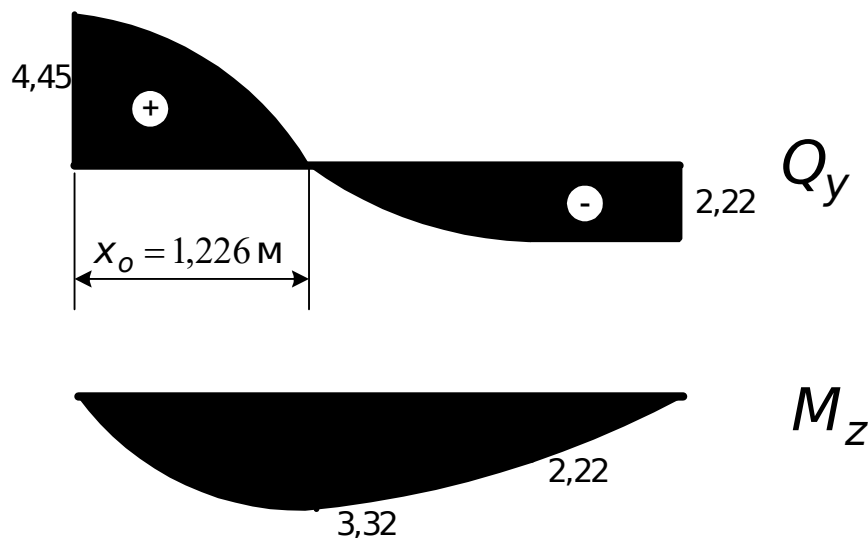
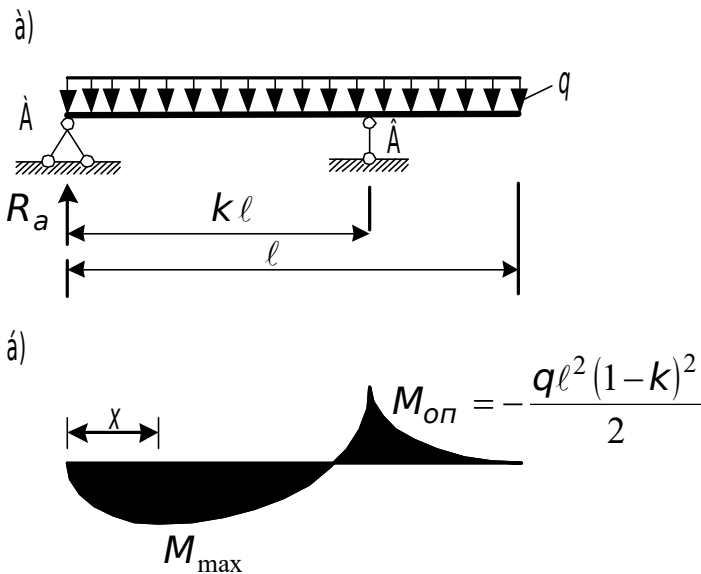


Рис. 5.29. К задаче 5.2.3

5.2.4. В балке при заданной нагрузке эпюра моментов будет иметь вид, показанный на рис. 5.30. При  $k \rightarrow 1$   $M_{оп} \rightarrow 0$ , а  $M_{max} \rightarrow \frac{q\ell^2}{8}$ .



При  $k \rightarrow 0$   $M_{оп} \rightarrow \frac{q\ell^2}{2}$ ,  
а  $M \rightarrow 0$ .

Следовательно, наименьшее значение расчетного изгибающего момента в балке будет возникать при достижении равенства  $|M_{max}| = |M_{оп}|$ .

Для  $|M_{оп}| = \frac{q\ell^2(1-k)^2}{2}$ . Для определения  $M_{max}$  найдем

Рис. 5.30. К задаче 5.2.4

реакцию  $R_a$ . Возьмем  $\Sigma M_b = 0$   $R_a k\ell - q\ell(k\ell - 0,5\ell) = 0$ , откуда  $R_a = \frac{2k-1}{2k} q\ell$ .

Положение  $x$  максимального момента найдется из условия  $\frac{dM}{dx} = 0$  или, что то же самое,  $Q = 0$ . Тогда  $R_a - qx = 0$  и  $x = \frac{R_a}{q} = \frac{2k-1}{2k} \ell$ .

$$M_{max} = R_a x - \frac{qx^2}{2} = q\ell^2 \left( \frac{2k-1}{2k} \right)^2 - \frac{q\ell^2}{2} \left( \frac{2k-1}{2k} \right)^2 = \frac{q\ell^2}{2} \left( \frac{2k-1}{2k} \right)^2.$$

Приравниваем опорный и пролетный моменты и находим «к», при котором расчетный изгибающий момент будет иметь наименьшее значение.

Итак,  $|M_{max}| = |M_{оп}|$ ,  $\frac{q\ell^2}{2}(1-k)^2 = \frac{q\ell^2}{2} \left( \frac{2k-1}{2k} \right)^2$ , откуда, сокращая обе

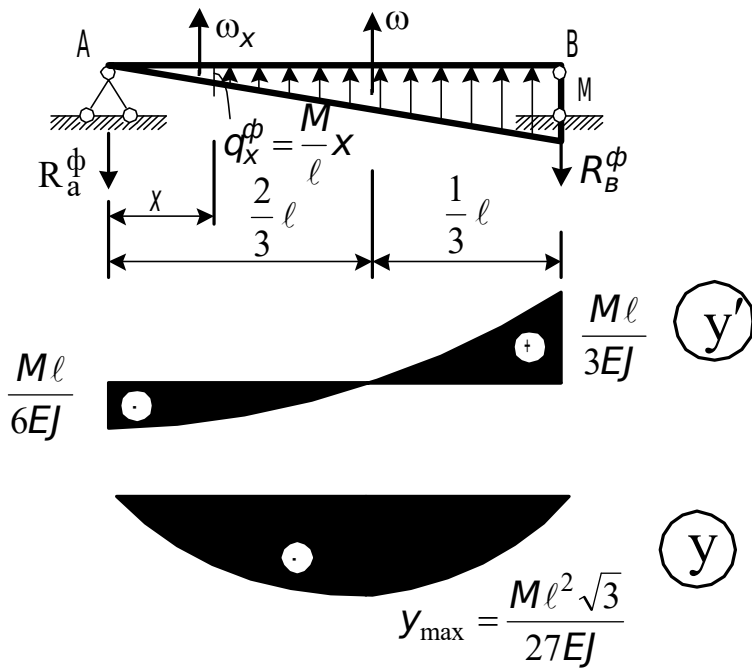
части равенства на  $\frac{q\ell^2}{2}$  и извлекая корни квадратные, получим

$1-k = \frac{2k-1}{2k}$ . Отсюда, освобождаясь от знаменателя, перенеся все на правую

сторону и сокращая, имеем  $2k^2 - 1 = 0$  и, следовательно,

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

5.2.5. Решение можно осуществить, используя различные методы для



определения перемещений. Применим графо-аналитический метод. Строим эпюру изгибающих моментов и загружаем ею, как фиктивной нагрузкой фиктивную балку. Угол поворота и прогиб действительной балки будут соответствовать фиктивным поперечной силе и изгибающему моменту, поделенным на жесткость при изгибе (рис. 5.31).

Рис. 5.31. К задаче 5.2.5

Изгибающий момент в действительной балке в опорном сечении В равен внешнему моменту, в шарнире А – равен нулю. В промежутке моменты изменяются по прямой линии.

При шарнирном опирании действительной балки фиктивная будет иметь такие же опоры. Направление фиктивной нагрузки  $q_x^{\phi}$  к оси балки. Определяем фиктивную реакцию  $R_a^{\phi}$ , фиктивную нагрузку заменяем равнодействующей  $\omega$ , приложенной в центре тяжести фиктивной нагрузки:

$$\sum M_B^{\phi} = 0, \quad R_a^{\phi} l - \omega \frac{l}{3} = 0, \quad R_a^{\phi} = \frac{\omega}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot M = \frac{M l}{6}.$$

Записываем выражения для фиктивных поперечной силы и изгибающего момента в произвольном сечении:

$$Q_x^{\phi} = -R_a^{\phi} + \omega x = -\frac{M l}{6} + \frac{1}{2} \frac{M}{l} x \cdot x = -\frac{M l}{6} \left( 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

$$M_x^{\phi} = -R_a^{\phi} x + \omega x \frac{x}{3} = -\frac{M l}{6} x + \frac{1}{2} \frac{M}{l} x^2 \frac{x}{3} = -\frac{M l x}{6} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Соответственно, угол поворота и прогиб будут определяться по формулам

$$y'_x = \frac{Q_x^{\phi}}{EJ} = -\frac{M l}{6EJ} \left( 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right); \quad y_x = \frac{M_x^{\phi}}{EJ} = -\frac{M l x}{6EJ} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Найдем их максимальные значения  $\frac{dy'_x}{dx} = 0, \quad 6 \frac{x}{l^2} = 0 \rightarrow x = 0.$

Экстремальное значение функции  $y'_x$  при  $x = 0$ , а наибольшее абсолютное

значение при  $x = \ell$   $y'_\ell = \frac{M\ell}{3}$ . Максимальное значение прогиба будет в сечении, где угол поворота  $y'_x = 0$ ,

$$-\frac{M\ell}{6EJ} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right) = 0, \quad \frac{x}{\ell} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,732}{3} = 0,577,$$

$$y_{\max} = -\frac{M\ell^2\sqrt{3}}{6 \cdot 3EJ} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{M\ell^2\sqrt{3}}{27EJ}.$$

*Вариант решения.* Ту же самую задачу можно решить, используя для определения перемещений метод начальных параметров. Предварительно найдем реакцию  $R_a$ :

$$\sum M_b = 0, \quad R_a\ell - M = 0, \quad R_a = \frac{M}{\ell}.$$

Теперь запишем уравнение начальных параметров для углов поворота и прогибов балки в произвольном сечении:

$$EJ y'_x = EJ y'_0 + R_a \frac{x^2}{2!}, \quad (5.1)$$

$$EJ y_x = EJ y_0 + EJ y'_0 x + R_a \frac{x^3}{3!}. \quad (5.2)$$

Прежде чем ими воспользуемся, найдем значения начальных параметров из условий закрепления балки:

$$\text{при } x = 0 \quad y_0 = 0.$$

$$\text{при } x = \ell \quad y_\ell = 0.$$

Один параметр уже найден – он равен нулю. Для определения другого воспользуемся уравнением (5.2) и вторым граничным условием.

$EJ y'_0\ell + R_a \frac{\ell^3}{6} = 0$ , откуда  $EJ y'_0 = -\frac{R_a\ell^2}{6} = -\frac{M\ell}{6}$ . Теперь уравнения (5.1) и (5.2) в раскрытом виде будут иметь вид

$$EJ y'_x = -\frac{M\ell}{6} + \frac{Mx^2}{2\ell} = -\frac{M\ell}{6} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right),$$

$$EJ y_x = -\frac{M\ell x}{6} + \frac{Mx^3}{6\ell} = -\frac{M\ell x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

Дальнейшее решение совпадает с первым вариантом.

**5.2.6.** Эпюра изгибающих моментов имеет вид, показанный на рис. 5.32.

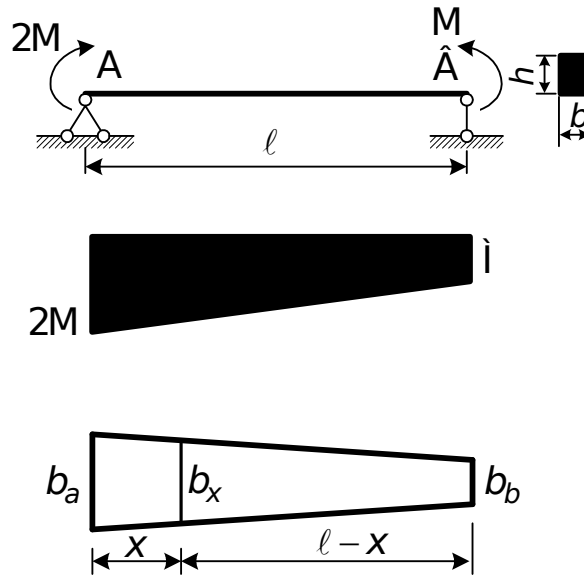


Рис. 5.32. К задаче 5.2.6

Моменты сопротивления в сечениях А и В из условия равнопрочности  $\frac{2M}{W_a} = [\sigma]$  и  $\frac{M}{W_b} = [\sigma]$  будут  $W_a = \frac{b_a h^2}{6}$ ;

$W_b = \frac{b_b h^2}{6}$ . Тогда  $b_a = \frac{12M}{[\sigma] h^2}$  и  $b_b = \frac{6M}{[\sigma] h^2}$ . Так как ширина « $b$ » зави-

сит от  $M$  в первой степени, следовательно, закон их изменения по длине балки будет линейным:

$$b_x = b_b + \frac{b_a - b_b}{l} (\ell - x).$$

**5.2.7.** При касании концами балки опор А и В углы наклона, например  $\alpha_1$  правой консоли и  $\alpha_2$  касательной к изогнутой оси балки в пролете, будут равны  $\alpha_1 = \alpha_2$ . А значит будут равны  $tq\alpha_1$  и  $tq\alpha_2$ . Но  $tq\alpha_1 = \frac{a}{\ell}$ , а  $tq\alpha_2 = y'$  (рис. 5.33).

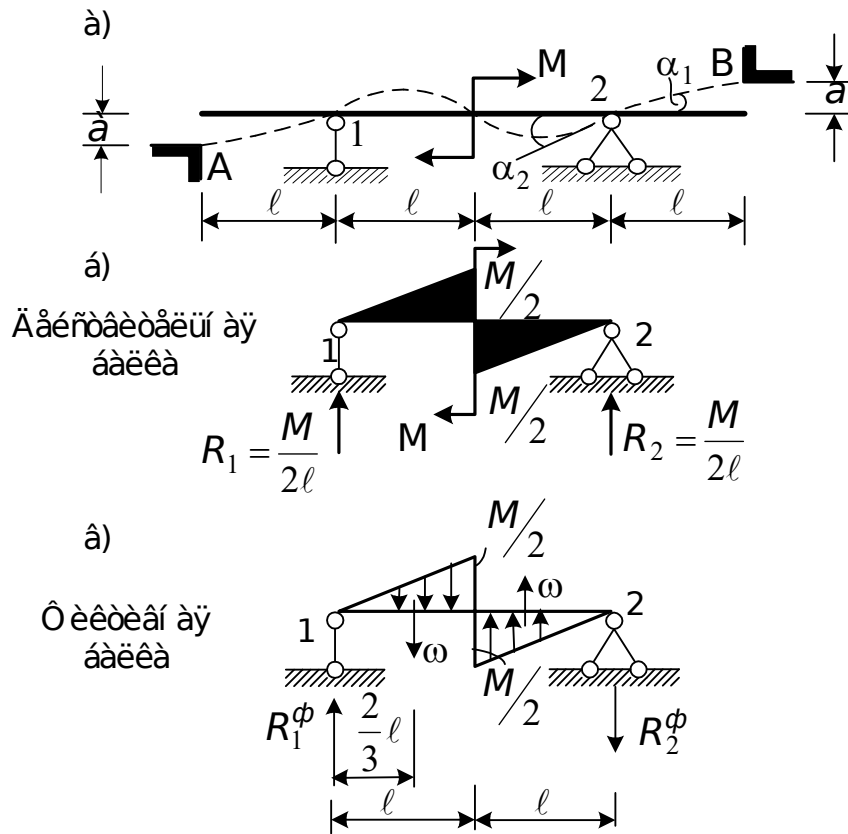


Рис. 5.33. К задаче 5.2.7

Для нахождения  $y'$  воспользуемся графоаналитическим методом. Построим эпюру  $M$  в действительной балке и загрузим ею фиктивную балку (предварительно отбросив не работающие консоли). Найдем фиктивную реакцию  $R_2^\phi$ :

$$\sum M_1^\phi = 0; \quad R_2^\phi \cdot 2l - \omega \left( l + \frac{1}{3}l \right) + \omega \cdot \frac{2}{3}l = 0,$$

$$R_2^\phi = \frac{\omega \cdot \frac{2}{3}l}{2l}; \quad \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{2} \cdot l = \frac{Ml}{4},$$

Тогда 
$$tq\alpha_2 = y' = \frac{Q_2^\phi}{EJ} = \frac{R_2^\phi}{EJ} = \frac{Ml}{12EJ}.$$

Учитывая, что

$$tq\alpha_1 = tq\alpha_2, \quad \text{имеем} \quad \frac{Ml}{12EJ} = \frac{a}{l},$$

откуда 
$$M = \frac{12aEJ}{l^2} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 \cdot 20 \cdot 10^{-8}}{400^2 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-3} = 30 \text{ кНм}.$$



**5.2.8.** Нормальное напряжение в сечении на расстоянии  $X$  от левого конца консоли  $\sigma_x = \frac{M_x}{W_x}$ , где  $M_x = F \cdot x$ ,  $W_x = \frac{\pi d_x^3}{32}$  (рис. 5.34).

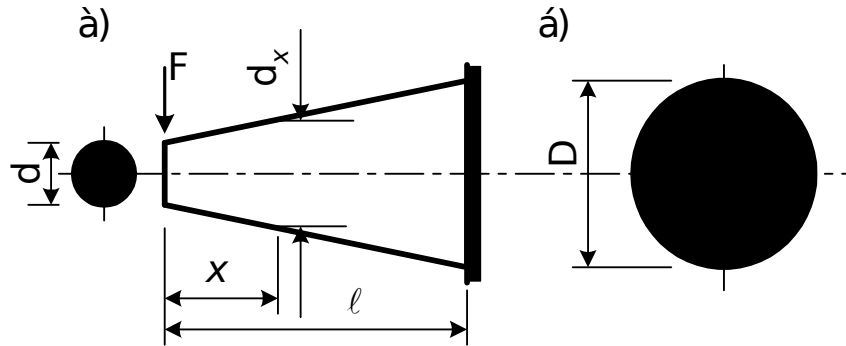


Рис. 5.34. К задаче 5.2.8

Выразим  $d_x$  через  $d$ ,  $D$  и  $D/d=2$ :

$$d_x = d + \frac{D-d}{l} \cdot x = d \left( 1 + \frac{D/d-1}{l} \cdot x \right) = d \left( 1 + \frac{x}{l} \right).$$

Учтя это, запишем  $\sigma_x = \frac{32 F x}{\pi d^3 \left( 1 + \frac{x}{l} \right)^3} = \frac{32 F l}{\pi d^3} \cdot \frac{\frac{x}{l}}{\left( 1 + \frac{x}{l} \right)^3}$  ИЛИ

$\sigma_\xi = \frac{32 F l}{\pi d^3} \cdot \frac{\xi}{(1+\xi)^3}$ , где  $\xi = \frac{x}{l}$ . Найдем положение сечения с максимальным нормальным напряжением, приравняв к нулю производную от  $\sigma_\xi$ :

$$\frac{d\sigma_\xi}{d\xi} = \frac{32 F l}{\pi d^3} \cdot \frac{(1+\xi)^3 - 3(1+\xi)^2 \xi}{(1+\xi)^6} = 0.$$

Отсюда  $(1+\xi)^2 \cdot (1+\xi-3\xi) = 0$  и действительный корень  $\xi = \frac{x}{l} = 0,5$ .

$$\text{Тогда } \sigma_{\max} = \frac{32 F l}{\pi d^3} \cdot \frac{0,5}{(1+0,5)^3} = \frac{32 F l}{6,75 \pi d^3}.$$

**5.2.9.** Вид эпюр изгибающих моментов и поперечных сил показан на рис. 5.35. Из эпюры  $Q$  следует, что поперечные силы в сечениях «к» и «с»

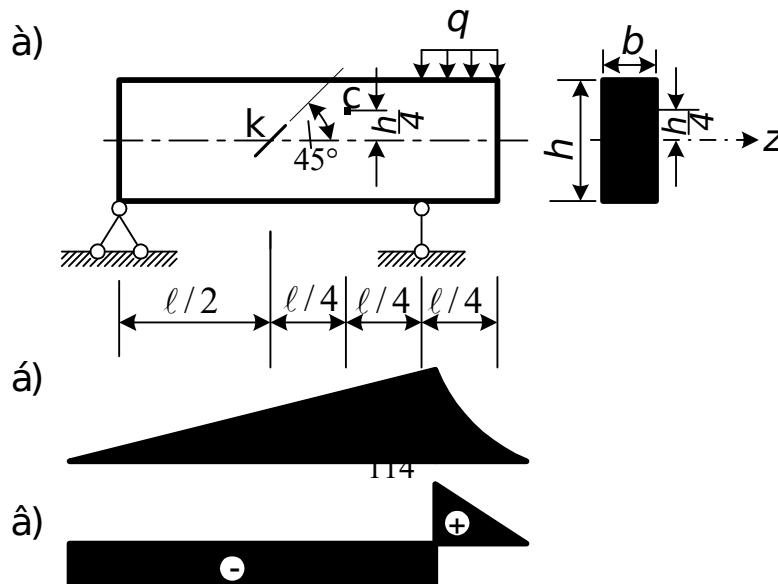


Рис. 5.35. К задаче 5.2.9

одинаковы. В точке «к» по нейтральной оси бруса возникают только касательные напряжения, а нормальные равны нулю, т. е. здесь возникает деформация чистого сдвига, где главные напряжения наклонены под углом  $45^\circ$  к нормальному сечению и равны по величине касательным  $\sigma_{\text{гл}} = \tau_{\text{max}}$ . По закону Гука  $\sigma_{\text{гл}} = \varepsilon_{45^\circ} E$ , а

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_z^{0,5}}{bJ_z} = \frac{Q \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh}.$$

Откуда найдем значение  $Q = \frac{2bh\varepsilon_{45^\circ} E}{3}$ . Тогда

$$\tau_c = \frac{QS_z^{0,25}}{bJ_z} = \frac{Qb \frac{h}{4} \left( \frac{h}{4} + \frac{h}{8} \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3 \cdot 12 \cdot Q}{32 \cdot bh} = \frac{9Q}{8bh}.$$

Подставим сюда

значение  $Q$  и получим  $\tau_c = \frac{3\varepsilon_{45^\circ} E}{4}$ .

**5.2.10.** Найдем положение нейтральной оси (рис. 5.36). Как известно, она проходит через центр тяжести сечения.  $Z_1$  – ось, проведенная через основание.

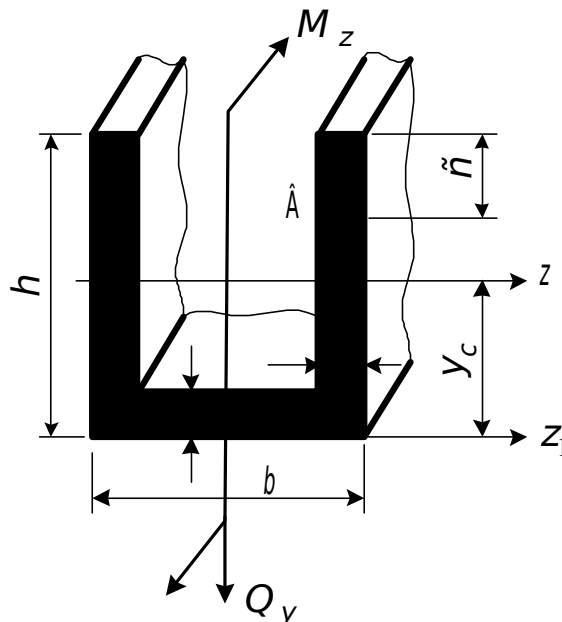


Рис. 5.36. К задаче 5.2.10

Тогда

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{2th \cdot 0,5h + (b-2t)t \cdot 0,5t}{2th + (b-2t)t} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 24 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 24 \cdot 10^{-2} + (20 - 2 \cdot 4) \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 24 \cdot 10^{-2} + (20 - 2 \cdot 4) \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 14 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Определим момент инерции сечения:

$$J_z = 2 \left( \frac{th^3}{12} + th \left( \frac{h}{2} - y_c \right)^2 \right) + \frac{(b-2t)t^3}{12} + (b-2t)t(y_c - t/2)^2 =$$

$$= 2 \left( \frac{4 \cdot 24^3}{12} + 4 \cdot 24(12 - 14)^2 \right) \cdot 10^{-8} + \frac{(20 - 2 \cdot 4) \cdot 4^3}{12} \cdot 10^{-8} +$$

$$+ (20 - 2 \cdot 4) \cdot 4(14 - 2)^2 \cdot 10^{-8} = 15328 \cdot 10^{-8} + 64 \cdot 10^{-8} + 6912 \cdot 10^{-8} =$$

$$= 22304 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Нормальные напряжения в точке В

$$\sigma_b = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{34 \cdot 10^3 \cdot (24 - 14 - 5) \cdot 10^{-2}}{22304 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 7,6 \text{ МПа.}$$

Найдем статический момент площади сечения, расположенный выше точки В:

$$S_z^{\text{отс}} = 2tc \left( h - y_c - \frac{c}{2} \right) = 2 \cdot 4 \cdot 5(24 - 14 - 2,5) \cdot 10^{-6} = 300 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Касательные напряжения в точке В

$$\tau_b = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{\delta J_z} = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 22304 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 0,047 \text{ МПа.}$$

**5.2.11.** Задача статически неопределима:  $n = C_O - 3 = 4 - 3 = 1$  (рис. 5.37). Под действием реакции  $R_c$  балка и понтон получают перемещения

$$y_r = \frac{R_c \ell^3}{48 EJ} + \frac{R_c}{S_{\text{п}} \gamma}.$$

перемещение середины балки от сосредоточенной силы      перемещение понтона ( $\gamma$  – объемный вес воды)

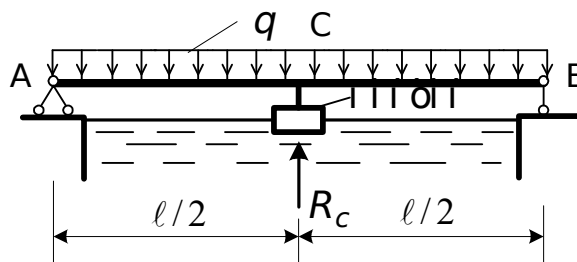


Рис. 5.37. К задаче 5.2.11

Под действием равномерно распределенной нагрузки балка прогнется и прогиб, как известно, посередине ее будет равен  $y_q = -\frac{5ql^4}{384EJ}$ . Из условия неразрывности деформаций сумма этих перемещений равна нулю  $y_r + y_q = 0$ . Из этого уравнения получим формулу для определения реакции  $R_c$ :

$$R_c \left( \frac{\ell^3}{48EJ} + \frac{1}{S_n \gamma} \right) - \frac{5ql^4}{384EJ} = 0, \quad R_c = \frac{5ql^4}{384EJ \left( \frac{\ell^3}{48EJ} + \frac{1}{S_n \gamma} \right)}.$$

Но согласно условию задачи  $R_c = 0,25ql$ . Подставим это значение в формулу для  $R_c$  и найдем необходимую величину площади понтона  $S_n$ :

$$S_n = \frac{32EJ}{\gamma \ell^3}.$$

**5.2.12.** Для определения прогиба посередине балки воспользуемся методом непосредственного интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Имеем два участка (рис. 5.38, а). За начало координат участков принимаем правые крайние их точки. Положительное направление осей  $X$ -ов для обоих участков – влево. Оси  $Y$ -ов – вниз.

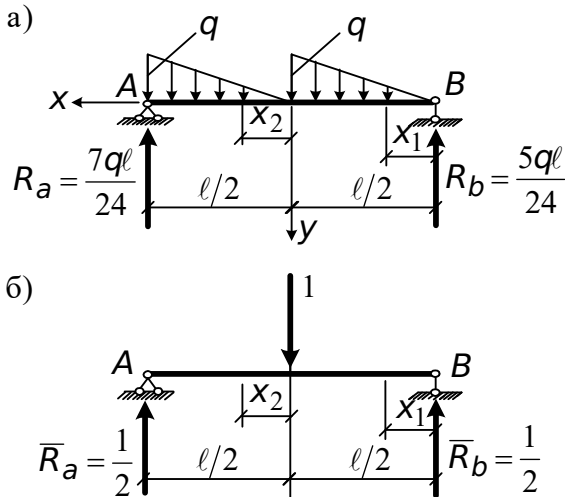


Рис. 5.38. К задаче 5.2.12

Определяем реакции опор:

$$\sum M_a = 0$$

$$R_b \ell - \frac{1}{2} \frac{ql}{2} \left( \frac{\ell}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = 0.$$

$$\text{Откуда } R_b = \frac{5ql}{24}.$$

$$\sum y = 0 \quad R_a - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{2} + R_b = 0,$$

$$R_a = \frac{7ql}{24}.$$

Записываем приближенные дифференциальные уравнения по участкам и интегрируем их:

$$\text{Участок 1. } 0 \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2}:$$

$$EJ y_1'' = -\frac{5q\ell}{24}x_1 + \frac{2q}{\ell}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{3}x_1 = -\frac{5q\ell}{24}x_1 + \frac{qx_1^3}{3\ell},$$

$$EJ y_1' = -\frac{5q\ell}{48}x_1^2 + \frac{qx_1^4}{12\ell} + C_1,$$

$$EJ y_1 = -\frac{5q\ell}{144}x_1^3 + \frac{qx_1^5}{60\ell} + C_1x_1 + D_1;$$

Участок 2.  $0 \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2}$ :

$$EJ y_2'' = -\frac{5q\ell}{24}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) + \frac{1}{2}q \cdot \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + x_2\right) + \frac{qx_2^3}{3\ell} = -\frac{3q\ell^2}{48} + \frac{q\ell}{24}x_2 + \frac{qx_2^3}{3\ell},$$

$$EJ y_2' = -\frac{3q\ell^2}{48}x_2 + \frac{q\ell}{48}x_2^2 + \frac{qx_2^4}{12\ell} + C_2,$$

$$EJ y_2 = -\frac{3q\ell^2}{96}x_2^2 + \frac{q\ell}{144}x_2^3 + \frac{qx_2^5}{60\ell} + C_2x_2 + D_2.$$

Определяем произвольные постоянные из граничных условий на концах участков: при 1) при  $x_1 = 0$   $y_1 = 0$ ; 2) при  $x_1 = \frac{\ell}{2}$   $y_1 = y_2$ ; 3) при  $x_2 = 0$   $y_1 = y_2$ ; 4) при  $x_2 = \frac{\ell}{2}$   $y_2 = 0$ .

