



УКРАЇНЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Е.Д. ЧИХЛАДЗЕ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Підручник

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів, які
навчаються за напрямом підготовки «Будівництво»*

Харків 2011

УДК 539.3/8(075)

ББК 30.121

Ч 713

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Будівництво» (№1/11-11099 від 07.12.2010 р.)

Видання друге, доповнене та перероблене.

Рецензенти:

професор О.Ф. Яременко (Одеська державна академія будівництва і архітектури);

професор В.О. Гришин (Одеський національний морський університет)

Чихладзе Е.Д.

Ч 713 Опір матеріалів: Підручник для студентів будівельних спеціальностей транспортних вузів. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 366 с., рис. 227, табл. 18.

ISBN 978-966-2033-65-6

Ця книга, яка написана відповідно до програми курсів для транспортних вузів, відрізняється більш поглибленим розгляданням питань розрахунку і поширенням кола задач, що відносилися раніше до теорії пружності. Підручник містить велику кількість докладних прикладів розрахунку, які сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу.

При підготовці другого видання до тексту внесено деякі доповнення, які відносяться до динамічних характеристик будівельних матеріалів, усунуті недоліки у попередньому виданні.

Призначений для студентів будівельних спеціальностей транспортних вузів.

УДК 539.3/8(075)

ББК 30.121

ISBN 978-966-2033-65-6

© Українська державна академія залізничного транспорту, 2011

Підручник

Чихладзе Елгуджа Давидович

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Відповідальний за випуск Ватуля Г.Л.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 23.12.10 р.

Формат паперу 60x84 1/8 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 11,0. Тираж 500. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту

61050, Харків - 50, майдан Фейєрбаха, 7

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

Е.Д. ЧИХЛАДЗЕ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Підручник

Харків 2011

ПЕРЕДМОВА

Пропонований підручник “Опір матеріалів” написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу на будівельному факультеті Харківської державної академії залізничного транспорту.

Питання міцності, жорсткості і стійкості конструкцій цікавлять інженерів будь-якого фаху. Особливо велике значення вони набувають для інженера шляхів сполучення в силу того, що на залізничному транспорті функціонують унікальні інженерні споруди: мости, акведуки, віадуки, шляхопроводи, тунелі, труби, метрополітени і т. п., які потребують постійної і пильної уваги учених та інженерів.

Розвиток опору матеріалів відбувається шляхом удосконалювання методів розрахунку і розширення кола задач, що належали раніше до теорії пружності. Ця тенденція знайшла відбиток у запропонованій книзі.

Зазначимо найбільш істотні особливості цього навчального видання. У першому розділі “Загальні положення”, крім традиційних питань, дано уявлення про тензори напружень і деформацій, виведені залежності між деформаціями і переміщеннями, отримані рівняння узагальненого закону Гука, у тому числі і при зсуві.

У другому розділі, крім геометричних, викладені і секторіальні характеристики поперечних перерізів стержнів.

Третій розділ – “Розтягання і стискання”. Тут визначення переміщень при відомих значеннях напружень здійснено інтегруванням системи диференціальних залежностей між переміщеннями і деформаціями.

У четвертому розділі викладені основи теорії напруженого стану в двох і трьох вимірах.

П'ятий розділ – “Теорія міцності” – традиційний. У шостому розділі (“Теорія згинання”) приділена значна увага методам визначення переміщень. Тут розглянуті метод безпосереднього інтегрування; метод початкових параметрів; метод фіктивного навантаження; метод Мора. У цьому ж розділі окремим підрозділом виділений зсув як окремий випадок згинання і розглянуті питання розрахунку з'єднань.

Сьомий розділ – “Розрахунок статично невизначних балок” – містить розрахунок нерозрізних балок на абсолютно жорстких опорах і балки на пружній основі. У розділ 8 – “Кручення” – включений розрахунок стержнів із круглим і прямокутним поперечним перерізом, а також тонкостінних стержнів із незамкненим перерізом. У дев'ятому розділі “Складний опір і стійкість” наведені методи розрахунку: на косе згинання, згинання і кручення; позацентрове розтягання або стискання, стійкість, поздовжньо-поперечне згинання. Десятий розділ – “Розрахунок деяких конструкцій, що зазнають плоского напруженого стану”. Тут викладений розв'язок для

товстої труби, що знаходиться під дією рівномірного тиску; розтягнутої пластинки з малим круглим отвором; нескінченно великої пластинки, навантаженої зосередженою силою, що діє на горизонтальний прямолінійний край; консольної балки, навантаженої на кінці дотичними зусиллями і ін. У одинадцятому розділі розглянуті питання міцності і характеристики матеріалів при динамічних впливах.

При підготовці другого видання до тексту внесено доповнення, що стосуються динамічних характеристик матеріалів, які є суттєвими для формування у студентів інженерного мислення.

Автор висловлює подяку рецензентам д-ру техн. наук, проф. О.Ф. Яременку и д-ру техн. наук, проф. В.О. Гришину за цінні вказівки, а також глибоку вдячність канд. техн. наук, доц. М.А. Веревічевій та інженеру Р.Г. Павленко за допомогу при підготуванні рукопису до видання.

Всі зауваження і побажання будуть прийняті автором із вдячністю.

Листи просимо надсилати за адресою:

61050, Харків, пл. Фейєрбаха, 7, УкрДАЗТ, ауд. 118,
кафедра будівельної механіки.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	9
Розділ 1. Загальні положення	11
1.1. Предмет і задачі опору матеріалів	11
1.2. Схеми елементів конструкцій	12
1.3. Основні типи опорних пристроїв	13
1.4. Зовнішні сили та їх класифікація	14
1.5. Поняття про розрахункову схему споруди	15
1.6. Гіпотези і припущення	17
1.7. Внутрішні зусилля в поперечних перерізах стержня ...	18
1.7.1. Внутрішні зусилля при розтяганні і стисканні	20
1.7.2. Внутрішні зусилля при крученні	22
1.7.3. Внутрішні зусилля при згинанні стержнів із прямою віссю	24
1.7.4. Внутрішні зусилля в рамах	32
1.7.5. Внутрішні зусилля в криволінійних стержнях	35
1.8. Напруження і деформації	39
1.8.1. Компоненти напружень	39
1.8.2. Складові деформації	42
1.8.3. Залежності між складовими напруження і складовими деформації	45
Розділ 2. Геометричні характеристики поперечних перерізів стержнів	49
2.1. Статичний момент площі	49
2.2. Центр ваги перерізу	50
2.3. Моменти інерції перерізів	51
2.3.1. Залежність між моментами інерції при паралельному перенесенні осей	52
2.3.2. Зміна осьових і відцентрового моментів інерції при повороті координатних осей	54
2.3.3. Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції	55
2.3.4. Моменти інерції найпростіших фігур	58
2.3.5. Обчислення моментів інерції складних фігур	61
2.3.5.1. Визначення центра ваги перерізу	61
2.3.5.2. Обчислення моментів інерції складового перерізу відносно центральних осей	63
2.3.5.3. Визначення положення головних центральних осей і головних моментів інерції	65
2.4. Моменти інерції перерізів тонкостінних стержнів	65
2.4.1. Система координат	66

2.4.2.	Секторіальні характеристики перерізу	67
2.4.3.	Визначення положення головного полюса	68
2.4.4.	Визначення секторіального моменту інерції	69
Розділ 3.	Розтягання і стискання	75
3.1.	Напруження в перерізах, перпендикулярних до осі бруса	75
3.2.	Напруження в перерізах, похилих до осі бруса	76
3.3.	Деформації при розтяганні і стисканні	78
3.3.1.	Поздовжня деформація	78
3.3.2.	Поперечна деформація	79
3.4.	Визначення переміщень при розтяганні і стисканні	81
3.4.1.	Розтягання стержня силою на кінці	81
3.4.2.	Розтягання стержня під дією власної ваги	84
3.5.	Статично невизначні системи, що працюють на розтягання або стискання	87
3.5.1.	Розрахунок статично невизначних систем на силові впливи	87
3.5.2.	Розрахунок статично невизначних систем на температурні впливи і неточність виготовлення	88
3.6.	Відомості про будівельні матеріали несучих конструкцій	90
3.7.	Випробування матеріалів на розтягання і стискання ..	92
3.7.1.	Діаграми розтягання пластичних і крихких матеріалів	92
3.7.2.	Діаграми стискання різних матеріалів	97
3.8.	Вплив різноманітних факторів на механічні характеристики матеріалів	100
3.8.1.	Вплив температури	101
3.8.2.	Вплив швидкості деформації	101
3.8.3.	Вплив технологічних факторів	10
		2
3.9.	Потенційна енергія деформації і робота, що витрачається на розтягання стержня	103
3.10.	Методи розрахунку будівельних конструкцій	105
3.10.1.	Метод граничних станів	105
3.10.1.1.	Навантаження і впливи	105
3.10.1.2.	Механічні властивості матеріалів	106
3.10.1.3.	Геометричні параметри конструктивних елементів	106
3.10.1.4.	Умови роботи	106
3.10.1.5.	Ступінь відповідальності споруди	107
3.10.1.6.	Умова міцності при розтяганні	107

3.10.2.	Метод допустимих напружень	107
3.10.3.	Метод руйнуючих навантажень	109
3.10.4.	Поняття про імовірнісний метод розрахунку на міцність	111
Розділ 4.	Основи теорії напруженого стану	113
4.1.	Плоский напружений стан і плоска деформація	113
4.1.1.	Напруження в точці	114
4.1.2.	Головні напруження. Положення головних площадок	116
4.1.3.	Екстремальні дотичні напруження	117
4.2.	Дослідження напружень у трьох вимірах	118
4.2.1.	Головні напруження і положення головних площадок	120
4.2.2.	Екстремальні значення дотичних напружень	122
4.2.3.	Октаедричні напруження	125
4.3.	Потенційна енергія деформації при об'ємному напруженому стані	126
4.4.	Приклад дослідження напруженого стану в точці тіла .	127
Розділ 5.	Теорії міцності	134
5.1.	Теорія найбільших нормальних напружень	135
5.2.	Теорія найбільших подовжень	136
5.3.	Теорія максимальних дотичних напружень	138
5.4.	Енергетична теорія міцності	140
5.5.	Теорія міцності Мора	141
Розділ 6.	Теорія згинання	143
6.1.	Чисте згинання	143
6.2.	Поширення висновків теорії чистого згинання на поперечне згинання	148
6.3.	Виведення формули дотичних напружень	150
6.3.1.	Дотичні напруження для прямокутного перерізу ..	152
6.3.2.	Дотичні напруження для кругового перерізу	153
6.3.3.	Дотичні напруження для трикутного перерізу	154
6.3.4.	Дотичні напруження для двотаврового перерізу ...	155
6.4.	Головні напруження при згинанні балок	157
6.5.	Перевірка міцності балок при згинанні	159
6.6.	Зігнута вісь прямого бруса	161
6.6.1.	Диференціальне рівняння зігнутої осі	161
6.6.2.	Розв'язання диференціального рівняння методом безпосереднього інтегрування	164
6.6.3.	Метод початкових параметрів	167
6.6.3.1.	Рівномірно розподілене навантаження q	168

6.6.3.2.	Зосереджена сила	169
6.6.3.3.	Зосереджений момент	170
6.6.4.	Метод фіктивного навантаження	175
6.6.5.	Метод Мора	179
6.7.	Зсув як окремий випадок згинання	183
6.7.1.	Розрахунки з'єднань, що працюють на зсув	185
6.8.	Потенційна енергія при згинанні	189
Розділ 7.	Розрахунок статично невизначних балок	191
7.1.	Загальні положення	191
7.2.	Розрахунок нерозрізних балок	193
7.2.1.	Приклад розрахунку нерозрізної балки	199
7.3.	Розрахунок балки на пружній основі	202
7.3.1.	Приклад розрахунку балки на пружній (вінклерівській) основі	214
7.4.	Розрахунок нескінченно довгої балки на пружній основі	216
Розділ 8.	Кручення	220
8.1.	Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом	220
8.1.1.	Визначення кутів закручування	224
8.1.2.	Напруження у поздовжніх і похилих перерізах, що проходять через вісь стержня	227
8.1.3.	Статично невизначні задачі при крученні	228
8.1.4.	Потенційна енергія при крученні круглого стержня	230
8.1.5.	Розрахунок циліндричних пружин із малим кроком витка	231
8.1.6.	Розрахунок на кручення круглих стержнів з урахуванням пластичних деформацій	233
8.2.	Кручення стержнів прямокутного перерізу	235
8.2.1.	Загальні положення	235
8.2.2.	Вільне кручення стержнів прямокутного перерізу і тонкостінних стержнів відкритого профілю	236
8.2.2.1.	Депланація незамкнутого тонкостінного перерізу	239
8.2.3.	Стиснене кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю	241
8.2.3.1.	Головні припущення	241
8.2.3.2.	Нормальні напруження σ_{ω}	243
8.2.3.3.	Дотичні напруження τ_{ω}	244
8.2.3.4.	Диференціальні рівняння кутів закручування	246
8.2.3.5.	Загальний випадок навантаження тонкостінного стержня відкритого профілю. Приклад розрахунку	249

Розділ 9.	Складний опір і стійкість	255
9.1.	Загальні положення і передумови	255
9.2.	Косе згинання	256
9.3.	Згинання і кручення стержня кільцевого поперечного перерізу	261
9.4.	Позацентрове розтягання і стискання	266
9.5.	Стойкість стиснутих стержнів	272
9.5.1.	Поняття про стійкість і критичну силу	272
9.5.2.	Формула Ейлера для визначення величини критичної сили	273
9.5.3.	Формула Ейлера при різноманітних умовах закріплення кінців стержня	277
9.5.4.	Границі придатності формули Ейлера	278
9.5.5.	Практичний розрахунок стиснутих стержнів	280
9.5.6.	Урахування впливу зсувів при визначенні критичної сили	284
9.6.	Розрахунок позацентрово стиснутого гнучкого стержня	286
9.7.	Поздовжньо-поперечне згинання	288
Розділ 10.	Розрахунок деяких конструкцій, які зазнають плоского напруженого стану	293
10.1.	Диференціальні рівняння рівноваги	293
10.2.	Умови на контурі	294
10.3.	Умови сумісності	295
10.4.	Функція напружень	297
10.5.	Розв'язання диференціального рівняння плоскої задачі за допомогою поліномів	298
10.5.1.	Згинання консольної балки	301
10.6.	Плоска задача в полярних координатах	302
10.6.1.	Загальні рівняння в полярних координатах	302
10.6.2.	Складові деформації в полярних координатах	307
10.7.	Товста труба під дією рівномірного тиску	310
10.8.	Розтягання пластинки з малим круглим отвором	313
10.9.	Дія зосередженої сили, прикладеної до прямолінійного краю нескінченно великої пластинки	315
Розділ 11.	Динамічна дія навантаження	321
11.1.	Загальні положення і поняття	321
11.2.	Диференціальне рівняння руху системи з одним ступенем свободи	322
11.3.	Вільні коливання без урахування сил опору	324
11.4.	Вільні коливання з урахуванням сил опору	326

11.5.	Вимушені коливання під дією вібраційного навантаження	328
11.6.	Розрахунок на раптове навантаження	332
11.7.	Розрахунок на дію короткочасного навантаження	334
11.8.	Ударне навантаження	335
11.9.	Динамічні характеристики будівельних матеріалів і конструкцій	338
11.9.1.	Динамічна жорсткість	339
11.9.2.	Явище втомленості	339
11.9.3.	Діаграма граничних амплітуд	342
11.9.4.	Фактори, що впливають на утомленісну міцність матеріалів	343
11.9.4.1.	Концентрація напружень	343
11.9.4.2.	Масштабний фактор	344
11.9.4.3.	Якість поверхні	345
11.9.4.4.	Зовнішнє середовище	345
11.9.5.	Утомленісна міцність при нестационарних навантаженнях	345
11.9.6.	Розрахунок на міцність при змінних напруженнях	347
ВИСНОВОК	350
Додаток 1.	Сортамент прокатної сталі	351
Додаток 2.	Значення початкових параметрів у статично визначних балках	363

Розділ 1

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Предмет і задачі опору матеріалів

Будь-яка інженерна споруда повинна бути міцною, жорсткою і стійкою. Споруда буде міцною, якщо вона здатна, не руйнуючись, витримувати навантаження, які діють на неї, протягом достатньо тривалого часу. Споруда жорстка, якщо переміщення в ній не заважають нормальній експлуатації. Споруда стійка, якщо вона не змінює форму, отриману при зведенні. Для вирішення завдання забезпечення міцності, жорсткості і стійкості споруди необхідно знати головні механічні властивості матеріалів, із яких вона виконана, крім того, повинні бути відомі навантаження, прикладені до споруди. Потім треба визначити внутрішні сили, що виникають між окремими елементарними частинками тіла, за яким законом вони розподіляються і в яких місцях досягають екстремальних значень. Після цього вибираємо такі розміри частин споруд, при яких внутрішні сили менше від граничних, що регламентуються нормами. За цієї умови руйнування не відбудеться.

Проблемами розрахунку займається інженерна наука – будівельна механіка. Опір матеріалів є дисципліною, в якій вивчаються головні поняття і принципи, що використовуються в цих розрахунках. Їхнє застосування в опорі матеріалів звичайно обмежується лише розрахунками окремих елементів конструкцій, таких як, наприклад, стержень, балка або найпростіші складені з них системи. Розрахунки складних багатоелементних конструкцій вивчаються в наступних курсах, таких як «Статика споруд», «Динаміка споруд», «Стійкість споруд». Опір матеріалів ґрунтується на теоретичних і експериментальних даних. Теоретичним шляхом одержують основні розрахункові формули, які застосовують при вирішенні конкретних завдань, а експериментальним – установлюють головні механічні характеристики матеріалів і перевіряють висновки теорії.

В опорі матеріалів використовуються основні положення фізики, математики і теоретичної механіки. Проте в постановці задач є істотна особливість. У той час як у теоретичній механіці тіло вважається абсолютно твердим, в опорі матеріалів враховуються ті невеличкі зміни розмірів і форми тіла, що утворюються під дією навантажень або інших причин. Ці зміни називають *деформаціями*. Деформації безрозмірні і малі: для реальних будівельних матеріалів мають порядок $\varepsilon = 10^{-3}$. Знання основ опору матеріалів є найважливішою вимогою і складовою частиною при підготовці інженера взагалі й інженера шляхів сполучення зокрема.

1.2. Схеми елементів конструкцій

Будь-яка інженерна споруда – будинок, міст, тунель тощо мають несучі елементи, призначені для сприйняття навантажень та інших впливів. Розглянемо ці елементи.

Геометричну форму будь-якого елемента можна в основному охарактеризувати трьома розмірами: довжиною, шириною і товщиною. Елементи призматичної або циліндричної форми, у яких один розмір (довжина ℓ) великий порівняно з двома іншими b , h розмірами, називаються брусами (рис. 1.1). Геометричне місце точок, які є центрами ваги поперечних перерізів, будемо називати віссю бруса.