1)  $D_1 = 0$ ;

2)  $-\frac{5q\ell}{48} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{q\ell^4}{12 \cdot 16\ell} + C_1 = C_2$ ,  $C_2 - C_1 = -\frac{q\ell^3}{48}$ ;

3)  $-\frac{5q\ell}{144} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{q\ell^5}{60 \cdot 32\ell} + C_1 \frac{\ell}{2} = D_2$ ;

$$D_2 - C_1 \frac{\ell}{2} = -\frac{11q\ell^4}{192 \cdot 3 \cdot 5};$$

4)  $-\frac{3q\ell^2}{96} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{q\ell}{144} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{q\ell^5}{60 \cdot 32\ell} + C_2 \frac{\ell}{2} + D_2 = 0$ ,

$$D_2 + C_2 \frac{\ell}{2} = \frac{37q\ell^4}{384 \cdot 15}.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$C_1 = \frac{119q\ell^3}{5760}, \quad C_2 = -\frac{q\ell^3}{5760}, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{5q\ell^3}{768}.$$

Искомый прогиб посередине балки найдем из уравнения прогибов для второго участка при  $x_2 = 0$  :

$$EJf = D_2,$$

или

$$f = \frac{D_2}{EJ} = \frac{5q\ell^3}{768EJ}.$$

*Вариант решения.*

Применим метод Мора для определения прогиба, для чего необходимо записать функции  $M$  и  $\bar{M}_1$  для двух участков и взять интеграл или вычислить его по формуле Верещагина:

$$f = \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega Y_C}{EJ}.$$

Запишем функции изгибающих моментов для двух участков. Начало осей принимаем на правой опоре и посередине пролета, направляя оси налево:

$$M^I = \frac{5q\ell}{24}x_1 - \frac{qx_1^3}{3\ell}; \quad \bar{M}_1^I = \frac{1}{2}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2};$$

$$\begin{aligned} M^{II} &= \frac{5q\ell}{24}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) - \frac{1}{2}q \cdot \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + x_2\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{\ell}x_2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_2 = \\ &= \frac{3q\ell^2}{48} - \frac{q\ell}{24}x_2 - \frac{qx_2^3}{3\ell}; \end{aligned}$$

$$\bar{M}_1^{II} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) - 1 \cdot x_2 = \frac{\ell}{4} - \frac{x_2}{2}; \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2}.$$

Подставляем их в интеграл Мора:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{5q\ell}{24}x_1 - \frac{qx_1^3}{3\ell}\right) \frac{1}{2}x_1 dx_1 + \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{3q\ell^2}{48} - \frac{q\ell}{24}x_2 - \frac{qx_2^3}{3\ell}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\ell}{4} - \frac{x_2}{2}\right) dx_2 = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{3q\ell^3}{192} - \frac{q\ell^2}{24}x + \frac{q\ell}{8}x^2 - \frac{qx^3}{12}\right) dx = \frac{5q\ell^4}{768EJ}. \end{aligned}$$

Этот вариант решения немного короче первого.

**5.2.13.** Итак,  $M_1$  -?,  $M_2$  -? по условию  $y_3 = 0$ ;  $Y_3 = 0$ .

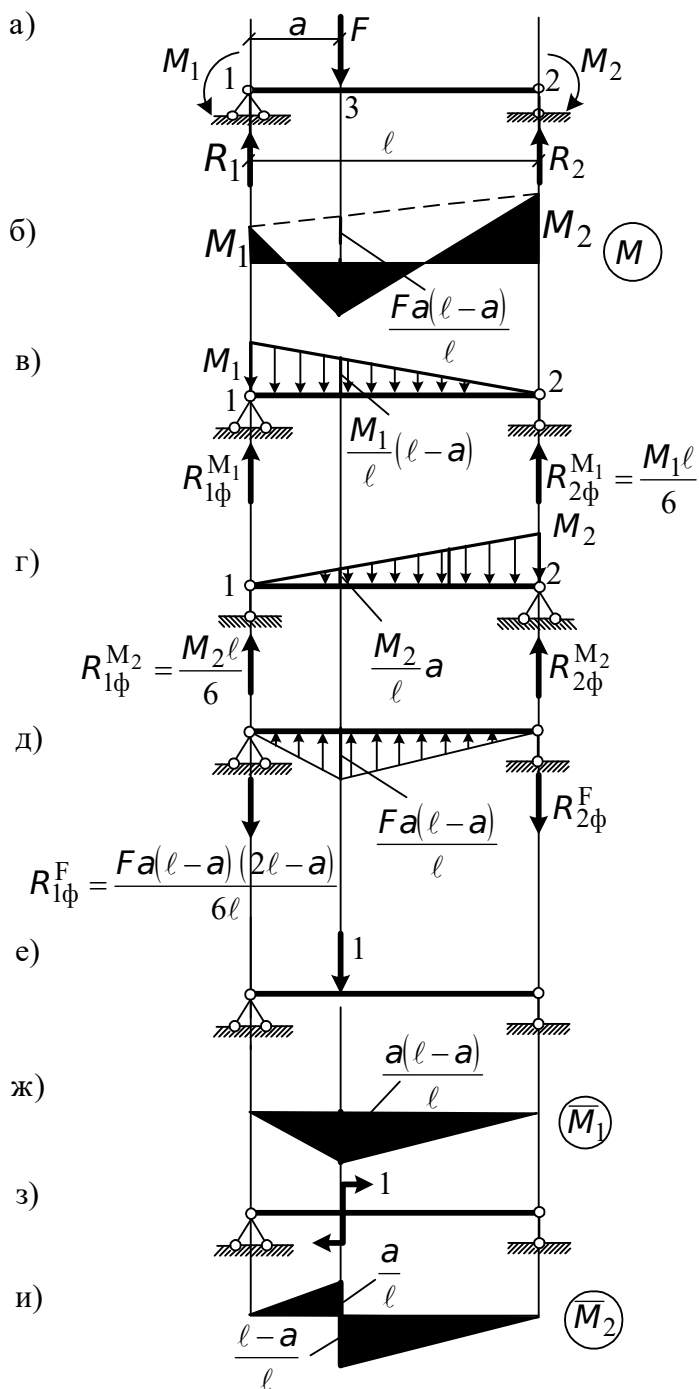


Рис. 5.39. К задаче 5.2.13

1. *Метод начальных параметров.* Здесь сначала необходимо определить все силы (активные и реактивные), действующие на балку. Определяем реакции опор. Для применения метода начальных параметров достаточно определить одну – левую,  $R_1$  (рис. 5.39, а). Составляем уравнение равновесия  $\sum M_2 = 0$ :

Таким образом, необходимо получить выражения для угла поворота и прогиба в точке 3 от  $M_1$ ,  $F$  и  $M_2$ , приравнять их к нулю и найти значения  $M_1$  и  $M_2$ . Для определения перемещений при изгибе можно применить три метода:

1. Метод начальных параметров.
2. Графоаналитический метод.
3. Метод Мора с вычислением интегралов при помощи способа Верещагина или Симпсона-Корноухова.

Покажем их применение к решению этой задачи, проанализируем и установим, какой из них достигает цели с меньшей затратой времени на решение.

$$R_1 \ell - M_1 - F(\ell - a) + M_2 = 0, \text{ откуда } R_1 = \frac{M_1 - M_2 + F(\ell - a)}{\ell}.$$

Записываем уравнения метода начальных параметров для углов поворота и прогибов с учетом только имеющихся видов нагрузок ( $M$  и  $F$ ):

$$EJ y' = EJ y'_0 - \frac{M_1 x}{1!} + \frac{R_1 x^2}{2!} \Big|_0^\ell - \frac{F(x-a)^2}{2!} \Big|_0^\ell,$$

$$EJ y = EJ y_0 + EJ y'_0 x - \frac{M_1 x^2}{2!} + \frac{R_1 x^3}{3!} \Big|_0^\ell - \frac{F(x-a)^3}{3!} \Big|_0^\ell.$$

Определяем начальные параметры из условий закрепления балки:

- 1) при  $x = 0$   $y = y_0 = 0$ ;
- 2) при  $x = \ell$   $y_\ell = 0$ .

Из первого условия параметр  $y_0 = 0$ . Начальный параметр  $y'_0$  найдем из второго условия:

$$EJ y'_0 \ell - \frac{M_1 \ell^2}{2!} + \frac{R_1 \ell^3}{3!} - \frac{F(\ell - a)^3}{3!} = 0,$$

откуда  $EJ y'_0 = \frac{M_1 \ell}{2} - \frac{R_1 \ell^2}{6} + \frac{F(\ell - a)^3}{6\ell}$ .

Записываем условия для определения моментов  $M_1$  и  $M_2$ :

- 1)  $y'_3 = 0$ ,  $\frac{M_1 \ell}{2} - \frac{R_1 \ell^2}{6} + \frac{F(\ell - a)^3}{6\ell} - M_1 a + \frac{R_1 a^2}{2} = 0$ ,
- 2)  $y_3 = 0$ ,  $\frac{M_1 a \ell}{2} - \frac{R_1 a \ell^2}{6} + \frac{F a (\ell - a)^3}{6\ell} - \frac{M_1 a^2}{2} + \frac{R_1 a^3}{6} = 0$ .

Заменяем  $R_1$  ее значением, группируем члены с  $M_1$ ,  $M_2$  и  $F$ , и решая уравнения, получаем

$$M_1 = M_2 = \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell}.$$

2. *Графоаналитический метод.* Пользуясь принципом независимости действия сил, строим три эпюры (рис. 5.39, в, г, д) и загружаем ими, как фиктивными нагрузками, фиктивные балки (они с такими же опорными закреплениями, как и действительные). Определяем по одной реакции от каждой нагрузки в балках: рис. 5.39, в – правую  $R_{2\Phi}^{M_1}$ , рис. 5.39, г – левую  $R_{1\Phi}^{M_2}$  и рис. 5.39, д – левую –  $R_{1\Phi}^F$ .

$$\sum M_1 = 0; \quad \frac{1}{2} M_1 \ell \cdot \frac{1}{3} \ell - R_{2\Phi}^{M_1} \ell = 0, \quad R_{2\Phi}^{M_1} = \frac{M_1 \ell}{6};$$

$$\sum M_2 = 0; \quad \frac{1}{2} M_2 \ell \cdot \frac{1}{3} \ell - R_{1\Phi}^{M_2} \ell = 0, \quad R_{1\Phi}^{M_2} = \frac{M_2 \ell}{6};$$

$$\sum M_2 = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{Fa(\ell - a)}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{0 + \ell - a + \ell}{3} - R_{1\Phi}^F \ell = 0;$$



$$R_{1\phi}^F = \frac{Fa(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell}.$$

Угол поворота касательной в точке 3 балки по графоаналитическому методу определяется по формуле  $y'_3 = \frac{Q_{3\phi}}{EJ}$ , а прогиб  $y_3 = \frac{M_{3\phi}}{EJ}$ . Тогда, умножив левые и правые части этих формул на  $EJ$  и найдя  $Q_{3\phi}$  и  $M_{3\phi}$  от каждой из нагрузок, складывая их, будем иметь

$$\begin{aligned} EJy'_3 &= -\frac{M_1\ell}{6} + \frac{1}{2} \frac{M_1(\ell - a)^2}{\ell} + \frac{M_2\ell}{6} - \frac{1}{2} \frac{M_2a^2}{\ell} - \frac{Fa(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Fa^2(\ell - a)}{\ell} = \frac{M_1}{6\ell} (2\ell^2 - 6a\ell + 3a^2) + \frac{M_2}{6\ell} (\ell^2 - 3a^2) + \frac{Fa(\ell - a)(2a - \ell)}{3\ell}; \\ EJy_3 &= \frac{M_1\ell}{6} (\ell - a) - \frac{M_1(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{1}{3} (\ell - a) + \frac{M_2\ell}{6} a - \frac{M_2a^2}{2\ell} \cdot \frac{a}{3} - \\ &- \frac{Fa^2(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell} + \frac{Fa^2(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{1}{3} a = \frac{M_1a(\ell - a)}{6\ell} (2\ell - a) + \\ &+ \frac{M_2a(\ell - a)}{6\ell} (\ell + a) - \frac{Fa^2(\ell - a)^2}{3\ell}. \end{aligned}$$

Согласно условию задачи необходимо найти значения  $M_1$  и  $M_2$ , при которых  $y'_3 = 0$  и  $y_3 = 0$ . Приравняем правые части этих выражений к нулю и получим два уравнения, из которых найдем  $M_1$  и  $M_2$  (см. решение по методу начальных параметров).

3. *Метод Мора.* Необходимо построить грузовую эпюру моментов от моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и силы  $F$  (рис. 5.39, б) и единичные – от единичных силы и момента, приложенных в сечении 3, для которого необходимо определить прогиб (рис. 5.39, е, ж) и угол поворота (рис. 5.39, з, и). Сопрягая эпюры  $M$  с  $\bar{M}_1$  и  $M$  с  $\bar{M}_2$ , получим выражения для определения опорных моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Используем для упрощения принцип суперпозиции. Эпюра  $M$  (рис. 5.39, б) состоит из трех (см. рис. 5.39, в, г, д).

$$\begin{aligned} y_3 = \Delta_{1f} &= \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_c}{EJ} = -\frac{a^2(\ell - a)}{2\ell EJ} \left[ \frac{1}{3} M_1 + \frac{2M_1(\ell - a)}{3\ell} \right] - \\ &- \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell EJ} \cdot \frac{2M_1(\ell - a)}{3\ell} - \frac{a^2(\ell - a)}{2\ell EJ} \cdot \frac{2M_2a}{3\ell} - \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell EJ} \left( \frac{2M_2a}{3\ell} + \frac{M_2}{3} \right) + \\ &+ \frac{a^2(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} + \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} = \\ &= -\frac{a(\ell - a)}{6\ell EJ} [M_1(2\ell - a) + M_2(\ell + a) - 2Fa(\ell - a)]. \\ y'_3 = \Delta_{2f} &= \sum \int \frac{M\bar{M}_2 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_c}{EJ} = \frac{a^2}{2\ell EJ} \left\{ M_1 \left[ \frac{2(\ell - a)}{3\ell} + \frac{1}{3} \right] \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\ell-a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2M_1[\ell-a]}{3\ell EJ} + \frac{a^2}{2\ell} \cdot \frac{2M_2 a}{3\ell EJ} - \frac{(\ell-a)^2}{2\ell EJ} \left[ \frac{2M_2 a}{3\ell} + \frac{M_2}{3} \right] - \\
& -\frac{a^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell-a)}{3\ell EJ} + \frac{(\ell-a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell-a)}{3\ell EJ} = \\
& = -\frac{1}{6\ell EJ} \left[ M_1(2\ell^2 - 6a\ell + 3a^2) + M_2(\ell^2 - 3a^2) - 2Fa(\ell-a)(\ell-2a) \right].
\end{aligned}$$

Если приравнять  $Y'_3$  и  $Y_3$  к нулю и сократить на множители перед квадратными скобками, получим аналогичные, как и раньше, уравнения относительно неизвестных  $M_1$  и  $M_2$ , а также и их выражения в функции от  $F$ .

Анализируя применение трех методов для решения поставленной задачи, можно сделать следующие выводы:

1. Применять тот метод, которым решающий владеет в наибольшей степени.

2. Если все три метода могут быть применены без затруднения, необходимо остановиться на том, который быстрее приводит к цели. В данном случае – это графоаналитический метод.

3. Стоит подумать, а не существует ли еще какого-то подхода, с помощью которого задача может быть решена еще быстрее.

4. Применение принципа независимости действия сил или иначе принципа суперпозиции существенно упрощает решение.

**5.2.14.** Сила  $F_1$ , при которой произойдет соприкосновение трубчатой консольной балки со сплошным стержнем, найдется из условия (рис. 5.40)

$$\frac{F_1 \ell^3}{3EJ_6} + \frac{5F_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{2 \cdot 3EJ_6} = D - 2t - d' \quad (5.3)$$

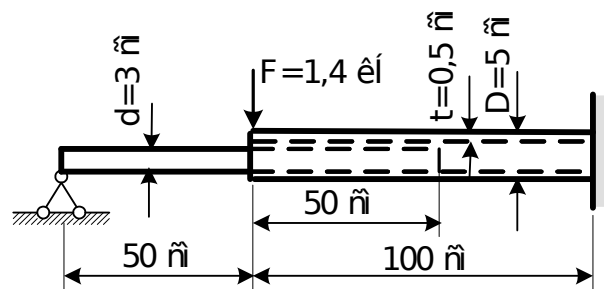


Рис. 5.40. К задаче 5.2.14

где первое слагаемое – прогиб конца трубчатой балки, второе – половина прогиба середины трубчатой балки, на величину которого опустится середина стержня, где произойдет соприкосновение. Разница между диаметром стержня ( $d$ ) и диаметром отверстия трубы ( $d_1$ ) равна 1 см.

Из выражения (5.3) следует 
$$F_1 = \frac{2 \cdot 3 E J_6}{2 \ell^3 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^3} \cdot (D - 2t - d), \quad (5.4)$$

где  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа ;  $\ell = 100$  см.

$$J_6 = \frac{\pi (D^4 - d_1^4)}{64} = \frac{3,1416 (5^4 - 4^4)}{64} = 18 \text{ см}^3.$$

Тогда

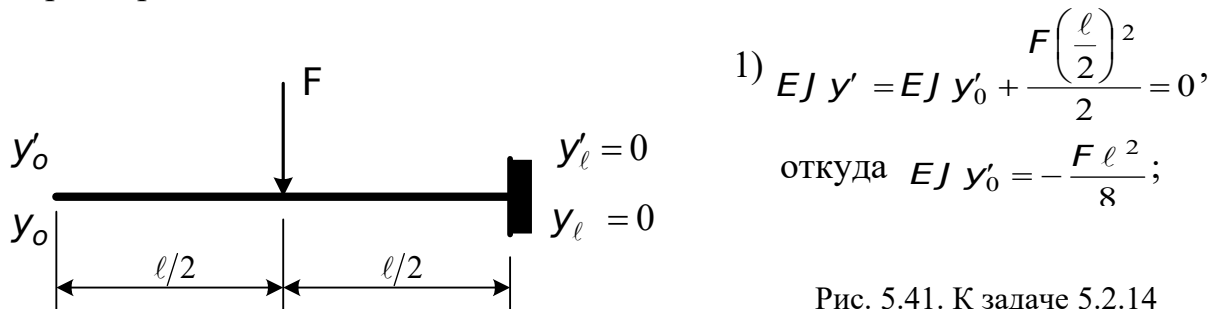
$$F_1 = \frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-8}}{21 \cdot 100^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 0,823 \text{ кН}.$$

Распределение остаточной силы  $F - F_1 = F_2$  между балкой и стержнем найдем из равенства совместного прогиба

$$f_b = f_c. \quad (5.5)$$

Прогиб конца консольной балки будет происходить в результате изгиба ее от силы  $F_b$ , приложенной на конце и силы  $F_c/2$  – в середине (в точке опирания на нее правого конца стержня).

Прогиб середины стержня возникает от силы  $F_c$  в середине стержня, опирающегося на две опоры, от опускания правого конца стержня в результате прогиба середины консольной балки от  $F_b$ , а также и от  $F_c/2$  на конце стержня. Получим выражение для прогиба на конце консоли от силы, приложенной в середине ее (рис. 5.41). Воспользуемся методом начальных параметров.



$$1) \quad E J y' = E J y_0' + \frac{F \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} = 0,$$

откуда  $E J y_0' = -\frac{F \ell^2}{8};$

Рис. 5.41. К задаче 5.2.14

$$2) \quad E J y_\ell = E J y_0 + E J y_0' + \frac{F \left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6} = 0,$$

откуда  $E J y_0 = \frac{5 F \ell^3}{48}.$

Абсолютное значение прогиба конца консоли  $y = y_0 = \frac{5 F \ell^3}{48 E J}. \quad (5.6)$

Зная это выражение, а также выражения для прогиба конца консоли от силы на конце и прогиба в середине балки от силы в середине, раскроем равенство (5.5)

$$\frac{F_6 \ell^3}{3EJ_6} + \frac{5F_c \ell^3}{48EJ_6} = \frac{F_c \ell^3}{48EJ_c} + \frac{1}{2} \frac{5F_6 \ell^3}{48EJ_6} + \frac{1}{2} \frac{F_c}{3EJ_6} \left(\frac{\ell}{2}\right)^3.$$

Примечание. Если в памяти эти выражения не сохранились, их можно легко получить применяя или метод начальных параметров, или графо-аналитический метод.

$$\text{Откуда } F_6 = \frac{2}{27} \left( \frac{J_6}{J_c} - 2 \right) F_c, \quad (5.7)$$

$$\text{где } \frac{J_6}{J_c} = \frac{\pi [D^4 - (D-2t)^4] 64}{64 \pi d^4} = \frac{D^4 - (D-2t)^4}{d^4}.$$

Тогда

$$F_6 = \frac{2}{27} \left[ \frac{D^4 - (D-2t)^4}{d^4} - 2 \right] F_c = \frac{2}{27} \left( \frac{5^4 - 4^4}{3^4} - 2 \right) F_c,$$

$$\text{или } F_6 = \frac{46}{243} F_c.$$

Но

$$F_6 + F_c = F_2 = F - F_1 = 1,4 - 0,823 = 0,577 \text{ кН},$$

откуда

$$\frac{46}{243} F_c + F_c = 0,577 \text{ кН}, \quad F_c = \frac{0,577 \cdot 243}{289} = 0,485 \text{ кН}, \quad \text{а } F_6 = 0,092 \text{ кН}.$$

Определяем наибольшие напряжения:

а) в стержне

$$\sigma_c = \frac{M_c^{\max}}{W_c} = \frac{F_c \ell}{4W_c} = \frac{0,485 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 32}{4 \pi \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 45,7 \text{ МПа},$$

б) в трубчатой балке

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= \frac{(F_1 + F_6) \ell + \frac{F_c \ell}{4}}{W_6} = \frac{\left( 0,915 \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{0,485 \cdot 1 \cdot 10^3}{4} \right) D \cdot 64}{2 \pi [D^4 - (D-2t)^4]} = \\ &= \frac{1,036 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 64}{2 \cdot 3,1416 (5^4 - 4^4) \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 143,0 \text{ МПа} \end{aligned}$$

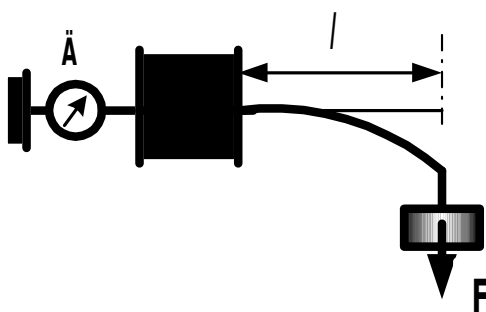
(без стержня – 193,2 МПа).

Определяем максимальный прогиб системы:

$$\begin{aligned} f &= \frac{(F_1 + F_6) \ell^3}{3EJ_6} + \frac{5F_c \cdot \ell^3}{2 \cdot 48EJ_6} = \frac{\ell^3}{96EJ_6} [32(F_1 + F_6) + 5F_c] = \\ &= \frac{1^3 [32(0,823 + 0,092) + 5 \cdot 0,485] \cdot 10^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^2 \approx 0,92 \text{ см} \end{aligned}$$

(без стержня – 1,30 см).

**5.2.15.** Рассмотрим сначала условие контакта балки и жесткого



основания при наличии малого зазора (рис. 5.42). Пусть величина зазора будет  $\Delta$ . В левой части балка остается прямой и плотно прилегает к верхней

поверхности отверстия. В точке отрыва балки от этой поверхности возникает реакция. Величина плеча "a" остается пока неопределенной (рис. 5.43).

Рис. 5.42. К задаче 5.2.15

На выходе бруса из отверстия возникает реакция В, направленная при отсутствии сил трения по нормали к поверхности балки. Так как угол отклонения этой силы от вертикали мал, то

$$B = F + A = F \left( 1 + \frac{\ell}{a} \right).$$

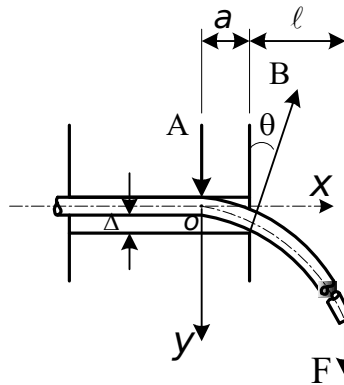


Рис. 5.43. К задаче 5.2.15

Примем точку «О» за начало отсчета перемещений. При  $x = a$  вертикальное перемещение балки равно  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{A a^3}{6 E J} = \frac{F \ell a^2}{6 E J},$$

откуда  $a = \sqrt{\frac{6 E J \Delta}{F \ell}}.$

Найдем угол поворота  $\theta$ :

$$\theta = \frac{A a^2}{2 E J} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} \sqrt{6 \Delta}.$$

По мере уменьшения зазора  $\Delta$  угол  $\theta$  и величина «a» стремятся к нулю, а силы А и В неограниченно возрастают. Посмотрим, как меняется при этом горизонтальная составляющая силы В:

$$B \theta = F \left( 1 + \frac{\ell}{a} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} \sqrt{6 \Delta},$$

или  $B \theta = \frac{F}{2} \left( \frac{F \ell^2}{E J} + \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} \sqrt{6 \Delta} \right).$

Как видим, при  $\Delta \rightarrow 0$  горизонтальная составляющая силы В стремится к

определенному пределу  $B\theta = \frac{F^2 \ell^2}{2EJ}$ . Это значение силы и покажет динамометр.

**5.2.16.** Масса погонного метра двутавра № 20 равна  $q = 21 \text{ кг/м}$ . После приложения силы  $F = \frac{q\ell}{4}$  средняя часть балки приподнимется на некоторой длине  $\ell_0$  (рис. 5.44).

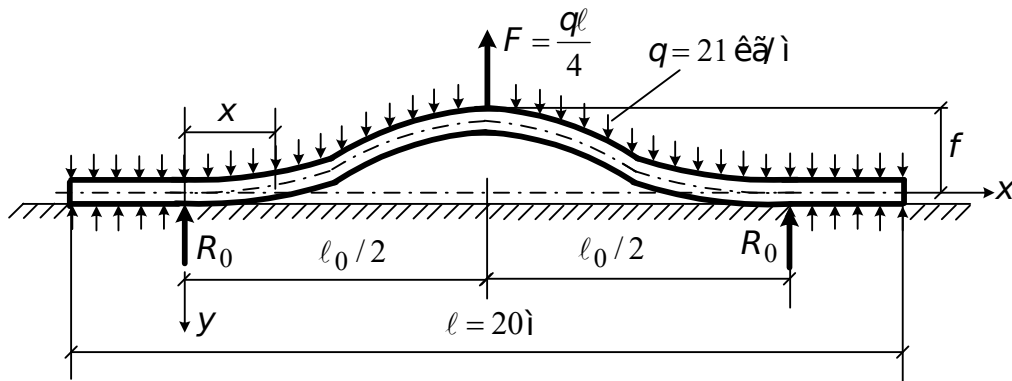


Рис. 5.44. К задаче 5.2.16

Левая и правая части будут лежать на плоскости и останутся прямыми. При  $x = 0$  будут равны нулю прогиб, угол поворота и изгибающий момент. Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось и симметрии деформации вытекает, что в точках соприкосновения двутавра с плоскостью возникают реакции

$$R_0 = \frac{q\ell_0 - F}{2} = \frac{q\ell_0}{8} \left( 4 - \frac{\ell}{\ell_0} \right).$$

Для определения величины  $\ell_0$  воспользуемся методом начальных параметров и условием, что при  $x = \frac{\ell_0}{2}$   $y' = 0$ .

$$-\frac{R_0 \left( \frac{\ell_0}{2} \right)^2}{2EJ_z} + \frac{q \left( \frac{\ell_0}{2} \right)^3}{6EJ_z} = 0, \quad \text{откуда} \quad R_0 = \frac{q\ell_0}{6}.$$

Теперь приравняв значения  $R_0$ , получим

$$\frac{q\ell_0}{6} = \frac{q\ell_0}{8} \left( 4 - \frac{\ell}{\ell_0} \right)$$

или  $\ell_0 = \frac{3\ell}{8} = \frac{3 \cdot 20}{8} = 7,5 \text{ м.}$

Найдем перемещение точки подвеса двутавра:

$$y_c = -\frac{R_0 \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^3}{6EJ_z} + \frac{q \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^4}{24EJ_z} = -\frac{q\ell_0^4}{6 \cdot 8 \cdot 6EJ_z} + \frac{q\ell_0^4}{16 \cdot 24EJ_z} = -\frac{q\ell_0^4}{3^2 \cdot 128EJ_z} =$$

$$= -\frac{21 \cdot 10 \cdot 7,5^4 \cdot 10^2}{1152 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^{-8}} = -0,25 \text{ см.}$$

*Вариант решения.*

Наиболее интересным и поучительным моментом в рассмотренной задаче, да и вообще во всех задачах, где имеет место соприкосновение упругой балки с жесткой поверхностью, является возникновение сосредоточенной реакции  $R_0$  на границе участка прилегания. На первый взгляд появление этой силы несколько неожиданно, хотя формально ее существование полностью согласуется с уравнениями равновесия и деформаций.

Возникновение этой силы обусловлено выбором расчетной схемы. При решении задачи рассматривалась только изгибная жесткость балки  $EJ_z$  и негласно тем самым предполагалось (ввиду не совсем полного представления о работе материала балки при изгибе), что сдвиговые деформации в поперечных сечениях отсутствуют. Учета этих деформаций уже достаточно, чтобы обнаружить, что схема контактных сил в виде равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы  $R_0$  является приближенной. При этом нет даже необходимости останавливаться на том, что за счет сжатия балки в поперечном направлении (как в обычных контактных задачах) сила  $R_0$  будет распределяться по некоторой малой площадке.

Рассмотрим сдвиговые деформации в балке (рис. 5.45).

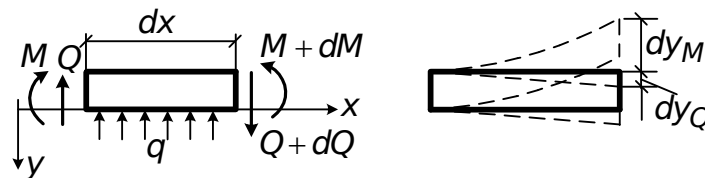


Рис. 5.45. К задаче 5.2.16

Кривизна балки, связанная с изгибающим моментом, определяется величиной

$$\frac{1}{\rho} = y''_M = -\frac{M}{EJ} . \quad (5.8)$$

Если обозначить через  $y_Q$  прогибы, вызванные сдвигом, то для любого

сечения получим угол дополнительного наклона упругой линии в виде

$$y'_Q = \frac{kQ}{GF} , \quad (5.9)$$

где  $k$  – числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки

$$k = \frac{A}{J_z^2} \int \frac{S_z^2}{z^2} dy.$$

Для двутавра № 20 (рис. 5.46)  $A = 26,8 \text{ см}^2$ ;  $J_z = 115 \text{ см}^4$ ;  
 $S_z^{\text{II}} = t \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right)$ ;  $S_z^{\text{CT}} = \frac{h-2t}{2} \left( \frac{\delta^2}{4} - y^2 \right)$ ;  $z^{\text{II}} = 2t$ ;  $z^{\text{CT}} = h - 2t$ .

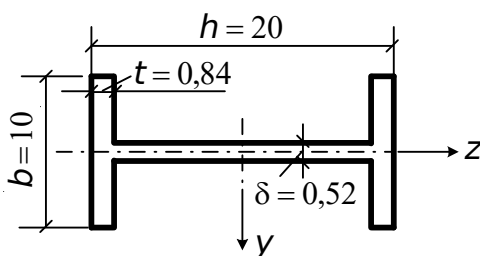


Рис. 5.46. К задаче 5.2.16

Пренебрежем влиянием стенки.

Тогда

$$k = \frac{26,8}{115^2} \left[ \frac{1 \cdot 0,84^2}{4 \cdot 0,84^2} \int_{-b/2}^{b/2} (25 - y^2)^2 dy \right] = \frac{26,8}{115^2 \cdot 4} \left[ 625y - \frac{50}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-5}^5 =$$

$$= \frac{26,8}{115^2 \cdot 4} \cdot 2 \left( 625 \cdot 5 - \frac{50 \cdot 125}{3} + \frac{3125}{5} \right) = 1,69.$$

Таким образом, учитывая выражения (5.8) и (5.9), получаем

$$y'' = -\frac{M}{EJ} + \frac{kQ'}{GA}.$$

Знак плюс при  $\frac{kQ'}{GA}$  поставлен по той причине, что при положительном значении  $M$  и  $Q$  оба эти фактора дают изменение кривизны различного знака (рис. 5.45). Так как  $Q = \frac{dM}{dx}$  и  $Q' = \frac{d^2M}{dx^2} = M''$ , то дифференциальное уравнение принимает вид

$$y'' = -\frac{M}{EJ} + \frac{kM''}{GA}. \quad (5.10)$$

В решаемой задаче напряженно-деформированное состояние двутавровой балки является симметричным. Поэтому рассмотрим только правую ее половину (рис. 5.47).



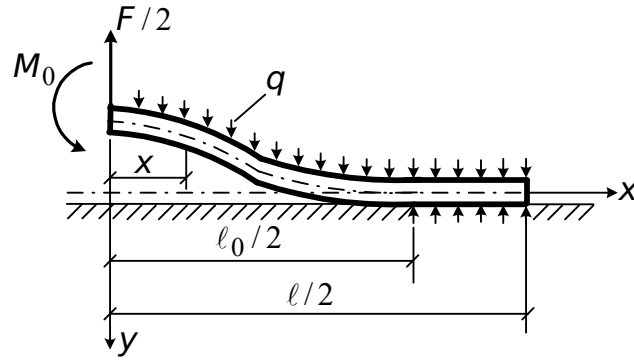


Рис. 5.47. К задаче 5.2.16

На первом участке при  $x < \frac{\ell_0}{2}$  изгибающий момент  $M = -M_0 + \frac{F}{2}x - \frac{qx^2}{2}$ , а  $M'' = -q$ . Учитывая это, согласно выражению (5.10) получаем

$$y'' = \frac{1}{EJ} \left( M_0 - \frac{F}{2}x + \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{kq}{GA}.$$

Или, учитывая, что  $F = \frac{q\ell}{4}$ , имеем

$$y'' = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 - \frac{qx}{2} \left( \frac{\ell}{4} - x \right) \right] - \frac{kq}{GA}.$$

Интегрируя, получим

$$y' = \frac{1}{EJ} \left( M_0 x - \frac{q\ell x^2}{16} + \frac{qx^3}{6} \right) - \frac{kqx}{GA} + C_1,$$

$$y = \frac{1}{EJ} \left( M_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q\ell x^3}{48} + \frac{qx^4}{24} \right) - \frac{kqx^2}{2GA} + C_1 x + C_2.$$

Граничные условия для первого участка

- 1) при  $x = 0$   $y' = 0$ ;
- 2) при  $x = \frac{\ell_0}{2}$   $y' = 0$ ;
- 3) при  $x = \frac{\ell_0}{2}$   $y = 0$ .

Из первого условия следует, что  $C_1 = 0$ . Из последующих двух имеем

$$M_0 = \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{24} + kq \frac{EJ}{GA};$$

$$C_2 = -\frac{1}{EJ} \left( M_0 \frac{\ell_0^2}{8} - \frac{q\ell\ell_0^3}{384} + \frac{q\ell_0^4}{384} \right) + \frac{kq\ell_0^2 EJ}{8GA} =$$

$$= -\frac{1}{EJ} \left( \frac{q\ell\ell_0^3}{256} - \frac{q\ell_0^4}{192} + \frac{kq\ell_0^2}{8} \cdot \frac{EJ}{GA} - \frac{q\ell\ell_0^3}{384} + \frac{q\ell_0^4}{384} \right) + \frac{kq\ell_0^2}{8GA} =$$

$$= -\frac{1}{EJ} \left( \frac{q\ell\ell_0^3}{768} - \frac{q\ell_0^4}{384} \right) = -\frac{q\ell\ell_0^3}{768EJ} \left( 1 - 2 \frac{\ell_0}{\ell} \right).$$

На втором участке кривизна равна нулю. Следовательно, согласно выражению (5.10)

$$M'' - \alpha^2 M = 0,$$

где  $\alpha^2 = \frac{GA}{EJk}$ .

Откуда

$$M = C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x. \quad (5.11)$$

При  $x = \frac{\ell_0}{2}$   $M = \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq\frac{EJ}{GA}$ , при  $x = \frac{\ell}{2}$   $M = 0$ .

Из этих условий определяем произвольные постоянные  $C_3$  и  $C_4$ :

$$\begin{aligned} C_3 \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell_0}{2} + C_4 \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell_0}{2} &= \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq\frac{EJ}{GA}; \\ C_3 \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell}{2} + C_4 \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2} &= 0; \\ C_3 \left( \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2} - \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell_0}{2} \right) &= \left( \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - \frac{EJ}{GA} \right) \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2}; \end{aligned}$$

$$C_3 = - \left( \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq\frac{EJ}{GA} \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha \ell}{2}}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}};$$

$$C_4 = \left( \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq\frac{EJ}{GA} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha \ell}{2}}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}}.$$

Величина  $\frac{\ell_0}{2}$  определяется из условия равенства поперечных сил в точке сопряжения участков. При  $x = \frac{\ell_0}{2}$  производная момента на первом участке равна производной момента на втором участке

$$\frac{q\ell}{8} - \frac{q\ell_0}{2} = C_3 \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha \ell_0}{2} + C_4 \alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha \ell_0}{2},$$

откуда

$$\frac{q\ell}{8} - \frac{q\ell_0}{2} = - \left( \frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq\frac{EJ}{GA} \right) \frac{\alpha}{\operatorname{th} \frac{\alpha \ell}{2} \left( 1 - \frac{\ell_0}{\ell} \right)},$$

или

$$1 - 4 \frac{\ell_0}{\ell} = - \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \frac{\ell}{\ell_0} - 8 \frac{\ell}{\ell_0} \frac{k}{\ell^2} \frac{EJ}{GA} \right) 2 \frac{\ell_0}{\ell} \frac{\frac{\alpha \ell}{2}}{\operatorname{th} \frac{\alpha \ell}{2} \left( 1 - \frac{\ell_0}{\ell} \right)}. \quad (5.12)$$

Из этого трансцендентного уравнения определяется  $\frac{\ell_0}{\ell}$  при заданном

$$\frac{\alpha \ell}{2} = \sqrt{\frac{GA \ell^2}{4EJk}}.$$

В нашем случае

$$\frac{\alpha \ell}{2} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^4 \cdot 26,8 \cdot 20^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,69 \cdot 115 \cdot 4}} = 235.$$

Решая уравнение (5.12), получим  $\frac{\ell_0}{\ell} = 0,371$ , т. е.  $\ell_0 = 0,371 \cdot 20 = 7,42$  м.

Теперь определим распределенную нагрузку  $q_1$  по второму участку балки ( $q_1$  – разность между распределенной реакцией плоскости и собственным весом  $q$ ).

Из (5.11) получаем

$$q_1 = M'' = \alpha^2 (C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x),$$

откуда

$$q_1 = \alpha^2 \left( \frac{q \ell \ell_0}{32} - \frac{q \ell_0^2}{12} - k q \frac{EJ}{GA} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha \left( \frac{\ell}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}},$$

$$\text{или } q_1 = q \left[ \frac{1}{8} \cdot \frac{\ell_0}{\ell} - \frac{1}{3} \left( \frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 - 4 \frac{kEJ}{\ell^2 GA} \right] \left( \frac{\alpha \ell}{2} \right)^2 \frac{\operatorname{sh} \alpha \left( \frac{\ell}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}}. \quad (5.13)$$

При  $x = \frac{\ell}{2}$   $q_1 = 0$ , т. е. реакция опорной плоскости равна погонному весу балки.

$$\text{При } x = \frac{\ell_0}{2} \text{ имеем } q_1 = q \left( \frac{\alpha \ell}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{8} \cdot \frac{\ell_0}{\ell} - \frac{1}{3} \left( \frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 - 4 \frac{kEJ}{\ell^2 GA} \right].$$

Для решаемой задачи

$$q_1 = 21 \cdot 235^2 \left( \frac{1}{8} \cdot 0,371 - \frac{1}{3} \cdot 0,371^2 - 4 \frac{1,69 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 115}{20^2 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 26,8} \right) = 553 \text{ кг/м}$$

или  $q_1 = 26,32q$ .

Изменение распределения реакции плоскости показано на рис. 5.48.

Перемещение точки подвеса двутавра

$$y_c = C_2 = -\frac{q\ell_0^3}{768EJ} \left(1 - 2\frac{\ell}{\ell_0}\right) = -\frac{21 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 7,42^3 \cdot 10^2}{768 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times (1 - 2 \cdot 0,371) = -0,25 \text{ см.}$$

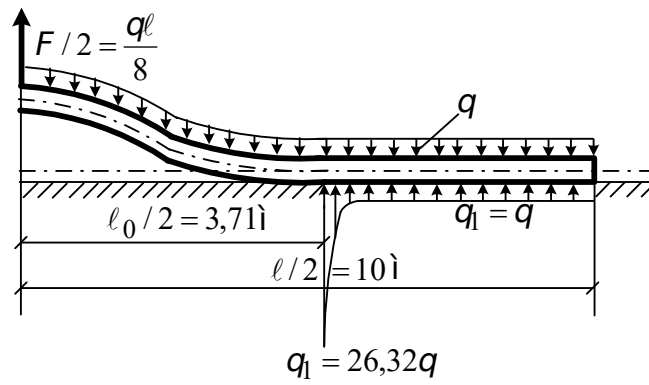


Рис. 5.48. К задаче 5.2.16

## Раздел 6

**6.2.1.** Если принять, что давление на подбалку передается по всей ее длине, то пришлось бы допустить, что две балки, находящиеся в различных условиях нагружения, изгибаются по одинаковым кривым. Это не так, следовательно, такая передача давления невозможна. Давление балки на подбалку приводится к силе  $X$  (рис. 6.7), приложенной в точке В. Величину ее найдем из сравнения прогибов в сечении В для балки под действием сил  $F$  и  $X$  и подбалки под действием силы  $X$ :

$$y_B^{\bar{b}} = y_B^{\text{пб}}. \quad (6.1)$$

Прогиб подбалки будет

$$y_B^{\text{пб}} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

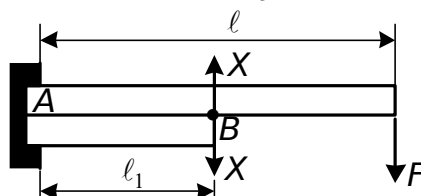


Рис. 6.7. К задаче 6.2.1

Прогиб балки под действием нагрузки  $F$  в сечении В найдем, используя, например, графоаналитический метод (рис. 6.8).

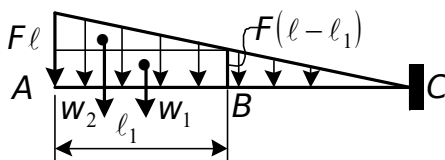


Рис. 6.8. К задаче 6.2.1

Загрузим эшюрой изгибающих моментов в действительной балке AC от силы  $F$  фиктивную балку и определим фиктивный момент в сечении В:

$$\begin{aligned} M_B^{\phi} &= w_1 \frac{\ell_1}{2} + w_2 \frac{2}{3} \ell_1 = F(\ell - \ell_1) \ell_1 \frac{\ell_1}{2} + \frac{1}{2} [F\ell - F(\ell - \ell_1)] \ell_1 \frac{2}{3} \ell_1 = \\ &= \frac{F \ell_1^2}{6} (3\ell - 3\ell_1 + 2\ell_1) = \frac{F \ell_1^2}{6} (3\ell - \ell_1). \end{aligned}$$

Тогда

$$y_{\text{В}}^{\bar{b}} = \frac{M_{\phi}}{EJ} = \frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1).$$

Перемещение сечения В балки от силы  $X$  будет

$$y_{2B}^{\bar{b}} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

Прогиб балки в сечении В получится как разность найденных перемещений:

$$y_B^{\bar{b}} = y_{1B}^{\bar{b}} - y_{2B}^{\bar{b}} = \frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1) - \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

Приравняв этот прогиб прогибу балки, согласно (6.1), получим следующее уравнение:

$$\frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1) - \frac{X \ell_1^3}{3EJ} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ},$$

откуда

$$X = \frac{3}{4} F \left( \frac{\ell}{\ell_1} - \frac{1}{3} \right).$$

**6.2.2. 1.** Обозначим силу взаимодействия между балками АВ и CD (рис. 6.9) через X. Тогда на балку АВ будут действовать распределенная нагрузка  $q$  и сила X в сечении E (рис. 6.10, а), а на балку CD – противоположно направленная сила X в сечении E (рис. 6.10, б).

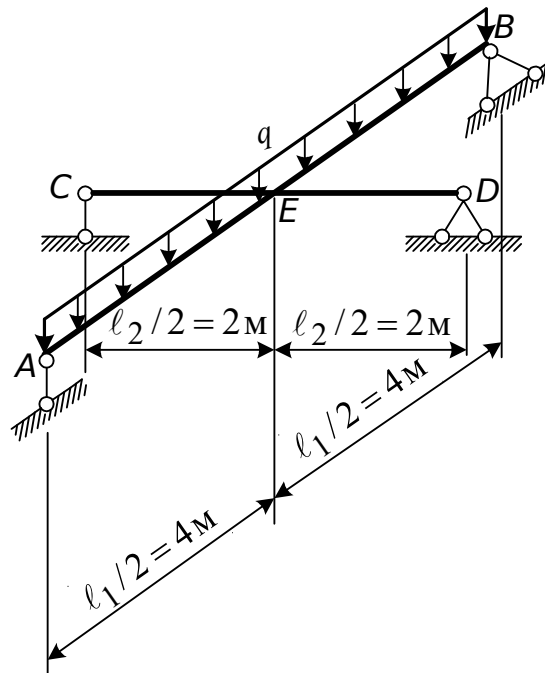


Рис. 6.9. К задаче 6.2.2

Условием их совместной работы будет равенство прогибов балок в сечении E, т. е.

$$f_e^{ab} = f_e^{cd}. \quad (6.2)$$

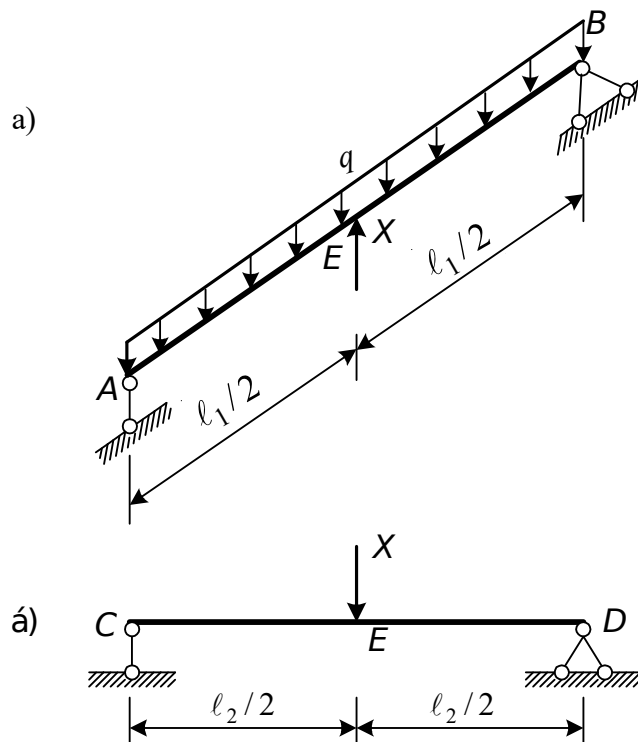


Рис. 6.10. К задаче 6.2.2

Значения прогибов в серединах пролетов от распределенной нагрузки и сосредоточенной силы известны (если неизвестны, то их легко найти). Обозначим жесткости балок соответственно  $EJ_1$  и  $EJ_2$ . Тогда

$$f_e^{ab} = \frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1},$$

$$f_e^{cd} = \frac{Xl_2^3}{48EJ_2}.$$

Приравнивая эти прогибы, согласно (6.2), получим уравнение, из которого можно определить силу взаимодействия  $X$ :

$$\frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1} = \frac{Xl_2^3}{48EJ_2},$$

$$X = \frac{5ql_1}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \frac{J_1}{J_2}}. \quad (6.3)$$

Так как соотношение между моментами инерции сечений балок неизвестны (сечения еще не подобраны), дальнейшее решение задачи будем производить способом последовательных приближений.

1-е приближение. Задаемся  $\frac{J_1}{J_2} = 1$  и вычисляем силу взаимодей-

ствия:

$$X = \frac{5 \cdot 8,1 \cdot 8}{1 + \left(\frac{4}{8}\right)^3} = 36 \text{ кН.}$$

Строим эпюры изгибающих моментов (рис. 6.11).

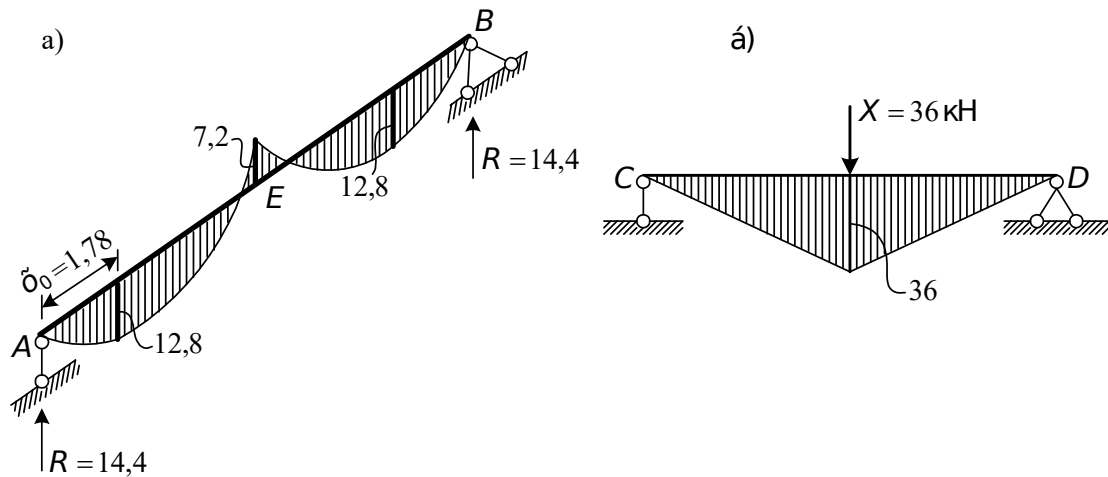


Рис. 6.11. К задаче 6.2.2

Подбираем сечения балок по ГОСТ 8239-89 (прил. 2).

Балка АВ

$$W_1 \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 80 \text{ см}^3,$$

принимаем двутавр № 14,  $W_1 = 81,7 \text{ см}^3$ ,  $J_1 = 572 \text{ см}^4$ .

Балка CD

$$W_2 \geq \frac{36 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 225 \text{ см}^3,$$

принимаем двутавр № 22,  $W_2 = 232 \text{ см}^3$ ,  $J_2 = 2550 \text{ см}^4$ .

2-е приближение.  $\frac{J_1}{J_2} = \frac{572}{2550} = 0,224$ ,  $X = 39,4 \text{ кН}$ ,  $R_a = 12,7 \text{ кН}$ ,  $x_0$

$= 1,568 \text{ м}$ ,  $M_{\max} = 9,96 \text{ кНм}$ ,  $M_E^{ab} = -14 \text{ кНм}$ ,  $M_E^{cd} = 39,4 \text{ кНм}$ .

$W_1 \geq \frac{14 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 87,5 \text{ см}^3$ , двутавр № 16,  $W_1 = 109 \text{ см}^3$ ,  $J_1 = 873 \text{ см}^4$ ,

$W_2 \geq \frac{39,4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 246,25 \text{ см}^3$ , двутавр № 24,  $W_2 = 289 \text{ см}^3$ ,  $J_2 = 3460 \text{ см}^4$ .



3-е приближение.  $\frac{J_1}{J_2} = 0,252$ ,  $X = 39,26$  кН,  $R_a = 12,77$  кН,  $x_0 = 1,576$  м,  $M_{\max} = 10,07$  кНм,  $M_e^{ab} = -13,72$  кНм,  $M_e^{cd} = 39,26$  кНм.

$W_1 \geq \frac{13,72 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 85,75$  см<sup>3</sup>, двутавр №16,  $W_1 = 109$  см<sup>3</sup>,  $J_1 = 873$  см<sup>4</sup>,

$W_2 \geq \frac{39,26 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 245,4$  см<sup>3</sup>, двутавр № 24,  $W_2 = 289$  см<sup>3</sup>,  $J_2 = 3460$  см<sup>4</sup>.

Итак, подобраны сечения: балка АВ – двутавр №16, балка CD – двутавр № 24. Масса металла конструкции

$$m = m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2 = 15 \cdot 8 + 27,3 \cdot 4 = 229,2 \text{ кг.}$$

2. Чтобы уменьшить затраты материала, необходимо уменьшить расчетные изгибающие моменты в обеих балках, что связано с уменьшением величины силы взаимодействия  $X$ . Конструктивно это можно осуществить, оставляя некоторый зазор в сечении Е между балками.

Первый вариант уменьшения расчетных изгибающих моментов связан с равенством изгибающих моментов в балке АВ

$$M_{\max} = |M_e^{ab}|. \quad (6.4)$$

При плотном соприкосновении балок  $|M_e^{ab}| > M_{\max} (|-13,72| > 10,07)$ . Выразим моменты  $M_{\max}$  и  $M_e^{ab}$  через  $X$ .

$$R_a = \frac{q \ell_1 - X}{2},$$

$$M_{\max} = R_a x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = R_a \frac{R_a}{q} - \frac{q \left( \frac{R_a}{q} \right)^2}{2} = \frac{R_a^2}{2q} = \frac{(q \ell_1 - X)^2}{8q},$$

$$M_e^{ab} = R_a \frac{\ell_1}{2} - \frac{q \ell_1^2}{8} = \frac{q \ell_1 - X}{4} \ell_1 - \frac{q \ell_1^2}{8} = \frac{q \ell_1^2}{8} - \frac{X \ell_1}{4}.$$

Приравниваем согласно (6.4) эти моменты

$$\frac{(q \ell_1 - X)^2}{8q} = \left| \frac{q \ell_1^2}{8} - \frac{X \ell_1}{4} \right|,$$

получаем уравнение относительно  $X$

$$X^2 - 4q \ell_1 X + 2q^2 \ell_1^2 = 0.$$

Корни уравнения

$$X = 2q \ell_1 \pm \sqrt{4q^2 \ell_1^2 - 2q^2 \ell_1^2}.$$

Действителен второй корень

$$X = (2 - \sqrt{2}) q \ell_1 = (2 - \sqrt{2}) 8,1 \cdot 8 = 37,96 \text{ кН.}$$

Расчетный момент балки АВ при этом будет

$$M_{\max} = \frac{(q \ell_1 - X)^2}{8q} = \frac{(8,1 \cdot 8 - 37,96)^2}{8 \cdot 8,1} = 11,12 \text{ кНм.}$$

Сечение балки АВ

$$W_1 \geq \frac{11,12 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 69,5 \text{ см}^3,$$

принимаем двутавр № 14,  $W_1 = 81,7$  см<sup>3</sup>,  $J_1 = 572$  см<sup>4</sup>.

Расчетный момент балки CD

$$M_e^{cd} = \frac{Xl_2}{4} = \frac{37,96 \cdot 4}{4} = 37,96 \text{ кНм.}$$

Сечение

$$W_2 \geq \frac{37,96 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 237,25 \text{ см}^3.$$

Остается двутавр № 24,  $W_2 = 289 \text{ см}^3$ ,  $J_2 = 3460 \text{ см}^4$ .

При этом зазор между балками должен быть

$$\Delta = \frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1} - \frac{Xl_2^3}{48EJ_2} = \frac{5 \cdot 8,18^4 \cdot 10^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} 10^3 -$$

$$- \frac{37,96 \cdot 8^3 \cdot 10^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} 10^3 - \frac{37,96 \cdot 4^3 \cdot 10^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} 10^3 =$$

$$= 377,622 - 353,939 - 7,784 = 15,9 \text{ мм.}$$

Масса металла конструкции в этом случае будет

$$m_0 = 13,7 \cdot 8 + 27,3 \cdot 4 = 218,8 \text{ кг.}$$

Экономия по сравнению с первым случаем составит 5 %.

Задача решена. Но возникла мысль, нельзя ли унифицировать элементы перекрестной системы, т.е. изготовить обе балки с сечениями из одинаковых двутавров. Это тоже иногда бывает полезным. Чтобы балки изготавливались из двутавров одинаковых номеров, необходимо иметь равенство расчетных моментов.

Итак,

$$M_{\max} = M_e^{cd}, \quad (6.5)$$

или

$$\frac{(ql_1 - X)^2}{8q} = \frac{Xl_2}{4}.$$

Откуда

$$X^2 - 2q(l_1 + l_2)X + q^2l_1^2 = 0.$$

Находим корни:

$$X = q(l_1 + l_2) \pm \sqrt{q^2(l_1 + l_2)^2 - q^2l_1^2} = q(l_1 + l_2) \pm q\sqrt{l_2(2l_1 + l_2)}.$$

Действителен второй корень

$$X = 8,1(8 + 4) - 8,1\sqrt{4(2 \cdot 8 + 4)} = 8,1(12 - 4\sqrt{5}) = 24,75 \text{ кН.}$$

Расчетные моменты будут

$$M_e^{cd} = \frac{24,75 \cdot 4}{4} = 24,75 \text{ кНм.}$$

Сечения обеих балок

$$W \geq \frac{24,75 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 154,7 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 20,  $W = 184 \text{ см}^3$ ,  $J = 1840 \text{ см}^4$ .

Зазор между балками в этом случае должен быть

$$\Delta = \frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1} - \frac{Xl_2^3}{48EJ_2} = \frac{5ql_1^4}{384EJ_1} \left( 1 - \frac{8X}{5ql_1} \left( 1 + \frac{l_2^3}{l_1^3} \right) \right) =$$

$$= \frac{5 \cdot 8,1 \cdot 8^4 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left( 1 - \frac{8 \cdot 24,75 \left( 1 + \frac{4^3}{8^3} \right)}{5 \cdot 8,1 \cdot 8} \right) = 36,7 \text{ мм.}$$

Если такой величины зазор между балками, на который должна прогнуться продольная, прежде чем система их будет работать совместно, можно допустить из каких-либо других соображений, тогда унификацию сечений можно осуществить. Необходимо заметить, что полный прогиб верхней балки будет еще больше, т. е. 45,6 мм.

Масса металла конструкции

$$m = 21,0 \cdot 12 = 252 \text{ кг,}$$

т. е. больше на 10 %, чем в первом случае, и на 15 % – во втором. Стоит подумать, произвести унификацию таким образом или нет.

**6.2.3.** Балку со шпренгелем (рис. 6.12), если пренебречь влиянием деформаций сжатия ее, можно представить как балку, опирающуюся в сечении С на упруго-податливую опору (рис. 6.13).

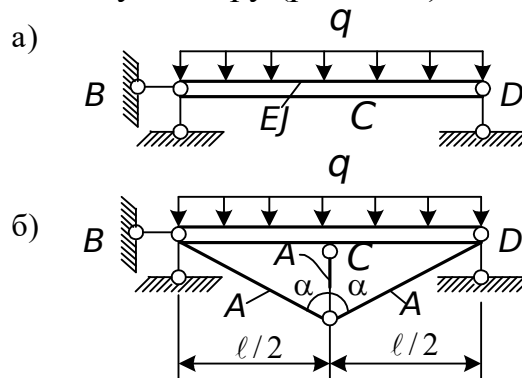


Рис. 6.12. К задаче 6.2.3

Податливость опоры равна перемещению шарнира С при действии на шпренгель единичной силы, расположенной в узле С (рис. 6.14).

$$\delta = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \frac{\bar{N}_1 l_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_2 l_2}{EA_2 \cos \alpha}. \quad (6.6)$$

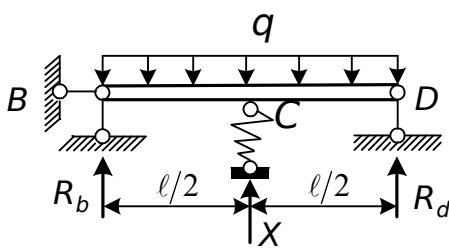


Рис. 6.13. К задаче 6.2.3

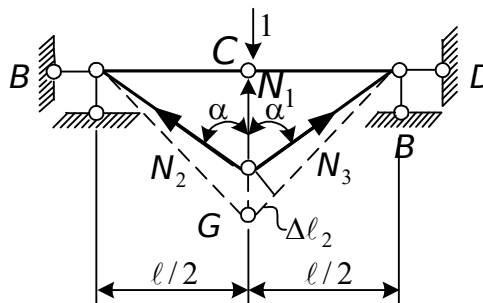


Рис. 6.14. К задаче 6.2.3

Найдем усилия в стержнях шпренгеля от единичной силы.

Вырезаем узел С:

$$\sum Y = 0; \quad 1 + \bar{N}_1 = 0, \quad \bar{N}_1 = -1.$$

Рассматриваем равновесие узла G:

$$\sum X = 0, \quad -\bar{N}_2 \sin \alpha + \bar{N}_3 \sin \alpha = 0, \quad \bar{N}_3 = \bar{N}_2.$$

$$\sum Y = 0, \quad \bar{N}_1 + 2\bar{N}_2 \cos \alpha = 0, \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

Теперь, учитывая, что  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ ,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1 \cdot \frac{\ell}{2 \operatorname{tg} \alpha}}{EA} + \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\ell}{2 \sin \alpha} = \frac{\ell}{2EA \sin \alpha} \left( \cos \alpha + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{\ell}{2EA \cos \alpha \sin 2\alpha} (1 + 2 \cos^3 \alpha). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для определения реакции X составим уравнение совместности деформаций. Прогиб балки в сечении С от внешней нагрузки и от X равен деформации упруго-податливой опоры от X:

$$f_c^q - f_c^X = \Delta_c, \quad (6.8)$$

где  $f_c^X = \frac{X \ell^3}{48EJ}$ ;  $\Delta_c = X \delta$ .