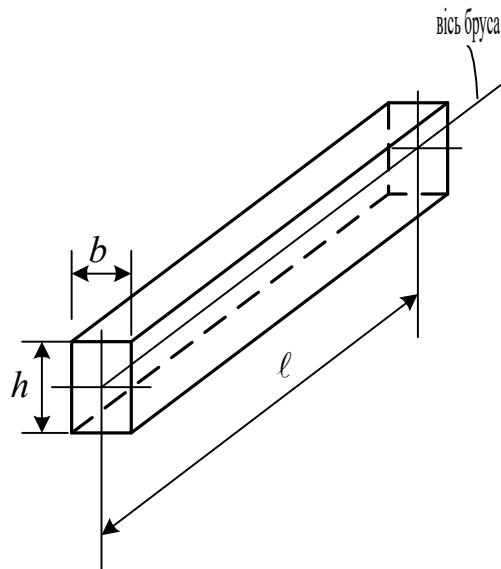


Рис. 1.1. Елемент конструкції – брус

Залежно від співвідношення розмірів бруса і характеру діючих сил бруси поділяються на стержні і балки. Стержень – тонкий і довгий брус, що працює головним чином на розтягання або стискання (одноосьовий напружений стан).

Балка – горизонтально розташований порівняно товстий брус, що працює в основному на згинання.

Елементи, у яких два розміри a , b великі порівняно з третім (товщиною), називаються плитами, пластинами або мембранами (залежно від товщини), рис. 1.2. Скривлена пластина (криволінійна до навантаження) називається оболонкою. Матеріал пластин і оболонок працює в більш складних умовах, ніж у стержні, а саме на розтягання-стискання у двох взаємно перпендикулярних напрямках (двоосьовий напружений стан).

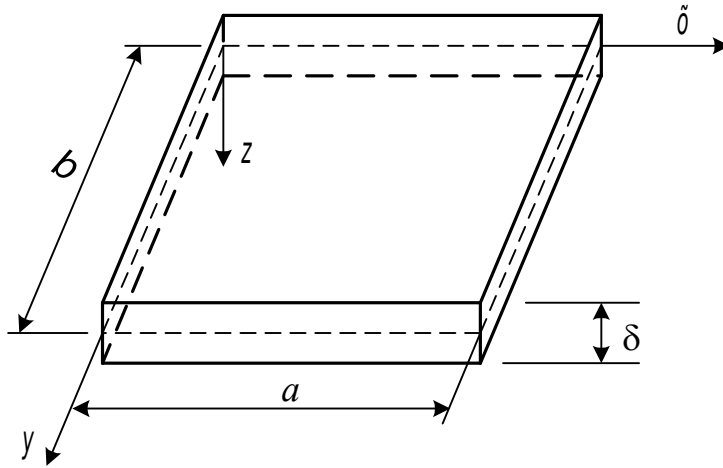


Рис. 1.2. Елемент конструкції – пластина

Елементи, у яких усі три розміри a , b , c є розмірами одного порядку, називаються масивами (рис. 1.3). Напружений стан матеріалу тут тривісний.

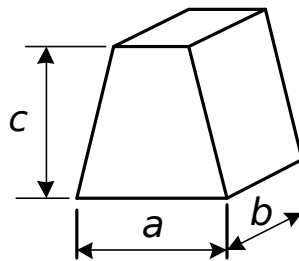


Рис. 1.3. Елемент конструкції – масив

1.3. Основні типи опорних пристроїв

У курсі опору матеріалів розглядаються головним чином стержневі елементи. Стосовно них і розглянемо опорні пристрої. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. Частіше за все в інженерній практиці застосовують такі типи опор.

Шарнірно-рухома опора (рис. 1.4) являє собою пристрій, що припускає переміщення опорного перерізу по горизонталі і поворот його у вертикальній площині відносно осі циліндричного шарніра А та не дає можливості переміщення по вертикалі. Реакція такої опори спрямована уздовж опорного зв'язку.

циліндричні шарніри

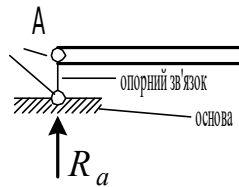


Рис. 1.4. Шарнірно-рухома опора

Шарнірно-нерухома опора (рис. 1.5) не припускає зсувів опорного перерізу ні в поздовжньому, ні в поперечному напрямках, але припускає поворот цього перерізу відносно шарніра. Отже, шарнірно-нерухома опора – опора з двома зв'язками, які зручно прикладати за напрямком осі стержня і перпендикулярно до осі. У такій опорі виникають дві складові опорні реакції R_a і H_a .

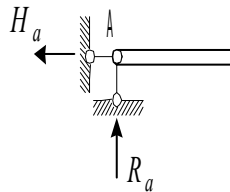


Рис. 1.5. Шарнірно-нерухома опора

Жорстке закріплення або защемлення (рис. 1.6) не припускає повороту опорного перерізу і переміщення його ні в якому напрямку, тобто на цей переріз накладено три зв'язки. У такій опорі виникає вертикальна R_a і горизонтальна H_a складові опорної реакції і згинальний момент M_a .

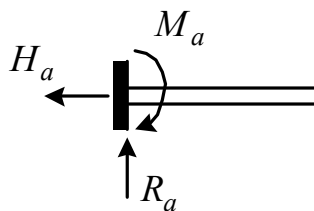


Рис. 1.6. Жорстке закріплення (защемлення)

1.4. Зовнішні сили та їх класифікація

Зовнішні сили або навантаження, що діють на тіла, поділяють на поверхневі й об'ємні. *Поверхневі* називаються такі сили, що прикладаються до тіла шляхом стикання з ним інших тіл по деякій частині або по всій поверхні, наприклад навантаження, що лежить на балці або плиті. *Об'ємними* називають такі сили, що розподілені по всьому об'єму

тіла і прикладені до його внутрішніх точок, наприклад, власна вага або сили інерції. Розмірність об'ємних сил – Н/м^3 , кН/м^3 . Поверхневі сили поділяють на зосереджені і розподілені. *Зосередженими* називають такі сили, що передаються тілу по поверхні, дуже малій порівняно з його розмірами. Для спрощення розрахунків ці сили вважають прикладеними в точках. Зосереджені сили вимірюють у ньютонах (Н), кілоньютонах (кН) або меганьютонах (МН) ($1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кгс}$, $1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$). Реально через точку, тобто об'єкт, що не має розмірів, неможливо передати впливи скінченного значення. Тому зосереджена сила або момент – це типова схематизація реальності, що дозволяє побудувати фізико-математичну розрахункову модель.

Розподіленими називають навантаження, прикладені по деякій площі або лінії на поверхні тіла. Наприклад, тиск снігу на дах будинку. Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю, тобто величиною навантаження, що припадає на одиницю площі або довжини (Н/м^2 або кН/м^2 , Н/м або кН/м). Якщо навантаження має однакову інтенсивність по всій площі або довжині, то його називають *рівномірно розподіленим*.

Для інтенсивності навантаження застосуємо таке правило знаків: компонента вектора інтенсивності додатна, якщо вона збігається з напрямком відповідної осі координат.

За тривалістю дії навантаження поділяють на *постійні*, що діють безперервно, і *тимчасові*, що діють лише в деяких проміжках часу. За характером дії навантаження поділяють на статичні і динамічні. Навантаження, постійне або дуже повільно змінне за часом, коли виникаючими швидкостями і прискореннями руху можна знехтувати, називається *статичним*.

Навантаження, що швидко змінюється, називають *динамічним*, а розрахунок з урахуванням виникаючого коливального руху – динамічним розрахунком.

1.5. Поняття про розрахункову схему споруди

В опорі матеріалів закладається фундамент для грамотного проектування конструкцій. Поряд із уведенням відповідних понять, викладених у попередніх підрозділах, необхідно вміти уявити роботу елемента конструкції за допомогою розрахункової схеми і відповідних аналітичних залежностей.

Розрахунковою схемою називають ідеалізовану спрощену схему дійсної споруди або її частини, у якій відбиваються тільки її основні властивості.

За допомогою розрахункової схеми вирішуються важливі інженерні питання: дається оцінка міцності існуючої конструкції; визначаються гранично допустимі навантаження; підбираються необхідні розміри елементів і вибираються придатні матеріали; здійснюється оптимізація параметрів конструкції, тобто знаходяться параметри, що забезпечують найкращі властивості цієї конструкції.

Приклади деяких розрахункових схем, які розглядаються у курсі опору матеріалів, наведені на рис. 1.7.

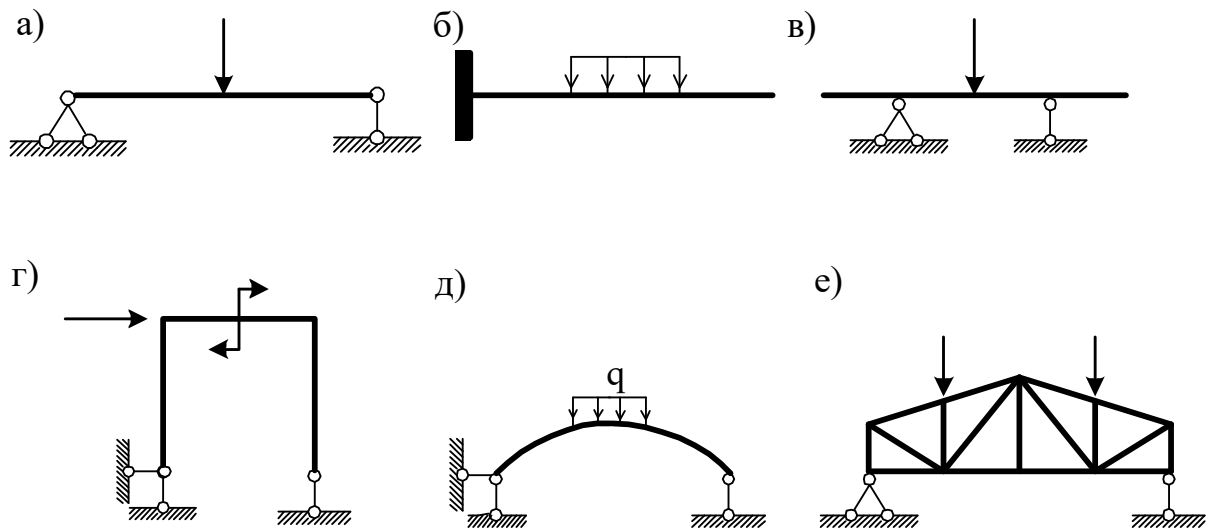


Рис. 1.7. Розрахункові схеми стержневих конструкцій

На рис. 1.7, а, б, в зображені балки, що являють собою прямолінійний брус, який працює на згинання. Рама (рис. 1.7, г) – *стержнева* система переважно з жорсткими з'єднаннями у вузлах. *Стержні* рами працюють одночасно на згинання і осьову дію сил, причому згинальна деформація в рамі переважає.

Криволінійний брус, показаний на рис. 1.7, д, працює на стискання і згинання.

Стержнева система, показана на рис. 1.7, е, називається фермою. За наявності ідеального шарнірного з'єднання у вузлах усі стержні ферми при вузловому навантаженні працюють тільки на осьову дію сил.

Зазначимо, що для нерухомого з'єднання конструкції з основою необхідні три зв'язки. Ця умова є необхідною, але не достатньою. Неприпустимим є з'єднання з основою за допомогою трьох шарнірно-рухомих опор, напрямки яких паралельні один одному або напрямки яких перетинаються в одній точці.

1.6. Гіпотези і припущення

Інженерні споруди виготовляються з різноманітних матеріалів: металу, бетону, дерева, полімерів та ін. Їхня структура і фізичні властивості можуть бути дуже різноманітними. В опорі матеріалів користуються матеріалом, наділеним ідеалізованими властивостями. Матеріал вважається суцільним, однорідним, ізотропним і лінійно-пружним.

1.6.1. Властивість суцільності говорить про те, що не враховується конкретна структура матеріалу (зерниста, кристалічна та ін.) і вважається, що матеріал безперервно заповнює весь об'єм елемента конструкції.

1.6.2. Властивість *однорідності* означає, що весь об'єм матеріалу має однакові механічні властивості.

1.6.3. *Ізотропним* називається матеріал, у якого механічні властивості у всіх напрямках однакові. В іншому випадку його називають *анізотропним*.

1.6.4. *Ідеально-пружним* є такий матеріал, у якому виникають тільки пружні деформації. Діаграма деформування цього матеріалу показана на рис. 1.8. При навантаженні і розвантаженні зразка графіки збігаються, тобто залишкових деформацій немає.

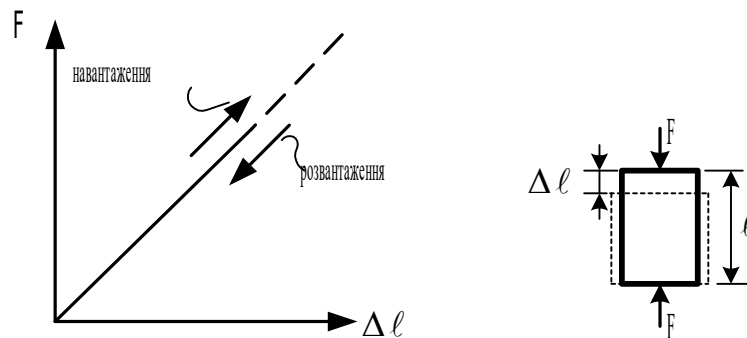


Рис. 1.8. Діаграма деформування лінійно-пружного матеріалу

1.6.5. В опорі матеріалів використовується гіпотеза про малість деформацій (зміну розмірів і форми тіла під дією навантаження називають деформацією тіла). Передбачається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дозволяє в більшості випадків знехтувати змінами в розташуванні зовнішніх сил щодо окремих частин тіла.

1.6.6. Для лінійних систем, що розглядаються в курсі опору матеріалів, справедливим є принцип суперпозиції: результат дії групи сил дорівнює сумі (алгебраїчній або геометричній) результатів, отриманих від дії кожної сили окремо.

1.7. Внутрішні зусилля в поперечних перерізах стержня

Між сусідніми частинками тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, інакше – внутрішні сили. Ці сили в усіх випадках прагнуть зберегти його як єдине ціле, протидіють будь-якій спробі змінити взаємне розташування частинок, тобто деформувати тіло. Зовнішні сили, навпаки, завжди прагнуть викликати деформацію тіла, змінити взаємне розташування частинок. Для виявлення, а потім і обчислення внутрішніх сил широко застосовують метод перерізів.

Розглянемо довільне тіло, навантажене самоврівноваженою системою сил (рис. 1.9).

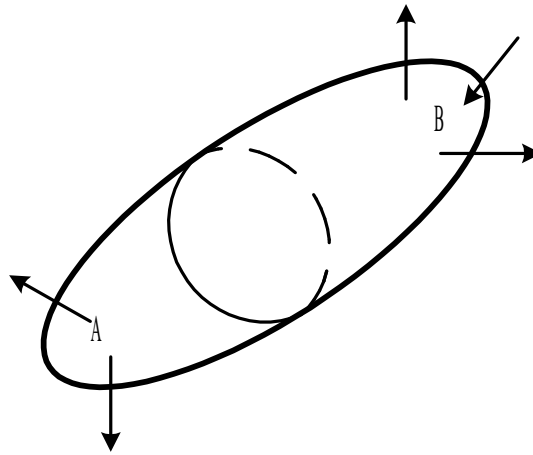


Рис. 1.9. До визначення внутрішніх сил методом перерізів

У місці, що нас цікавить, подумки розсічемо тіло площиною на дві частини А і В. У кожній точці обох сторін перерізу будуть діяти сили взаємодії. Виходячи з гіпотези про суцільність матеріалу, слід вважати, що внутрішні сили діють у всіх точках проведеного перерізу і, отже, являють собою розподілене навантаження (рис. 1.10).

Слід підкреслити, що внутрішні сили, які діють по перерізу, який належить частині А, відповідно до третього закону Ньютона рівні за величиною і протилежні за напрямком внутрішнім силам, що діють по перерізу, який належить частині В. Як будь-яку систему сил, їх можна призвести до однієї точки (звичайно до центра ваги перерізу), у результаті на кожній стороні перерізу одержимо головний вектор і головний момент внутрішніх сил. Якщо головний вектор і головний момент внутрішніх сил спроектувати на вісь стержня X і головні центральні осі перерізу Y і Z , то на кожній стороні перерізу одержимо шість внутрішніх силових факторів: три сили N , Q_y , Q_z і три моменти M_x , M_y , M_z (рис. 1.11).

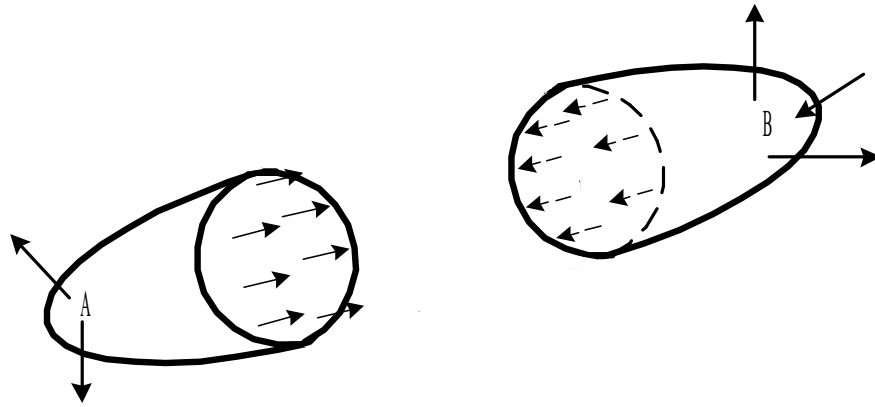


Рис. 1.10. До визначення внутрішніх сил методом перерізів

Зусилля N викликає поздовжню деформацію стержня (розтягання або стискання); Q_y і Q_z – зсув сторін перерізу відповідно в напрямку осей y і z ; M_x – кручення стержня; M_y і M_z – згинання стержня в головних площинах (ZOX та YOX).