Подставляя в (6.8) эти значения, получим

$$f_c^q - \frac{X \ell^3}{48EJ} = X \delta,$$

откуда 
$$X = \frac{f_c^q}{\frac{\ell^3}{48EJ} + \delta}. \quad (6.9)$$

В соответствии с условием задачи, прогиб шпренгельной балки (рис. 6.12, б) должен быть равен половине прогиба балки (рис. 6.12, а). Но прогиб шпренгельной балки можно определить как перемещение сечения С за счет деформации упруго-податливой опоры при действии на нее силой равной X. Таким образом,  $\Delta_c = X \delta = 0,5 f_c^q$ . Подставив сюда значение

X из (6.9), получим 
$$\frac{f_c^q \cdot \delta}{\frac{\ell^3}{48EJ} + \delta} = 0,5 f_c^q.$$

Сокращая на  $f_c^q$  и избавляясь от знаменателя, будем иметь

$$\delta = \frac{\ell^3}{96EJ} + 0,5 \delta,$$

или 
$$\delta = \frac{\ell^3}{48EJ}.$$

Раскрывая по (6.7)  $\delta$ , находим значение площади сечений стержней шпренгеля, удовлетворяющей условию задачи:

$$\frac{\ell (1 + 2 \cos^3 \alpha)}{2 \cos \alpha \sin 2\alpha EA} = \frac{\ell^3}{48EJ},$$

откуда

$$A = \frac{24J(1 + 2\cos^3 \alpha)}{\ell^2 \sin 2\alpha \cos \alpha}.$$

**6.2.4.** Обозначим крайние пролеты балки через  $\ell$ , а средний –  $n\ell$  (рис.6.15, а). Балка дважды статически неопределима

$$L = C_0 - 3 = 5 - 3 = 2.$$

Для раскрытия статической неопределимости необходимо записать два уравнения трех моментов. Но ввиду симметрии балки и приложенной нагрузки неизвестные опорные моменты будут равны между собой:  $M_2 = M_1$ . Следовательно, достаточно будет одного уравнения

$$M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6R_1^\phi,$$

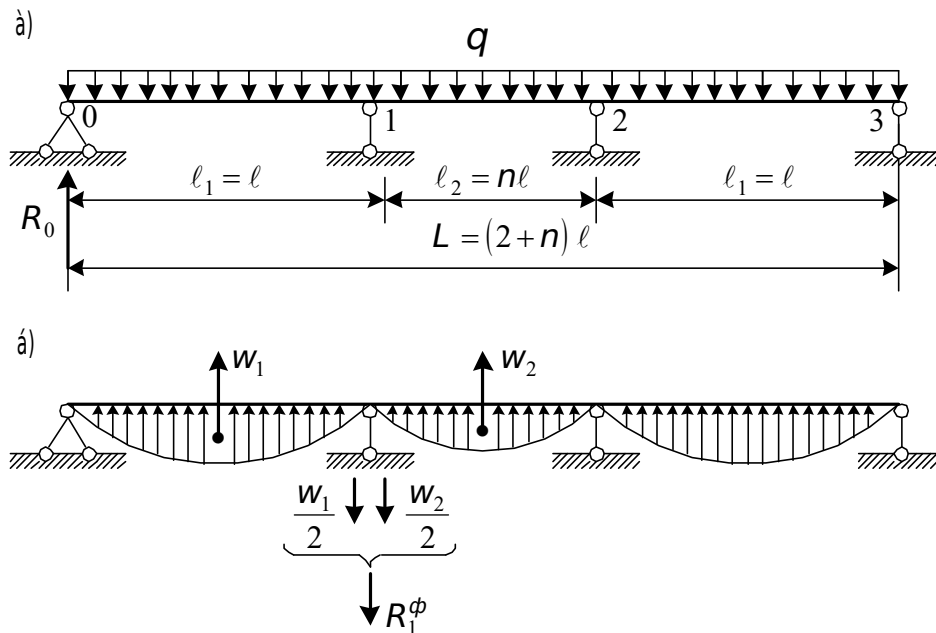


Рис. 6.15. К задаче 6.2.4

или, с учетом вышесказанного, а также того, что  $M_0 = 0$ , будем иметь

$$2M_1(\ell + n\ell) + M_1 n\ell = -6R_1^\phi.$$

После преобразования из уравнения находим

$$M_1 = -\frac{6R_1^\phi}{(2+3n)\ell}.$$

Найдем фиктивную опорную реакцию на опоре 1 (рис. 6.15, б)

$$R_1^\phi = \frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2q\ell^2}{3 \cdot 8} \ell + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qn^2\ell^2}{3 \cdot 8} n\ell = \frac{q\ell^3}{24}(1+n^3).$$

Тогда

$$M_1 = -\frac{q\ell^2}{8} \cdot \frac{2(1+n^3)}{2+3n}. \quad (6.10)$$

При таком опорном моменте, максимальные моменты в первом и во втором пролетах будут

$$M_{\max 1} = R_0 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{R_0^2}{q} - \frac{qR_0^2}{2q^2} = \frac{R_0^2}{2q}, \quad (6.11)$$

$$M_{\max 2} = \frac{qn^2\ell^2}{8} - M_1, \quad (6.12)$$

где

$$R_0 = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_1}{\ell}. \quad (6.13)$$

Учитывая (6.10) и (6.13), после преобразования окончательно имеем

$$M_{\max 1} = \frac{q\ell^2}{8} \cdot \frac{(3+6n-n^3)^2}{4(2+3n)^2}, \quad (6.14)$$

$$M_{\max 2} = \frac{q\ell^2}{8} \cdot \frac{n^3+2n^2-2}{2+3n}. \quad (6.15)$$

При  $n=1$  (равные пролеты)

$$M_1 = -\frac{q\ell^2}{8} \cdot 0,8, \quad M_{\max 1} = \frac{q\ell^2}{8} \cdot 0,64; \quad M_{\max 2} = \frac{q\ell^2}{8} \cdot 0,2,$$

т. е. опорный момент

$$M_1 > M_{\max 1} > M_{\max 2}$$

будет расчетным.

Если же  $n < 1$ , моменты  $M_1$  и  $M_{\max 2}$  будут уменьшаться, а  $M_{\max 1}$  увеличиваться. Отсюда следует, что оптимальному значению "n" будет соответствовать равенство опорного момента с максимальным первого пролета

$$|M_1| = M_{\max 1}.$$

Приравняв правые части выражений (6.10) и (6.14) и сократив все на  $\frac{q\ell^2}{8}$ , будем иметь

$$\frac{2(1+n^3)}{2+3n} = \frac{(3+6n-n^3)^2}{4(2+3n)^2}.$$

После преобразования получим

$$n^6 - 24n^4 - 30n^3 + 20n^2 + 24n + 25 = 0.$$

Решая это уравнение путем подбора, находим, что  $n = 0,7863$ .

Значит, пролеты ее будут равны

$$\ell_1 = 32,3 \text{ м}, \quad \ell_2 = 25,4 \text{ м}, \quad \ell_3 = 32,3 \text{ м}.$$

Расчетными моментами будут  $|M_1| = M_2 = \frac{q\ell^2}{8} \cdot 0,682$ .

Этот момент на

$$\frac{0,8 - 0,682}{0,8} 100 = 14,75 \%$$

меньше расчетного при равных пролетах. Следовательно, и масса балки будет примерно на 14 % меньше балки с равными пролетами.

## Раздел 7

7.2.1. Вычисляем характеристику:

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{30}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1223}} = \frac{1}{75} \text{ см}^{-1}.$$

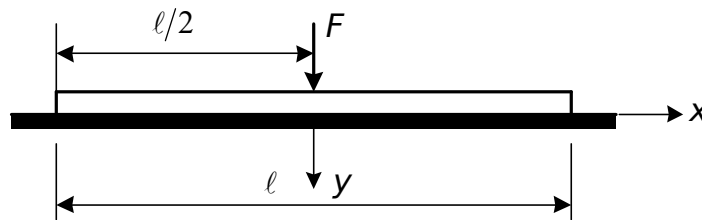


Рис. 7.5. К задаче 7.2.1

Приведенная длина балки (рис. 7.5)

$$sl = 1500 / 75 = 20 > 6.$$

Следовательно, расчет можно вести как бесконечно длинной балки.

Прогиб, см, и изгибающий момент, кНм, выражаются так:

$$y(sx) = \frac{F}{8EJs^3} e^{-sx} (\sin sx + \cos sx) = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 75^3 \cdot 10^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1223} \eta(x) = 0,216 \eta(sx),$$

$$M(x) = \frac{F}{4s} e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) = \frac{100 \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{4} \eta_1(x) = 18,85 \eta_1(x),$$

Вычисления по этим формулам дают  $y(x)$  и  $M(x)$  (значения  $\eta(x)$  и  $\eta_1(x)$  взяты из прил. 3) (табл. 7.1).

Таблица 7.1

$x$ , см	$sx = \frac{x}{75}$	$\eta(x)$	$\eta_1(x)$	$y(x) = 0,216\eta(x)$ , см	$M(x) = 18,75\eta_1(x)$ , кНм
0	0	1	1	0,216	18,75
25	0,333	0,91	0,44	0,197	8,14
50	0,667	0,62	0,08	0,134	1,50
75	1,000	0,51	-0,11	0,110	-2,06
100	1,333	0,32	-0,19	0,069	-3,56
150	2,000	0,07	-0,18	0,015	-3,38
200	2,667	-0,03	-0,09	-0,006	-1,69

300	4,000	-0,03	0,00	-0,006	0,00
400	5,333	0,00	0,01	0,000	0,19
500	6,667	0,00	0,00	0,000	0,00

Максимальный прогиб  $y_{\max} = y(0) = 0,216$  см.

Максимальный изгибающий момент  $M_{\max} = M(0) = 18,75$  кНм.

Эпюры  $y(x)$  и  $M(x)$  показаны на рис. 7.6.

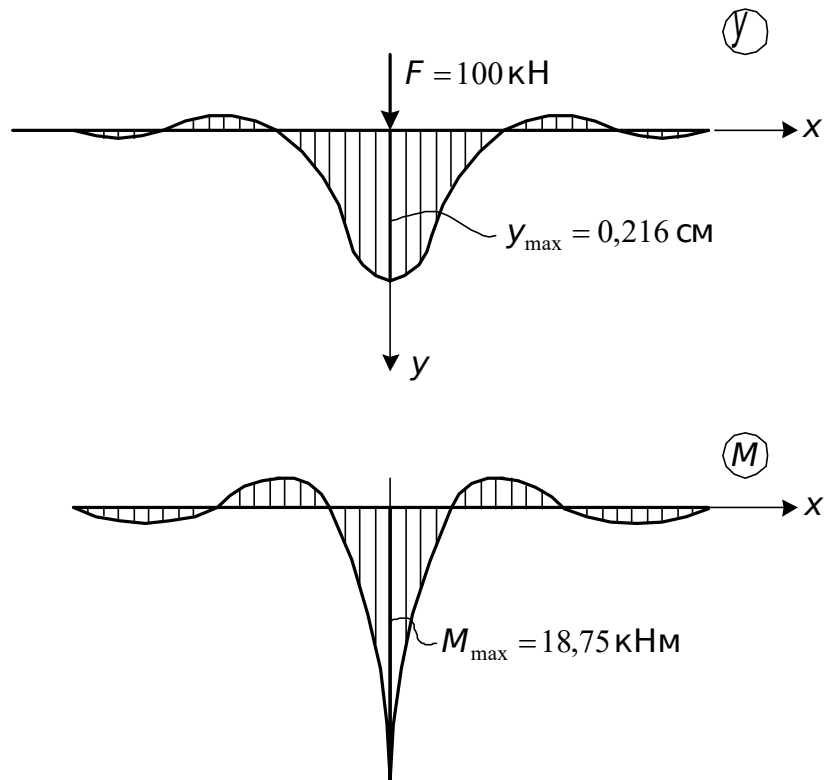


Рис. 7.6. К задаче 7.2.1

**7.2.2.** Характеристика  $s = \frac{1}{75} \text{ см}^{-1}$ . Приведенная длина балки  $s\ell = 200 / 75 = 2,67$ . Так как  $1,2 < 2,67 < 4$ , балка должна быть рассчитана как короткая.

Воспользуемся методом начальных параметров. Сначала необходимо найти начальные параметры  $Y_0$ ,  $Y'_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$ . Из них два равны нулю, так как левый конец свободный  $M_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ . Для нахождения  $Y_0$  и  $Y'_0$  запишем условия закрепления правого конца балки. При свободном конце  $M_\ell = 0$  и  $Q_\ell = 0$ .

Запишем выражения для изгибающего момента и поперечной силы при  $x = \ell$ :



$$4EJs^2 y_0 Y_{3sl} + 4EJs y'_0 Y_{4sl} - \frac{F}{S} Y_{2\frac{sl}{2}} = 0,$$

$$4EJs^3 y_0 Y_{2sl} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3sl} - F Y_{1\frac{sl}{2}} = 0.$$

Решая эти уравнения относительно  $Y_0$  и  $Y'_0$  с помощью определителей, получим

$$y_0 = \frac{D_{y_0}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F}{S} Y_{2\frac{sl}{2}} & 4EJs Y_{4sl} \\ F Y_{1\frac{sl}{2}} & 4EJs^2 Y_{3sl} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4EJs^2 Y_{3sl} & 4EJs Y_{4sl} \\ 4EJs^3 Y_{2sl} & 4EJs^2 Y_{3sl} \end{vmatrix}} = \frac{FS}{k} \frac{Y_{2\frac{sl}{2}} Y_{3sl} - Y_{1\frac{sl}{2}} Y_{4sl}}{Y_{3sl}^2 - Y_{2sl} Y_{4sl}},$$

$$y'_0 = \frac{FS^2}{k} \frac{Y_{1\frac{sl}{2}} Y_{3sl} - Y_{2sl} Y_{2\frac{sl}{2}}}{Y_{3sl}^2 - Y_{2sl} Y_{4sl}},$$

где  $k = 4s^4 EJ$ .

Из таблицы значений функций А.Н. Крылова (прил. 4) для  $sl = \frac{1}{75} 200 = 2,67$  и  $\frac{sl}{2} = \frac{1}{75} 100 = 1,33$  находим

$$Y_1(1,33) = 0,4824, \quad Y_2(1,33) = 1,1919,$$

$$Y_3(1,33) = 0,8538, \quad Y_4(1,33) = 0,3863,$$

$$Y_2(2,67) = -1,5527, \quad Y_3(2,67) = 1,6322,$$

$$Y_4(2,67) = 2,4242.$$

Начальные параметры

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{75 \cdot 30 \cdot 10^6} \cdot \frac{1,1919 \cdot 1,6322 - 0,4824 \cdot 0,3863}{1,6322^2 + 1,5527 \cdot 2,4242} = \\ &= 0,444 \frac{1,945 - 0,186}{6,428} = 0,1215 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$y'_0 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{75^2 \cdot 30 \cdot 10^6} \cdot \frac{0,4824 \cdot 1,6322 - 1,1919(-1,5527)}{6,428} = 0,002432 \text{ рад.}$$

Выражения для вычисления прогибов и изгибающих моментов для левой половины балки будут иметь вид

$$y(x) = y_0 Y_{1sx} + \frac{y'_0}{S} Y_{2sx},$$

$$M(x) = 4EJs^2 y_0 Y_{3sx} + 4EJs y'_0 Y_{4sx}.$$

Вычисления ординат эпюр  $y(x)$  и  $M(x)$  приведены в табл 7.2.

Таблица 7.2

$X$ , см	0	25	50	75	100
$SX$	0	0,33	0,67	1,00	1,33
$Y_{1sx}$	1	0,9980	0,9664	0,8337	0,4824
$Y_{2sx}$	0	0,3299	0,6655	0,9668	1,1919
$Y_{3sx}$	0	0,0545	0,2240	0,4945	0,8538
$Y_{4sx}$	0	0,0060	0,0501	0,1659	0,3863
$0,1215 Y_{1sx}$	0,122	0,121	0,117	0,101	0,059
$0,1824 Y_{2sx}$	0	0,060	0,121	0,175	0,218
$y(x)$ , см	0,122	0,181	0,238	0,276	0,277
$21,13 Y_{3sx}$	0	1,15	4,73	10,45	18,04
$31,73 Y_{4sx}$	0	0,19	1,59	5,26	12,26
$M(x)$ , кНм	0	1,34	6,32	15,71	30,30

Эпюры симметричны, они приведены на рис. 7.7.

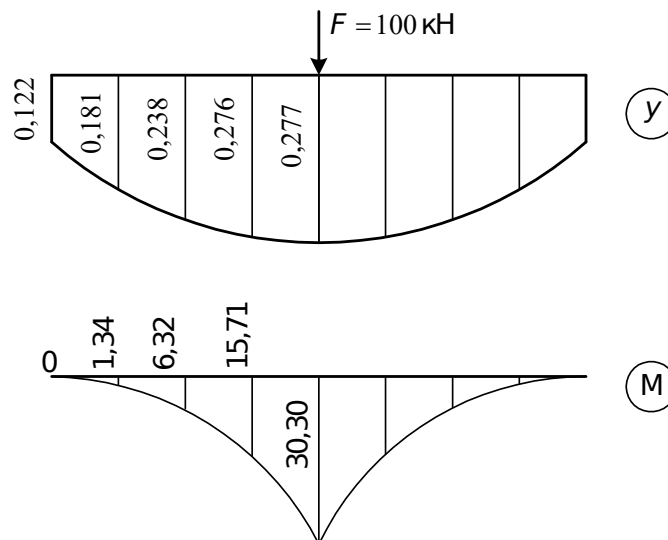


Рис. 7.7. К задаче 7.2.2

**7.2.3.** Коэффициент постели, когда основанием является вода, равен  $k = b\gamma$ , где  $\gamma$  – удельный вес воды (рис. 7.8).

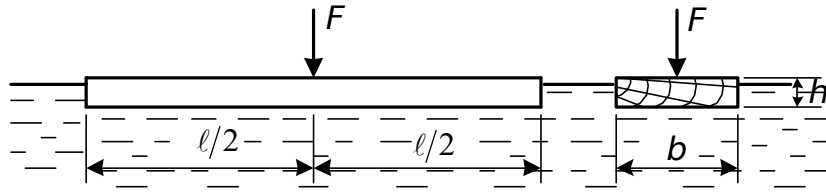


Рис. 7.8. К задаче 7.2.3

Параметр, характеризующий упругие свойства балки и основания,

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{12b\gamma}{4Eb h^3}} = \sqrt[4]{\frac{3\gamma}{Eh^3}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}.$$

Чтобы выбрать расчетную схему балки, найдем  $s\ell = 2,34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 2,34$ . Так как  $1,2 < 2,34 < 4$ , расчетной схемой будет короткая балка.

Определяем начальные параметры. Отличные от нуля начальные параметры при свободном левом конце балки –  $Y_0$  и  $Y'_0$ . Их можно определить либо из условий закрепления правого конца балки, либо, учитывая симметрию схемы загрузки, из условий посередине балки. При  $x = \frac{\ell}{2}$   $y'_{\frac{\ell}{2}} = 0$  и  $Q_{\frac{\ell}{2}} = \frac{F}{2}$ . Использование этих условий предпочтительнее с точки зрения увеличения точности значений вычисляемых начальных параметров, а также уменьшения количества действий при производстве вычислений. Записываем уравнения, учитывающие эти граничные условия:

$$-4s y_0 Y_{4 \frac{s\ell}{2}} + Y'_0 Y_{1 \frac{s\ell}{2}} = 0,$$

$$4EJs^3 y_0 Y_{2 \frac{s\ell}{2}} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3 \frac{s\ell}{2}} = \frac{F}{2}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_{1 \frac{s\ell}{2}} \\ \frac{F}{2} & 4EJs^2 Y_{3 \frac{s\ell}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4s Y_{4 \frac{s\ell}{2}} & Y_{1 \frac{s\ell}{2}} \\ 4EJs^3 Y_{2 \frac{s\ell}{2}} & 4EJs^2 Y_{3 \frac{s\ell}{2}} \end{vmatrix}} = \frac{F}{8EJs^3} \frac{Y_{1 \frac{s\ell}{2}}}{4Y_{4 \frac{s\ell}{2}} Y_{2 \frac{s\ell}{2}} + Y_{1 \frac{s\ell}{2}} Y_{3 \frac{s\ell}{2}}},$$

$$\frac{Y'_0}{s} = \frac{\begin{vmatrix} -4s Y_{4 \frac{s\ell}{2}} & 0 \\ 4EJs^3 Y_{2 \frac{s\ell}{2}} & \frac{F}{2} \end{vmatrix}}{4Y_{4 \frac{s\ell}{2}} Y_{3 \frac{s\ell}{2}} + Y_{1 \frac{s\ell}{2}} Y_{2 \frac{s\ell}{2}}} = \frac{F}{8EJs^3} \frac{4Y_{4 \frac{s\ell}{2}}}{4Y_{4 \frac{s\ell}{2}} Y_{3 \frac{s\ell}{2}} + Y_{1 \frac{s\ell}{2}} Y_{2 \frac{s\ell}{2}}}.$$

$Y'_0$  делится на  $S$  для удобства вычислений.

Находим функции А.Н. Крылова при  $\frac{s\ell}{2} = \frac{2,34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{2} = 1,17$ :

$$Y_1(1,17) = 0,6891, \quad Y_2(1,17) = 1,0971,$$

$$Y_3(1,17) = 0,6702, \quad Y_4(1,17) = 0,2646$$

и вычисляем значения начальных параметров

$$y_0 = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2,34^3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,6891}{4 \cdot 0,2646 \cdot 0,6702 + 0,6891 \cdot 1,0971} =$$

$$= 2,9267 \frac{0,6891}{1,46535} = 1,3763 \text{ см.}$$

$$\frac{y'_0}{s} = 2,9267 \frac{4 \cdot 0,2646}{1,46535} = 2,1139 \text{ см.}$$

Максимальные прогиб и изгибающий момент будут посередине балки.

$$y_{\max} = y_0 Y_{1 \frac{s\ell}{2}} + \frac{y'_0}{s} Y_{2 \frac{s\ell}{2}} = 1,3763 \cdot 0,6891 + 2,1139 \cdot 1,0971 = 3,27 \text{ см.}$$

$$M_{\max} = 4EJs^2 y_0 Y_{3 \frac{s\ell}{2}} + 4EJs^2 \frac{y'_0}{s} Y_{4 \frac{s\ell}{2}} = 4EJs^2 \left( y_0 Y_{3 \frac{s\ell}{2}} + \frac{y'_0}{s} Y_{4 \frac{s\ell}{2}} \right) =$$

$$= 4 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \frac{20 \cdot 10^3}{12} 10^{-8} \cdot 2,34^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 (1,3763 \cdot 0,6702 +$$

$$+ 2,1139 \cdot 0,2646) 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 0,54 \text{ кНм.}$$

Наибольшее напряжение в брус

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 0,54 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 1,62 \text{ МПа.}$$

Необходимо заметить, что полученное решение будет верно только в том случае, если на всей длине брус верхней своей плоскостью будет выступать над поверхностью воды. Только в этом случае можно считать реакцию воды пропорциональной вертикальному смещению. Таким образом, применимость полученного решения определяется максимальным перемещением  $y_{\max}$ . При отсутствии нагрузки балка будет погружена в воду на величину, равную  $0,6h$  (поскольку ее удельный вес составляет  $0,6$  удельного веса воды). Верхняя плоскость бруса возвышается над уровнем воды на  $0,4h \approx 4$  см. Следовательно, условием применимости полученного решения будет  $y_{\max} \leq 4$  см. В нашем случае

$$y_{\max} = 3,27 \text{ см} < 4 \text{ см.}$$

**7.2.4.** Определим жесткость упругого основания  
 $k = b\gamma = 3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ кПа.}$

Характеристика

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{30 \cdot 10^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^6}} = \frac{1}{2270} \text{ см}^{-1}.$$

Приведенная длина понтона, как балки,  $s\ell = \frac{1000}{2270} = 0,44 < 0,8$ . Следовательно, понтон можно рассчитывать как бесконечно жесткую балку. А это означает, что давление со стороны основания на понтон будет распределяться по прямой. Пусть осадка у носа равна  $Y_1$  и у кормы  $Y_2$ . На рис. 7.9, а показана эпюра давления воды на понтон.

Для определения  $Y_1$  и  $Y_2$  составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma y = 0, \quad F - \frac{Y_1 + Y_2}{2} b\gamma\ell = 0, \\ \Sigma M_a = 0, \quad Fa - \frac{b\gamma Y_1 \ell^2}{2} - \frac{b\gamma(Y_2 - Y_1)\ell}{2} \frac{2}{3} \ell = 0. \end{aligned}$$

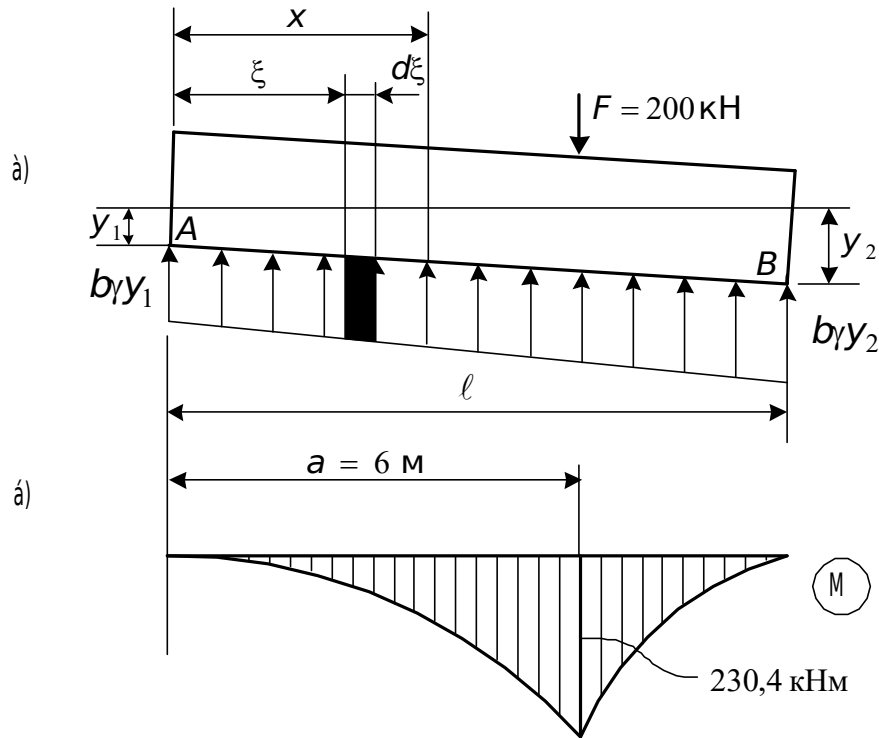


Рис. 7.9. К задаче 7.2.4

Решая совместно уравнения, получим

$$Y_1 = \frac{6F}{b\gamma\ell^2} \left( \frac{2}{3}\ell - a \right) = \frac{6 \cdot 200}{3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} \left( \frac{2}{3} \cdot 10 - 6 \right) \cdot 10^2 = 26,67 \approx 27 \text{ см},$$

$$Y_2 = \frac{6F}{b\gamma\ell^2} \left( a - \frac{\ell}{3} \right) = \frac{6 \cdot 200}{3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} \left( 6 - \frac{10}{3} \right) \cdot 10^2 = 106,67 \approx 107 \text{ см}.$$

Зная осадку понтона, получаем интенсивность давления воды на понтон  $q = b\gamma \left[ Y_1 + (Y_2 - Y_1) \frac{x}{\ell} \right]$ .

Изгибающий момент на участке I понтона (рис. 7.9, а)

$$M'(x) = \int_0^x (x - \xi) q d\xi = \frac{F}{\ell^2} x^2 \left[ 2\ell - 3a + \left( \frac{2a}{\ell} - 1 \right) x \right].$$

На участке II

$$M''(x) = M'(x) - F(x - a) = \frac{F}{\ell^2} x^2 \left[ 2\ell - 3a + \left( \frac{2a}{\ell} - 1 \right) x \right] - F(x - a).$$

По этим уравнениям строим эпюру изгибающих моментов (рис. 7.9, б). Максимальный момент под силой  $F$  (при  $x = a$ )

$$M_{\max} = \frac{2Fa^2}{\ell^2} \left( \ell - 2a + \frac{a^2}{\ell} \right) = \frac{2 \cdot 200 \cdot 6^2}{10^2} \left( 10 - 2 \cdot 6 + \frac{6^2}{10} \right) = 230,4 \text{ кНм.}$$

### Раздел 8

**8.2.1.** Найдем положение нейтральной оси, если грузовая плоскость  $p-p$  проходит через диагональ сечения (рис. 8.8).

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3 \cdot 12}{12 \cdot hb^3} \cdot \frac{b}{h} = -\frac{h}{b}.$$

Нейтральная ось совпадает с другой диагональю сечения.

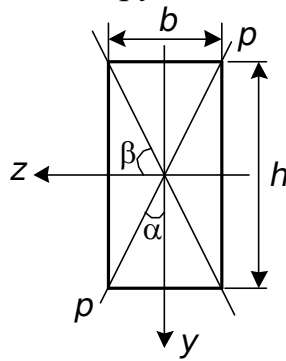


Рис. 8.8. К задаче 8.2.1

**8.2.2.** Наибольшее напряжение в балке будет (рис. 8.9)

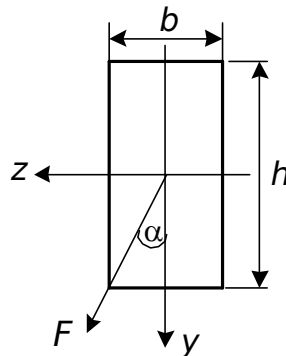


Рис. 8.9. К задаче 8.2.2

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = M_{\max} \left( \frac{6 \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6 \sin \alpha}{hb^2} \right) = \\ &= \frac{6M_{\max}}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) = \frac{6M_{\max}}{A^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ .  
Учитывая это, из (8.1) площадь сечения выразится так:

$$A^2 \geq \frac{6M_{\max}}{[\sigma]} (h \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Заменим "b" через  $\frac{A}{h}$  и обозначим для краткости  $\frac{6M_{\max}}{[\sigma]}$  через C :

$$A^2 = C \left( h \sin \alpha + \frac{A}{h} \cos \alpha \right)$$

или

$$A^2 - \frac{C \cos \alpha}{h} A - C h \sin \alpha = 0. \quad (8.2)$$

Левая часть полученного равенства является функцией  $h$  и  $A$  :

$$f(h, A) = 0,$$

причем  $A$  в свою очередь зависит от  $h$ . Для отыскания минимума  $A$  найдем производную  $\frac{dA}{dh}$  по правилу дифференцирования неявной функции и приравняем нулю:

$$\frac{dA}{dh} = - \frac{\frac{df}{dh}}{\frac{df}{dA}} = 0.$$

Полученное равенство будет удовлетворено, если  $\frac{df}{dh} = 0$ ,

т. е.  $\frac{C \cos \alpha}{h^2} A - C \sin \alpha = 0.$

Отсюда  $A = h^2 \operatorname{tg} \alpha$  или

$$bh = h^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.3)$$

Следовательно, искомое соотношение сторон сечения

$$\frac{b}{h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Необходимая высота сечения определится из равенств (8.2) и (8.3)

$$h = \sqrt[3]{\frac{2C \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \sqrt[3]{\frac{12M_{\max} \cos^2 \alpha}{[\sigma] \sin \alpha}}.$$

Нетрудно убедиться, что другие два условия существования минимума, а именно

$$\frac{df}{dA} \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\frac{d^2 f}{dA^2}}{\frac{df}{dA}} > 0,$$

удовлетворяются.

**8.2.3.** Найдем геометрические характеристики усиленного сечения (рис. 8.10, б) (прил. 2):

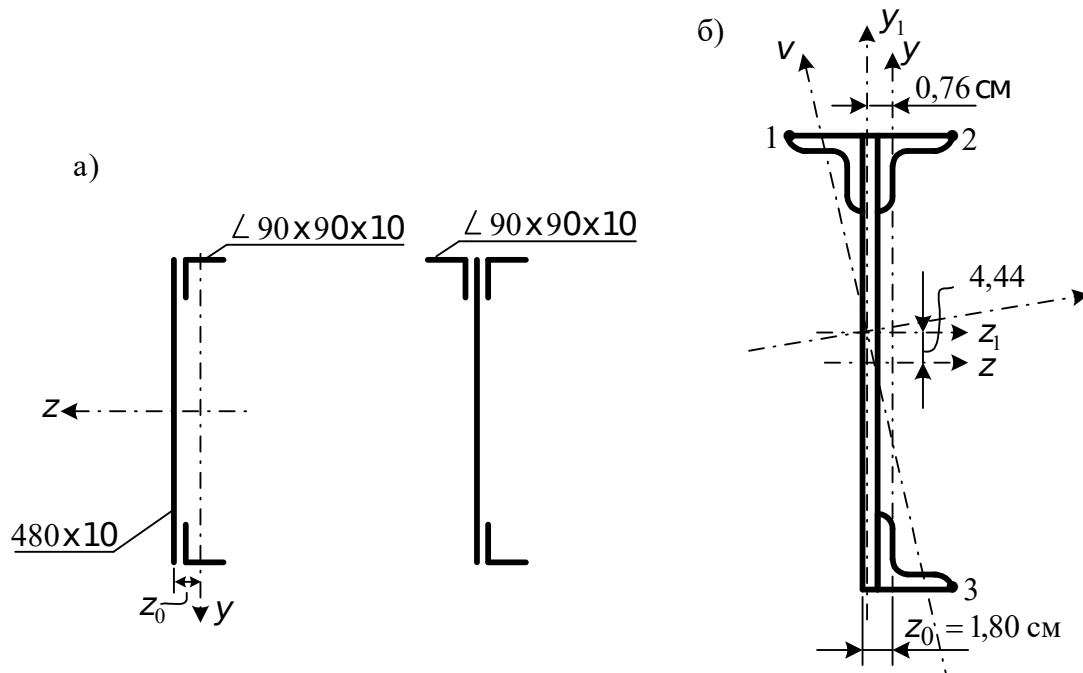


Рис. 8.10. К задаче 8.2.3

– площадь  $A_1 = 98,4 + 19,2 = 117,6 \text{ см}^2$ , координаты центра тяжести относительно осей  $YOZ$

$$y_c = \frac{S_z}{A_1} = \frac{19,2(30 - 2,83)}{117,6} = 4,44 \text{ см},$$

$$z_c = \frac{S_y}{A_1} = \frac{-19,2(2,83 + 1,80)}{117,6} = -0,76 \text{ см};$$

– осевые моменты инерции

$$J_z = 49735 + 98,4 \cdot 4,44^2 + 179 + 19,2(30 - 2,83 - 4,44)^2 = 61774 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 623 + 98,4 \cdot 0,76^2 + 179 + 19,2(2,83 + 1,80 - 0,76)^2 = 1146 \text{ см}^4;$$

– центробежный момент инерции

$$J_{zy} = -98,4 \cdot 4,44 \cdot 0,76 - \frac{284 + 74,1}{2} - 19,2(30 - 2,83 - 4,44)(2,83 + 1,80 - 0,76) = -2200 \text{ см}^4;$$

– угол наклона главных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2(-2200)}{61774 - 1146} = 0,0726, \quad 2\alpha_0 = 4,15^\circ, \quad \alpha_0 = 2,08^\circ;$$

– главные моменты инерции

$$J_{u, v} = \frac{61774 + 1146}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(61774 - 1146)^2 + 4 \cdot 2200^2} = \begin{cases} 61854 \text{ см}^4, \\ 1066 \text{ см}^4; \end{cases}$$

– координаты наиболее удаленных точек



$$V_1 = Y_1 \cos \alpha_0 - Z_1 \sin \alpha_0 = (30 - 4,44) \cdot 0,9993 + (10 + 1,80 - 0,76) \times \\ \times 0,0362 = 25,14 \text{ см};$$

$$u_1 = y \sin \alpha_0 + z \cos \alpha_0 = (30 - 4,44) 0,0362 - (10 + 1,80 - 0,76) \times \\ \times 0,9993 = -10,11 \text{ см};$$

$$v_2 = (30 - 4,44) 0,9993 - (10 + 1 - 1,8 + 0,76) 0,0362 = 25,18 \text{ см};$$

$$u_2 = 25,56 \cdot 0,0362 + 9,96 \cdot 0,9993 = 10,88 \text{ см};$$

$$v_3 = -(30 + 4,44) 0,9993 - 9,96 \cdot 0,0362 = -34,78 \text{ см};$$

$$u_3 = -34,44 \cdot 0,0362 + 9,96 \cdot 0,9993 = 8,71 \text{ см}.$$

Наиболее напряженной точкой будет скорее всего точка 2. Нормальные напряжения в ней

$$\sigma_2 = M_{\max} \left( -\frac{v_2 \cos \alpha}{J_u} - \frac{u_2 \sin \alpha}{J_v} \right) = M_{\max} \left( -\frac{25,18 \cdot 0,9993}{61854} - \frac{10,88 \cdot 0,0362}{1066} \right) = \\ = -7,76 \cdot 10^{-4} M_{\max}.$$

До усиления

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{49735} 30 = 6,03 \cdot 10^{-4} M_{\max}.$$

Следовательно,

$$\sigma_2 = \left| \frac{7,76 \cdot 10^{-4}}{6,03 \cdot 10^{-4}} \right| \sigma_{\max} = 1,29 \sigma_{\max}.$$

Таким образом, при подобном “усилении” напряжения не уменьшились, как ожидалось, а увеличились примерно на 30 %. Произошло не усиление, а ослабление сечения ввиду изменения вида напряженного состояния. До усиления балка испытывала плоский изгиб, а после – косой. При усилении необходимо следить за тем, чтобы не менялся вид напряженного состояния.

**8.2.4.** Под действием нагрузки балка испытывает изгиб в двух плоскостях, причем изогнутая ось ее будет пространственной кривой, так как отношение  $\frac{M_y}{M_z}$  переменено по длине балки (рис. 8.11).

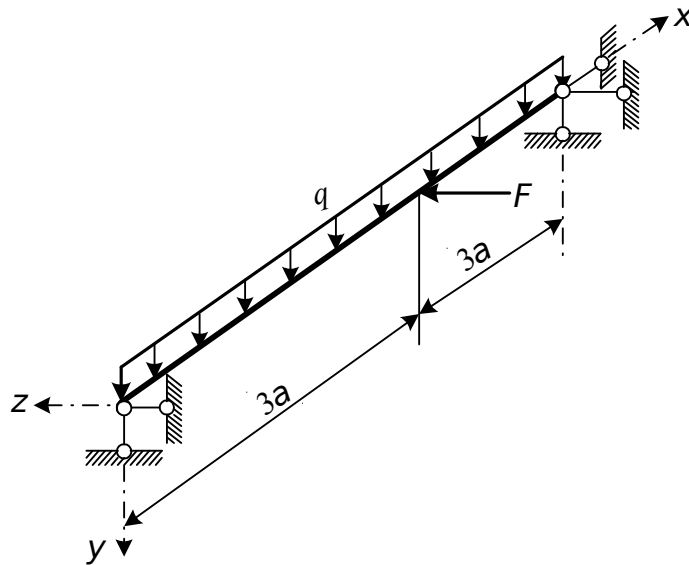


Рис. 8.11. К задаче 8.2.4

Напряжение в балке найдется по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{k^2b^3}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{kb^3}{6}.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{6}{k^2b^3} (M_z + kM_y). \quad (8.4)$$

Наибольшие напряжения будут возникать в опасном сечении. Для отыскания опасного сечения необходимо построить отдельно эпюры  $M_z$  и  $M_y$ . Опорные реакции

$$R_a = R_b = \frac{q4a}{2} = 2qa;$$

$$H_a = \frac{F a}{4a} = \frac{2qa^2}{4a} = 0,5qa;$$

$$H_b = 1,5qa.$$

Эпюры показаны на рис. 8.12. Сопоставляя обе эпюры, видим, что абсцисса опасного сечения лежит между значениями  $x_1 = 2a$  и  $x_2 = 3a$ :

$$2a \leq x \leq 3a.$$

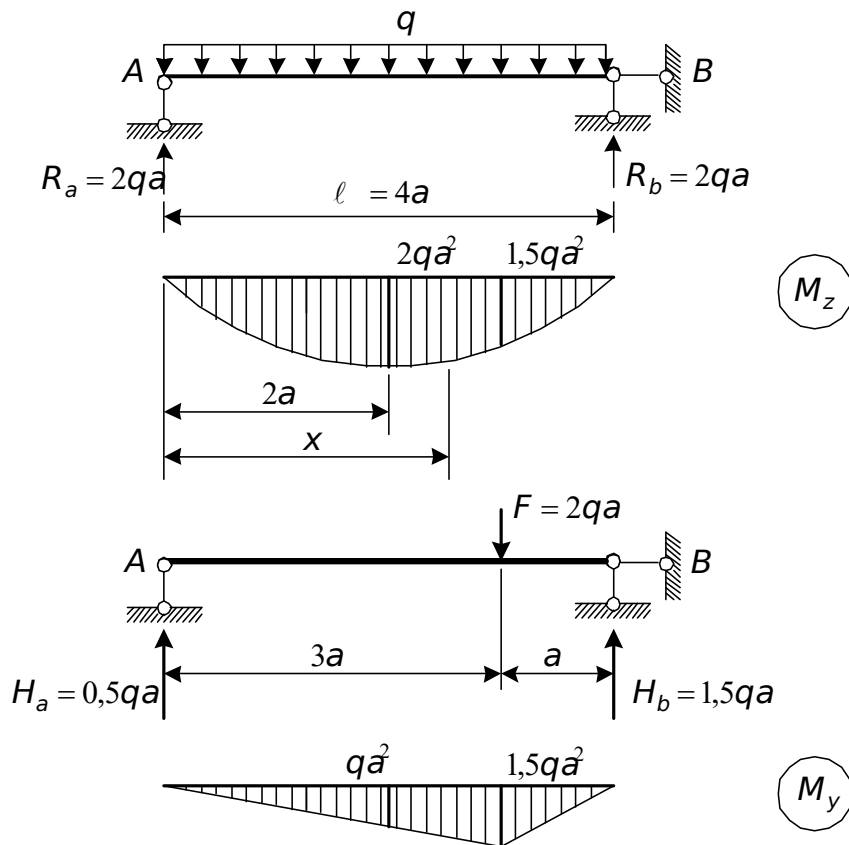


Рис. 8.12. К задаче 8.2.4

Выражения  $M_z$  и  $M_y$  в зависимости от абсциссы  $x$  будут следующими:

$$M_z = R_a x - \frac{qx^2}{2} = 2qax - \frac{qx^2}{2},$$

$$M_y = H_a x = 0,5qax.$$

Для отыскания положения опасного сечения, где нормальное напряжение будет наибольшим, первую производную от (8.4) приравняем нулю:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{6}{k^2 b^3} \left( \frac{dM_z}{dx} + k \frac{dM_y}{dx} \right) = 0.$$

Подставляя сюда выражения  $M_z$  и  $M_y$ , получаем значение абсциссы опасного сечения:

$$x = 2a + \frac{ka}{2}.$$

Отсюда видно, что положение опасного сечения зависит не только от характеристики и распределения нагрузки, но и от соотношения сторон сечения, и потому опасное сечение вообще не совпадает с сечением, в котором результирующий момент  $M_p = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  достигает максимума. При соотношении сторон  $k = 2$

$$x = 3a; \quad \sigma_{\max} = \frac{6,75qa^2}{b^3}.$$

### 8.2.5. Из условия прочности при косом изгибе

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \leq [\sigma]$$

грузоподъемность балки

$$M \leq \frac{[\sigma]}{\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y}}.$$

Найдем значение угла наклона грузовой плоскости  $\alpha$  (рис. 8.13), при котором грузоподъемность будет наименьшей. Для чего найдем первую производную  $\frac{dM}{d\alpha}$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{dM}{d\alpha} = - \frac{[\sigma] \left( -\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right)}{\left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^2} = 0. \quad (8.5)$$

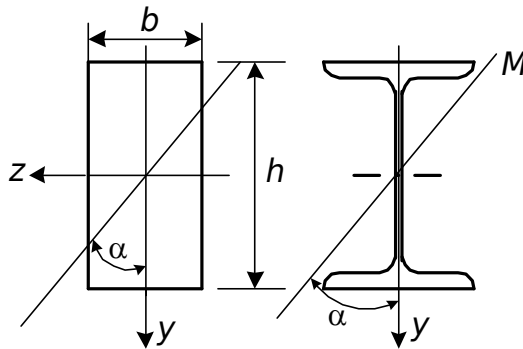


Рис. 8.13. К задаче 8.2.5

Знаменатель при любых  $\alpha$  всегда больше нуля, значит, числитель должен быть равным нулю

$$-\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} = 0.$$

Разделив все на  $\frac{\cos \alpha}{W_z}$ , имеем

$$-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{W_z}{W_y} = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_z}{W_y} = n.$$

В частном случае для прямоугольного сечения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = n.$$

Угол наклона  $\alpha$  грузовой плоскости к оси  $Y$  будет

$$\alpha = \operatorname{arctg} n.$$

Для того чтобы убедиться, что при этом  $\alpha$  грузоподъемность будет наименьшей, найдем знак второй производной. При взятии второй производной используем выражение (8.5) первой производной:

$$\frac{d^2 M}{d\alpha^2} = -[\sigma] \left[ \frac{\left( -\frac{\cos \alpha}{W_z} - \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^2}{\left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^4} - \frac{2 \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \left( -\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right)^2}{\left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^4} \right].$$

Анализируем полученное выражение. В числителе из первой скобки выносим знак минус и меняем все знаки на положительные. Тогда в числителе имеем два положительных слагаемых, знаменатель тоже число положительное при любых  $\alpha$ . Следовательно,

$$\frac{d^2 M}{d\alpha^2} > 0,$$

а грузоподъемность действительно будет наименьшей. Интересно заметить, что при этом грузоподъемность балки ниже грузоподъемности ее при плоском изгибе в горизонтальной плоскости. Это соотношение будет

$$\begin{aligned} \frac{M_y}{M} &= \frac{W_y [\sigma] \left( \frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)}{[\sigma]} = \cos \alpha \frac{W_y}{W_z} + \sin \alpha = \sin \alpha \left( \frac{W_y \cos \alpha}{W_z \sin \alpha} + 1 \right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 \right) = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, чем более высокое сечение, тем меньше это соотношение. Для двутавра (прил. 2) угол меняется от  $80^\circ 42' 56''$  (№ 10) до  $85^\circ 56'$  (№ 60), а грузоподъемность соответственно снижается на 1,33 % (№ 10) и 0,25 % (№ 60).

**8.2.6.** Сначала вычислим геометрические характеристики сечения балки (рис. 8.14, б). Центр тяжести сечения относительно оси  $Z_1$  (рис. 8.14, б)

$$y_0 = \frac{S_{Z_1}}{A},$$

где

$$\begin{aligned} S_{Z_1} &= \int_A y dA = \int_A b(y) y dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi d\varphi = 4r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\sin \varphi = \\ &= 4r^3 \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r^3}{3}. \end{aligned}$$

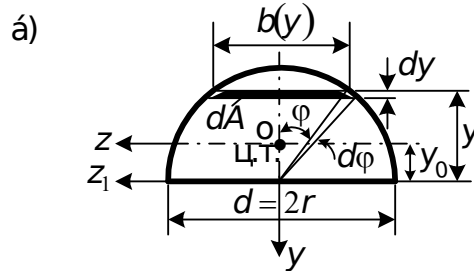
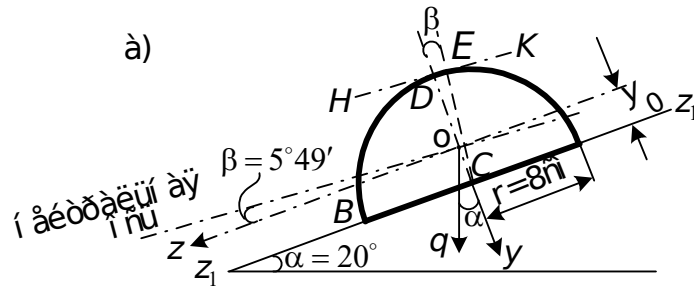


Рис. 8.14. К задаче 8.2.6

Тогда

$$y_0 = \frac{4r^3}{3\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 3,14} = 3,4 \text{ см.}$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей

$$J_y = \frac{1}{2} \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} = 1608 \text{ см}^4;$$

$$J_z = J_{z_1} - Ay_0^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \left( \frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9 \cdot 3,14^2} \right) = 450 \text{ см}^4.$$

Угол наклона нейтральной оси к оси  $Z$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = \frac{450}{1608} \operatorname{tg} 20^\circ = 0,1019;$$

$$\text{угол } \beta = 5^\circ 49'; \quad \cos \beta = 0,995; \quad \sin \beta = 0,1013.$$

Наибольшие нормальные напряжения возникнут в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси; это будут точки В и Е (точка, в которой линия НК, параллельная нейтральной оси, касается контура сечения).

Нормальные напряжения в опасном сечении балки (посредине ее пролета) определяем по формуле

$$\sigma = M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha}{J_z} y + \frac{\sin \alpha}{J_y} z \right).$$

Так как

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 2^2}{8} = 1 \text{ кНм,}$$

то

$$\sigma = 1 \cdot 10^3 \left( \frac{0,940}{450} y + \frac{0,342}{1608} z \right) 10^8 \cdot 10^{-6} = 208,89y + 21,27z \text{ (МПа)}.$$

Нормальные напряжения в точке В с координатами  $y_b = y_0 = 3,4 \text{ см}$  и  $z_b = r = 8 \text{ см}$  будут растягивающими, они равны

$$\sigma_b = 208,89 y_b + 21,27 z_b = 208,89 \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} + 21,27 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 8,80 \text{ МПа}.$$

Координаты точки Е

$$|y_e| = OE = CD - OC = r \cos \beta - y_0 = 8 \cdot 0,995 - 3,4 = 4,56 \text{ см}$$

и

$$|z_e| = ED = CE \sin \alpha = r \sin \alpha = 8 \cdot 0,1013 = 0,81 \text{ см},$$

обе координаты отрицательны, напряжение в точке Е будет сжимающим, оно равно

$$\sigma_e = 208,89 y_e + 21,27 z_e = -208,89 \cdot 4,56 \cdot 10^{-2} - 21,27 \cdot 0,81 \cdot 10^{-2} = -9,70 \text{ МПа}.$$

## Раздел 11

**11.2.1.** Во втором случае (рис. 11.6, б) критическая сила будет вчетверо больше, чем в первом (рис. 11.6, а).

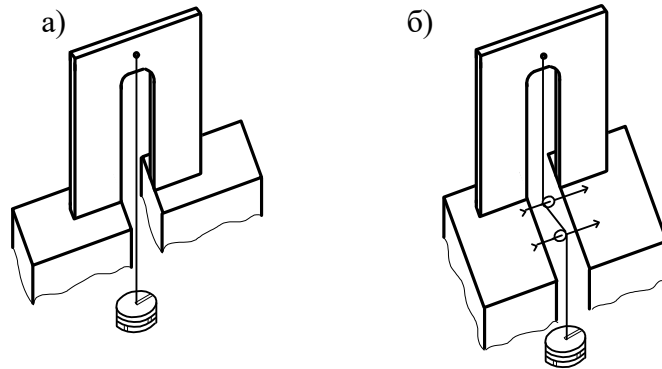


Рис. 11.6. К задаче 11.2.1

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть стойку в обоих случаях в изогнутом состоянии (рис. 11.7). В первом случае (рис. 11.7, а) критическая сила будет

$$F_{\text{кр1}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2}.$$

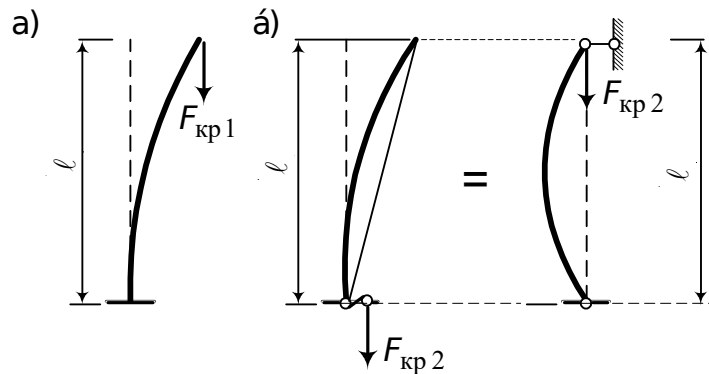


Рис. 11.7. К задаче 11.2.1

Во втором случае (рис. 11.7, б) в процессе искривления стойки сила следит за нижним ее концом, вследствие чего изгибающий момент в закреплении постоянно равен нулю. Следовательно, второй случай нагружения стойки ничем не отличается от случая шарнирного закрепления стойки по концам. Поэтому здесь

$$F_{\text{кр2}} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2},$$

и отношение  $\frac{F_{\text{кр2}}}{F_{\text{кр1}}} = 4$ .



11.2.2. На клапан В действует сила  $F_k = pA = 12 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 6$  кН. На стержень будет передаваться сжимающая сила с помощью рычага ВС в три раза меньше силы, действующей на клапан  $F_c = F_k \frac{BE}{CE} = 6 \frac{150}{450} = 2$  кН. По условию задачи предполагается, что при давлении на клапан  $p = 12$  атм, стержень CD должен потерять устойчивость, т. е. искривиться. Следовательно, сила  $F_c = 2$  кН, сжимающая стержень СВ, должна быть для него критической  $F_{кр} = F_c = 2$  кН (рис. 11.8).

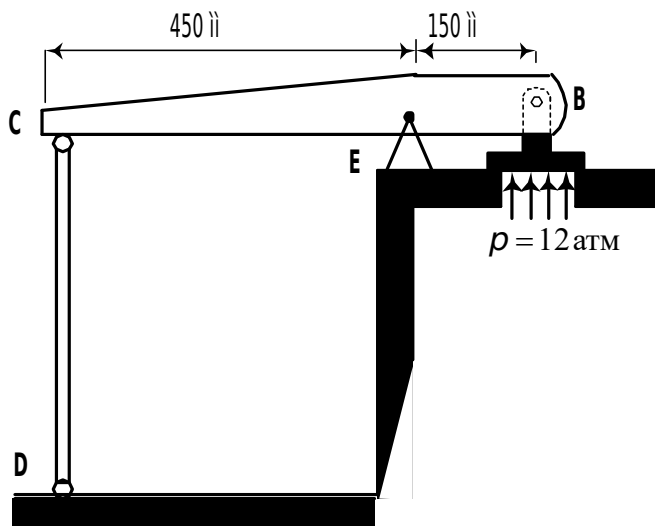


Рис. 11.8. К задаче 11.2.2

Предполагая, что при потере устойчивости материал стержня будет работать в упругой стадии, значение критической силы найдем по формуле Эйлера для данного вида закрепления концов:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2}.$$

Отсюда вычисляем необходимый наименьший момент инерции поперечного сечения:

$$J_{\min} = \frac{F_{кр} \ell^2}{\pi^2 E} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,6^2}{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10^6} 10^8 = 0,036 \text{ см}^4.$$

При подъеме клапана на 5 мм опора С стержня CD опустится по закону рычага на  $\delta = \frac{450}{150} 5 = 15$  мм. Стержень изогнется. Хорда, стягивающая концы изогнутого стержня, будет равна  $\ell_1 = \ell - \delta$ . Зная хорду, найдем прогиб  $f$ , который стержень должен давать при продольном изгибе. Кривую изгиба примем приближенно за синусоиду  $y = f \sin \frac{\pi X}{\ell}$ . Проекция кривой изгиба на ось  $X$  (рис. 11.9)

$$\ell_1 = \int_0^{\ell} ds \cos \alpha = \int_0^{\ell} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) ds = \ell - \int_0^{\ell} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} ds.$$

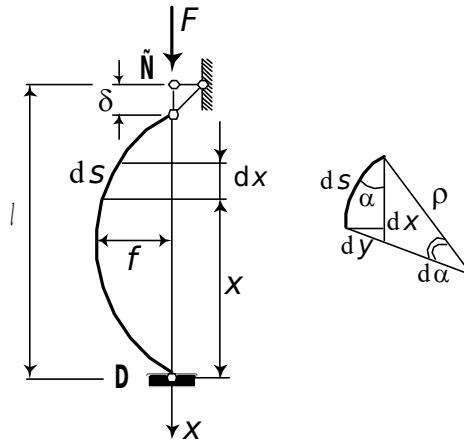


Рис. 11.9. К задаче 11.2.2

Полагая приближенно в силу малости деформации

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = y' \quad \text{и} \quad ds \approx dx,$$

находим

$$\ell_1 = \ell - \frac{1}{2} \int_0^\ell (y')^2 dx,$$

где  $\delta = \frac{1}{2} \int_0^\ell (y')^2 dx$ .

Дифференцируя уравнение кривой изгиба и подставляя значение  $y'$  в интеграл, находим

$$2\delta = \int_0^\ell \left[ \frac{f\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \right]^2 dx = \frac{f^2 \ell^2}{\ell^2} \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx,$$

откуда

$$f = \sqrt{\frac{2\delta \ell^2}{\pi^2 \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx}}.$$

Интеграл

$$\int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right] dx = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell \sin 2\pi}{2\pi} = \frac{\ell}{2}.$$

Для  $f$  окончательно получаем

$$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta \ell} = \frac{2}{3,14} \sqrt{15 \cdot 600} = 60,4 \text{ мм.}$$

Для того чтобы получить превышение силы по сравнению с критической, необходимо произвести интегрирование полного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \quad \text{или} \quad \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}} = \frac{M}{EJ}.$$

Результаты такого интегрирования для случая шарнирного закрепления концов представляются в виде следующего бесконечного ряда\* :

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 + \frac{19}{32} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^4 + \frac{29}{32} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^6 + \dots \right].$$

Пренебрегая в приведенном ряде всеми членами, кроме первого и второго, получим

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 \right] = F_{кр} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 \right].$$

Тогда превышение силы при  $f = 60,4$  мм над критической будет

$$F - F_{кр} = \frac{1}{2} F_{кр} \left( \frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \left( \frac{3,14 \cdot 60,4}{2 \cdot 600} \right)^2 = 25 \text{ Н.}$$

**11.2.3.** Составим дифференциальное уравнение для искривленной оси шарнирно опертого стержня при действии равномерно распределенной нагрузки  $q$ . При искривлении стержня возникают горизонтальные реакции  $R$ . Рассечем стержень на расстоянии  $X$  от верхнего конца и рассмотрим равновесие верхней его части. Спроектируем все силы на сечение (рис. 11.10). Поперечная сила в сечении

$$Q_x = -qx \sin \varphi_x - R \cos \varphi_x.$$

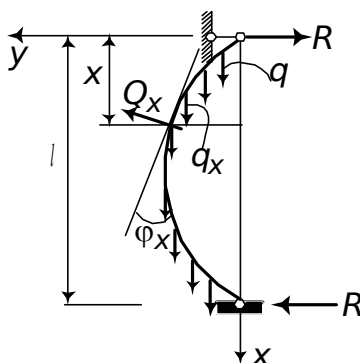


Рис. 11.10. К задаче 11.2.3

Учитывая, что  $EJ y''' = Q_x$ , и ввиду малости углов  $\varphi_x$ ,  $\sin \varphi_x \approx \operatorname{tg} \varphi_x = y'$  и  $\cos \varphi_x \approx 1$ , получим искомое дифференциальное уравнение  $EJ y''' + qxy' = -R$ .

Решение задачи по определению критической нагрузки, используя полученное уравнение, можно осуществить различными путями, например:

1) путем замены переменной  $X$  на новую, подобранную таким образом, чтобы заданное уравнение привелось к дифференциальному уравнению

\* Rudolf Mayer: "Die Kniefesttqiigkeit", § 4, 1921.

специального вида, интеграл которого может быть представлен бесселевыми функциями;

2) также может быть использован энергетический метод, в соответствии с которым для стержня с шарнирными закреплениями концов задаются приближенным значением упругой линии в виде

$$y = f \frac{\sin \pi X}{\ell}$$

и подставляют в выражение для полной энергии системы

$$\mathcal{E} = U - W,$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации изогнутого стержня;

$W$  – работа внешней нагрузки при искривлении стержня.

После чего, приравнявая нулю производную

$$\frac{d\mathcal{E}}{df} = 0,$$

находят приближенное значение критической нагрузки.

**11.2.4.** Определение необходимого номера профиля производится последовательными пробами. Задаемся значением  $\varphi$ , например, принимаем его равным 0,8 (рис. 11.11). Тогда из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma_{сж}].$$

Определяем необходимую площадь поперечного сечения одного швеллера

$$\frac{A}{2} = \frac{N}{2\varphi[\sigma_{сж}]} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,8 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 41,7 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8240-89 (прил. 2) выбираем □ № 33, для которого  $A = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $J_z = 7980 \text{ см}^4$ ,  $i_z = 13,1 \text{ см}$ .