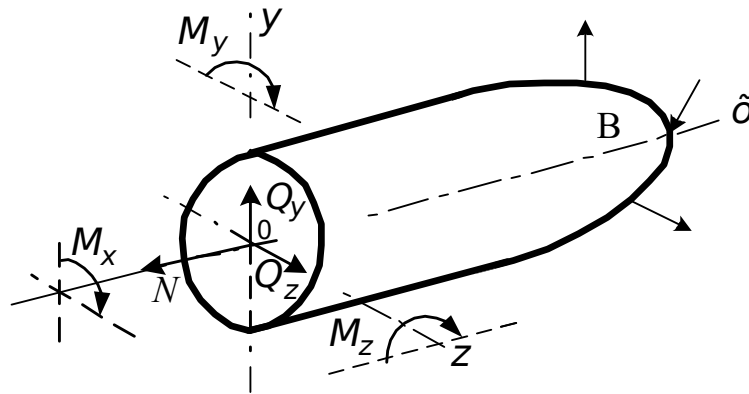


Рис. 1.11. Схеми внутрішніх силових факторів у перерізі

Таким чином, після прикладання в перерізі до частини В зусиль, що замінюють собою дію відкинутої частини А, частина В, що залишилася і яка навантажена прикладеними до неї зовнішніми силами, знаходиться в рівновазі. Тому для частини В можна записати шість рівнянь рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

З перших трьох рівнянь рівноваги (1.1) відповідно знаходяться зусилля N , Q_y , Q_z , а з трьох останніх – відповідно моменти M_x , M_y , M_z . Як бачимо, метод перерізів дає можливість визначити в перерізі напрямки і значення рівнодіючих внутрішніх зусиль (або їхніх компонент). При цьому закон розподілу цих зусиль залишається невідомим. Для

вирішення цього питання необхідно знати, як деформується брус під дією зовнішніх сил. Про йтиметься нижче.

Для внутрішніх силових факторів прийняті такі назви: N – поздовжня або осьова (спрямована по осі стержня) сила; Q_y, Q_z – поперечні (рідше – перерізуючі) сили; M_x – крутний момент; M_y, M_z – згинальні моменти.

Нагадаємо основні правила складання рівнянь рівноваги. Проекція сили на вісь дорівнює добутку сили на косинус кута між напрямком сили і додатним напрямком осі. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на вісь дорівнює нулю.

Момент сили щодо осі дорівнює добутку проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, на плече сили. Момент сили щодо осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі, якщо лінія дії сили перетинає вісь. Зусилля і моменти в різних перерізах одного і того самого стержня різні. Графіки (діаграми), що показують, як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називаються епюрами.

Правила побудови епюр:

- 1) вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона збігалася з віссю стержня;
- 2) ординати епюри в обраному масштабі відкладають від осі по перпендикуляру;
- 3) штрихувати епюри прийнято лініями, перпендикулярними до бази (до базисної лінії).

1.7.1. Внутрішні зусилля при розтяганні і стисканні

При дії на стержень зовнішніх навантажень, спрямованих уздовж поздовжньої осі, у поперечних перерізах виникає тільки один силовий фактор – поздовжня сила. Такі навантаження викликають розтягання і стискання стержня. Зазначимо, що поздовжня сила в поперечних перерізах стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій зовнішніх сил на вісь стержня, прикладених до його частини, що залишилася.

Умовимося поздовжню (осьову силу) вважати додатною, якщо вона викликає розтягання (спрямована від перерізу), і від'ємною, якщо вона викликає стискання (спрямована до перерізу).

Побудуємо епюру поздовжніх сил для східчастого стержня (рис. 1.12) з урахуванням власної ваги. Площа верхньої частини – A_1 , нижньої – A_2 , об'ємна вага матеріалу, із якого виконаний стержень, – γ .

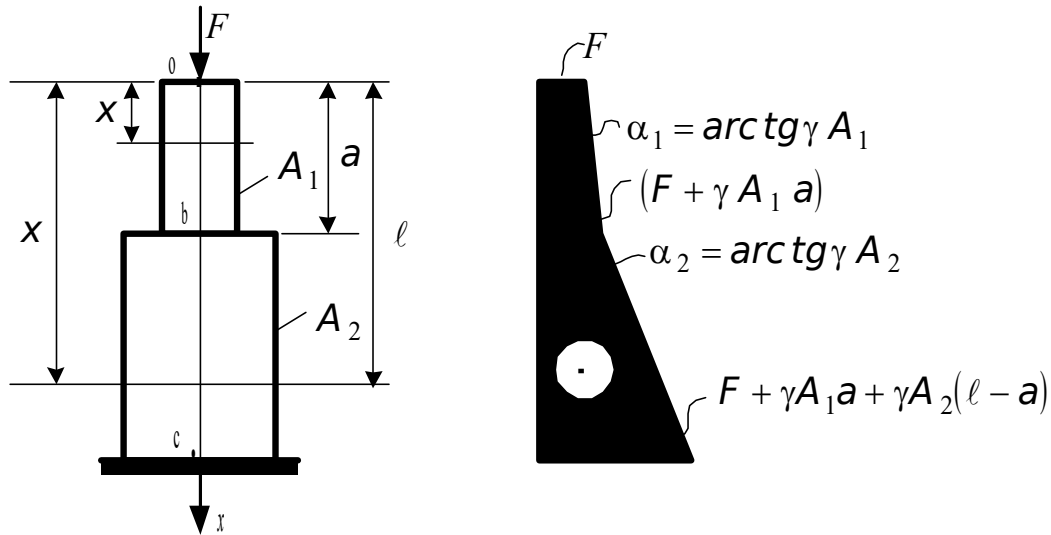


Рис. 1.12. До побудови епюри поздовжніх сил у стержні

Початок координат вибираємо в точці O .

Ділянка ob :

$$N_x = -F - \gamma A_1 x \quad (0 \leq x \leq a).$$

Ділянка bc :

$$N_x = -F - \gamma A_1 a - \gamma A_2 (x - a) \quad (a \leq x \leq \ell).$$

Отримані рівняння є рівняннями похилих прямих, от же епюра N трапецієподібна. Оскільки площі поперечних перерізів A_1 і A_2 на ділянках ob і bc різні, то нахил епюр на ділянках ob і bc неоднаковий.

Поздовжня сила N і розподілене навантаження t_x , наприклад, вага тіла ($t = \gamma A$), пов'язані деякою диференціальною залежністю. Розглянемо стержень, навантажений поздовжнім розподіленим навантаженням t_x (рис. 1.13). Виділимо зі стержня елемент довжиною dx . На нього буде діяти навантаження t_x , яке можна вважати рівномірно розподіленим через малість dx , і поздовжні сили, що врівноважують (додатні): у верхньому перерізі N , у нижньому $N + dN$, де dN – приріст поздовжньої сили на ділянці довжиною dx .

Складемо рівняння рівноваги – суму проекцій усіх сил, прикладених до елемента, на вісь стержня:

$$-N + t_x dx + (N + dN) = 0,$$

звідси

$$\frac{dN}{dx} = -t_x. \quad (1.2)$$

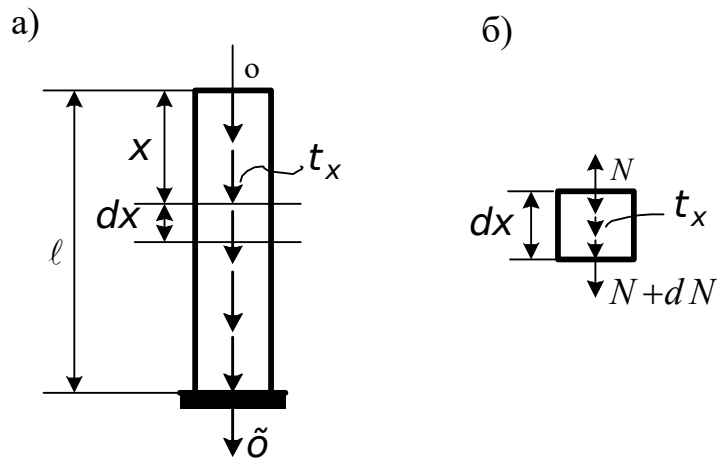


Рис. 1.13. До виведення диференціальної залежності між t_x і N

Ця залежність використовується при аналізі різних питань, зокрема при перевірці правильності побудови епюри N . Якщо обчислити похідні в рівняннях N_x на ділянках ob і bc , то побачимо, що на ділянці ob (див. рис. 1.12) повинно діяти рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю γA_1 , а на ділянці bc – γA_2 .

1.7.2. Внутрішні зусилля при крученні

Стержень, навантажений моментами, що діють у площинах, перпендикулярних до його поздовжньої осі, зазнає кручення. Такі стержні називають валами. При цьому в поперечних перерізах вала виникає тільки одне внутрішнє зусилля – крутний момент M_x .

Крутний момент у перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів, прикладених до його частини, що залишилася, або іншими словами – сумі зовнішніх крутних моментів, розташованих по один бік від перерізу.

Умовимося крутний момент вважати додатним, якщо при погляді на переріз із боку зовнішньої нормалі він спрямований за годинниковою стрілкою (рис. 1.14).

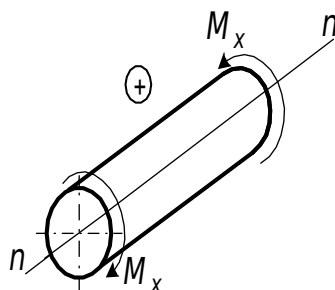


Рис. 1.14. Правило знаків для M_x

Зауважимо, що прийняте правило знаків для крутного моменту не має фізичного сенсу. Воно необхідне для встановлення напрямку крутного

моменту і при побудові епюри M_x . Побудуємо епюру M_x для вала, показаного на рис. 1.15.

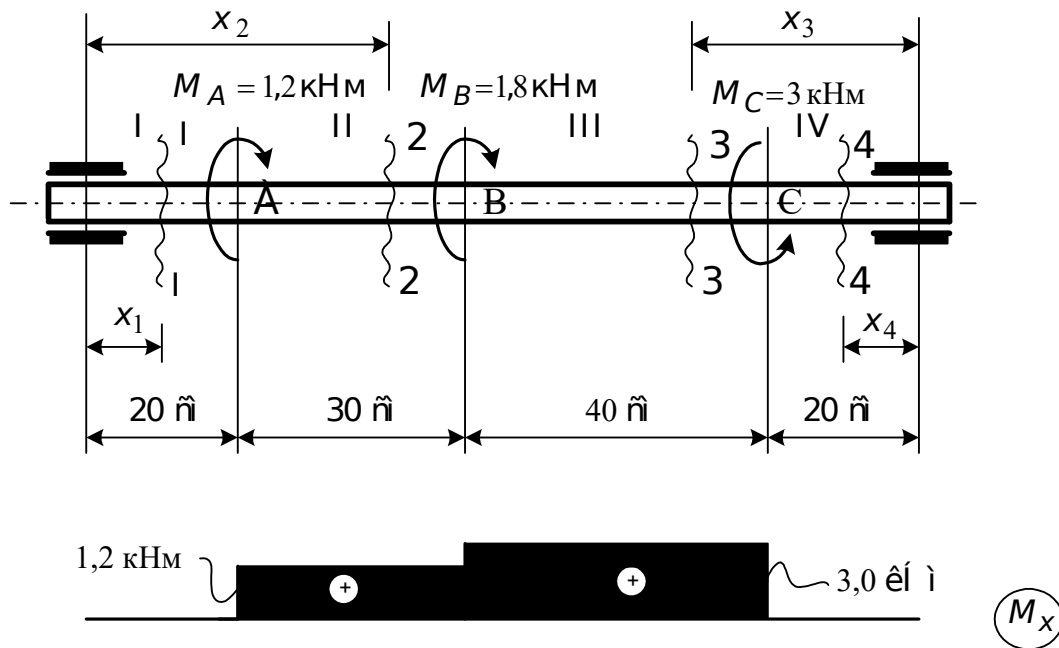


Рис. 1.15. До побудови епюри M_x для вала

Розбиваємо стержень на чотири ділянки. Використовуючи метод перерізів, на ділянці 1 подумки проводимо в довільному місці переріз I-I (початок координат приймаємо в крайньому лівому перерізі), відкидаємо праву частину стержня і розглядаємо рівновагу лівої частини, що залишилася:

$$M_1 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 20 \text{ см.}$$

Крутний момент у довільному перерізі 2-2 ділянки II. Відповідно до наведеного правила знаків, для ділянки II одержуємо

$$M_2 = M_A = 1,2 \text{ кНм}, \quad 20 \text{ см} \leq x_2 \leq 50 \text{ см.}$$

Крутний момент на ділянці III (частиною, що залишилася, є права, початок координат у крайньому правому перерізі)

$$M_3 = M_C = 3 \text{ кНм}, \quad 20 \text{ см} \leq x_3 \leq 60 \text{ см.}$$

Крутний момент на ділянці IV дорівнює нулю, тобто

$$M_4 = 0, \quad 0 \leq x_4 \leq 20 \text{ см.}$$

При побудові епюри крутних моментів додатні значення крутних моментів будемо відкладати нагору від базової лінії, а від'ємні значення – униз (рис. 1.15).

Крім зовнішніх зосереджених крутних моментів, на стержень (вал) може діяти і розподілене за деяким законом моментне навантаження інтенсивністю m_x . Між цим зовнішнім моментним навантаженням m_x і крутним моментом M_x існує диференціальна залежність. Для її одержання

розглянемо стержень з моментним навантаженням m_x (рис. 1.16), із якого виріжемо елемент довжиною dx .

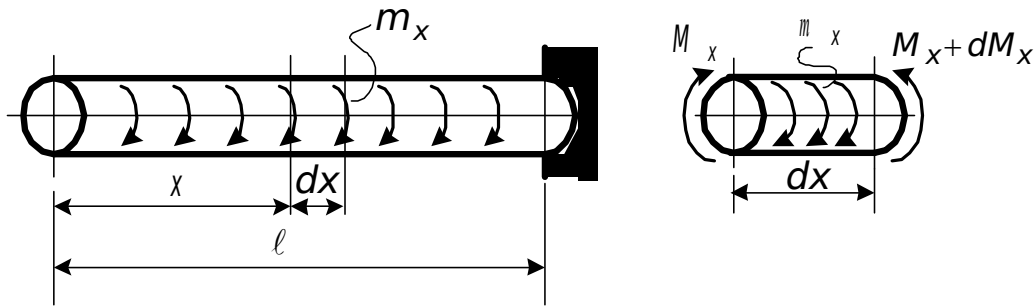


Рис. 1.16. До виведення диференціальної залежності між m_x і M_x

Цей елемент буде навантажений врівноваженими додатними крутними моментами M_x і $(M_x + dM_x)$, де dM_x – приріст крутного моменту і зовнішнього розподіленого моментного навантаження m_x , який можна вважати рівномірно розподіленим через малість dx .

Складемо рівняння рівноваги для елемента:

$$\sum M_x = 0: \quad M_x + m_x dx - (M_x + dM_x) = 0.$$

Звідси

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x. \quad (1.3)$$

Для перевірки правильності побудови епюри M_x (рис. 1.15) використовуємо диференціальну залежність (1.3). Обчислимо перші похідні на ділянках I, II, III, IV. Вони дорівнюють нулю. Звідси випливає, що рівномірно розподілене навантаження відсутнє.

1.7.3. Внутрішні зусилля при згинанні стержнів із прямою віссю

В інженерній практиці часто використовуються балки з поперечним перерізом, що має вертикальну вісь симетрії. Якщо зовнішнє навантаження і реактивні зусилля лежать в одній площині, що збігається з віссю симетрії перерізу, то балка буде згинатись в тій самій площині (вісь стержня, що згинається, не виходить із цієї площини). Таке згинання називають плоским. Тут будуть розглядатися випадки, коли при плоскому згинанні зовнішнє навантаження перпендикулярне до поздовжньої осі балки. Тому в поперечних перерізах балки виникають тільки поперечна сила і згинальний момент, а поздовжня сила дорівнює нулю.

Поперечна сила в будь-якому перерізі балки дорівнює сумі проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль до осі балки.

Вона вважається додатною, якщо вона спрямована так, що прагне повернути елемент балки за годинниковою стрілкою (рис. 1.17, а).

Щоб одержати згинальний момент у перерізі балки, необхідно алгебраїчно скласти усі згинальні моменти, розташовані по один бік від перерізу. Згинальний момент вважається додатним, якщо він згинає елемент балки опуклістю униз, викликаючи розтягання нижніх волокон (рис. 1.17, б).

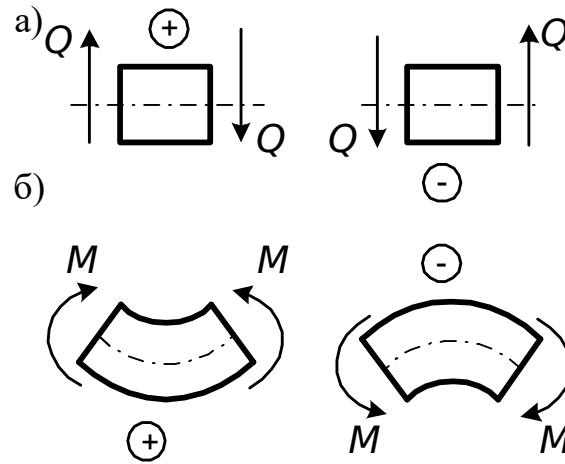


Рис. 1.17. Правило знаків для поперечної сили (а) і згинального моменту (б)

При побудові епюр поперечних сил і згинальних моментів додатні значення Q відкладаємо нагору, а M – униз від базисної горизонтальної лінії. Від’ємне значення – навпаки.

Для простоти запам’ятовування: поперечна сила вважається додатною, якщо зліва від перерізу вона спрямована нагору, а справа – униз. Для від’ємної поперечної сили – обернене правило знаків. Додатні ординати на епюрі поперечних сил відкладаються нагору від базисної лінії, від’ємні – униз.

За аналогією з поперечною силою пропонується таке правило знаків і для згинального моменту: згинальний момент вважається додатним, якщо зліва від перерізу він спрямований за годинниковою стрілкою, справа – проти годинникової стрілки, і від’ємним, якщо зліва від перерізу спрямований проти годинникової стрілки, а справа – за годинниковою. Додатні ординати відкладаються униз від базисної лінії, а від’ємні – нагору.

Побудову епюр поперечних сил і згинальних моментів пояснимо на прикладі (рис. 1.18).