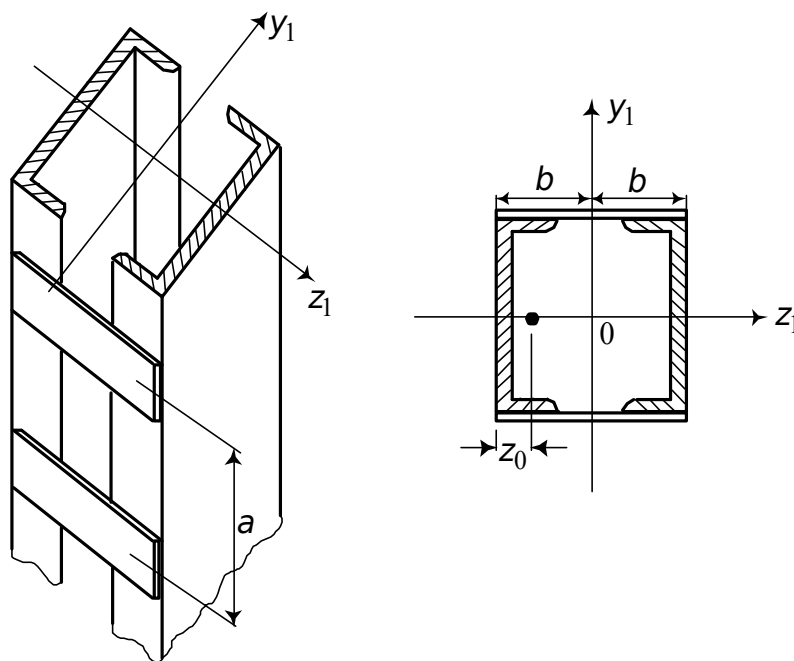


Рис. 11.11. К задаче 11.2.4

Вычисляем гибкость колонны (радиус инерции колонны равен радиусу инерции одного швеллера)

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_z} = \frac{1 \cdot 400}{13,1} = 30,5.$$

По таблице значений коэффициентов  $\Phi$  (прил. 6) в зависимости от  $\lambda$  находим:  $\varphi_1 = 0,95$ .

Задаемся новым значением  $\Phi$ , которое принимаем равным среднему:

$$\varphi_2 = \frac{0,8 + 0,95}{2} \approx 0,88.$$

При этом

$$\frac{A}{2} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,88 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 37,9 \text{ см}^2.$$

Близкая площадь у  $\square$  № 30:  
 $A = 40,5 \text{ см}^2$ ;  $J_z = 5810 \text{ см}^4$ ;  $i_z = 12,0 \text{ см}$ .

При этом гибкость  $\lambda = \frac{1 \cdot 400}{12} \approx 33$ .

Интерполируя, по таблице (прил. 6) находим  $\Phi$ :

$$\varphi_3 = 0,92 + \frac{0,95 - 0,92}{10} 7 = 0,94.$$

Значение близкое к предыдущему  $\varphi = 0,95$ .

Сделаем еще пробу:

$$\varphi_4 = \frac{0,88 + 0,94}{2} = 0,91,$$

$$\frac{A}{2} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,91 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 36,6 \text{ см}^2.$$

Принимаем тот же швеллер № 30, так как у меньшего (швеллер № 27)  $A = 35,2 \text{ см}^2 < 36,6 \text{ см}^2$ . Следовательно на швеллере № 30 можно остановиться. Проверка условия устойчивости дает

$$\sigma = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,94 \cdot 40,5 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 105 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Расстояние "b" находим из условия, что  $J_{y1} = J_{z1}$ .

Для швеллера № 30:  $J_y = 327$ ,  $z_0 = 2,52 \text{ см}$ . Поэтому

$$2 \left[ 327 + 40,5 (b - 2,52)^2 \right] = 2 \cdot 5810,$$

откуда

$$(b - 2,52)^2 = \frac{5810 - 327}{40,5},$$

$$a \quad b = \sqrt{\frac{5810 - 327}{40,5}} + 2,52 = 14,2 \text{ см}.$$

Наибольшее расстояние между планками "a" находим из условия примерно равных гибкостей  $\lambda$  всей колонны и одного швеллера длиной

$$a \leq \frac{\lambda \cdot i_{\min}}{\mu};$$

$\lambda$  всей колонны равна 33, а наименьший радиус одного швеллера  $i_{\min} = i_y = 2,84 \text{ см}$ , следовательно,

$$a \leq \frac{33 \cdot 2,84}{1} = 93,7 \text{ см}.$$

Эту величину обычно по конструктивным соображениям уменьшают. Поэтому принимаем расстояние между планками  $a = 90 \text{ см}$ .

## Раздел 12

**12.2.1.** При равномерном вращении ускорения частиц стержня, расположенных на расстоянии  $r$  от оси вращения, направлены к этой оси (центростремительные ускорения) и, как известно из курса теоретической механики, определяются по формуле

$$w = \omega^2 r. \quad (12.1)$$

Инерционные силы (центробежные силы) направлены по радиусам от оси вращения. Интенсивность их, отнесенная к единице длины стержня, равна

$$\rho_i = mw = \frac{\gamma A}{g} w = \frac{\gamma A \omega^2}{g} r. \quad (12.2)$$

Эпюра  $\rho_i$  показана на рис. 12.5, а. Силы инерции вызывают растяжение рассматриваемого стержня. Продольная сила  $N_r$  в сечении стержня, расположенного на расстоянии  $r$  от оси вращения, равна площади эпюры  $\rho_i$  на участке от этого сечения до конца стержня

$$N_r = \left( \frac{\gamma A \omega^2}{g} r + \frac{\gamma A \omega^2 \ell}{g} \frac{\ell - r}{2} \right) \frac{\ell - r}{2} = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} \left( \frac{\ell^2}{4} - r^2 \right). \quad (12.3)$$

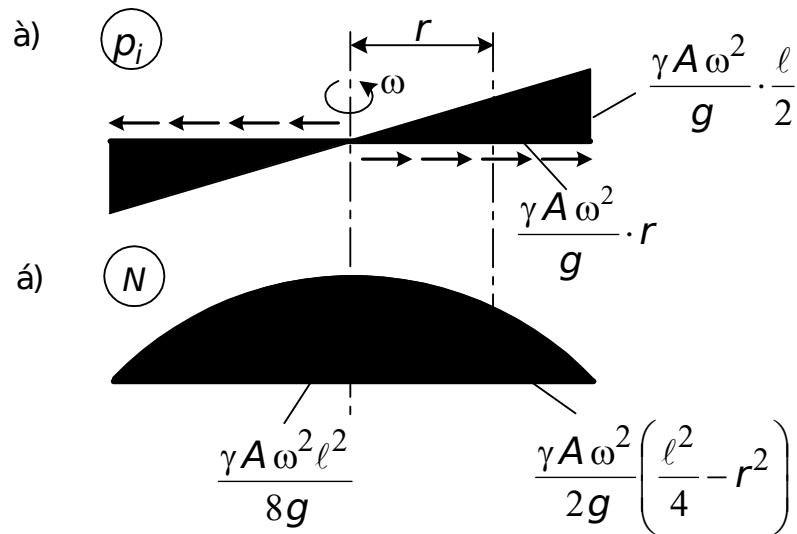


Рис. 12.5. К задаче 12.1

Наибольшее значение сила имеет посредине стержня, т. е. при  $r = 0$ :

$$N_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{8g}. \quad (12.4)$$

Эпюра продольных сил показана на рис. 12.5, б. Найдем наибольшую длину стержня  $\ell_{\text{пр}}$  из условия прочности на растяжение:

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

Учитывая (12.4), имеем

$$\frac{\gamma \omega^2 \ell_{\text{пр}}^2}{8g} \leq [\sigma].$$

Откуда

$$\ell_{\text{пр}} \leq \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma}}.$$

Но известно, что

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad (12.5)$$

тогда

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{30}{\pi n} \sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 1200} \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot 100 \cdot 10^6}{7,83 \cdot 10^4}} \approx 2,5 \text{ м.}$$

Стержень разорвется при достижении в нем напряжений равных пределу прочности

$$\frac{N_{\max}}{A} = \sigma_b.$$

Подставим сюда  $N_{\max}$  из (12.4) и вместо  $\omega$  ее значение из (12.5)

$$\frac{\gamma A \pi^2 n_{\text{пр}}^2 \ell_{\text{пр}}}{8qA \cdot 30^2} = \sigma_b.$$

Откуда

$$n_{\text{пр}} = \frac{30}{\pi \ell_{\text{пр}}} \sqrt{\frac{8g\sigma_b}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 2,5} \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot 800 \cdot 10^6}{7,83 \cdot 10^4}} = 3394 \text{ об/мин.}$$

12.2.2. Рассмотрим рис. 12.6.

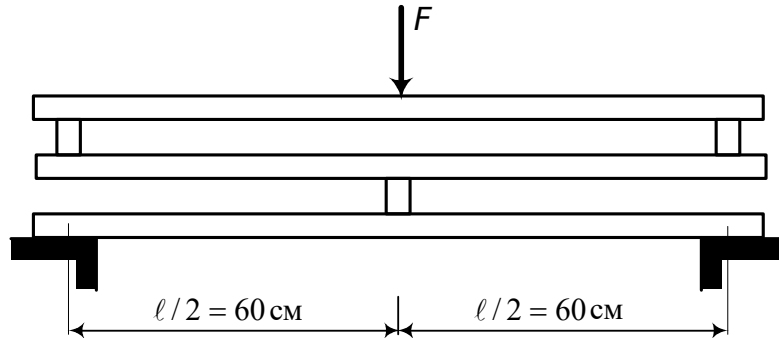


Рис. 12.6. К задаче 12.2.2

а) при статическом воздействии максимальный момент в каждой из балок будет возникать посередине пролета и будет равен

$$M_{\text{max}} = \frac{F\ell}{4}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} \leq [\sigma]$$

допустимая нагрузка будет равна

$$F_{\text{ст}} \leq \frac{4W[\sigma]}{\ell} = \frac{4a^3[\sigma]}{6\ell} = \frac{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot 140 \cdot 10^6}{6 \cdot 120 \cdot 10^{-2}} 10^{-3} = 16,8 \text{ кН};$$

б) нет, так как в каждой из балок максимальный момент, а значит, и максимальное напряжение будут одними и теми же;

в) при падении тела система балок будет испытывать ударное воздействие. При этом условие прочности будет

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{дин}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} k_{\text{дин}} \leq [\sigma],$$

или

$$\frac{F_1 \ell}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} \right) \leq [\sigma], \quad (12.6)$$

где  $\Delta_{\text{ст}}$  – опускание точки падения груза, возникающее в результате деформации системы балок при статическом воздействии груза  $F_1$ .

Каждая из балок будет иметь максимальный прогиб посередине

$$f_{\text{i ст}} = \frac{F_1 \ell^3}{48EJ},$$

а точка удара переместится на величину, равную сумме прогибов трех балок



$$\Delta_{ст} = 3f_{ст} = \frac{F_1 \ell^3}{16EJ}.$$

Для упрощения решения задачи по определению веса падающего тела  $F_1$ , пренебрежем единицей в  $k_{дин}$  перед корнем. Тогда (12.6) запишется с некоторыми преобразованиями, как

$$F_1 \sqrt{1 + \frac{32hEa^4}{F_1 \ell^3 \cdot 12}} \leq \frac{4a^3[\sigma]}{6\ell}.$$

Подставим сюда значения известных величин и введем  $F_1$  под корень:

$$\begin{aligned} \sqrt{F_1^2 + \frac{32 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}}{120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}} F_1 &\leq \\ &\leq \frac{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 120 \cdot 10^{-2}}, \end{aligned}$$

или

$$\sqrt{F_1^2 + 800F_1} = 16,80.$$

Возведем все в квадрат и получим квадратное уравнение относительно  $F_1$ :

$$F_1^2 + 800F_1 - 282,24 = 0,$$

откуда

$$F_1 = -400 \pm \sqrt{16 \cdot 10^4 + 282,24} = 0,353 \text{ кН}.$$

Проверим выполнение условия прочности (12.6) при точном значении динамического коэффициента

$$\frac{0,353 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \cdot 6}{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}}{0,353 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}} \right) \times 10^{-6} = 143 \text{ МПа} > 140.$$

Необходимо немного уменьшить силу  $F_1$ . При  $F_1 = 0,340$  кН условие (12.6) можно считать, что соблюдается:

$$140,3 \text{ МПа} \approx 140 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет всего 0,2 %;

г) если бы такой груз ( $F_1 = 0,34$  кН) падал лишь на одну балку, то перемещение (прогиб) в точке падения было бы равно

$$f_{ст} = \frac{F_1 \ell^3}{48EJ} = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} 10^2 = 5,67 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

и максимальное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{дин} &= \frac{F_1 \ell}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ст}}} \right) = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \cdot 6}{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} \times \\ &\times \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{5,67 \cdot 10^{-4}}} \right) 10^{-6} = 755,6 \text{ МПа} \end{aligned}$$

более, чем в 5 раз превышает допускаемое напряжение.

12.2.3. Найдем перемещение точки балки в месте падения груза (рис. 12.7).

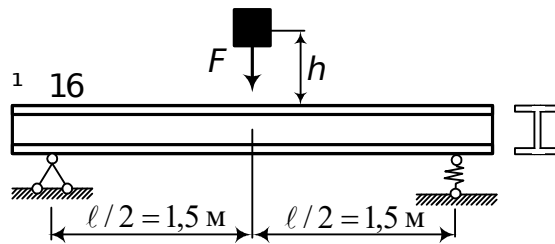


Рис. 12.7. К задаче 12.2.3

Оно будет складываться из прогиба балки и величины, равной половине осадки пружинной опоры (рис. 12.8). Прогиб середины балки (в сечении под грузом  $F$ ) от статического действия силы  $F = 2$  кН равен

$$f = \frac{F \ell^3}{48 E J_z} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3^3 \cdot 10^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1130 \cdot 10^{-8}} = 0,025 \text{ см},$$

где  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа – модуль упругости стали,

$J_z = 1130$  см<sup>4</sup> – осевой момент инерции двутавра №16 (прил. 2).

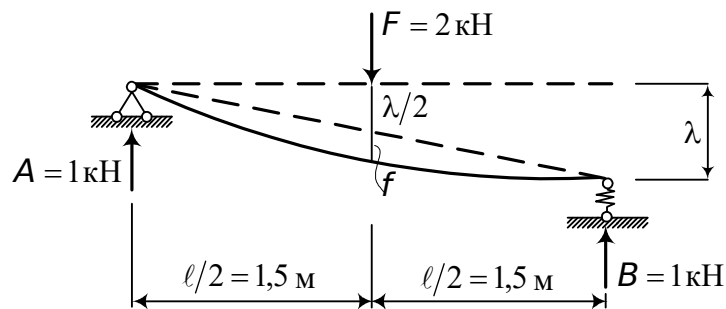


Рис. 12.8. К задаче 12.2.3

Осадка пружины под действием опорной реакции, равной  $B = \frac{F}{2} = 1$  кН, будет равна

$$\lambda = \frac{8BD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 20^4 \cdot 10^{-12}} = 0,625 \text{ см}.$$

Полное перемещение

$$\Delta_{\text{ст}} = f + \frac{\lambda}{2} = 0,025 + \frac{0,625}{2} = 0,3375 \text{ см}.$$

Динамический коэффициент (без учета собственного веса балки) определяется по формуле

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

Условие прочности балки по нормальным напряжениям запишется как

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{дин}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} k_{\text{дин}} = \frac{F \ell}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_1}{\Delta_{\text{ст}}}} \right) \leq [\sigma].$$

Отсюда находим допустимую высоту падения груза. Разделим левую и правую части неравенства на  $\frac{F\ell}{4W}$  и перенесем единицу в правую часть. Затем возведем обе части в квадрат:

$$1 + \frac{2h_1}{\Delta_{ст}} \leq \left( \frac{4W[\sigma]}{F\ell} - 1 \right)^2,$$

откуда

$$h_1 \leq \frac{\Delta_{ст}}{2} \left[ \left( \frac{4W[\sigma]}{F\ell} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{0,3375}{2} \times \left[ \left( \frac{4 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8}{2 \cdot 10^3} - 1 \right)^2 - 1 \right] = 3,6 \text{ см.}$$

Условие прочности проволоки пружины по касательным напряжениям

$$\tau_{\max}^{\text{дин}} = \frac{8FD}{2\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) k_{\text{дин}} \leq [\tau].$$

Производя преобразования, подобные предыдущим, и подставляя данные, получим

$$h_2 \leq \frac{\Delta_{ст}}{2} \left[ \left( \frac{m\omega^2 \left( 1 + \frac{d}{2D} \right)}{4FD} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{0,3375}{2} \times \left[ \left( \frac{1000 \cdot 163,4^2 \left( 1 + \frac{2}{20} \right)}{4 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8} - 1 \right)^2 - 1 \right] = 3,6 \text{ см.}$$

Таким образом, высота, с которой может падать груз, равна меньшей из двух  $h_1$  и  $h_2$ , т. е.  $h = 3,6$  см.

**12.2.4.** Исходя из условия, чтобы частота собственных поперечных колебаний системы была на 30 % выше частоты возмущающей нагрузки, т. е.  $\omega = 1,3\theta$ , находим ее  $\omega = 1,3 \frac{2\pi n}{60} = 163,4 \text{ с}^{-1}$  (рис. 12.9).

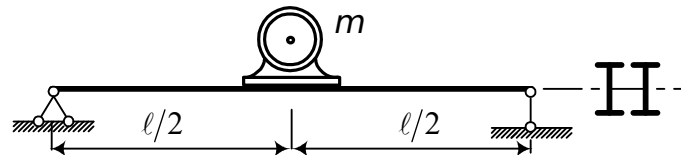


Рис. 12.9. К задаче 12.2.4

Зная собственную частоту, найдем из формулы  $\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$  величину прогиба балки в месте расположения массы от единичной силы –  $\delta_{11}$ :

$\delta_{11} = \frac{1}{m\omega^2}$ . С другой стороны, прогиб середины балки от единичной силы, приложенной там же,  $\delta_{11} = \frac{\ell^3}{48EJ_z}$ .

Из равенства правых частей находим необходимый момент инерции сечения балки

$$J_z = \frac{m\ell^3\omega^2}{48E} = \frac{1000 \cdot 5^3 \cdot 163,4^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} 10^8 = 34765 \text{ см}^3.$$

Для одной балки

$$J_{z1} = \frac{J_z}{2} = \frac{34765}{2} \approx 17382 \text{ см}^3.$$

Подходящим является двутавровое сечение № 40 с  $J_z = 19062 \text{ см}^4$  (прил. 2).

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = \frac{M_{\max}}{W_z} k_{\text{дин}} = \frac{F \ell}{4W_z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \leq [\sigma].$$

Момент сопротивления

$$W_z \leq \frac{F \ell}{4[\sigma]} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{(1,3\theta)^2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 5}{4 \cdot 160 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,3^2}} \cdot 10^6 = 191,4 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления одного двутавра  $W_z = \frac{W_z}{2} = \frac{191}{2} = 95,7 \text{ см}^3$ , что соответствует двутавровому сечению № 16 с  $J_z = 873 \text{ см}^4$ . Таким образом, требование условия жесткости стержня (соотношение  $\frac{\omega}{\theta} = 1,3$ ) более существенно, чем условия прочности. С учетом собственного веса балки частота получается меньше. Поэтому следует взять более жесткую балку, например, с сечением № 45, для которого  $J_z = 27696 \text{ см}^4$ , погонная масса  $m_0 = 66,5 \text{ кг}$ . Приведенная масса балок, сосредоточенная посередине,

$$m_{\text{пр}} = \frac{17}{35} \cdot 2m_0 \ell = \frac{17 \cdot 2 \cdot 66,5 \cdot 5}{35} = 323 \text{ кг}.$$

Частота собственных колебаний балки с учетом массы балки

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{(m + m_{\text{пр}}) \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EJ_z}{(m + m_{\text{пр}}) \ell^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 27696 \cdot 10^{-8}}{(1000 + 323) \cdot 5^3}} = 179,3 \text{ с}^{-1} > 163,4 \text{ с}^{-1}.$$

Условие соотношения между частотами собственных и вынужденных колебаний соблюдается.

*Примечание. Если балку сделать из двух двутавров № 16 (исходя из условия прочности), приведенная масса ее будет  $m = \frac{17}{35} \cdot 2 \cdot 15 \cdot 5 = 72,86 \text{ кг}$ , а частота собственных колебаний системы*

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 873 \cdot 10^{-8}}{(1000 + 72,86) \cdot 5^3}} = 35,4 \text{ с}^{-1}.$$

Частота  $\omega_2 < \theta$  на  $\frac{125,7 - 35,4}{125,7} \cdot 100 = 71,8 \%$ , т. е. располагается еще дальше от резонансной зоны. Динамический коэффициент будет меньше, чем в первом случае. Балка будет более экономичной, но при запуске мотора будут возникать биения, и все будет зависеть от скорости нарастания оборотов, а также мощности мотора.

## ОТВЕТЫ

### Раздел 1

1.2.1.  $\Delta h = \frac{Fh}{E\sqrt{A_0 A_1}}$  .

1.2.2.  $\Delta x = \frac{\gamma x(2h-x)}{6E}$  .

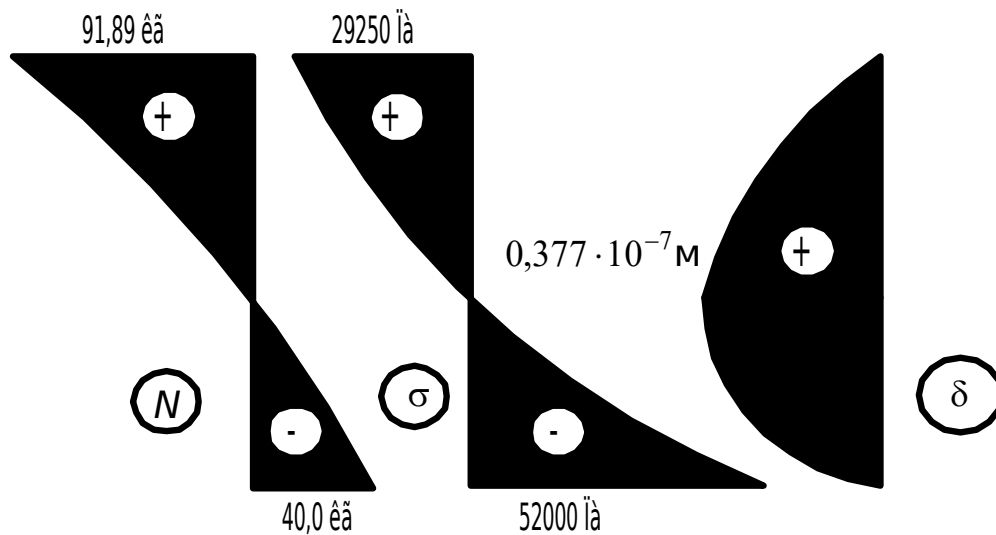
1.2.3.  $r_x = r^3 \sqrt{\frac{6F(R-r)}{\pi \gamma h r^3} - 2}$  при  $F > \frac{\pi \gamma r^3 h}{2(R-r)}$  .

1.2.4.  $v = \frac{r_1 - r_2}{F_2 - F_1} E \pi r_1$  .

1.2.5.  $F_1 = 6F$  .

1.2.6. 1) 1206 кН; 2) 0,414 м.

1.2.7.



1.2.8.  $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  .

1.2.9.  $F = 30 \text{ кН}$  .

### Раздел 2

2.2.1.  $A = f \frac{\ell}{\pi}; \quad z_c = \frac{\ell}{\pi}$  .

2.2.2.  $b = 8a; \quad J_y = \frac{209a^4}{3}; \quad J_z = 8a^4$  .

2.2.3.  $\frac{h}{b} = 0,577$  .

2.2.4.  $h = 1,75R$  .

2.2.5.  $h = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad J_{yz} = 40,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$  .

2.2.6. При  $h/b = 1 \quad J_z = \text{max}$  .

2.2.7.  $1/18h$ .

2.2.8.  $W_z^{\text{кр.сеч.}} / W_z^{\text{пр.сеч.}} = 1,254$ .

2.2.9. Для всех сечений любая пара взаимно перпендикулярных центральных осей является главной; расположение нейтральных осей: а) для круга – произвольное; б) квадрата – горизонтальное; в) для третьего сечения – под углом  $45^\circ$  к горизонтали.

2.2.10. а)  $h/b = 1,414$ ; б)  $h/b = 1,732$ .

2.2.11. а) круглое; б) квадратное.

### Раздел 3

3.2.1.  $\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma$ ,  $\sigma_z = \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma$ .

3.2.2.  $\nu = 0,3$ .

3.2.3.  $\gamma_\alpha = \frac{1+\nu}{E} \rho \sin 2\alpha$ ,

$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\rho}{E} [1 - \nu \pm (1+\nu) \sin 2\alpha]$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

3.2.4.

$\varphi = 117^\circ 30'$ ,  $\varepsilon_1 = 1,1 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varphi = 27^\circ 30'$ ;  $\varepsilon_2 = -0,48 \cdot 10^{-3}$ .

3.2.5.  $\sigma_1 = 165,77$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -255,77$  МПа.

$l_1 = 0,981$ ,  $m_1 = 0$ ,  $n_1 = 0,194$ .

$l_2 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $n_2 = 0$ .

$l_3 = -0,194$ ,  $m_3 = 0$ ,  $n_3 = 0,981$ .

3.2.6.  $\sigma_1 = 80$  МПа,  $\sigma_2 = -30$  МПа,  $\sigma_3 = -200$  МПа.

$\varepsilon_1 = 68,75 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = -106,25 \cdot 10^{-5}$ ,  $\theta = -37,5 \cdot 10^{-5}$ .

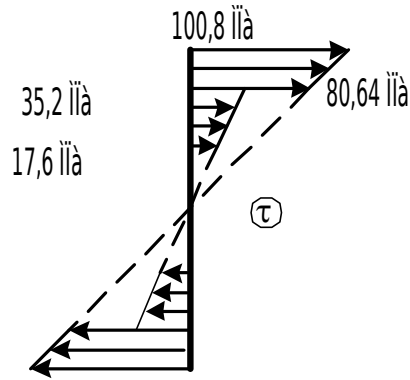
3.2.7.  $\sigma_1 = 84,6$  МПа,  $\sigma_2 = -12,3$  МПа,  $\alpha = 16^\circ 33'$ ,

### Раздел 4

4.2.1.  $d \geq \sqrt{\frac{2\sqrt{2}F}{\pi[\tau]}}$ .

4.2.2.  $b = c$ .

4.2.3.



4.2.4.

$$b/c = 1,36.$$

4.2.5.

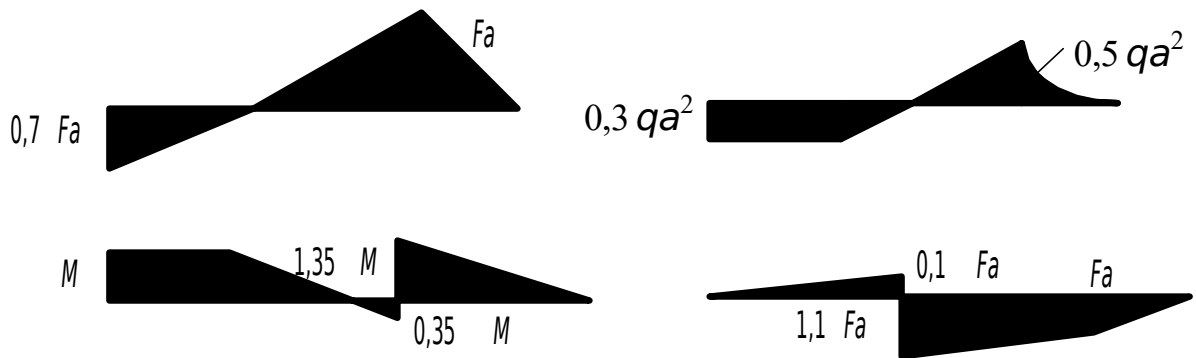
$$[M_{кр}] = 1,29 \text{ кНм.}$$

4.2.6.

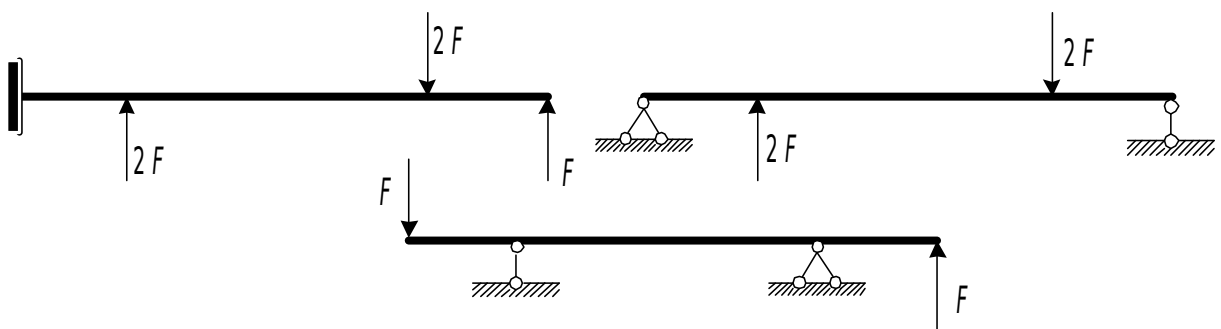
$$\tau_{\max} = 39,73 \text{ МПа, } \sigma = -13,35 \text{ МПа, } \varphi_{кр} = 0,21^\circ.$$

### Раздел 5

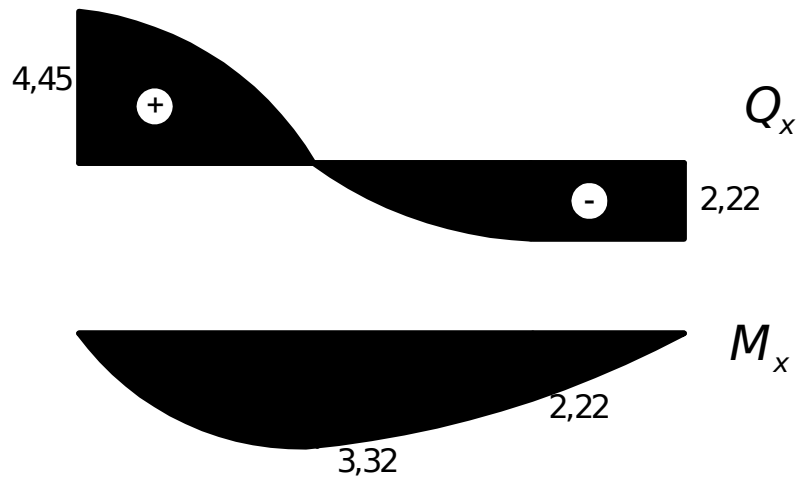
5.2.1.



5.2.2.

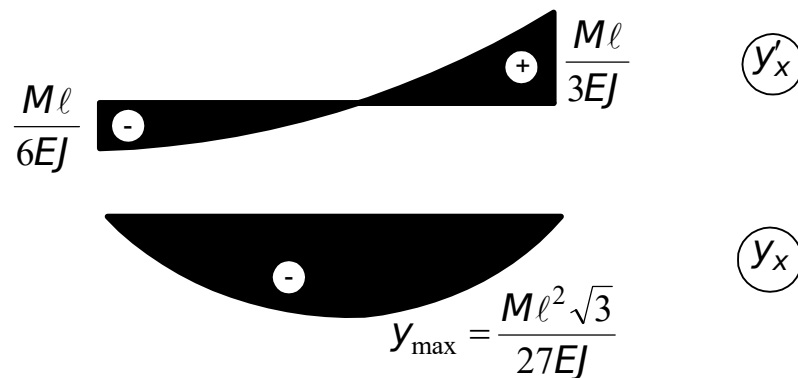


5.2.3.