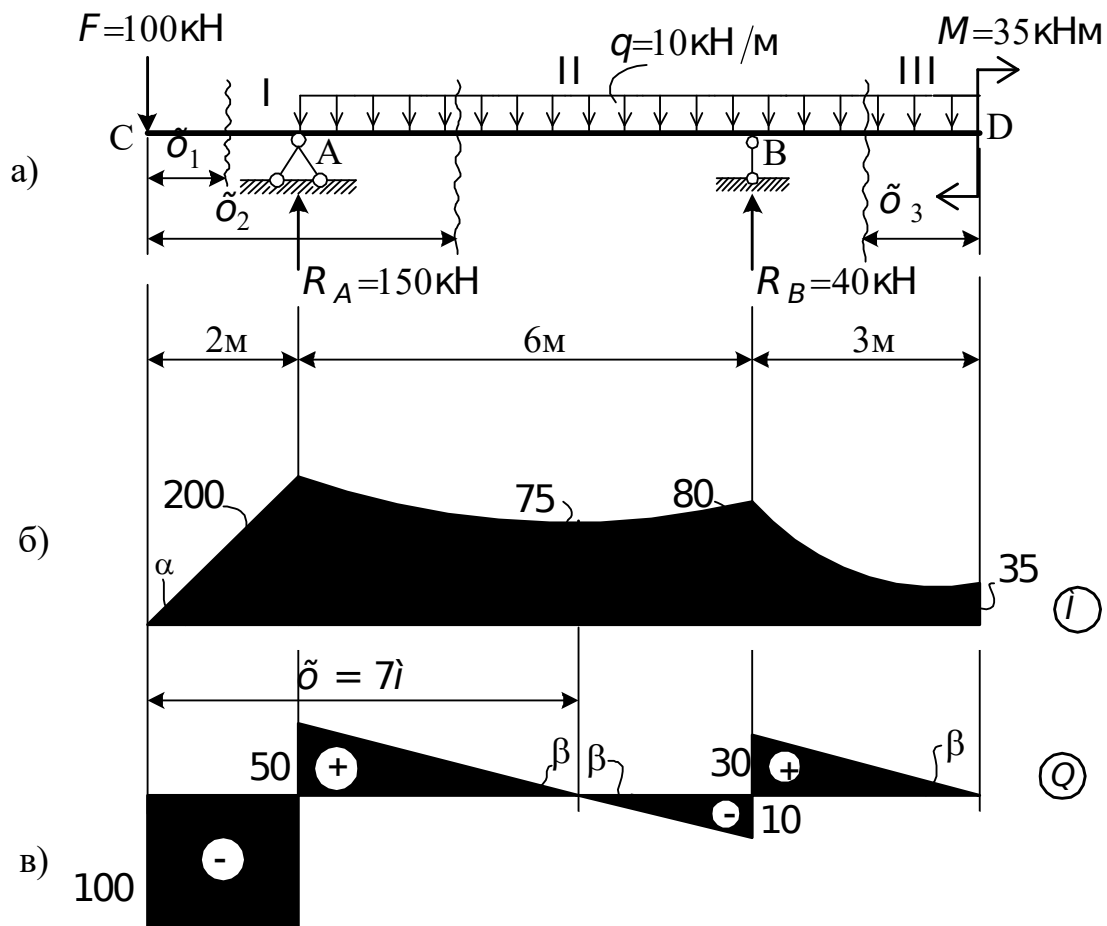


Рис. 1.18. Побудова епюр M і Q в однопрогоновій балці:
 а – розрахункова схема балки; б – епюра M ; в – епюра Q

Спочатку визначимо опорні реакції. Припустимо, що вертикальні опорні реакції R_A і R_B спрямовані нагору. Горизонтальна реакція в шарнірно-нерухомій опорі А дорівнює нулю, тому що зовнішнє навантаження перпендикулярне до осі балки. Тому на рис. 1.18, а горизонтальна реакція не показана.

Складемо рівняння рівноваги – рівняння моментів щодо опор (точок А і В) для того, щоб реакції R_A і R_B визначити незалежно одну від одної.

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot 6 - 100 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 1,5 + 35 = 0;$$

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 6 - 35 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 + 100 \cdot 2 = 0.$$

Звідси

$$R_A = 150 \text{ кН} \quad \text{і} \quad R_B = 40 \text{ кН}.$$

Додатні знаки опорних реакцій, отримані з розв'язання цих рівнянь, вказують на те, що їхній дійсний напрямок співпав із припущеним. Далі слід обов'язково перевірити правильність визначення опорних реакцій, склавши таке рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0: \quad 150 + 40 - 100 - 10 \cdot 9 = 0.$$

Отже, реакції знайдені правильно.

Відповідно до характеру навантаження розіб'ємо балку на три ділянки (рис. 1.18, а). Для складання виразів для M і Q застосуємо метод перерізів. Розсічемо балку в довільному перерізі на кожній ділянці і роздивимося на ділянках I і II рівновагу лівої частини (вісь X спрямована вправо, початок координат у точці С), а на ділянці III рівновагу правої частини (вісь X спрямована вліво, початок координат у точці D).

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

ділянка I $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}:$

$$M_1 = -100 \cdot x_1; \quad Q_1 = -100;$$

ділянка II $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 8 \text{ м}:$

$$M_2 = -100 \cdot x_2 + 150(x_2 - 2) - \frac{10(x_2 - 2)^2}{2};$$

$$Q_2 = -100 + 150 - 10(x_2 - 2);$$

ділянка III $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}:$

$$M_3 = -35 - \frac{10x_3^2}{2}; \quad Q_3 = 10 \cdot x_3.$$

Згинальний момент на ділянці I змінюється за лінійною залежністю. Тому для побудови епюри M на цій ділянці достатньо обчислити значення M на початку і кінці ділянки: при $x_1 = 0$ $M = 0$; при $x_1 = 2 \text{ м}$ $M = -200 \text{ кНм}$. Потім, відклавши ці ординати, з'єднуємо прямою лінією. На ділянці II згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю (залежить від X у другому ступені). Для побудови епюри M слід визначити значення згинального моменту у трьох перерізах: на початку і наприкінці ділянки, а також у перерізі, де $Q = 0$, тому що тут момент досягає екстремального значення (максимуму або мінімуму). Останнє твердження доводиться нижче.

Обчислимо значення M на початку і кінці ділянки: при $x_2 = 2 \text{ м}$ $M = -200 \text{ кНм}$; при $x_2 = 8 \text{ м}$ $M = -80 \text{ кНм}$. Визначимо переріз, де $Q = 0$. Для цього вираз поперечної сили Q_2 прирівнюємо до нуля:

$$Q_2 = -100 + 150 - 10(x_2 - 2) = 0,$$

звідси $x_2 = 7 \text{ м}$.

Знайдемо значення M в цьому перерізі:

$$M_2 = -100 \cdot 7 + 150(7 - 2) - \frac{10(7 - 2)^2}{2} = -75 \text{ кНм}.$$

Відклавши обчислені значення згинальних моментів, проведемо через них квадратну параболу з вершиною в перерізі $x_2 = 7 \text{ м}$ (тут дотична до епюри M паралельна базисній лінії). Зауважимо, що за відсутності перерізу, в котрому $Q = 0$ і $M = M_{\text{екст}}$, визначають значення моменту посередині ділянки.

На третій ділянці згинальний момент змінюється за квадратичною залежністю. Переріз, де $Q=0$, знаходиться у точці D. Значення згинального моменту при $x_3=0$ $M_3=-35$ кНм; при $x_3=3$ м $M_3=-80$ кНм. Відклавши знайдені ординати, проводимо через них квадратну параболу з вершиною в перерізі D. Епюра згинальних моментів показана на рис. 1.18, б. Поперечна сила на ділянці I постійна і тому епюра Q являє собою пряму лінію, яка паралельна базисній лінії.

На ділянці II поперечна сила змінюється за лінійною залежністю (залежить від X у першому ступені). Тому для побудови епюри Q на цій ділянці достатньо обчислити значення Q на початку і кінці ділянки: при $x_2=2$ м $Q_2=50$ кН; при $x_2=8$ м $Q_2=-10$ кН.

На третій ділянці поперечна сила також, як і на другій ділянці, змінюється за лінійною залежністю. Значення Q на початку і кінці ділянки: $x_3=0$ $Q_3=0$; $x_3=3$ м $Q_3=30$ кН.

Епюра поперечних сил показана на рис. 1.18, в.

Розглянемо ще один приклад побудови епюр M і Q для балки, завантаженої нерівномірно розподіленим навантаженням (рис. 1.19).

Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: & R_A \cdot \ell - \frac{q\ell}{2} \frac{\ell}{3} = 0; \\ \sum M_A = 0: & R_B \cdot \ell - \frac{q\ell}{2} \frac{2\ell}{3} = 0,\end{aligned}$$

звідси
$$R_A = \frac{q\ell}{6}, R_B = \frac{q\ell}{3}.$$

При визначенні опорних реакцій розподілене навантаження було замінено рівнодіючою, що дорівнює площі цього навантаження (площі трикутника) і прикладена в її центрі ваги.

Перевіримо правильність визначення реакцій:

$$\sum Y = 0: \frac{q\ell}{6} + \frac{q\ell}{3} - \frac{q\ell}{2} = 0.$$

Отже, опорні реакції знайдені правильно.

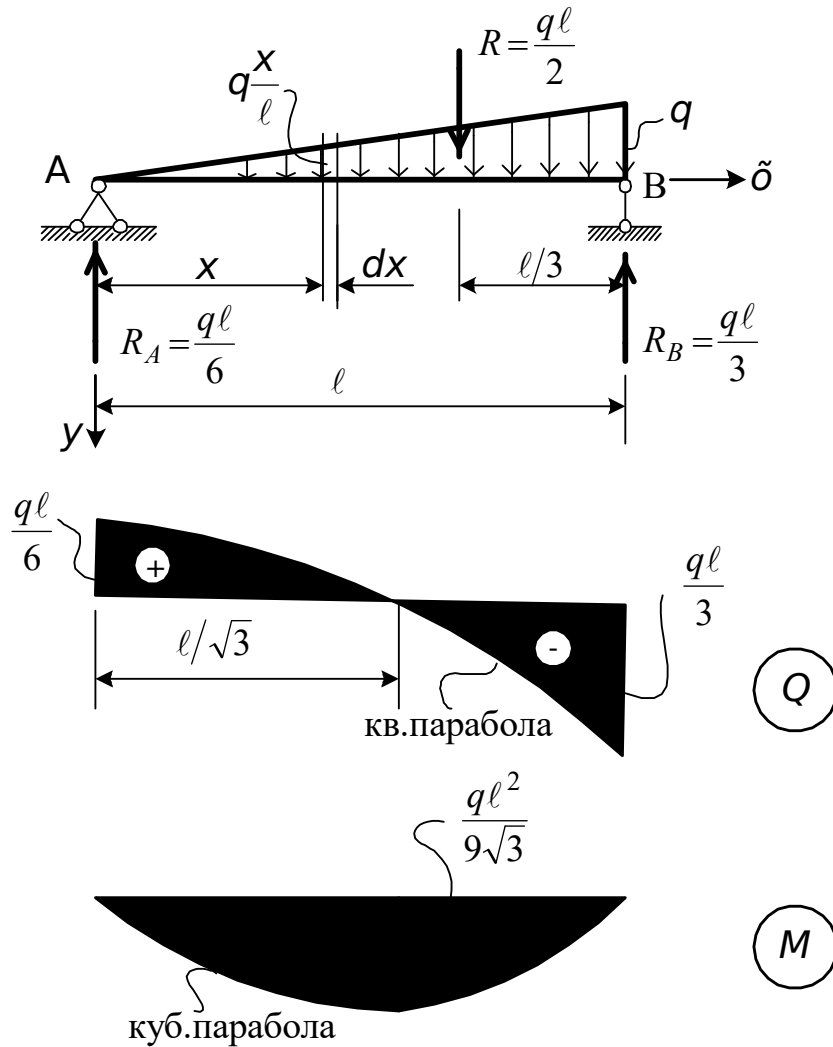


Рис. 1.19. Епюри M і Q у балці, завантаженій нерівномірним навантаженням

Балка, яка розглядається, має одну ділянку. Складемо вирази Q і M , використовуючи метод перерізів. Для довільного перерізу x запишемо вирази Q і M , розглядаючи рівновагу лівої відсіченої частини балки:

$$Q = \frac{q\ell}{6} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right);$$

$$M = \frac{q\ell}{6} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} \cdot \frac{x}{3} = \frac{qx}{6} \left(\ell - \frac{x^2}{\ell} \right).$$

Таким чином, поперечна сила змінюється за квадратичною залежністю, а згинальний момент за кубічною.

Побудуємо епюру Q , для цього обчислимо значення:

$$\text{при } x = 0 \quad Q = \frac{q\ell}{6}; \quad \text{при } x = \ell \quad Q = -\frac{q\ell}{3}.$$

Через них проведемо квадратичну параболу, звернену опуклістю нагору, тому що в перерізі А ($x = 0$) знаходиться її вершина.

Побудуємо епюру M . Визначимо значення M на початку і кінці ділянки:

при $x=0$ $M=0$, при $x=l$ $M=0$.

На цій ділянці є характерний переріз, де $Q=0$ і $M=M_{\text{екст}}$.

Знайдемо його: $Q = \frac{q}{6} \left(l - \frac{3x^2}{l} \right) = 0$. Звідси, розв'язуючи квадратне рівняння, знайдемо $x = l/\sqrt{3}$.

Визначимо момент у цьому перерізі: $M = M_{\text{екст}} = \frac{q l^2}{9\sqrt{3}}$.

За обчисленими значеннями згинальних моментів проводимо кубічну параболу з вершиною при $x = l/\sqrt{3}$ (дотична до епюри M в цьому перерізі паралельна базисній лінії).

Між зовнішнім навантаженням q , поперечною силою Q і згинальним моментом є важливі диференціальні залежності. Установимо їх. На ділянці балки, навантаженій суцільним навантаженням, проведемо два перерізи на відстанях X і $x + dx$ від лівої опори (рис. 1.19). Виділимо елемент балки довжиною dx . Дію лівої відкинutoї частини балки на елемент замінимо поперечною силою Q і згинальним моментом, а дію правої відкинutoї частини – силою $Q + dQ$ і моментом $M + dM$. Тут dQ і dM – приріст поперечної сили і згинального моменту на елементі dx . Припустимо, що поперечні сили і згинальні моменти додатні. Крім цих сил, на елемент діє зовнішнє розподілене навантаження q , що унаслідок малості dx можна вважати рівномірно розподіленим. Під дією вказаних сил елемент знаходиться в рівновазі (рис. 1.20).

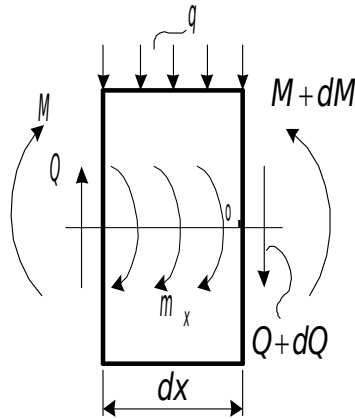


Рис. 1.20. До виведення диференціальних залежностей між q , Q і M

Складемо для елемента два рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0: \quad -Q + q dx + (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0: \quad M + Q dx - q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

З першого рівняння після перетворень одержимо

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \tag{1.4}$$

тобто перша похідна від поперечної сили за абсцисою X дорівнює інтенсивності суцільного навантаження в перерізі з оберненим знаком.

З другого рівняння, нехтуючи членом $q \frac{dx^2}{2}$ як величиною другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.5)$$

Перша похідна від згинального моменту за абсцисою X дорівнює поперечній силі в тому самому перерізі.

Залежність (1.4) з урахуванням (1.5) може бути записана у вигляді

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (1.6)$$

Друга похідна від згинального моменту за поздовжньою координатою X дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження, взятій з оберненим знаком.

Якщо до балки на ділянці, де виділяється елемент dx , прикладене зовнішнє розподілене моментне навантаження m (на рис. 1.20 показане пунктиром), то

$$\frac{dM}{dx} = Q + m. \quad (1.7)$$

На підставі отриманих диференціальних залежностей (1.4), (1.5) сформулюємо основні правила, які допомагають при побудові епюр M і Q .

1. На ділянці, де немає розподіленого навантаження, поперечна сила постійна, згинальний момент змінюється за лінійною залежністю, причому тангенс кута нахилу α епюри M дорівнює силі Q (рис. 1.18, ділянка СА). В окремому випадку може бути $q = 0$ і $Q = 0$, тоді $M = \text{const}$.

2. На ділянці, де є рівномірно розподілене навантаження, поперечна сила змінюється за лінійною залежністю (тангенс кута нахилу β епюри Q дорівнює q), а згинальний момент – за квадратичною залежністю, у якій опуклість звернена у бік дії розподіленого навантаження q (рис. 1.18, ділянки АВ і АД).

Якщо на цій ділянці поперечна сила в одному із перерізів дорівнює нулю ($Q = M' = 0$), то згинальний момент у цьому перерізі приймає екстремальне значення – максимум або мінімум (рис. 1.18, б, переріз при $x = x_m$ на ділянці АВ і переріз D), тут дотична до епюри M горизонтальна.

3. У перерізі, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q буде стрибок, що дорівнює значенню цієї сили і спрямований у той самий бік (при побудові епюри зліва направо). На рис. 1.18, в – це перерізи С, А, В. Епюра M в цьому перерізі буде мати перелом, спрямований у бік дії сили F (рис. 1.18, б, перерізи С, А, В).

4. У перерізі, де прикладений зосереджений згинальний момент, на епюрі M буде стрибок, що дорівнює значенню моменту M ; на епюрі Q змін не буде. При цьому напрямок стрибка буде униз (при побудові епюри зліва направо), якщо зосереджений момент спрямований за годинниковою стрілкою, і нагору, якщо момент спрямований проти годинникової стрілки (рис. 1.18, б, переріз D, епюра на ділянці BD побудована справа наліво).

5. На ділянці, де є розподілене навантаження, що змінюється за лінійним законом, поперечна сила змінюється за квадратичною залежністю, а згинальний момент – за кубічною (рис. 1.19). Опуклість епюри Q встановлюється залежно від характеру навантаження з використанням (1.4). Опуклість епюри M звернена у бік дії розподіленого навантаження (див. рис. 1.19).

1.7.4. Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, стержні котрої (стійки і ригелі) у всіх або деяких вузлах жорстко сполучені між собою, називається рамою (див. п. 1.5, рис. 1.7, г). Вісь таких систем являє собою ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині, то її називають плоскою. Тут ми будемо розглядати тільки плоскі рами, навантажені в площині ламаної лінії. Тоді внутрішні зусилля, які виникають в якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту M , поперечної сили Q і поздовжньої сили N . Поняття про згинальний момент залишається таким самим. Визначення поперечної сили розширюється, а саме: оскільки у ламаного бруса сили не завжди перпендикулярні до осі, то поперечною силою будемо називати проекцію всіх сил, прикладених до лівої (або правої) частини бруса, на нормаль до осі бруса в тому перерізі, для якого визначається поперечна сила.

Поздовжньою силою будемо називати проекцію всіх сил, прикладених до лівої (або правої) частини бруса, на дотичну до його осі. Поняття «зліва», «справа», «донизу», «угору» при розгляді вертикальних елементів системи залежить від спостерігача. Тоді правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил залишається таким самим (див. рис. 1.17). Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стержня в перерізі, що розглядається, і від'ємною, якщо вона викликає стискання (див. п. 1.7.1).

Розглянемо приклад побудови епюр M , Q , N у рамі (рис. 1.21).

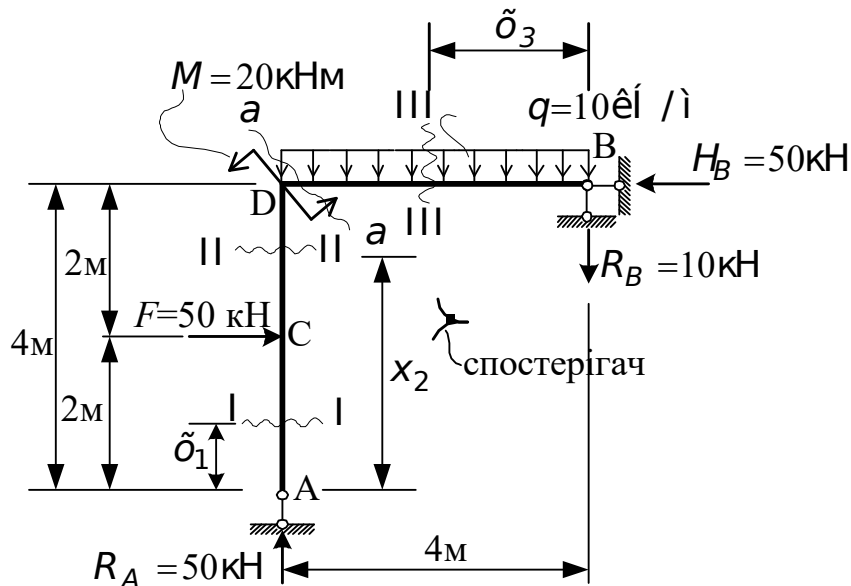


Рис. 1.21. Розрахункова схема рами

Розділимо раму на три ділянки: AC, CD, DB. На кожній ділянці в довільному місці проведемо переріз (рис. 1.21) і складемо рівняння рівноваги для відсічених частин рами.

На ділянці AC ($0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$) у перерізі розглядаємо рівновагу лівої частини рами (спостерігач розташований справа від стояка AD). Одержимо

$$N_1 = -R_A = -50\text{кН}, \quad Q_1 = 0, \quad M_1 = 0.$$

На ділянці CD ($2\text{м} \leq x_2 \leq 4\text{м}$) у перерізі II-II, розглядаючи рівновагу лівої частини рами, маємо

$$N_2 = -R_A = -50\text{кН}, \quad Q_2 = -50\text{кН}, \quad M_2 = -50(x_2 - 2).$$

На ділянці DB ($0 \leq x_3 \leq 4\text{м}$) у перерізі III-III, розглядаючи рівновагу правої частини рами, знайдемо

$$N_3 = -50\text{кН}, \quad Q_3 = 10 + 10 \cdot x_3; \quad M_3 = -10 \cdot x_3 - 10 \frac{x_3^2}{2}.$$

За цими виразами побудуємо епюри поздовжніх і поперечних сил, згинальних моментів (рис. 1.22, а, б, в).

Побудову епюри слід перевірити, використовуючи диференціальні залежності між q , Q і M . На підставі залежності (1.4) на ділянці BD

$$\frac{dQ}{dx_3} = 10.$$

Як впливає із залежності (1.5), на цій самій ділянці

$$\frac{dM}{dx_3} = -(10 + 10x_3).$$

Розбіжність знаків пояснюється тим, що епюра M і Q на цій ділянці будувалася справа наліво.

Крім перевірок із використанням диференціальних залежностей, необхідно перевірити рівновагу вузлів рами, тобто частин рами, отриманих проведенням перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точки з'єднання стержнів, і окремих її частин.

Розглянемо рівновагу вузла D (рис. 1.22, г), приклавши в перерізах внутрішні сили відповідно до побудованих епюр N , M , Q . Навіть не укладаючи рівнянь рівноваги, бачимо, що вузол D знаходиться в рівновазі.

Проведемо переріз а-а (рис. 1.21) і розглянемо рівновагу лівої частини рами (рис. 1.22, д). До цієї частини рами прикладемо зовнішні навантаження і в місці перерізу поздовжню, поперечну сили, згинальний момент відповідно до епюр N , Q , M .

Складемо рівняння рівноваги для відсіченої частини:

$$\sum X = 0: 50 - 50 = 0; \quad \sum Y = 0: 50 - 50 = 0; \quad \sum M_D = 0: 50 \cdot 2 + 20 - 120 = 0.$$

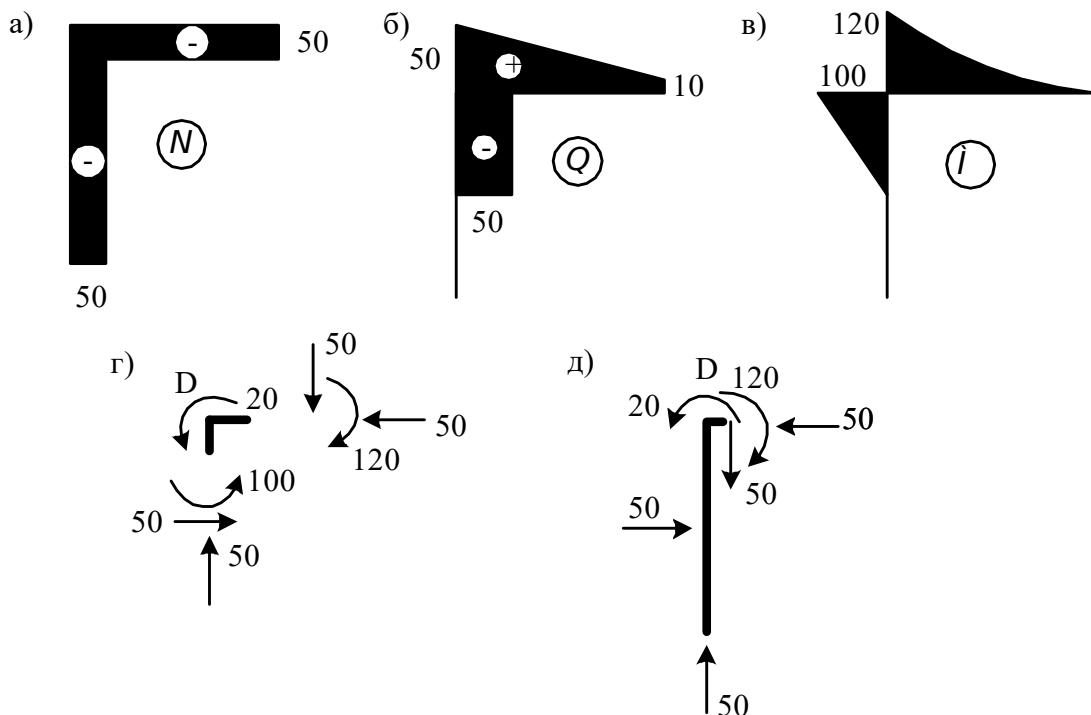


Рис 1.22. Епюри внутрішніх зусиль

Отже, частина рами, що розглядається, знаходиться в рівновазі.

1.7.5. Внутрішні зусилля в криволінійних стержнях

У поперечних перерізах криволінійного стержня виникають ті самі внутрішні зусилля, що й у рамі. Правила знаків і правила побудови епюр N , Q , M залишаються такими самими. Проте, на відміну від рами, що складена із системи прямолінійних стержнів, у криволінійному стержні поздовжня сила буде визначатися як сума проєкцій усіх зовнішніх сил, прикладених до частини, що залишилася, на дотичну до осі стержня, а поперечна сила – як сума проєкцій тих самим сил на нормаль до його осі. Покажемо це на прикладі (рис. 1.23).

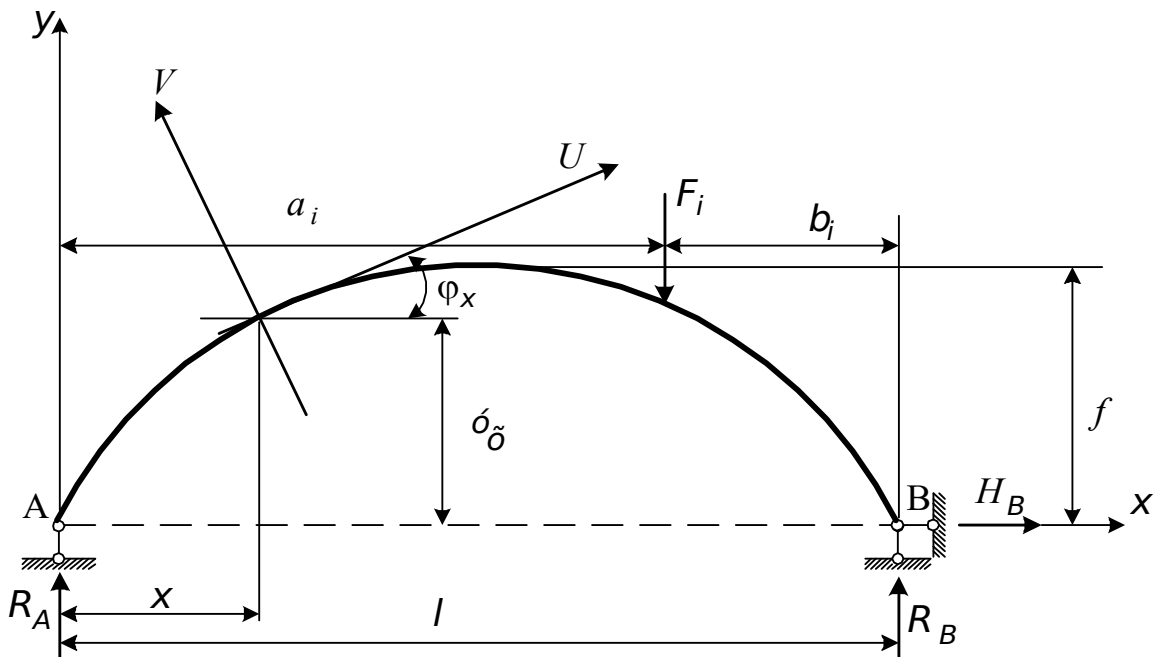


Рис. 1.23. Розрахункова схема криволінійного бруса

Обмежимося спочатку випадком вертикального навантаження. На рис. 1.23 показана сила F_i , прикладена в довільному перерізі бруса на відстані a_i від лівої опори і b_i – від правої. Розподілене навантаження, якщо таке діє на брус, приводиться до рівнодіючої $F_i = q_i c_i$, де c_i – протяжність розподіленого навантаження інтенсивністю q_i .

Для визначення вертикальних опорних реакцій R_A і R_B складемо рівняння рівноваги вигляду $\sum M_A = 0$ і $\sum M_B = 0$. У результаті одержимо

$$R_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i ; \quad R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

де n – число зосереджених сил.

Отримані формули показують, що реакції R_A і R_B нічим не відрізняються від тих вертикальних реакцій, що утворилися б, якби кривий брус був замінений балкою, обіпертою в точках A і B.

Горизонтальна опорна реакція у точці B дорівнює нулю. Це впливає

з рівняння $\sum F_x = 0$.

У довільному перерізі X кривого бруса згинальний момент, поперечна і поздовжня сили відповідно дорівнюють

$$M_x = M_x^0, \quad Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x, \quad N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x,$$

де M_x^0 , Q_x^0 – відповідно згинальний момент і поперечна сила від заданого вертикального навантаження в перерізі X у балці з прямою віссю, обіпертій в точках A і B ;

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_x}}; \quad \sin \varphi_x = \frac{tg \varphi_x}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi_x}};$$

$tg \varphi_x = \frac{dy}{dx}$ – похідна функції y , що описує вісь балки.

Якщо вісь кривого бруса окреслена за квадратною параболою:

$$y = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - x)x,$$

то
$$\frac{dy}{dx} = tg \varphi_x = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2x).$$

Якщо рівняння осі арки являє собою коло:

$$y = \sqrt{(2R - x)x},$$

то
$$\frac{dy}{dx} = tg \varphi_x = \frac{R - x}{\sqrt{(2R - x)x}}.$$

У криволінійних стержнях, окреслених по дузі окружності, положення довільного перерізу доцільно визначати за допомогою полярної системи координат. Тоді вирази внутрішніх зусиль будуть подані як функції кута α (рис. 1.24, а).

Розсічемо стержень у перерізі I-I під довільним кутом α і відкинемо праву його частину (рис. 1.24, б). Врівноважимо частину, що залишилася, внутрішніми зусиллями N , Q , M додатного напрямку. Запишемо вирази цих внутрішніх зусиль:

$$\begin{aligned} N &= F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha; \\ Q &= F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha; \\ M &= F_1 R \sin \alpha + F_2 (R - R \cos \alpha). \end{aligned}$$

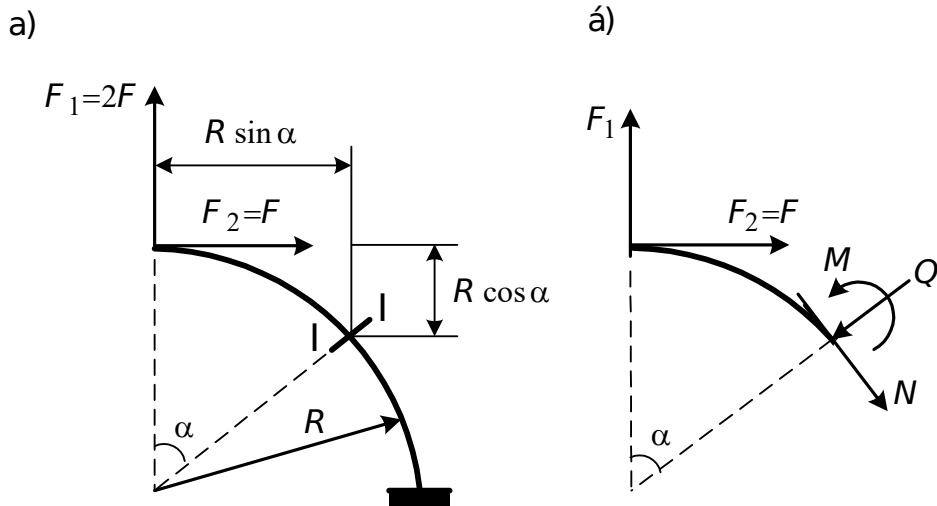


Рис. 1.24. До визначення зусиль у кривому стержні, окресленому по дузі кола

Обчислимо значення N , Q , M при різних кутах α :

при $\alpha = 0$ $N = -F$; $Q = 2F$; $M = 0$;
 при $\alpha = 45^\circ$ $N = 0,7F$, $Q = 2,1F$, $M = 1,7FR$;
 при $\alpha = 90^\circ$ $N = 2F$, $Q = F$, $M = 3FR$.

Відкладаючи отримані значення внутрішніх зусиль по нормалі до осі (тобто по радіусу), побудуємо епюри N , Q і M (рис. 1.25).

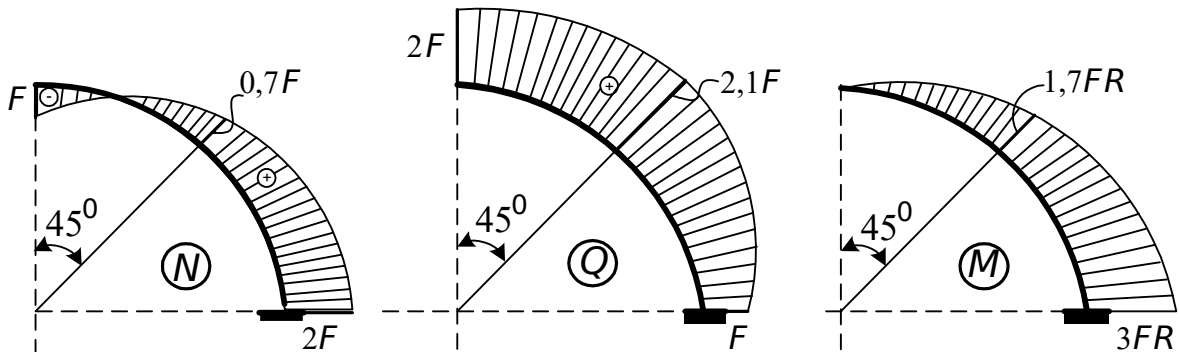


Рис. 1.25. Епюри N , Q , M у кривому стержні, окресленому по дузі окружності

Між зовнішнім навантаженням, поздовжньою, поперечною силою і згинальним моментом у стержні кругового обрису є диференціальні залежності. Для доказу цього роздивимося рівновагу елемента АВ, виділеного з кривого стержня двома нескінченно близькими перерізами під кутами α і $\alpha + d\alpha$ (рис. 1.26).

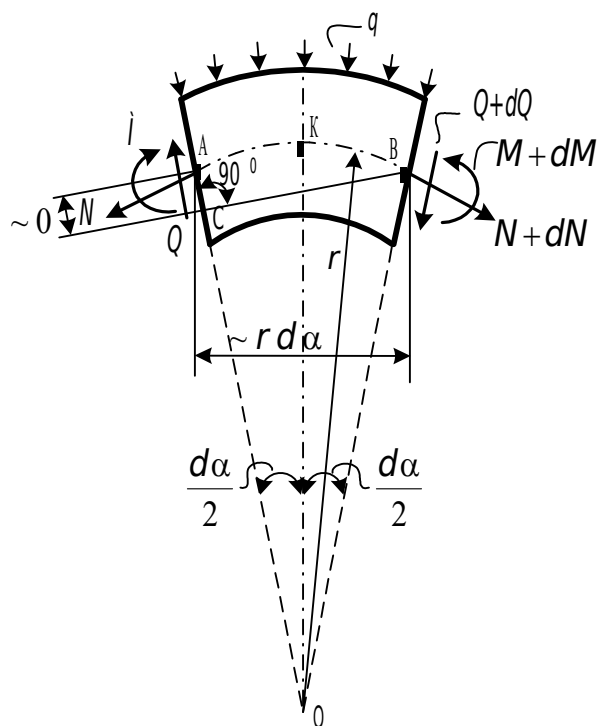


Рис. 1.26. До визначення диференціальних залежностей між N , Q , M у кривому стержні

У перерізах, що обмежують елемент, діють поздовжні сили N і $N + dN$, поперечні сили Q і $Q + dQ$, згинальні моменти M і $M + dM$, що замінюють дію відкинутих частин стержня. Елемент навантажений рівномірно розподіленим навантаженням. При виведенні будемо користуватися сформульованим раніше правилом знаків для N , Q і M .

Складемо рівняння рівноваги

$$\sum N_{AB} = 0:$$

$$Q \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cos \frac{d\alpha}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Ураховуючи, що $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ і $\cos \frac{d\alpha}{2} = 1$, одержимо

$$\frac{dN}{d\alpha} = Q; \quad (1.8)$$

$$\sum N_{OK} = 0:$$

$$Q \cos \frac{d\alpha}{2} - N \sin \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\alpha}{2} - qr d\alpha = 0.$$

Звідси

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -N - qr. \quad (1.9)$$

З рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0: Q r d\alpha + M - (M + dM) - qr d\alpha \frac{rd\alpha}{2} = 0$$

після найпростіших перетворень, відкидаючи величини другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{d\alpha} = Qr. \quad (1.10)$$

Залежності (1.8), (1.9), (1.10) дозволяють перевіряти правильність складання виразів для N , Q і M при згинанні кругового криволінійного стержня. Так, неважко переконатися, що вирази для N , Q , M у прикладі (рис. 1.24) складені правильно:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\alpha} &= F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha = Q, \\ \frac{dQ}{d\alpha} &= -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha = -N \text{ (розподілене навантаження відсутнє)}, \\ \frac{dM}{d\alpha} &= F_1 R \cos \alpha + F_2 R \sin \alpha = QR. \end{aligned}$$

Епюри N , Q , M для криволінійних стержнів мають такі властивості, що випливають із формул (1.8), (1.9), (1.10):

- 1) у перерізах, де $Q = 0$ на епюрах M і N екстремуми, тобто дотичні до епюр паралельні дотичним до осі стержня в цих перерізах;
- 2) у перерізах, де $N = 0$, на епюрі Q екстремуми.