5.2.4.  $\kappa = 0,707$ .

5.2.5.



5.2.6.  $b_x = b_b + \frac{b_a - b_b}{l} (l - x)$ .

5.2.7.  $M = 30 \text{ кНм}$ .

5.2.8.  $\sigma_{\max} = \frac{32Fl}{6,75\pi d^3}$ .

5.2.9.  $\tau_c = \frac{3\varepsilon_{45^\circ} \cdot E}{4}$ .

5.2.10.  $\sigma_b = 7,6 \text{ МПа}$ ,  $\tau_b = 0,047 \text{ МПа}$ .

5.2.11.  $S_{\pi} = \frac{32EJ}{\gamma l^3}$ .

5.2.12.  $f = \frac{5ql^3}{768EJ}$ .

5.2.13.  $M_1 = M_2 = \frac{2Fa(l-a)}{3l}$ .

5.2.14.  $\sigma_c = 45,7 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_\sigma = 143,0 \text{ МПа}$ ,  $f = 0,92 \text{ см}$ .

5.2.15. Динамометр покажет значение силы  $\frac{F^2 l^2}{2EJ}$ .

5.2.16.  $u_c = -0,25 \text{ см}$ ,  $l_0 = 7,5 \text{ м}$ .

Вариант решения



$$y_c = -0,25 \text{ см}, \quad \ell_0 = 7,42 \text{ м.}$$

### Раздел 6

6.2.1. Давление приведет к сосредоточенной силе, приложенной в

точке В 
$$x = \frac{3F}{4} \left( \frac{\ell}{\ell_1} - \frac{1}{3} \right).$$

6.2.2. а) Балка АВ – двутавр № 16, балка CD – двутавр № 24.

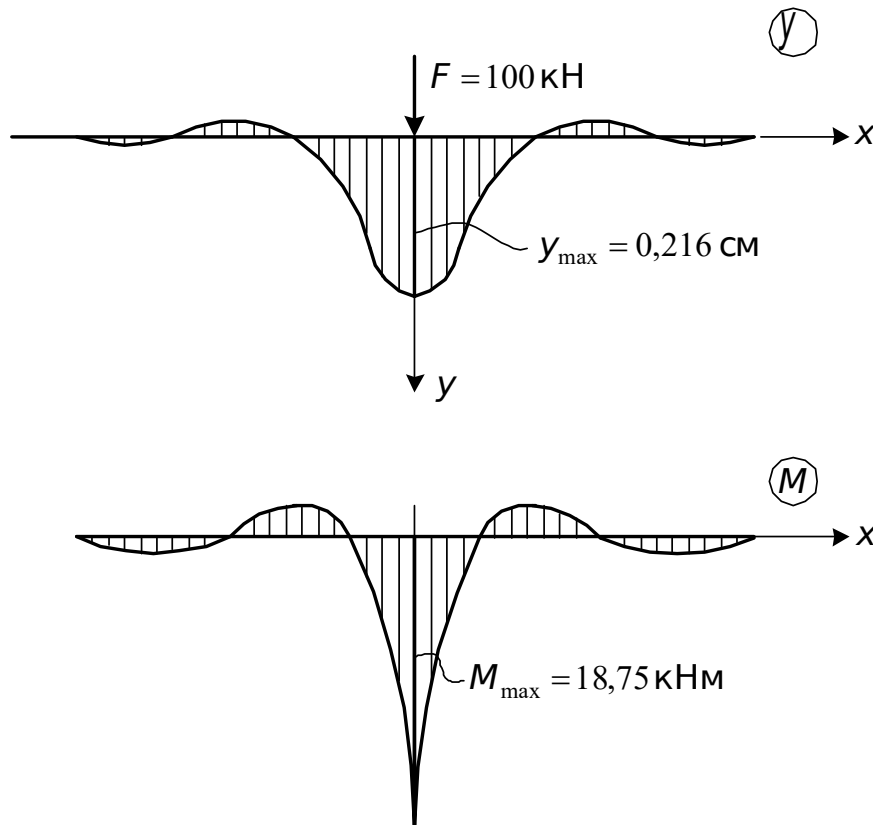
б) Между балками необходимо оставить зазор  $\Delta = 15,9$  мм, тогда балка АВ – двутавр № 14, балка CD – двутавр № 24. Экономия по сравнению с первым случаем составит 5 %.

6.2.3. 
$$A = \frac{24J(1 + 2\cos^3 \alpha)}{\ell^2 \sin 2\alpha \cos \alpha}.$$

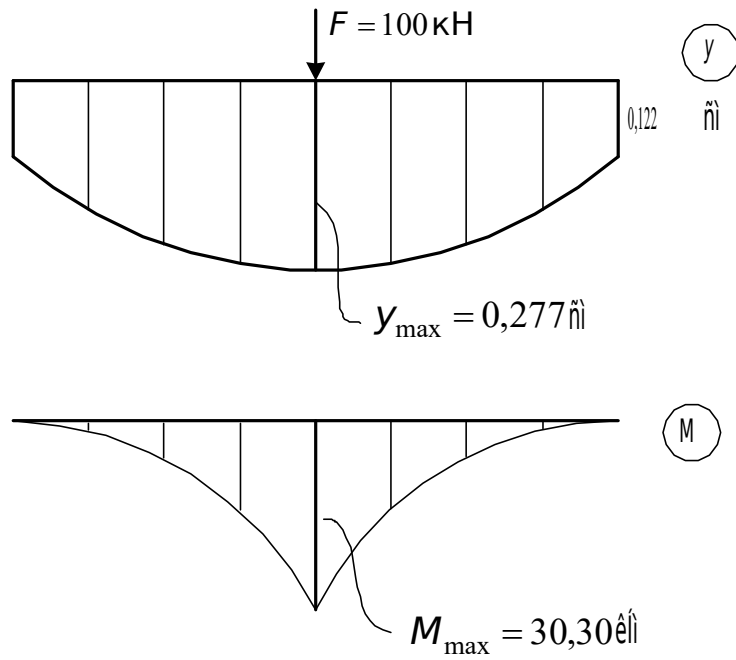
6.2.4.  $\ell_1 / \ell_2 / \ell_3 = 32,3 \text{ м} / 25,4 \text{ м} / 32,3 \text{ м}.$

### Раздел 7

7.2.1.

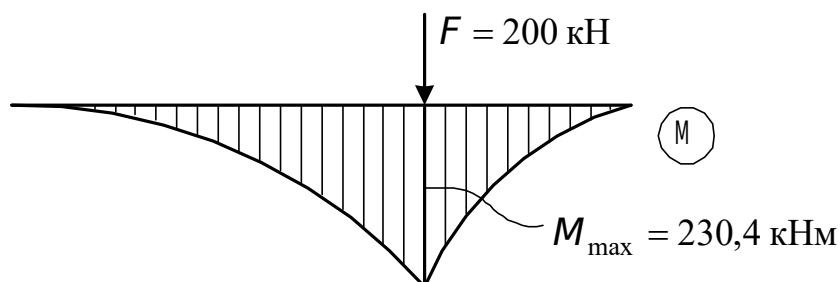


7.2.2.



7.2.3.  $\sigma_{\max} = 1,62 \text{ МПа}$ ,  $y_{\max} = 3,27 \text{ см}$ .

7.2.4.  $y_1 = 27 \text{ см}$ ,  $y_2 = 107 \text{ см}$ .



## Раздел 8

8.2.1.  $\text{tg}\beta = -h/b$ . Нейтральная ось совпадает с другой диагональю сечения.

$$8.2.2. \frac{b}{h} = \text{tg}\alpha, \quad h = \sqrt[3]{\frac{12M_{\max} \cos^2 \alpha}{[\sigma] \sin \alpha}}.$$

8.2.3.  $\sigma_2^{\max} = 1,29 \sigma_1^{\max}$ . При усилении необходимо следить за тем, чтобы не менялся вид напряженного состояния.

$$8.2.4. x = 3a, \quad \sigma_{\max} = \frac{6,75qa^2}{b^3}.$$

8.2.5.  $\alpha = \arctan n$ , где  $n = \frac{h}{b} = \frac{W_z}{W_y}$ .

8.2.6.  $\sigma_b = 8,80$  МПа,  $\sigma_e = -9,70$  МПа.

### **Раздел 9**

9.2.1.  $\sigma_{II} = 127,4$  МПа,  $\sigma_{p4} = 151,8$  МПа.

9.2.2.  $A_{KB} = 0,94 A_{кр}$ .

9.2.3. При  $\frac{M_u}{M_{кр}} < 1,72$  более прочным будет брус круглого сечения. При

$\frac{M_u}{M_{кр}} > 1,72$  – квадратного сечения.

9.2.4.  $d = 1,91$  см  $\approx 20$  мм.

### **Раздел 10**

10.2.1.  $a_y = -12,23$  см,  $a_z = -1,57$  см,  $\sigma_{bl} = 78,6$  МПа.

10.2.2.  $\sigma_1 = 152,5$  МПа,  $\sigma_2 = 165,1$  МПа.

10.2.3.  $\sigma_m = -0,45$  МПа,  $\sigma_k = -0,29$  МПа.

### **Раздел 11**

11.2.1.  $F_{кр2} / F_{кр1} = 4$ .

11.2.2.  $J_{\min} = 0,036$  см<sup>4</sup>,  $f = 60,4$  мм,  $F - F_{кр} = 25$  Н.

11.2.3.  $EJ y''' + qxy' = -R$ .

11.2.4. Швеллер № 30,  $2b = 28,4$  см,  $a = 90$  см.

### **Раздел 12**

12.2.1.  $\ell_{пр} = 2,5$  м,  $n_{пр} = 3394$  об/мин.

12.2.2. а)  $F_{ст} = 16,8$  кН; б) нет; в)  $F_1 = 0,353$  кН; г)  $755,6$  МПа.

12.2.3.  $h = 3,6$  см.

12.2.4. Двутавр № 45.

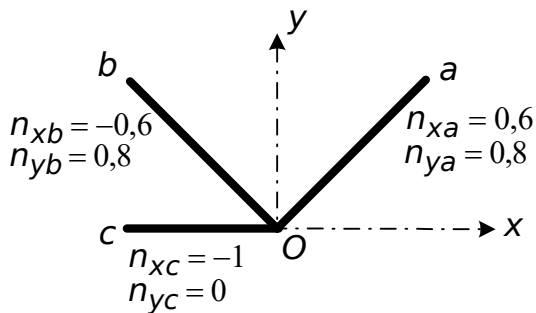
## СТРАТЕГИЯ И ТАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Количество одновременно решаемых задач может быть различным. Например, при сдаче экзамена необходимо решить одну задачу; с целью усвоения определенного раздела курса для «домашнего» решения может быть задано две-три задачи; а на предметной олимпиаде надо решить за один присест 6-10 задач. Чтобы затратить меньше времени на решение задач и добиться лучшей результативности, необходимо иметь стратегию и тактику их решения.

*Стратегия решения одновременно ряда задач намечается следующей:*

1. Сначала просматриваются все задачи и намечается порядок решения от простых к сложным, от менее громоздких к более громоздким.
2. Отбирается половина задач как необходимое количество обязательно, полно и правильно решаемых в первую очередь задач.
3. После этого решается как можно больше оставшихся задач с различной полнотой решения.

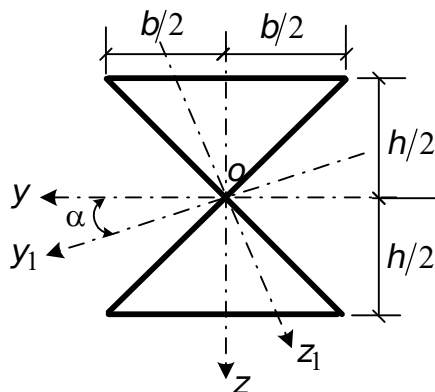
*Пример.* Дана группа из 6 задач.



№ 1

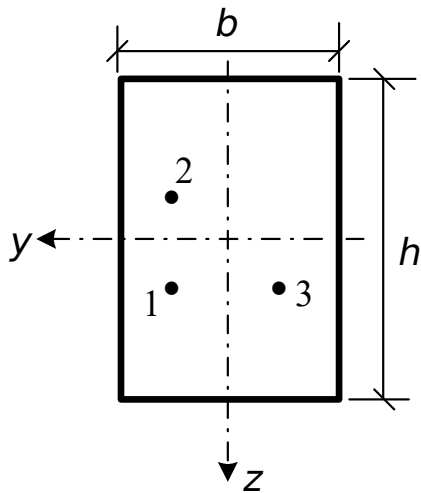
При действии нагрузки в пластине возникает плоское напряженное состояние:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . На пластину наклеена розетка из датчиков омического сопротивления с направляющими косинусами, указанными на чертеже. С помощью розетки получены относительные деформации  $\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_b = -1 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 4 \cdot 10^{-4}$ . Найти главные напряжения в точке O.

№ 2



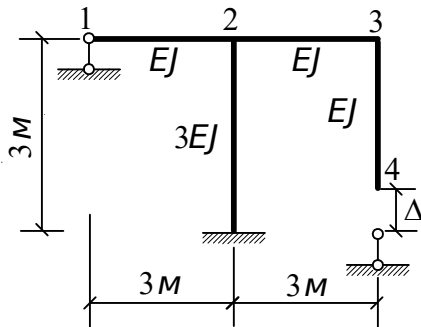
При каком соотношении  $\frac{h}{b}$  моменты инерции относительно произвольной пары взаимно-перпендикулярных осей  $Y_1$ ,  $Z_1$  с началом в т. O будут одинаковыми?

№ 3



В прямоугольном сечении стержня возникают нормальные напряжения  $\sigma_x$  от внутренних усилий  $N_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Известны значения напряжений в трех точках  $\sigma_{x1} = 9$  МПа,  $\sigma_{x2} = 6$  МПа,  $\sigma_{x3} = 12$  МПа. Точки имеют следующие координаты:  $y_1 = 3$  см,  $z_1 = 3$  см,  $y_2 = 3$  см,  $z_2 = -3$  см,  $y_3 = -3$  см,  $z_3 = 3$  см. Определить величины внутренних усилий и положение нулевой линии, если  $b = 12$  см;  $h = 24$  см.

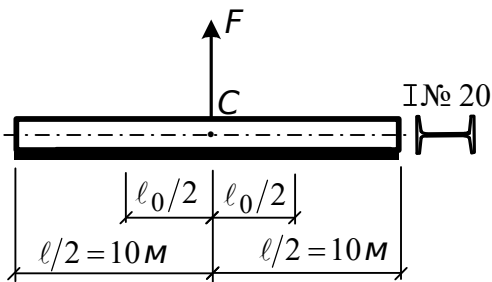
#### № 4



Во время монтажа конструкции длина стержня 3-4 оказалась короче на величину  $\Delta$ . Для соединения с опорой 4 стержень 3-4 равномерно нагрели. После соединения стержень охладился до первоначальной температуры. Определить внутренние усилия в элементах конструкции и горизонтальное перемещение точки 1.

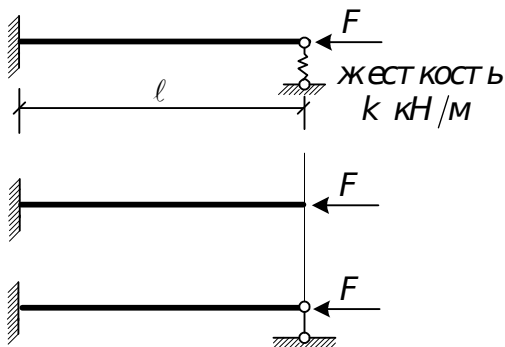
Дано:  $\Delta$ ,  $EJ = 27 \cdot 10^3$  кНм<sup>2</sup>,  $\alpha$ .

#### № 5



Двутавр № 20 поднимается за середину длины. Определить перемещение точки C и длину  $\ell_0$  изогнутой части стержня, когда сила  $F$  достигает четверти веса двутавра.

#### № 6



Получить уравнение для определения критической силы и найти ее значение при  $k = 0$  и  $k = \infty$ .

Необходимо установить последовательность решения этих задач с учетом вышеизложенной стратегии. Это сложный и неоднозначный

процесс, зависящий от уровня знаний, различия в понимании разделов сопротивления материалов, по которым представлены задачи и практики решения задач. Поэтому читатель может быть не согласным в какой-то мере или полностью с порядком решения представленных задач и его обоснованием. Итак, просматриваем задачи и анализируем их.

*Задача № 1* относится к разделу «Плоское напряженное состояние» и ее решение будет связано с преобразованием деформаций и напряжений при изменении наклона площадок, по которым они возникают. Сложность в знании соответствующих формул и некоторая громоздкость при производстве вычислений.

*Задача № 2* имеет отношение к определению геометрических характеристик сечений. Геометрические характеристики необходимы в задачах расчета на прочность и жесткость при различных простых и сложных сопротивлениях стержней, т. е. они наиболее часто упоминаемы при изучении курса сопротивления материалов. Задача простая.

*Задача № 3* самая простая из группы. Для ее решения надо знать только одну формулу для определения нормальных напряжений в различных точках сечения при общем сложном сопротивлении.

В *задаче № 4* необходимо рассчитать статически неопределимую раму на заданное смещение опор. Расчет статически неопределимых систем связан с выбором основной системы, составлением дополнительных уравнений, их решением. Сложная задача.

При решении *задачи № 5* необходимо четко представлять, как определяются при изгибе усилия с помощью уравнений равновесия и перемещения методом начальных параметров. И то, и другое – основные понятия и вполне доступны для применения.

*Задача № 6* связана с записью и решением неоднородного дифференциального уравнения, которое и будет уравнением для определения критической силы. Общее решение достаточно сложное, частные значения критических сил известны.

В соответствии с проделанным анализом последовательность решения задач может быть намечена следующей: 3, 2, 5, 1, 6 и 4.

После этого анализа приступаем к решению задач. Сначала ставим себе целью обоснованно и без ошибок решить первую половину – три задачи. Это делать надо не спеша, внимательно проверяя каждый шаг преобразований и вычислений. Убедившись в правильности решения, и при наличии еще отведенного времени приступаем к решению остальных задач. Теперь следим уже за временем. Если его остается совсем мало, пытаемся показать начала решений или известные ответы задач, к решению которых еще не приступали. Например, в задаче № 6 записать значения критических сил в частных случаях – при  $k=0$   $F_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2\ell)^2}$ ; при  $k = \infty$

$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7\ell)^2}$ ; в задаче № 4 – определить степень статической неопределенности  $\Pi = C_0 - 3 = 5 - 3 = 2$  и выбрать основную систему (рис. П.1.1)

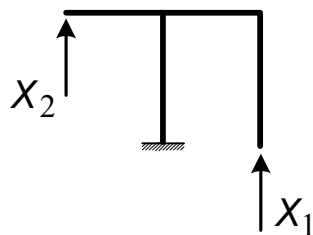


Рис. П.1.1

а может и успеть записать систему канонических уравнений метода сил

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1\Delta} &= 0, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2\Delta} &= 0. \end{aligned}$$

*Замечание.* Если Вы стремитесь к совершенству своих знаний, то обязательно решите потом все задачи, которые не успели решить за ответственный промежуток времени.

*Стратегия решения каждой задачи* должна быть такой, чтобы как можно быстрее и безошибочно решить задачу. Она представляет собой четкую последовательность проведения операций:

1. Внимательно прочитайте условие задачи (условие состоит из двух частей: данных и что нужно найти, определить, подобрать, проверить).

2. Установить, к какому разделу курса относится задача (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, плоский изгиб, сложное сопротивление, сложное напряженное состояние, геометрические характеристики сечений, устойчивость, динамика).

3. Записать формулу или составить уравнение, из которых можно будет найти искомую величину.

4. Проанализировать, все ли другие величины, входящие в запись для определения искомой, известны.

5. Если нет, то записываются формулы или уравнения для определения неизвестных, возникающих в предыдущих записях.

6. И так до тех пор, пока в последней записи все величины, кроме одной, будут известны.

7. После этого обратным «ходом» произвести вычисления от конечного выражения к начальному и определить искомую величину задачи.

8. Удостовериться в правильности каждого вычисления и всего решения задачи.

*Пример 1.* Жесткий брус АВ, деформацией которого можно прене-

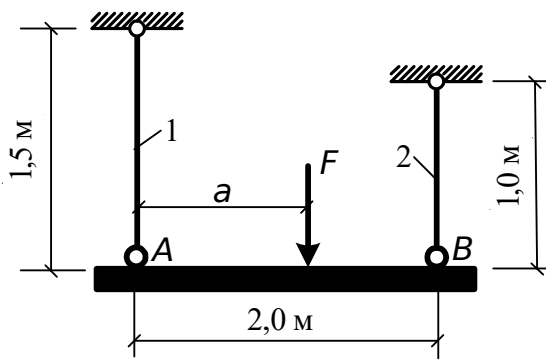


Рис. П.1.2

брусь, горизонтально подвешен на тросах 1 и 2 (рис. П.1.2). Трос 1 – стальная круглого сечения диаметром 20 мм. Трос 2 – медная, тоже круглого сечения диаметром 25 мм. На каком расстоянии « $a$ » от узла  $A$  нужно поместить груз  $F$ , чтобы и после деформации брус  $AB$  остался горизонтальным?

Внимательно прочитав условие задачи, сконцентрируем свое внимание на двух моментах:

- 1) искомой величиной является расстояние « $a$ »;
- 2) имеется необходимое условие горизонтальности бруса после приложения силы  $F$ .

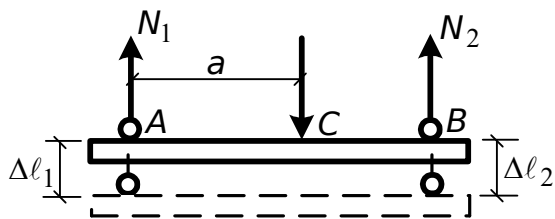


Рис. П.1.3

При приложении силы в стержнях 1 и 2 будут возникать усилия  $N_1$  и  $N_2$ , величины которых будут зависеть от положения точки  $C$ , т. е. от « $a$ » (рис. П.1.3). Следовательно, для определения « $a$ » необходимо составить уравнение равновесия.

И так как величина силы не задана и она не является искомой величиной, уравнение равновесия необходимо записать в виде суммы моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum M_C = 0 \quad N_1 a - N_2 (2 - a) = 0,$$

откуда

$$a = \frac{2N_2}{N_1 + N_2} = \frac{2 \frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{N_2}{N_1}}.$$

Значит, чтобы найти « $a$ », необходимо сначала определить величины  $N_1$  и  $N_2$  или их соотношение  $\frac{N_2}{N_1}$ . Второе предпочтительнее, так как по сравнению с первым сократит количество, к тому же ненужных, вычислений.

Величины  $N_1$  и  $N_2$  найдутся из условия горизонтальности стержня после деформации, что произойдет при наличии равенства удлинений стержней:



$$\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Выразим удлинения через усилия в стержнях по закону Гука

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \quad \text{или} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2}.$$

В выражении для определения  $\frac{N_2}{N_1}$  все величины известны. Прямой ход окончен. Теперь обратным ходом, постепенно вычисляя промежуточные неизвестные, решим задачу. Прежде чем вычислять отношение  $N_2/N_1$ , заметим, что в формуле в числитель и знаменатель входят попарно одинаковые характеристики:  $E_1$  и  $E_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$ ,  $l_1$  и  $l_2$ , имеющие разные размерности. Но тем и удобны соотношения, что в них нет нужды приводить все к одним измерениям, а можно прямо подставлять характеристики со своими размерностями. Это сокращает время вычислений и уменьшает возможность возникновения ошибок.

Итак,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 25^2 \cdot 4 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 1} = 1,171.$$

Теперь найдем искомую величину

$$a = \frac{2 \cdot 1,171}{1 + 1,171} = 1,08 \text{ м.}$$

Задача быстро и успешно решена!

*Пример 2.* Согласно условию задачи 2.2.3 необходимо взять такую высоту треугольника, чтобы осевой момент инерции его относительно оси  $Y$  был бы максимальным (рис. П.1.4). Поэтому начнем решение с записи

условия максимума момента инерции в функции от высоты  $h$ :

$$\frac{dJ_y(h)}{dh} = 0.$$

Чтобы использовать условие, надо иметь функцию  $J_y(h)$ , т. е. записать формулу для вычисления момента инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание.

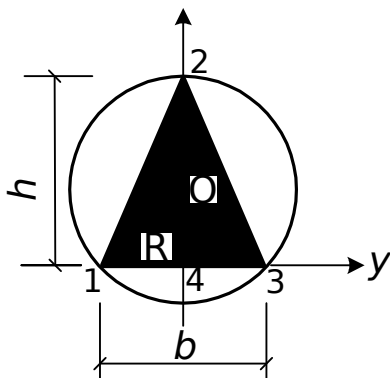


Рис. П.1.4

Обозначив через « $b$ » размер основания, имеем  $J_y = \frac{bh^3}{12}$ . Но при изменении « $h$ » будет меняться и « $b$ », следовательно, необходимо выразить « $b$ » через « $h$ ». Для этого проведем отрезок прямой  $O-1$  (рис. П.1.4), равный радиусу. Тогда из треугольника  $O-1-4$ , где  $1-4$  равняется  $\frac{b}{2}$ , а  $O-4 = h-R$ , найдем

$$(1-4)^2 + (0-4)^2 = (0-1)^2.$$

Или

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h-R)^2 = R^2.$$

Раскрывая скобки и произведя преобразования, получим

$$b = 2\sqrt{h(2R-h)}.$$

Тогда

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3\sqrt{h(2R-h)}}{6}.$$

Теперь можно брать производную и, приравняв ее к нулю, получить уравнение, из которого находится искомая величина  $h$ .

*Тактика решения задач* подразумевает упрощение решения на основе учета конкретных особенностей задачи. Особенности очень много, как и количества задач, поэтому покажем здесь, либо часто встречающиеся, либо требующие решений, поражающих своей оригинальностью:

1. *Вычисление усилий без определения реакций опорных закреплений*, если это не требуется условием задачи. Например, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в консольной балке (рис. П.1.5).

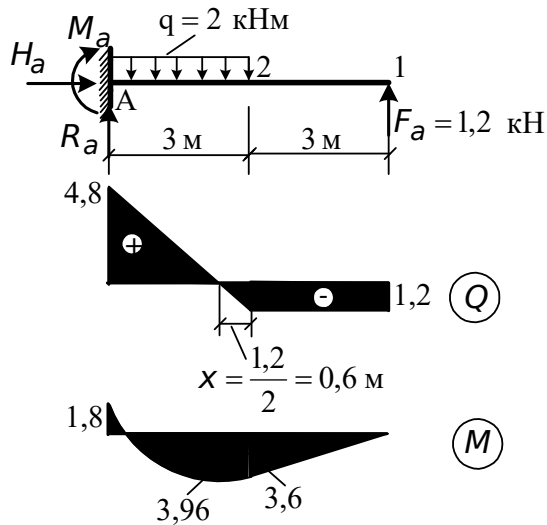


Рис. П.1.5

Находить усилия будем, не определяя опорные реакции  $R_a$ ,  $H_a$  и  $M_a$ , а рассматривая равновесие отсеченных частей балки со стороны свободного конца.  $Q_{1-2} = Q_{2-1} = Q_{2-a} = -1,2$  кН;  $Q_{a-2} = -1,2 + 2 \cdot 3 = 4,8$  кН;  $M_1 = 0$ ;  $M_2 = 1,2 \cdot 3 = 3,6$  кНм;  $M_a = 1,2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -1,8$  кНм;  $M_{\max} = 1,2 \cdot 3,6 - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{0,6}{2} = 3,96$  кНм.

2. *Учет симметрии нагрузок и геометрии.*

Например, определить величины реакций в балке (рис. П.1.6).

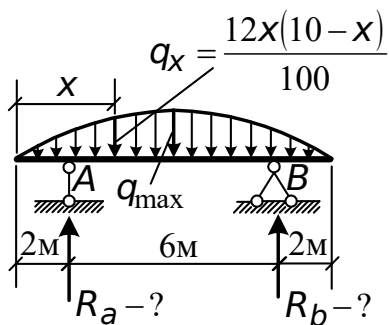


Рис. П.1.6

Ввиду симметрии геометрии балки и распределенной нагрузки, реакции опор будут одинаковыми и равными каждой половине всей нагрузки на балку. Нагрузка изменяется по закону квадратной параболы, поэтому вся она будет равна  $\frac{2}{3}q_{\max} \cdot 10$ , а реакции

$$R_a = R_b = \frac{\frac{2}{3}q_{\max} \cdot 10}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{2} = 10 \text{ кН.}$$

*Еще пример.*

Необходимо определить осевой момент инерции сечения относительно оси  $Z$  (рис. П.1.7). Если в памяти есть формула для определения момента инерции треугольного сечения относительно оси, которая совпадает с основанием, тогда задача решается просто, как сумма двух моментов инерции. А самым элементарным решением будет решение для сечения, которое имеет больше двух осей симметрии, т. е. имеет круговую симметрию. Для таких сечений относительно любых центральных осей осевые моменты инерции будут равны между собой.

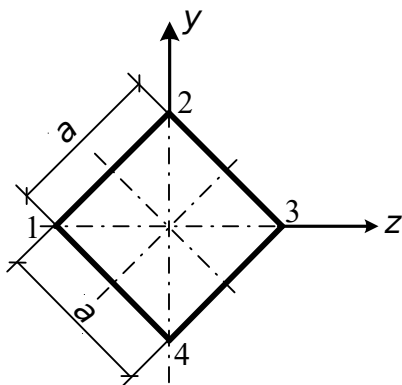


Рис. П.1.7

Значит  $J_z = \frac{a^4}{12}$ .

### 3. Выбор метода решения задачи.

Например, в раме (рис. П.1.8) установить положение силы  $F$ , при котором вертикальное перемещение узла С равнялось бы нулю.

Для решения этой задачи наиболее удачным методом определения перемещений будет метод Мора. Для наглядности доказательства этого построим единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов.

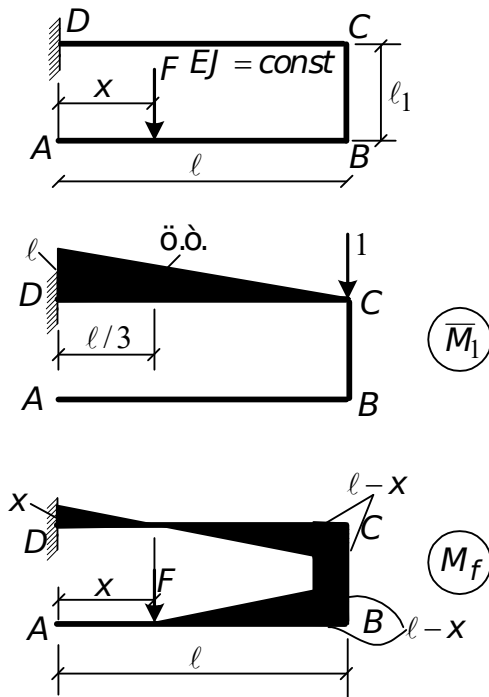


Рис. П.1.8

Вычисление интегралов Мора произведем с помощью формулы Верещагина:

$$\Delta_c = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_f dx}{EJ} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{EJ},$$

согласно которой ввиду линейности эюр  $\bar{M}_1$  и  $M_f$  можно найти площадь эюры моментов единичного состояния и умножить на ординату эюры грузовой, лежащей против центра тяжести единичной эюры.  $\omega$

не равна нулю. Чтобы  $\Delta_c = 0$ , необходимо, чтобы  $y_c = 0$ . А это будет тогда, когда сила  $F$  будет расположена под центром тяжести единичной эюры, т.е.  $x = \frac{l}{3}$ . Задача решена без выполнения вычислений.