1.8. Напруження і деформації

1.8.1. Компоненти напружень

У підрозділі 1.7 було показано, що внутрішні зусилля діють у всіх точках перерізу (рис. 1.10) і являють собою в загальному випадку нерівномірно розподілене навантаження, що характеризується в кожній точці числовими значеннями і напрямком вектора інтенсивності.

Розглянемо нескінченно малий елемент площі перерізу dA (рис. 1.27). У силу малості елемента можна вважати, що внутрішні зусилля, прикладені до його різних точок, однакові за величиною і напрямком. Рівнодіюча їх $d\bar{R}$ буде проходити через центр ваги елемента dA .

Проекціями $d\bar{R}$ на осі X , Y , Z будуть елементарна поздовжня сила dN і елементарні поперечні сили dQ_y і dQ_z .

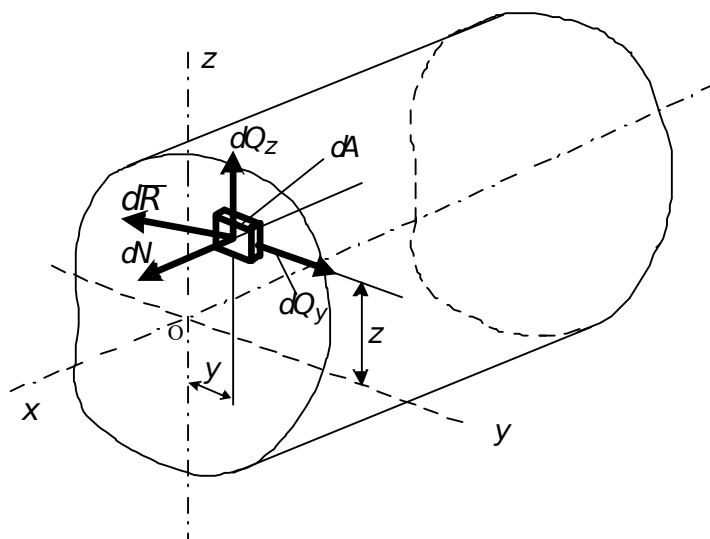


Рис. 1.27. Нормальні і дотичні напруження в точці

Якщо розділити величини dN , dQ_y і dQ_z на площу dA , одержимо величини поздовжніх і поперечних сил, що припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (1.11)$$

Ці величини називають напруженнями в точці x, y, z перерізу стержня, причому σ – нормальне напруження, τ – дотичне. Напруження вимірюються у Н/м^2 , Н/см^2 , кН/м^2 , кН/см^2 .

Таким чином, напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці перерізу, який розглядається. Встановимо загальні залежності між σ і τ , з одного боку, і N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x – з іншого. Виходячи з визначення для зусиль і моментів (п. 1.7, рис. 1.11) і з огляду на формули (1.11) знайдемо

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma dA, \quad (1.12)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_y dA, \quad (1.13)$$

$$Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_z dA, \quad (1.14)$$

$$M_y = \int_A z dN = \int_A \sigma z dA, \quad (1.15)$$

$$M_z = \int_A y dN = \int_A \sigma y dA, \quad (1.16)$$

$$M_x = \int_A (y dQ_z - z dQ_y) = \int_A (y \tau_z - z \tau_y) dA. \quad (1.17)$$

Отримані рівняння будемо називати статичними рівняннями або інтегральними рівняннями рівноваги.

Якщо взяти дуже малий елемент об'єму у вигляді куба поблизу точки O_1 (рис. 1.27) із сторонами, які паралельні осям координат, то позначення для складових напруження, що діють по гранях цього елемента, і додатні напрямки їх будемо приймати такими, як показано на рис. 1.28. Оскільки розміри виділеного елемента нескінченно малі, то ці напруження відрізняються одне від одного на нескінченно малі, якими можна знехтувати для задачі, яка розглядається.

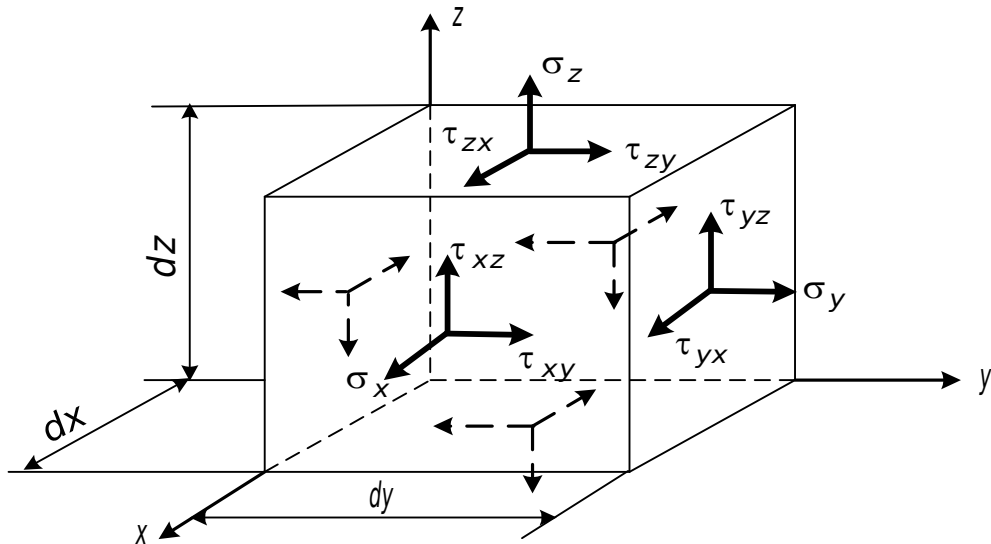


Рис. 1.28. Нормальні і дотичні напруження в елементі об'єму

Нормальні напруження позначені буквою σ з індексом, що відповідає позначенню осі: σ_x , σ_y , σ_z . Нормальне напруження додатне, коли воно викликає розтягання, і від'ємне, коли воно викликає стискання.

Дотичні напруження позначені буквою τ з двома індексами. Перший індекс позначає напрямок нормалі до площадки, яка розглядається, другий індекс – напрямок складових напружень:

$$\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{yz}.$$

За додатні напрямки складового дотичного напруження, що діє на будь-якій грані елементарного кубика, приймається напрямок осей координат, якщо розтягуюче напруження по тій самій грані має напрямок, що збігається з додатним напрямком відповідної осі. Якщо розтягуюче напруження має протилежний додатній осі напрямок, то за додатний напрямок складового дотичного напруження слід взяти обернений напрямок осі.

Візьмемо момент сил, що діють на елемент, відносно осі X (див. у п. 1.7 основні правила складання рівнянь рівноваги). У результаті одержимо

$$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

звідси $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Аналогічно, узявши момент сил щодо осей Z і Y , знайдемо

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}.\end{aligned}$$

Рівності

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= \tau_{yz}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}\end{aligned}\tag{1.18}$$

називаються законом парності (взаємності) дотичних напружень і читаються так: по двох взаємно перпендикулярних площадках складові дотичного напруження, перпендикулярні до лінії перетинання цих площадок, рівні між собою.

Напруження, що діють на елемент об'єму (рис. 1.28), утворюють так званий тензор напружень

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.\tag{1.19}$$

Тут перший стовпчик складається з компонент напружень, що діють на площадках, нормальних до осі X , другий – до осі Y , третій – до осі Z . Якщо заданий тензор напружень, то напружений стан у точці цілком визначений.

1.8.2. Складові деформації

При дослідженні деформацій пружного тіла ми будемо виходити з допущення, що наявним є достатнє число зв'язків для того, щоб запобігти руху тіла як вільного твердого тіла. Так що ніякі переміщення часток тіла неможливі без деформації його.

Ми будемо розглядати (див. п. 1.6) тільки малі деформації, що зустрічаються в інженерних спорудах.

Малі переміщення часток деформованого тіла звичайно розкладаються на складові u , v , w , які паралельні відповідним осям координат (рис. 1.29). Припустимо, що ці складові безперервно змінюються за об'ємом тіла.

Розглянемо нескінченно малий елемент dx , dy , dz пружного тіла (рис. 1.29). Якщо тіло піддається деформації і величини u , v , w є складовими переміщення точки O , то переміщення в напрямку осі X нескінченно близької точки A , що лежить на осі X , дорівнює $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, тому що з приростом координати x функція u одержує приріст $\frac{\partial u}{\partial x} dx$. Тому приріст довжини елемента OA внаслідок деформації дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x} dx$.

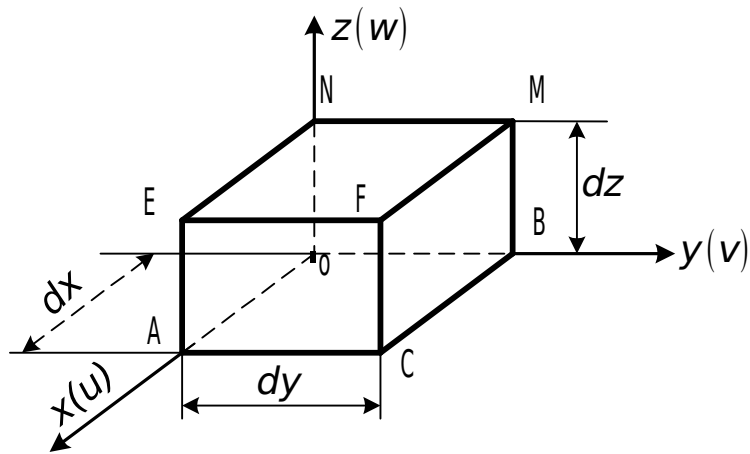


Рис. 1.29. До виведення залежностей між лінійними деформаціями і переміщеннями

Отже, відносне подовження в напрямку осі X дорівнює

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Аналогічно,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.22)$$

Крім лінійних деформацій ε_x , ε_y , ε_z , тіло відчуває і кутові деформації. Розглянемо спотворення кута між елементарними відрізками OA і OB (рис. 1.30). Якщо u і v є переміщеннями точки O в напрямку осей X і Y , то переміщення точки A в напрямку осі Y і точки B в напрямку осі X будуть відповідно $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ і $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Внаслідок цих переміщень новий напрямок $O'A'$ буде складати зі своїм початковим напрямком вказаний на кресленні (рис. 1.30) кут $\frac{\partial v}{\partial x}$. Так само, напрямок $O'B'$ буде складати із напрямком OB малий кут $\frac{\partial u}{\partial y}$. Звідси випливає, що попередньо прямиий кут AOB між елементами OA і OB зменшиться:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.23)$$

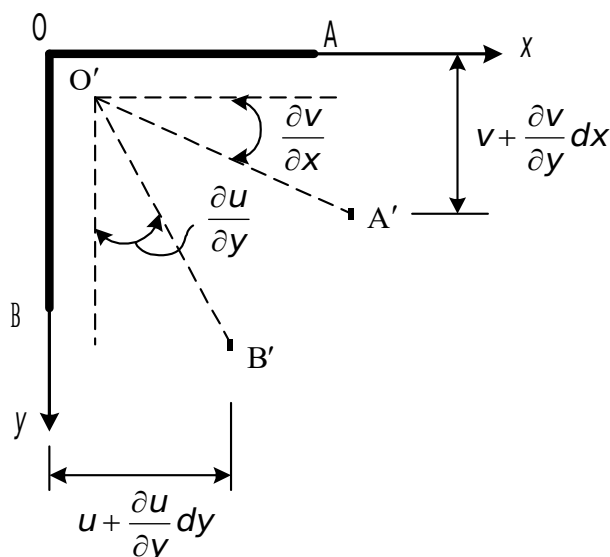


Рис. 1.30. До виведення залежностей між кутовими деформаціями і переміщеннями

Це і є деформація зсуву між площинами xz і yz .

Деформації зсуву між площинами xu і xz ; yu і yz

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (1.24)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.25)$$

Як і лінійні деформації (1.20) – (1.22), кути зсуву дуже малі і мають порядок $\gamma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$. Отримані відносні деформації в точці зводимо в таблицю

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5 \gamma_{xy} & 0,5 \gamma_{xz} \\ 0,5 \gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0,5 \gamma_{yz} \\ 0,5 \gamma_{zx} & 0,5 \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

у якій кути зсуву з метою аналогії з тензором напружень (1.19) поділені навпіл. Величини (1.26) кількісно визначають деформації матеріалу в околах точки і складають тензор деформацій.

1.8.3. Залежності між складовими напруження і складовими деформації

Експериментально встановлено, що для більшості матеріалів при малих деформаціях в пружній стадії зв'язок між деформаціями і напруженнями може бути прийнятий лінійним. Цей зв'язок був уперше указаний Гуком* для розтягання і стискання і називається законом Гука.

*Роберт Гук (1635-1705) – англійський природознавець, різносторонній вчений і винахідник. Сформульований ним закон звучав так: «Яке подовження, така сила» («Ut tensio sic vis»). У сучасному вигляді формула закону Гука має вигляд $\sigma = E \varepsilon$.

Уявимо елементарний прямокутний паралелепіпед із гранями, які паралельні осям координат, що зазнає дії нормального напруження σ_x , рівномірно розподіленого по двох протилежних гранях (рис. 1.31).

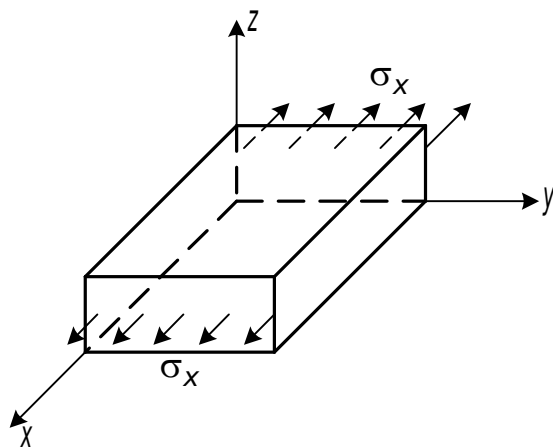


Рис. 1.31. До виведення узагальненого закону Гука: напрямок x

Досліди показують, що у випадку ізотропного матеріалу ці нормальні напруження не викликають ніякої зміни кутів елемента. Збільшення розмірів елемента в напрямку осі x на $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$ супроводжується поперечним звуженням $\varepsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ і $\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$.

Скористаємося принципом незалежності дії сил (див. п. 1.6.6) і розглянемо лінійні деформації, обумовлені нормальними напруженнями σ_y і σ_z (рис. 1.32).

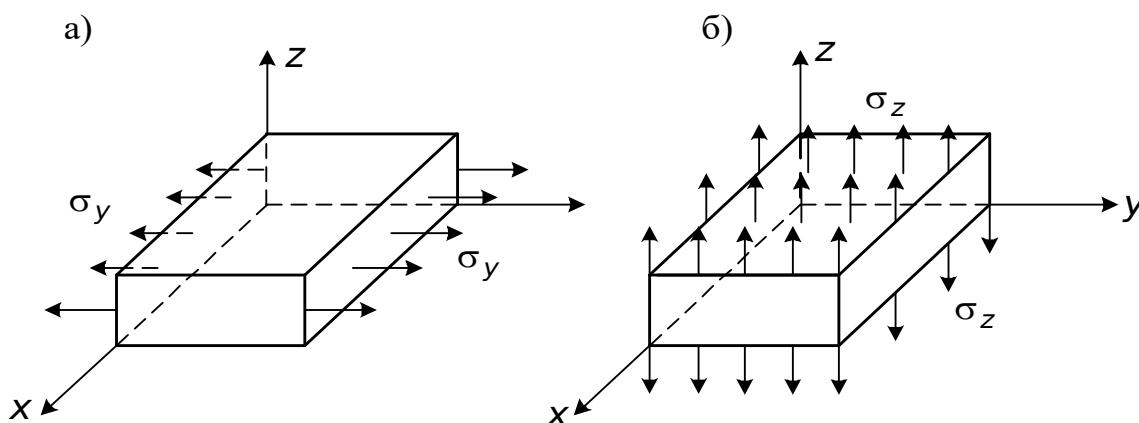


Рис. 1.32. До виведення узагальненого закону Гука: напрямки y, z

У результаті дії нормальних напружень σ_y (рис. 1.32, а) елемент подовжується в напрямку осі y на величину $\varepsilon'_y = \frac{\sigma_y}{E}$ і укорочується в напрямку осей x і z на $\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$, $\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$.

У результаті дії нормальних напружень σ_z (рис. 1.32, б) відбувається подовження в напрямку осі z $\varepsilon'_z = \frac{\sigma_z}{E}$ і укорочення в напрямку осей x і y :

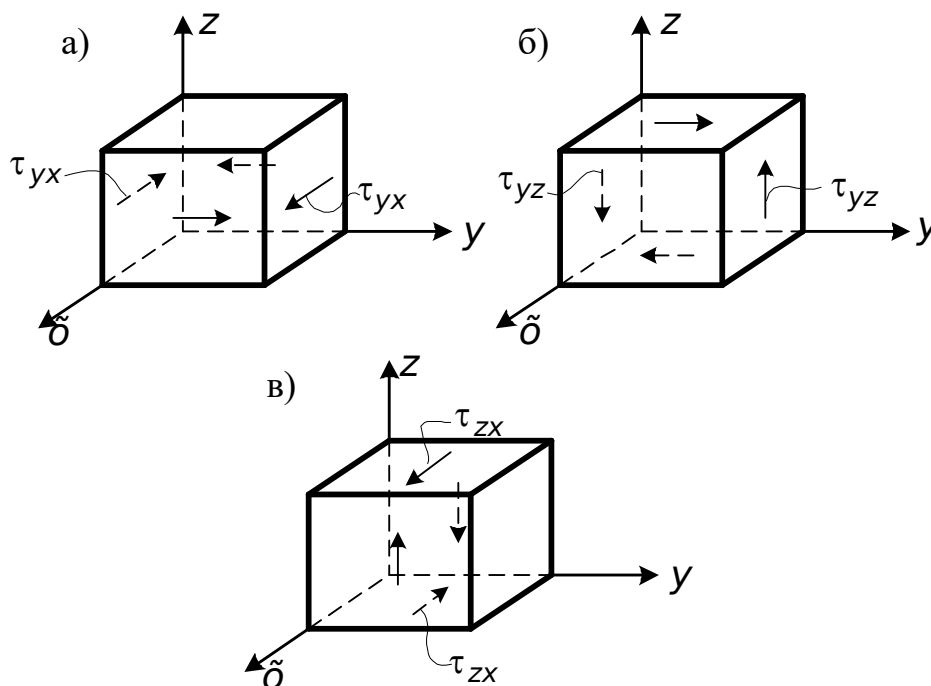
$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Складаючи деформації, викликані напруженнями σ_x , σ_y , σ_z , остаточно одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Отримані вирази (1.27) є аналітичними залежностями узагальненого закону Гука для ізотропного тіла. З цих формул очевидно, що залежність між напруженнями і деформаціями цілком визначається двома фізичними величинами, що характеризують властивості матеріалів: модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона* ν , що визначаються експериментально.

Тепер розглянемо дію дотичних напружень (рис. 1.33).



*Сімон Дені Пуассон (1781-1840) – видатний французький механік, фізик і математик.

Рис. 1.33. До виведення залежностей між дотичними напруженнями і зсувами

Дослідами встановлено, що зміна кута між будь-якими двома координатними осями залежить від складових напруження, які паралельні цим осям. Тому

$$\begin{aligned}\gamma_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{G}; \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{yz}}{G};\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Тут G – модуль зсуву:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.\tag{1.29}$$

Покажемо, що це дійсно так. Розглянемо деформацію прямокутного паралелепіпеда, коли $\sigma_y = -\sigma_z$, $\sigma_x = 0$ (рис. 1.34, а).

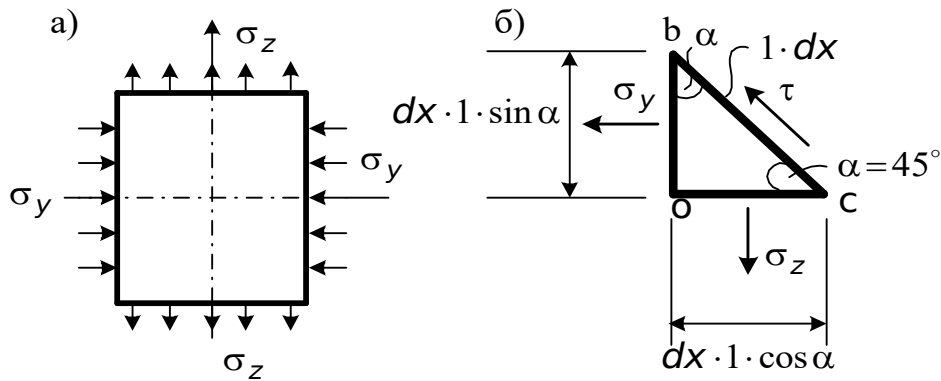


Рис. 1.34. До виведення залежності між E і G

Тоді

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\sigma_z(1+\nu)}{E};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}.$$

Виділимо із прямокутного паралелепіпеда елемент obc і розглянемо його рівновагу (рис. 1.34, б):

$$\sum F_{bc} = 0:$$

$$\tau \cdot dx + \sigma_y \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dx - \sigma_z \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dx = 0;$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z.$$

У процесі деформації кут α (рис. 1.34, б) буде змінюватися на малу величину $\frac{\gamma}{2}$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}.$$

Для того щоб була справедливою отримана рівність, необхідно, щоб модуль зсуву визначався за (1.29).

Залежність (1.29) підтверджується експериментально. Отримана формула (1.29) показує, що три постійні E , G і ν , які характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу, пов'язані між собою. Якщо знайти з випробувань дві з них, можна третю розрахувати за (1.29).

Розділ 2

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ СТЕРЖНІВ

У формули, що зв'язують напруження в перерізах стержнів із зовнішніми силами, як це буде встановлено надалі, крім площі поперечного перерізу, входять і деякі інші характеристики перерізів, що залежать від їхньої форми і розмірів. Цей розділ курсу і присвячений геометричним характеристикам плоских перерізів.

2.1. Статичний момент площі

Нехай дані переріз бруса площею A і вісь $Z-Z$, що лежить у площині цього перерізу (рис. 2.1).

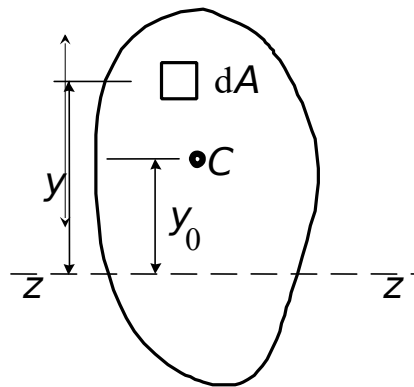


Рис. 2.1. До виведення формули для визначення статичного моменту площі перерізу

Виділимо елемент площі dA , розташований на відстані y від осі Z . Статичним моментом елементарної площадки dA відносно осі Z називається добуток цієї площадки на відстань y

$$dS_z = y \cdot dA.$$

Статичний момент усієї площі відносно осі Z дорівнює сумі статичних моментів елементарних площадок. Внаслідок того, що елементарних площадок нескінченно багато, суму заміняємо інтегралом, який візьмемо по всій площі перерізу:

$$S_z = \int_A y \cdot dA. \quad (2.1)$$

На підставі відомої з теоретичної механіки теореми про момент рівнодіючої сума статичних моментів елементарних площадок відносно якої-небудь осі дорівнює моменту всієї площадки відносно цієї осі, тобто добутку площі фігури на відстань від центра ваги до осі. Якщо для площі A відомо – y_0 відстань центра ваги C до осі $Z-Z$, то

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_0 \cdot A \quad (2.2)$$

Статичний момент може бути додатним, від'ємним або нульовим.

З рівності (2.2) очевидно, що статичний момент усієї площі перерізу відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу, дорівнює нулю. Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються центральними. У випадку складного поперечного перерізу, якщо площу його можна розбити на окремі прості фігури, статичний момент усієї площі можна одержати як суму статичних моментів цих простих фігур.

2.2. Центр ваги перерізу

Якщо переріз має вісь симетрії, то центр ваги знаходиться на цій осі. Якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги знаходиться в точці перетинання цих осей.

Для визначення положення центра ваги фігури, що не має осей симетрії, потрібно знайти його координати відносно довільно узятих осей і потім скористатися формулою (2.2). Наприклад, щоб знайти центр ваги C фігури, зображеної на рис. 2.2, візьмемо дві осі Z і Y , що співпадають з двома сторонами фігури, і будемо шукати координати z_0 і y_0 точки C відносно цих осей.

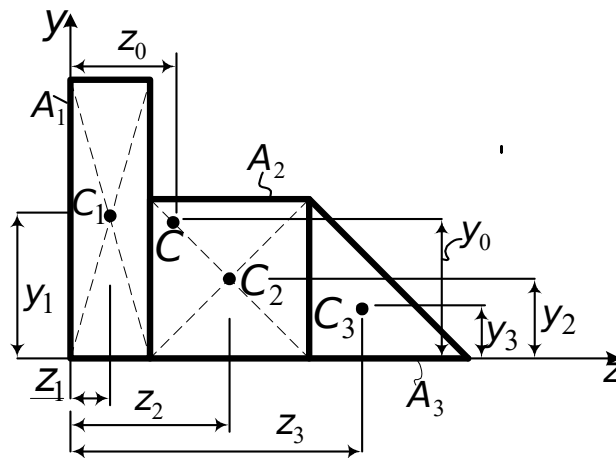


Рис. 2.2. До виведення формул для визначення координат центра ваги

Для цього розіб'ємо переріз на прості фігури, для яких положення центрів ваги C_1, C_2, C_3 відомо. Складемо статичний момент площі відносно осі Y . Це можна зробити двома засобами:

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3;$$

$$S_y = A \cdot z_0,$$

де

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Прирівняємо один до одного ці вирази:

$$Az_0 = A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3,$$

звідси знайдемо

$$z_0 = \frac{S_y}{A}. \quad (2.3)$$

Аналогічно,

$$y_0 = \frac{S_z}{A}. \quad (2.4)$$

Таким чином, щоб знайти положення центру ваги поперечного перерізу відносно заданих осей, потрібно скласти статичні моменти площі відносно цих осей і поділити їх на площу фігури.

2.3. Моменти інерції перерізів

Візьмемо довільний переріз площею A , віднесений до координатних осей Z і Y (рис. 2.3).

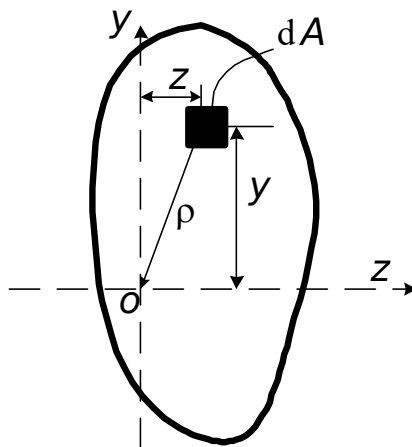


Рис. 2.3. До виведення формул для визначення моментів інерції

Виділимо елемент площі dA , розташований на відстані Y від осі Z і відстані Z від осі Y . Складемо добутки $dA \cdot y^2$ і $dA \cdot z^2$. Добуток $dA \cdot y^2$ називається моментом інерції елементарної площадки dA відносно осі Z . Аналогічно, $dA \cdot z^2$ – момент інерції площадки dA відносно осі Y .

Момент інерції всієї площі дорівнює сумі моментів інерції елементарних площадок:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad (2.5)$$

$$J_y = \int_A z^2 dA. \quad (2.6)$$

Отже, осьовим моментом інерції перерізу відносно якої-небудь осі називається інтеграл, узятий по всій площі перерізу від добутку елементарної площадки на квадрат відстані її до цієї осі.

Добуток площадки dA на її координати Z і Y називається відцентровим моментом інерції елементарної площадки відносно осей Z, Y :

$$J_{zy} = \int_A zy dA. \quad (2.7)$$

Добуток площадки dA на квадрат її відстані до точки O (полюса) називається полярним моментом інерції елементарної площадки.

Полярний момент інерції всього перерізу дорівнює

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.8)$$

Полярний момент інерції завжди дорівнює сумі осьових моментів інерції відносно довільної пари взаємно перпендикулярних осей, що проходять через полюс. Доведемо це:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = J_z + J_y. \quad (2.9)$$

Осьові (2.5), (2.6) і полярний (2.8) моменти інерції для будь-якого елемента перерізу є величинами додатними незалежно від положення елемента відносно осей або полюса.

Відцентровий момент інерції (2.7) може бути величиною додатною, від'ємною або дорівнювати нулю.

2.3.1. Залежність між моментами інерції при паралельному перенесенні осей

Нехай задані моменти інерції J_z, J_y перерізу відносно осей Z і Y , що проходять через центр ваги перерізу. Знайдемо момент інерції відносно осей z_1, y_1 , які паралельні осям Z, Y і проходять від них на відстанях a, b (рис. 2.4).

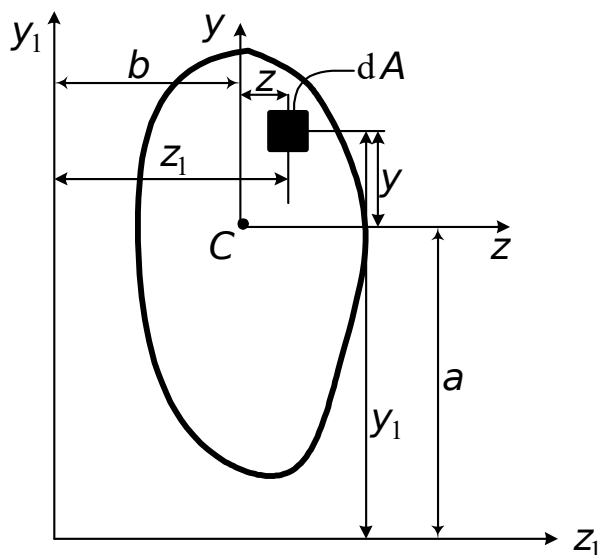


Рис. 2.4. До виведення залежностей між моментами інерції відносно паралельних осей

Визначимо момент інерції площі фігури відносно осі Z_1 :

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA .$$

Перший член у правій частині отриманого рівняння являє собою осьовий момент інерції J_z (2.5).

Інтеграл другого члена – статичний момент площі (2.2) відносно осі Z . Він дорівнює нулю, тому що за умовою задачі вісь Z проходить через центр ваги. Інтеграл третього члена дорівнює площі перерізу.

Таким чином,

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A \quad (2.10)$$

момент інерції перерізу відносно довільної осі, що лежить у площині цього перерізу, дорівнює моменту інерції перерізу відносно центральної осі, паралельної заданій, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

Аналогічно,

$$J_{y_1} = J_y + b^2 A . \quad (2.11)$$

Формула переходу для відцентрового моменту інерції від осей, що проходять через центр ваги перерізу до інших осей, паралельних їм (рис. 2.4), має вигляд

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abA . \quad (2.12)$$

Зазначимо, що при обчисленні моментів інерції за формулою (2.12) a і b слід брати з урахуванням знака в системі координат Z_1, Y_1 .

З формул (2.10) – (2.12) очевидно, що моменти інерції приймають мінімальні значення при $a=0$ або $b=0$, тобто коли осі проходять через

центр ваги. Отже, із сімейства паралельних осей мінімальний момент інерції буде відносно центральної осі.

Формула (2.12) спрощується, якщо одна з центральних осей перерізу є віссю симетрії. Тоді $J_{zy} = 0$ і відцентровий момент інерції відносно осей, паралельних центральним, дорівнює

$$J_{z_1 y_1} = abA. \quad (2.13)$$

Складаючи формули (2.10), (2.11) і з огляду на те, що $J_{\rho_1} = J_{z_1} + J_{y_1}$ (див. формулу (2.9)), одержуємо залежність для полярного моменту інерції при паралельному перенесенні осей із центру ваги (поліус O) у довільну точку (поліус O_1):

$$J_{\rho_1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2)A. \quad (2.14)$$

2.3.2. Зміна осьових і відцентрового моментів інерції при повороті координатних осей

Для перерізу площею A візьмемо довільні осі координат Z і Y . Нехай відносно цих осей обчислені моменти інерції J_z, J_y, J_{zy} . Повернемо осі координат проти ходу годинникової стрілки на деякий кут α (додатне значення кута), як показано на рис. 2.5.

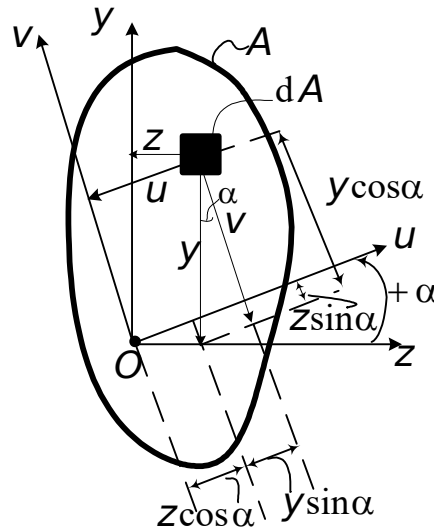


Рис. 2.5. До виведення залежностей між моментами інерції при повороті осей

Виділимо елементарну площадку dA і виразимо її нові координати u, v через старі:

$$v = y \cos \alpha - z \sin \alpha ;$$

$$u = z \cos \alpha + y \sin \alpha .$$

Знайдемо моменти інерції відносно нових осей:

$$\begin{aligned}
J_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = \\
&= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A zy \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA = \\
&= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{zy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha.
\end{aligned}$$

З огляду на те, що $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, одержимо

$$J_u = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha. \quad (2.15)$$

Діючи аналогічно, знайдемо момент інерції щодо осі V :

$$\begin{aligned}
J_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\
&= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Складаючи почленно вирази (2.15) і (2.16), одержимо

$$J_v + J_u = J_z + J_y, \quad (2.17)$$

отже, сума осьових моментів інерції при повороті осей залишається величиною постійною. Це впливає з того, що сума осьових моментів інерції дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетинання осей (див. формулу (2.9)).

Одержимо тепер залежність для відцентрового моменту інерції відносно осей u і v :

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA.$$

З огляду на те, що

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha,$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

знайдемо

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \quad (2.18)$$

2.3.3. Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції

Формули (2.15), (2.16), (2.18) показують, що якщо осі координат поступово повертати, то значення моментів інерції будуть безперервно змінюватися. Знайдемо такий кут повороту, при якому осьові моменти інерції досягають екстремальних (тобто граничних) значень. Візьмемо похідні по α від J_u і J_v і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -(J_z - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0;$$

$$\frac{dJ_v}{d\alpha} = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha + 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0.$$

Порівняємо отримані вирази похідних із виразом J_{uv} . Ці вирази по суті однакові, вони відрізняються тільки множниками $\pm \frac{1}{2}$. Отже, прирівнюючи до нуля похідну від J_u , тим самим прирівнюємо до нуля відцентровий момент J_{uv} . Диференціювання J_v дає той самий результат, але з протилежним знаком. Це вказує на те, що обидва моменти інерції J_u і J_v досягають граничних значень одночасно.

Легко переконатися, що при постійному збільшенні кута α один із моментів інерції зростає, а інший зменшується, і коли перший приймає значення \max , то другий – \min , а відцентровий момент інерції обертається на нуль.

Такі дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції приймають максимальне для однієї осі і мінімальне для іншої осі значення, називаються головними осями інерції.

Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються головними центральними осями інерції.

З (2.18) знайдемо кут нахилу головних осей інерції:

$$\frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (2.19)$$

За цією формулою визначаються два значення кута α , що відрізняються один від одного на 90° , і положення головних осей, що є взаємно перпендикулярними.

Проведемо аналіз формули (2.19).

Перший випадок: якщо $J_{zy} \neq 0$ і $J_z - J_y \neq 0$, то для α одержимо два перших корені α_1 і $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$.

Другий випадок: якщо $J_{zy} = 0$, $J_z - J_y \neq 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, тобто початкові осі – головні.

Третій випадок: якщо $J_{zy} \neq 0$, $J_z - J_y = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, $\alpha_1 = 45^\circ$ і $\alpha_2 = 135^\circ$. Прикладом цього випадку може бути переріз у вигляді рівнобічного кутника (рис. 2.6), для якого осьові моменти інерції відносно центральних осей Z і Y рівні між собою, а відцентровий момент інерції $J_{zy} \neq 0$; головні осі U і V складають із цими осями кути 45° і 135° .

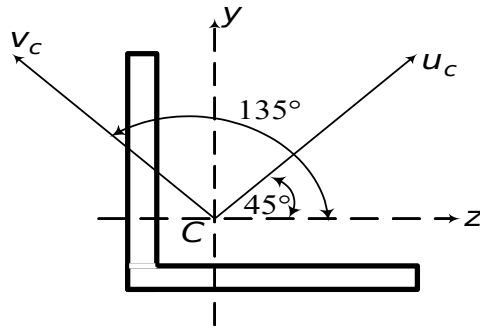


Рис. 2.6. Головні центральні осі інерції рівнобічного кутника

Четвертий випадок: якщо $J_{zy} = 0, J_z - J_y = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{0}{0}$, і, отже, при будь-якому повороті осей головними. Прикладом таких перерізів будуть круг, квадрат і т. д.