4. Записывать уравнения и вычислять только величины, необходимые для решения задачи.

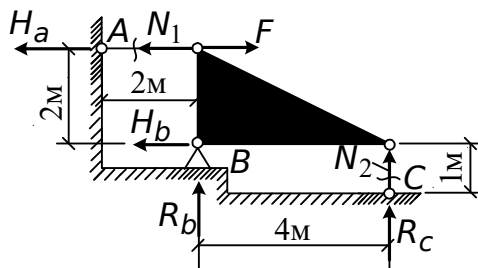


Рис. П.1.9

Например, в задаче (рис. П.1.9) требуется найти усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Система связана с основанием четырьмя связями, Следовательно, статически неопределима. Необходимо составить три уравнения статики и одно уравнение неразрывности деформаций. Но для решения задачи нужны только две реакции  $H_a$  и  $R_c$ , по которым и находятся  $N_1$  и  $N_2$ .

Поэтому и записываем лишь два уравнения – одно статики, а именно  $\sum M_b = 0$  и уравнение неразрывности, куда войдут только  $R_a$  и  $R_c$ . Из этих двух уравнений получим  $R_a$  и  $R_c$ , а затем и  $N_1$  и  $N_2$ .

5. Использование при вычислениях отношений величин с одинаковыми размерностями (см. пример 1 (стр. 198 и 199)).

6. Использование принципа независимости действия сил при определении усилий и перемещений в задачах с линейно-деформированными системами.

Смотри, например, решение задачи 5.2.1 и задачи в следующем пункте приложения.

7. Нахождение неожиданных оригинальных решений.

Например, при решении задачи 5.2.12 заданную нагрузку

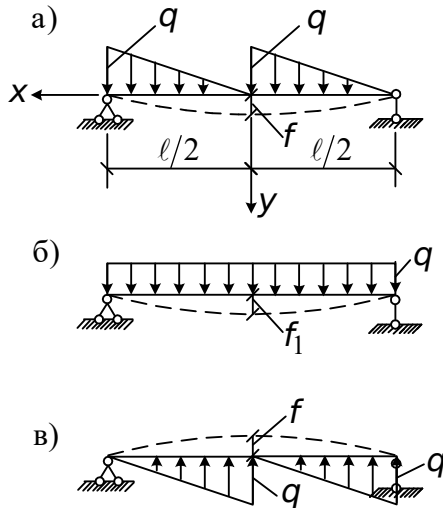


Рис. П.1.10

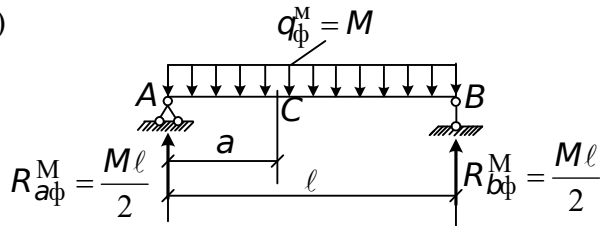
(рис. П.1.10, а), учитывая принцип независимости сил, можно представить как сумму нагружений равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. П.1.10, б) и нагрузкой  $q$  (рис. П.1.10, в). Последняя отображается в заданную при осуществлении двух поворотов на  $180^\circ$  относительно оси балки  $X$  и оси  $Y$ , перпендикулярной к оси  $X$  и проходящей через середину пролета балки. Все геометрические характеристики при деформации балки будут обладать той же симметрией. При этом, так как искомый прогиб балки располагается посередине ее, т.е. на оси  $Y$ , то при указанных поворотах он будет сохранять свою вели-

чину при изменении знака. Из этого следует (рис. П.1.10, а, б, в), что  $f = f_1 - f$ , или  $f = \frac{1}{2}f_1$ . Как известно,  $f_1 = \frac{5ql^4}{384EJ}$ . Следовательно,  $f = \frac{5ql^4}{768EJ}$ . Сравните с решениями задачи 5.2.12.

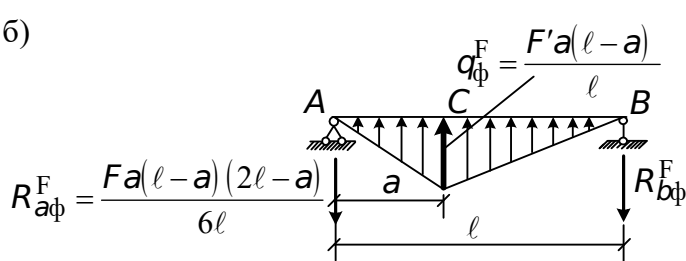
*Или другой пример.* При решении задачи 5.2.13 обозначим соотношение моментов через  $n = \frac{M_1}{M_2}$  и предположим, что оно не зависит от положения силы  $F$ . Теперь рассмотрим случай, когда сила находится посередине балки. Ввиду симметрии деформаций от нагрузки будем иметь равенство опорных моментов  $M_1 = M_2$ . Или  $n = 1$ . Из нашего предположения о постоянстве отношения следует, что и при любом расположении силы  $F$  на балке  $n = 1$ , т. е. опорные моменты всегда будут равны между собой.

Решим задачу при таком предположении, применяя графоаналитический метод, как наиболее эффективный в данном случае (рис. П.1.11).

а)



б)



Составим выражения для  $Q_{сф}$  и  $M_{сф}$  и приравняем их к нулю, согласно заданным условиям  $y'_c = 0$  и  $y_c = 0$ .

$$\frac{Ml}{2} - Ma - \frac{Fa(l-a)(2l-a)}{6l} + \frac{1}{2} \frac{Fa^2(l-a)}{l} = 0,$$

Рис. П.1.11

$$\frac{Ml}{2} a - Ma \frac{a}{2} - \frac{Fa^2(l-a)(2l-a)}{6l} + \frac{1}{2} \frac{Fa^2(l-a)}{l} \frac{1}{3} a = 0.$$

Из первого и второго уравнения получаем одинаковый результат

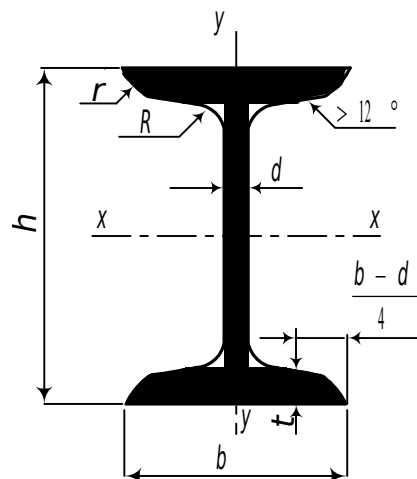
$$M_1 = M_2 = M = \frac{2Fa(l-a)}{3l}.$$

Следовательно, во-первых, мы нашли быстрое решение задачи и, во-вторых, получили доказательство правильности предположения о постоянстве соотношения  $n = \frac{M_1}{M_2}$ .

Тактика решения задач – это не нечто застывшее, она совершенствуется с решением каждой конкретной задачи. Но это происходит не само собой, а только при проведении анализа решения, запоминания и накопления в памяти конкретных приемов, примененных в данной задаче.

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-89)



Обозначения

- $h$  - высота балки;
- $b$  - ширина полки;
- $d$  - толщина стенки;
- $t$  - средняя толщина полки;
- $J$  - момент инерции;
- $W$  - момент сопротивления;
- $i$  - радиус инерции;
- $S$  - статический момент полусечения

205

Таблица П.2.1

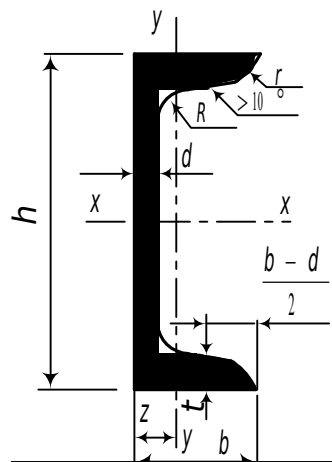
Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продолжение табл. П.2.1

Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$W_x,$ см <sup>3</sup>	$i_x,$ см	$S_x,$ см <sup>3</sup>	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108



## Швеллеры (по ГОСТ 8240-89)



### Обозначения

- $h$  - высота швеллера;  
 $b$  - ширина полки;  
 $d$  - толщина стенки;  
 $t$  - средняя толщина полки;  
 $z_0$  - расстояние от оси  $y$  до внешней грани стенки
- $J$  - момент инерции;  
 $W$  - момент сопротивления;  
 $i$  - радиус инерции;  
 $S$  - статический момент полусечения;

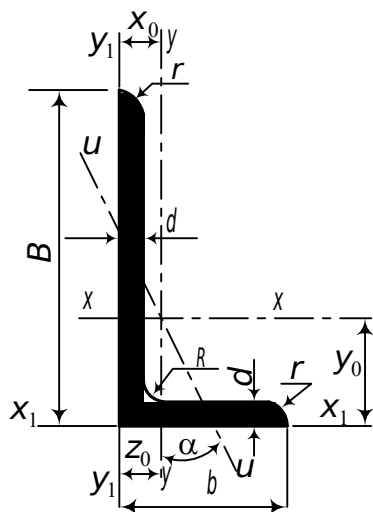
Таблица П.2.2

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2

Продолжение табл. П.2.2

Номер профи- ля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$W_x,$ см <sup>3</sup>	$i_x,$ см	$S_x,$ см <sup>3</sup>	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см	$z_o$ см	Масса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
16а	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18а	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

## Уголки неравнополочные (по ГОСТ 8510-86\*)



### Обозначения

- $B$  - ширина большей полки;
- $b$  - ширина меньшей полки;
- $d$  - толщина стенки;
- $J$  - момент инерции;
- $i$  - радиус инерции;
- $x_0, y_0$  - расстояние от центра тяжести до внешних граней полок

Таблица П.2.3

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения, см <sup>2</sup>	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{u \min}, \text{см}^4$	$i_{u \min}, \text{см}^4$	Угол наклона оси $u$ $\text{tg } \alpha$	$J_{x1}, \text{см}^4$	$J_{y1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$B$	$b$	$d$													
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

Продолжение табл. П.2.3

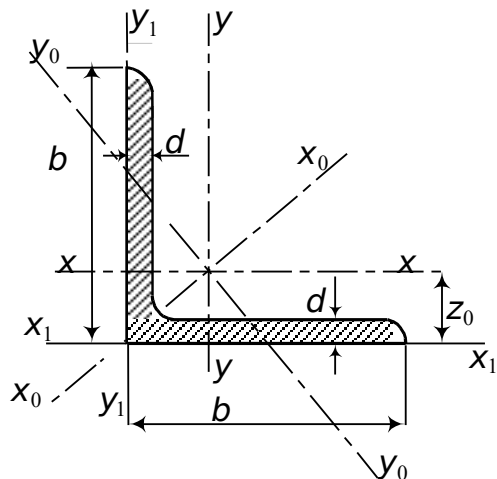
Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	Угол наклона оси $u$ $tg\ \alpha$	$J_{x1},$ см <sup>4</sup>	$J_{y1},$ см <sup>4</sup>	$x_o,$ см	$y_o,$ см	Мас- са 1 м, кг
	$B$	$b$	$d$													
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1

Продолжение табл. П.2.3

Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	Угол наклона оси $u$  $tg\ \alpha$	$J_{x1},$ см <sup>4</sup>	$J_{y1},$ см <sup>4</sup>	$x_o,$ см	$y_o,$ см	Мас- са 1м, кг
	$B$	$b$	$d$													
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3

Продолжение табл. П.2.3

Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см <sup>2</sup>	$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u\ min},$ см <sup>4</sup>	Угол наклона оси $u$  $tg\ \alpha$	$J_{x\ 1},$ см <sup>4</sup>	$J_{y\ 1},$ см <sup>4</sup>	$x_o,$ см	$y_o,$ см	Мас-са 1м, кг
	$B$	$b$	$d$													
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1



### Уголки равнополочные (по ГОСТ 8509-93)

#### Обозначения

- $b$  - ширина полки;  
 $d$  - толщина стенки;  
 $J$  - момент инерции;  
 $i$  - радиус инерции;  
 $z_0$  - расстояние от центра тяжести до внешних граней полков

Таблица П.2.4

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
				$X-X$		$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$		$X_1-X_1$	$Z_0, \text{см}$	
				$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x0 \max}, \text{см}$	$J_{y0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y0 \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}^4$		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продолжение табл. П.2.4

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профи- ля, кг
				X-X		$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$		$X_1-X_1$	$Z_0, \text{см}$	
	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$		$J_{x0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x0 \max}, \text{см}$	$J_{y0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y0 \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}^4$				
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72



Продолжение табл. П.2.4

Номер профиля	<i>b</i>	<i>d</i>	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профи- ля, кг
				X-X		X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>		Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , см	
	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см		<i>J<sub>x0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0 max</sub></i> , см	<i>J<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>J<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>				
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20

Продолжение табл. П.2.4

Номер профиля	$b$	$d$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профи- ля, кг
				$X-X$		$X_0-X_0$		$Y_0-Y_0$		$X_1-X_1$	$Z_0, \text{см}$	
	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$		$J_{x0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x0 \max}, \text{см}$	$J_{y0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y0 \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}^4$				
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Продолжение табл. П.2.4

Номер профиля	<i>b</i>	<i>d</i>	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профи- ля, кг
				<i>X-X</i>		<i>X<sub>0</sub>-X<sub>0</sub></i>		<i>Y<sub>0</sub>-Y<sub>0</sub></i>		<i>X<sub>1</sub>-X<sub>1</sub></i>	<i>Z<sub>0</sub></i> , см	
	<i>J<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см		<i>J<sub>x0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0 max</sub></i> , см	<i>J<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>J<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>				
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8

Продолжение табл. П.2.4

Номер профиля	<i>b</i>	<i>d</i>	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профи- ля, кг
				X-X		X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>		Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , см	
	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см		J <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x0 max</sub> , см	J <sub>y0 min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0 min</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>				
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

**ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$**

$$\eta = e^{-Sx}(\cos Sx + \sin Sx); \quad \eta_1 = e^{-Sx}(\cos Sx - \sin Sx); \quad \eta_2 = e^{-Sx} \cos Sx;$$

$$\eta_3 = e^{-Sx} \sin Sx$$

Таблица П.3.1

SX	$\eta$	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$
0,0	1,000	0,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9907	+0,0903	0,8100	0,9003
0,2	0,9651	0,1627	0,6398	0,8024
0,3	0,9267	0,2189	0,4888	0,7077
0,4	0,8784	0,2610	0,3564	0,6174
0,5	0,8231	0,2908	0,2415	0,5323
0,6	0,7628	0,3099	0,1431	0,4530
0,7	0,6997	0,3199	0,0599	0,3708
1/4 $\pi$	0,6448	0,3224	+0,0000	0,3224
0,8	0,6354	0,3223	-0,0093	0,3131
0,9	0,5712	0,3185	-0,0657	0,2527
1,0	0,5083	0,3096	-0,1108	0,1988
1,1	0,4476	0,2967	-0,1457	0,1510
1,2	0,3899	0,2807	0,1716	0,1091
1,3	0,3355	0,2626	-0,1897	0,0729
1,4	0,2849	0,2430	-0,2011	0,0419
1,5	0,2384	0,2226	-0,2068	+0,0158
1/2 $\pi$	0,2079	0,2079	-0,2079	0,0000
1,6	0,1959	0,2018	-0,2077	-0,0059
1,7	0,1576	0,1812	-0,2047	-0,0235
1,8	0,1234	0,1610	-0,1985	-0,0376
1,9	0,0932	0,1415	-0,1899	-0,0484
2,0	0,0667	0,1231	-0,1794	-0,0563
2,1	0,0439	0,1057	-0,1675	-0,0618
2,2	0,0244	0,0896	-0,1548	-0,0652
2,3	0,0080	0,0748	-0,1416	-0,0668
3/4 $\pi$	+0,0000	0,0670	-0,1340	-0,0670
2,4	-0,0056	0,0613	-0,1282	-0,0669
2,5	-0,0166	0,0491	-0,1149	-0,0658
2,6	-0,0254	0,0383	-0,1019	-0,0636
2,7	-0,0320	0,0287	-0,0895	-0,0608
2,8	-0,0369	0,0204	-0,0777	-0,0573
2,9	-0,0403	0,0132	-0,0666	-0,0534

Продолжение табл. П.3.1

$SX$	$\eta$	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$
3,0	-0,04226	0,00703	-0,05632	-0,04929
3,1	-0,04314	0,00187	-0,04688	-0,04501
$\pi$	-0,04321	+0,00000	-0,04321	-0,04321
3,2	-0,04307	-0,00238	-0,03831	-0,04069
3,3	-0,04224	-0,00582	-0,03060	-0,03642
3,4	-0,04079	-0,00853	-0,02374	-0,03227
3,5	-0,03887	-0,01059	-0,01769	-0,02828
3,6	-0,03659	-0,01209	-0,01241	-0,02450
3,7	-0,03407	-0,01310	-0,00787	-0,02097
3,8	-0,03138	-0,01369	-0,00401	-0,01770
3,9	-0,02862	-0,01392	-0,00077	-0,01469
$5/4\pi$	-0,02786	-0,01393	+0,00000	-0,01393
4,0	-0,02583	-0,01386	0,00189	-0,01197
4,1	-0,02309	-0,01356	0,00403	-0,00953
4,2	-0,02042	-0,01307	0,00572	-0,00735
4,3	-0,01787	-0,01243	0,00699	-0,00544
4,4	-0,01546	-0,01168	0,00791	-0,00377
4,5	-0,01320	-0,01086	0,00852	-0,00234
4,6	-0,01112	-0,00999	0,00786	-0,00113
4,7	-0,00921	-0,00909	0,00898	-0,00011
$6/4\pi$	-0,00898	-0,00898	0,00898	0,00000
4,8	-0,00748	-0,00820	0,00892	+0,00072
4,9	-0,00593	-0,00732	0,00870	0,00139
5,0	-0,00455	-0,00646	0,00837	0,00191
5,1	-0,00334	-0,00564	0,00795	0,00230
5,2	-0,00229	-0,00487	0,00746	0,00259
5,3	-0,00139	-0,00415	0,00692	0,00277
5,4	-0,00063	-0,00349	0,00636	0,00287
$7/4\pi$	+0,00000	-0,00290	0,00579	0,00290
5,5	0,00001	-0,00288	0,00578	0,00290
5,6	0,00053	-0,00233	0,00520	0,00287
5,7	0,00095	-0,00184	0,00464	0,00279
5,8	0,00127	-0,00141	0,00409	0,00268
5,9	0,00152	-0,00102	0,00356	0,00254
6,0	0,00169	-0,00069	0,00307	0,00238
6,1	0,00180	-0,00069	0,00261	0,00221
6,2	0,00185	-0,00017	0,00219	0,00202

Продолжение табл. П.3.1

$SX$	$\eta$	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$
$8/4\pi$	0,00187	0,00000	0,00187	0,00187
6,3	0,00187	+0,00003	0,00181	0,00184
6,4	0,00184	+0,00019	0,00146	0,00165
6,5	0,00179	+0,00032	0,00115	0,00147
6,6	0,00172	+0,00042	0,00087	0,00129
6,7	0,00162	+0,00050	0,00063	0,00113
6,8	0,00152	+0,00055	0,00042	0,00097
6,9	0,00141	+0,00058	0,00024	0,00082
7,0	0,00129	+0,00060	0,00009	0,00069
$9/4\pi$	0,00120	+0,00060	0,00000	0,00060

## ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ А.Н. КРЫЛОВА

$$Y_1 = chsx \cos sx;$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(shsx \cos sx + chsx \sin sx);$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}shsx \sin sx;$$

$$Y_4 = \frac{1}{4}(chsx \sin x - shsx \cos sx)$$

Таблица П.4.1

$s \cdot x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
0	1,0	0	0	0
0,1	1,0	0,10	0,0050	0,00015
0,2	0,9997	0,20	0,0200	0,00135
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,00450
0,4	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107
0,5	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208
0,6	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360
0,7	0,9600	0,69440	0,24435	0,0571
0,8	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515
0,9	0,8931	0,88035	0,40205	0,1211
1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659
1,1	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515
1,3	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612
1,4	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
1,6	-0,0753	1,2535	1,18725	0,66145
1,7	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,9	-1,1049	1,0888	1,54635	1,0727
2,0	-1,5656	0,95575	1,64895	1,2325
2,1	-2,09223	0,7735	1,73585	1,40195
2,2	-2,6882	0,5351	1,8018	1,57905
2,3	-3,3562	0,23345	1,84075	1,7614
2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,94605
2,5	-4,9128	-0,5885	1,81045	2,12925
2,6	-5,8003	-1,1236	1,72555	2,3065
2,7	-6,7565	-1,7509	1,58265	2,47245
2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208

Продолжение табл. П.4.1



$S \cdot X$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
-------------	-------	-------	-------	-------

2,9	-8,8471	-3,3079	1,08375	2,7443
3,0	-9,9669	-4,24845	0,70685	2,8346
3,1	-11,1119	-5,30225	0,2303	2,8823
3,2	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
3,4	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
3,5	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
3,6	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
3,7	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
3,8	-17,6875	-15,67605	-6,8343	0,9969
3,9	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
4,0	-17,8498	-19,25235	-10,3265	-0,7073
4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,2	-16,3505	-22,70545	-14,52735	-3,1812
4,3	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,4	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
4,5	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
4,6	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,96380
4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,57323
4,8	5,3164	-27,60515	-30,2589	-16,4604
4,9	12,5239	-26,72385	-32,9814	-19,6232
5,0	21,0504	-25,05645	-35,57745	-23,0525
5,1	30,9997	-22,46605	-37,96185	-26,7317
5,2	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,3	55,5317	-13,9201	-41,68255	-34,72455
5,4	70,2637	-7,6440	-42,77265	-38,9324
5,5	86,7044	0,19005	-43,15925	-43,2557
5,6	104,8687	9,75435	-42,67745	-47,5558
5,7	124,7352	21,2199	-41,14535	-51,75625
5,8	146,2478	34,7564	-38,36395	-55,74285
5,9	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,38045
6,0	193,6813	68,65775	-28,2116	-62,5106
6,1	219,2004	89,29465	-20,30425	-64,9518
6,2	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,3	272,2487	138,4120	2,28855	-66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	-63,21045
6,6	349,2554	231,88005	57,2528	-58,6871
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	-51,74295

Продолжение табл. П.4.1

S·X	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>
6,8	390,2947	306,0558	110,9087	-42,11895
6,9	404,7145	347,34985	143,4927	-30,1819
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	-13,2842
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,3	389,3783	509,41565	314,72645	60,0189
7,4	358,7306	546,93425	367,56875	94,1019
7,5	313,3700	580,67095	423,9858	133,6506
7,6	251,0334	609,0402	483,5233	179,00345
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,4412
7,8	65,8475	642,1835	609,25955	288,16805
7,9	-62,0375	642,58715	673,6057	352,3123
8,0	-216,8647	628,8779	737,31005	422,8713
8,1	-401,1674	598,23435	798,81785	499,7008
8,2	-617,4142	547,5808	856,28775	582,49745
8,3	-867,9091	473,5998	907,5542	670,7544
8,4	-1154,6587	372,78655	950,11575	763,7226
8,5	-1479,3701	241,41355	981,0984	860,3917
8,6	-1843,2880	75,6088	997,25265	959,44835
8,7	-2247,0402	-128,58235	994,93765	1059,2289
8,8	-2690,4845	-375,1167	970,1255	1157,69385
8,9	-3172,6917	-667,9794	818,86635	1252,35605
9,0	-3691,4815	-1010,87995	834,8607	1340,3007
9,1	-4243,5551	-1407,3690	714,40845	1418,0930
9,2	-4824,0587	-1860,5365	551,49275	1481,76105
9,3	-5426,5154	-2372,94855	340,3091	1526,7834
9,4	-6042,3167	-2946,2708	74,8875	1548,0229
9,5	-6660,9594	-3581,47555	-250,99585	1539,7419
9,6	-7269,3664	-4278,16925	-643,4861	1495,5985
9,7	-7851,7063	-5034,47135	-1108,61825	1408,6174
9,8	-8389,5687	-5847,0360	-1652,2517	1271,2663
9,9	-8860,9431	-6710,20695	-2279,7354	1075,3680
10,0	-9240,8733	-7616,14615	-2995,70945	812,3636

**ЗНАЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
ДЛЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК**

Таблица П.5.1

Номер схемы	Расчетная схема балки	Формулы для определения опорных реакций, начальных параметров
1	2	3
1		$R_{n-1} = \frac{q(b-a)}{2l_n} [2l_n - (a+b)]$ $R_n = \frac{q(b-a)}{2l_n} (a+b)$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n-b)^4 + (l_n-a)^4] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n-b)^4 + (l_n-a)^4] \right\}$
2		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n} (l_n - c)$ $R_n = \frac{Fc}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[ R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[ R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$
3		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}$ $R_n = \frac{M}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[ R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[ R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$

Продолжение табл. П.5.1

1	2	3
4		$R_{n-1} = \frac{qf}{2l_n}(2l_n + f); \quad R_n = -\frac{qf^2}{2l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] + qf^3 \right\}$
5		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n}(l_n + f); \quad R_n = \frac{Ff}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] + Ff^2 \right\}$
6		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] - 3Mf \right\}$
7		$R_{n-1} = -\frac{qe^2}{2l_n}; \quad R_n = \frac{qe}{2l_n}(2l_n + e)$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$

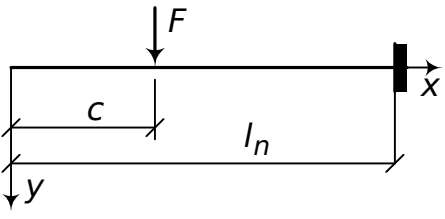
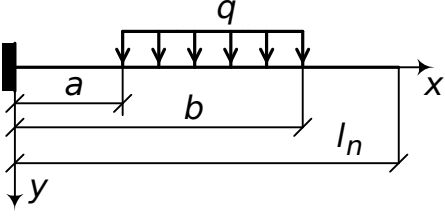
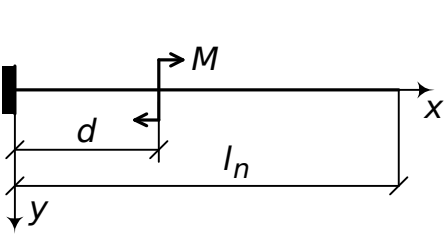
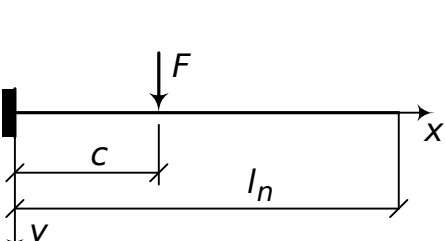
Продолжение табл. П.5.1

1	2	3
		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n}$

8		$\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
9		$R_{n-1} = -\frac{Fl}{l_n} ; R_n = \frac{F(l_n + e)}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
10		$\varphi_0 = -\frac{q}{6EJ} [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3]$ $y_0 = \frac{q}{24EJ} \left\{ 4l_n [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3] - \right.$ $\left. - [(l_n - a)^4 - (l_n - b)^4] \right\}$
11		$\varphi_0 = \frac{M(l_n - d)}{EJ}$ $y_0 = -\frac{M(l_n^2 - d^2)}{2EJ}$

Продолжение табл. П.5.1

1	2	3

12		$\varphi_0 = -\frac{F(l_n - c)^2}{2EJ}$ $y_0 = \frac{F(l_n - c)^2(2l_n + c)}{6EJ}$
13		$M_0 = \frac{q}{2}(b^2 - a^2)$ $Q_0 = q(b - a)$
14		$M_0 = -M$ $Q_0 = 0$
15		$M_0 = -F c$ $Q_0 = F$

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  $\varphi$ 

Таблица П.6.1

Гибкость $\lambda = \frac{l_{\text{гран}}}{i}$	Сталь марок			Чугун марок		Дюр- алюми- ний Д16Т	Дерево (сосна, ель)	Сталь с расчетным сопротивле- нием $R=240$ МПа СНИП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147
220	0,16	0,13	0,11					0,135



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Опір матеріалів [Текст ] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993. – 654 с.
2. Сопротивление материалов [Текст ] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров и др. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
3. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст ] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1966. – 348 с.
4. Мошинський, С.І. Задачі і приклади з опору матеріалів [Текст ] / навч. посібник / С.І.Мошинський, О.П. Примак, О.Г. Гуртовий. – К.: Освіта України, 2009. – 400 с.
5. Иванов, Н.И. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст ] / Н.И. Иванов. – М., 1956. – 276 с.
6. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов [Текст ] / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
7. Чихладзе, Е.Д., Кітов Ю.П. Побудова епюр внутрішніх сил в рамках з використанням ПЕОМ [Текст ] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 47 с.
8. Чихладзе, Э.Д. Определение геометрических характеристик сложных плоских сечений с контролем решения на ПЭВМ [Текст ] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Китов, С.Н. Чуменко. – Харьков: ХИИТ, 1993. – 45 с. (№122).
7. Чихладзе, Е.Д. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів з контролем рішення на ПЕОМ [Текст ] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, С.М. Чуменко. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 45 с. (№3321).
8. Чихладзе, Э.Д. Расчет на прочность и определение перемещений в балках при изгибе с контролем решений на ПЭВМ [Текст ] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Китов. – Харьков: ХарГАЖТ, 1995. – 76 с. (№927).
9. Чихладзе, Э.Д. Исследование объемного и плоского напряженного состояния с применением ПЭВМ [Текст ] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Китов, М.А. Веревичева. – Харьков: ХарГАЖТ, 1996. – 60 с. (№50).
10. Чихладзе, Е.Д. Дослідження об'ємного і плоского напружених станів з використанням ПЕОМ [Текст ] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, М.А. Веревичева. – Харків: ХарДАЗТ, 1999. (№3359).
- 11.Бронштейн, И.Н. Справочник по математике (для инженеров и учащихся ВТУЗов) [Текст ] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.-Л.: ОГИЗ, Госуд. изд. технико-теорет. лит., 1945. – 556 с.
12. Металлические конструкции: Справочник проектировщика [Текст ] / Под общ. ред. В.В. Кузнецова. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 576 с.
13. Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст ] / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1966. – 535 с.