Вирази для визначення головних моментів інерції J_{\max} і J_{\min} можна одержати, виключивши із (2.15) і (2.16) кут α (2.19):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}. \quad (2.20)$$

Знак плюс перед другим доданком у (2.20) стосується максимального моменту інерції, знак мінус – мінімального.

Зазначимо, що якщо за вихідні осі прийняти головні, то формули переходу до повернутих осей (2.15), (2.16), (2.18) спрощуються, тому що в цих формулах $J_{zy} = 0$.

Розглянемо ще одне питання. З отриманих результатів обчислень за формулою (2.19) неможливо встановити, яка з головних осей є віссю, відносно якої момент інерції має найбільше або найменше значення. Тут слід використовувати таке правило: вісь максимум (або мінімум) завжди складає менший кут із тією з осей (віссю Z чи Y), відносно якої момент інерції має більше (або менше) значення.

Введемо поняття про радіус інерції. Осьові моменти інерції в загальному вигляді визначаються залежностями (2.5), (2.6):

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA.$$

Тут z і y – змінні. Величини моментів інерції не зміняться, якщо в підінтегральні вирази замість змінних розмірів ввести їхні середні значення, що позначимо через i_z, i_y . Тоді

$$J_z = \int_A i_z^2 dA = i_z^2 A;$$

$$J_y = \int_A i_y^2 dA = i_y^2 A.$$

Величини i_z і i_y називаються радіусами інерції перерізу відносно осей Z, Y :

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} ; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} . \quad (2.21)$$

Радіуси інерції, що відповідають головним осям, називаються головними радіусами інерції і визначаються за формулами

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} ; i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} . \quad (2.22)$$

2.3.4. Моменти інерції найпростіших фігур

Обчислимо момент інерції прямокутника відносно осі, що проходить через центр ваги (рис. 2.7).

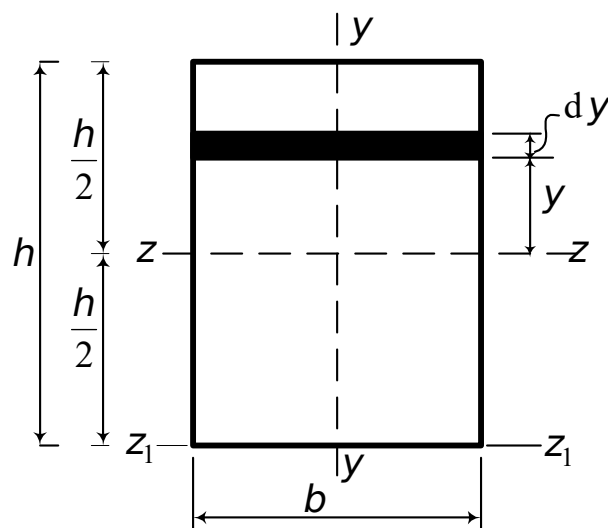


Рис. 2.7. До обчислення моментів інерції прямокутника

Розіб'ємо увесь прямокутник на нескінченно малі елементи лініями, паралельними осі Z .

Момент інерції елемента

$$dJ_z = y^2 b dy .$$

Момент інерції усього прямокутника

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} .$$

Момент інерції відносно осі Z_1 , паралельної осі Z , знайдемо за формулою (2.10):

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3} .$$

Визначимо тепер момент інерції трикутника відносно осі Z_1 , що проходить через його вершину паралельно основі (рис. 2.8).

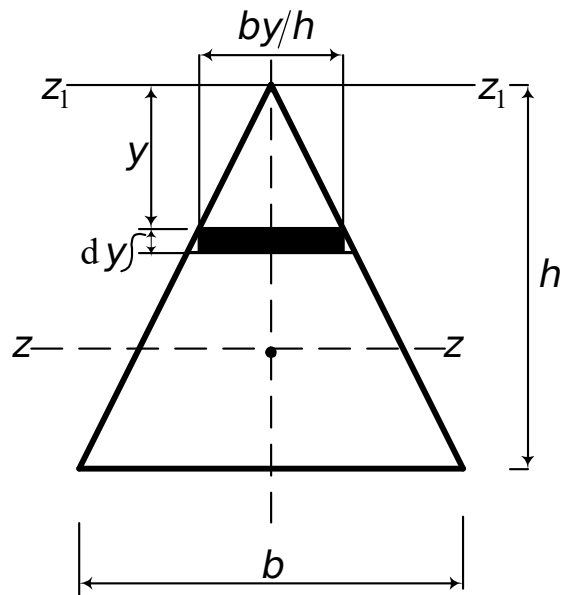


Рис. 2.8. До визначення моментів інерції трикутника

Розіб'ємо увесь трикутник на тонкі смуги лініями, паралельними осі Z_1 . Роздивимося смугу, що знаходиться на відстані y від вершини. Висота цієї смуги дорівнює dy , ширина by/h (знайдена з пропорції $z/y = b/h$).

Момент інерції смуги

$$dJ_{z_1} = y^2 \frac{b}{h} y dy.$$

Момент інерції усього трикутника

$$J_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{4}.$$

Для визначення моменту інерції відносно осі Z , що проходить через центр ваги перерізу, скористаємося формулою (2.10):

$$J_z = J_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}.$$

Для круга (рис. 2.9) знайдемо спочатку полярний момент інерції щодо його центру. Круг радіуса r розіб'ємо на нескінченно малі елементи, що являють собою концентричні кільця. Візьмемо одне з таких кілець із радіусом ρ і товщиною $d\rho$.

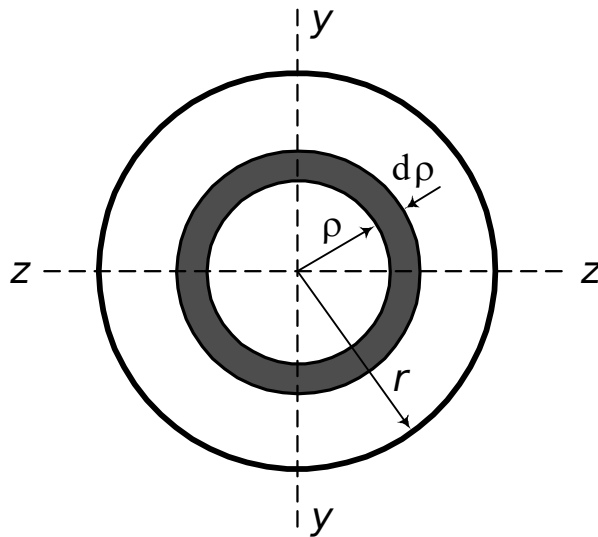


Рис. 2.9. До визначення моменту інерції круга

Полярний момент інерції кільця

$$dJ_{\rho} = (2\pi\rho d\rho)\rho^2.$$

Щоб одержати полярний момент інерції усієї площі круга, потрібно скласти моменти інерції усіх кілець:

$$J_{\rho} = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Внаслідок симетрії кола моменти інерції відносно всіх осей, що проходять через центр кола, рівні між собою, тобто $J_z = J_y$. З іншого боку, знаючи, що $J_{\rho} = J_z + J_y$ (див. (2.9)), одержимо

$$J_z = J_y = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

2.3.5. Обчислення моментів інерції складних фігур

При розрахунках балок на міцність і жорсткість необхідно визначати значення геометричних характеристик складних поперечних перерізів, як-от положення головних центральних осей і головних центральних моментів інерції.

Порядок їхнього визначення розглянемо на прикладі (рис. 2.10).

Переріз розбиваємо на чотири частини: двотавр, швелер, кутник і лист $50 \times 2,4$ см. Геометричні характеристики двотавра I №36: $h_1 = 36$ см; $b_1 = 14,5$ см; $d_1 = 0,75$ см; $t_1 = 1,23$ см; $A_1 = 61,9$ см²; $J_{z_1} = 13380$ см⁴; $J_{y_1} = 516$ см⁴. Геометричні характеристики швелера: 24а: $h_2 = 24$ см; $b_2 = 9,5$ см; $d_2 = 0,56$ см; $t_2 = 1,07$ см; $A_2 = 32,9$ см²; $J_{z_2} = 254$ см⁴; $J_{y_2} = 3180$ см⁴; $y_0 = 2,67$ см. Геометричні характеристики кутника:

L 100×63×8: $h_3 = 10\text{см}$; $b_3 = 6,3\text{см}$; $d_3 = 0,8\text{см}$; $A_3 = 12,6\text{см}^2$; $J_{z_3} = 127\text{см}^4$; $J_{y_3} = 39,2\text{см}^4$; $z_0 = 1,5\text{см}$; $y_0 = 3,32\text{см}$; $\text{tg } \alpha_3 = 0,391$; $\text{tg } 2\alpha_3 = 0,923$. Геометричні характеристики листа: $h_4 = 2,4\text{см}$; $b_4 = 50\text{см}$; $A_4 = 12\text{см}^2$.

2.3.5.1. Визначення центра ваги перерізу

У якості допоміжних осей, відносно яких будемо визначати центр ваги перерізу, приймаємо осі двотавра (Z_1, Y_1). Обчислюємо відносно цих осей координати центрів ваги інших трьох складових перерізу (рис. 2.10):

$$z_2 = 50 - 14,5/2 - 12 = 30,75\text{см}; \quad y_2 = 36/2 + 2,4 + 2,67 = 23,07\text{см};$$

$$z_3 = 50 - 14,5/2 - 1,5 = 41,25\text{см}; \quad y_3 = 36/2 - 3,32 = 14,68\text{см};$$

$$z_4 = 50/2 - 14,5/2 = 17,75\text{см}; \quad y_4 = 36/2 + 2,4/2 = 19,20\text{см}.$$

Координати центра ваги двотавра відносно своїх центральних осей дорівнюють нулю, тобто $z_1 = 0, y_1 = 0$.

Тепер за (2.3) і (2.4)

$$z_0 = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4};$$

$$y_0 = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}.$$

Підставляючи сюди чисельні значення координат і площ елементів перерізу, знайдемо $z_0 = 16,1\text{см}$; $y_0 = 14,28\text{см}$ (див. рис. 2.10).

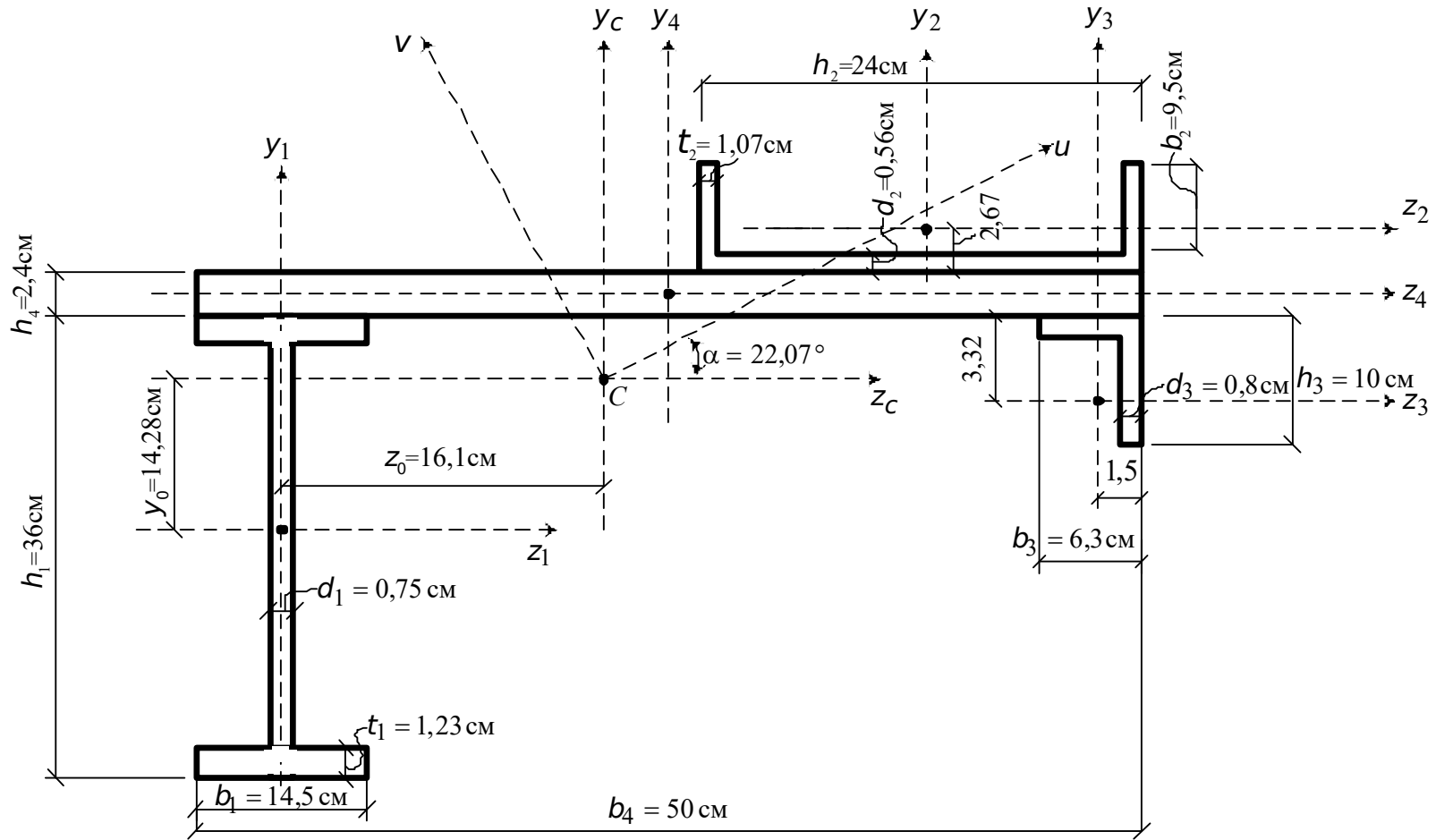


Рис. 2.10. Схема заданого перерізу

2.3.5.2. Обчислення моментів інерції складового перерізу відносно центральних осей

Моменти інерції листа відносно власних осей Z_4, Y_4 обчислюються за формулами для прямокутного перерізу (див. п. 2.3.4):

$$J_{z_4} = \frac{b_4 h_4^3}{12}; \quad J_{y_4} = \frac{h_4 b_4^3}{12}.$$

Момент інерції усього перерізу обчислюємо за формулами (2.10), (2.11), (2.12):

$$J_{z_c} = \sum_{i=1}^4 (J_{z_i} + A_i a_i^2) = J_{z_1} + A_1 y_0^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_0)^2 + \\ + J_{z_3} + A_3 (y_3 - y_0)^2 + J_{z_4} + A_4 (y_4 - y_0)^2;$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^4 (J_{y_i} + A_i b_i^2) = J_{y_1} + A_1 z_0^2 + J_{y_2} + A_2 (z_2 - z_0)^2 + \\ + J_{y_3} + A_3 (z_3 - z_0)^2 + J_{y_4} + A_4 (z_4 - z_0)^2;$$

$$J_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^4 (J_{z_i y_i} + A_i a_i b_i) = 0 + A_1 (-z_0)(-y_0) + 0 + A_2 (y_2 - y_0)(z_2 - z_0) + \\ + \frac{J_{y_3} - J_{z_3}}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_3 + A_3 (y_3 - y_0)(z_3 - z_0) + 0 + A_4 (y_4 - y_0)(z_4 - z_0),$$

де $J_{y_3} = 39,2 \text{ см}^4$; $J_{z_3} = 127 \text{ см}^4$.

У результаті обчислень одержуємо $J_{z_c} = 31890 \text{ см}^4$, $J_{y_c} = 60138 \text{ см}^4$, $J_{z_c y_c} = 19528 \text{ см}^4$.

Зауважимо, що при обчисленні відцентрового моменту інерції усього перерізу відцентрові моменти інерції відносно власних осей двотавра, листа і швелера дорівнюють нулю (якщо переріз має хоча б одну вісь симетрії, то відцентровий момент інерції перерізу відносно цієї осі дорівнює нулю).

Для визначення відцентрового моменту інерції кутника користуємося формулою (2.19). Знак $\operatorname{tg} 2\alpha$ визначаємо з табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Визначення відцентрового моменту інерції нерівнобічного кутника

№ пп	Положення кутника на площині	Знак $\text{tg } 2\alpha$	№ пп	Положення кутника на площині	Знак $\text{tg } 2\alpha$
1		+	5		+
2		-	6		+
3		+	7		-
4		-	8		-

2.3.5.3. *Визначення положення головних центральних осей і головних моментів інерції*

Кут нахилу головних осей визначаємо, використовуючи формулу (2.19):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot 19528}{60138 - 31890} = 1,383,$$

звідси $2\alpha = 54,14^\circ$, а $\alpha = 27,07^\circ$.

Обчислюємо головні моменти інерції за формулою (2.20):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}.$$

Звідси $J_v = J_{\max} = 70114 \text{ см}^4$; $J_u = J_{\min} = 21914 \text{ см}^4$.

Виконаємо перевірку правильності обчислень:

$$J_z + J_y = J_{\max} + J_{\min};$$

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0.$$

Неважко переконатися, що умови перевірок виконуються.

2.4. Моменти інерції перерізів тонкостінних стержнів

Основною ознакою тонкостінного стержня є співвідношення його геометричних розмірів: у поперечному перерізі один з вимірів (товщина δ) істотно менше від іншого – довжини контуру S ; остання ж у свою чергу залишається багато меншою, ніж довжина стержня l .

До схеми тонкостінних стержнів зводяться багато елементів машинобудівних і будівельних конструкцій. Це насамперед підкріплювальні елементи оболонок літаків і ракет, візків залізничних вагонів та інших конструкцій.

Тонкостінний стержень у силу зазначених геометричних співвідношень виявляє властивості, що відрізняють його від стержнів суцільного перерізу. Головною особливістю тонкостінних стержнів є те, що в них при навантаженнях, які створюють закручування, поперечні перерізи в процесі деформації не залишаються плоскими. Відбувається так звана депланація перерізів, що пов'язана з переміщеннями точок із площини поперечного перерізу уздовж осі стержня. Ці деформації можуть досягати значної величини. Тому додатково до розглянутих вище геометричних характеристик: статичного моменту площі (2.2), осьових моментів інерції (2.5), (2.6), відцентрового моменту інерції (2.7), вводяться так звані секторіальні геометричні характеристики, що утворюються зі звичайних, якщо в них замінити декартові координати на секторіальні.

2.4.1. Система координат

Для тонкостінних стержнів, на відміну від добре відомих і використовуваних декартової і криволінійної систем координат, вводиться так звана секторіальна система координат (рис. 2.11).

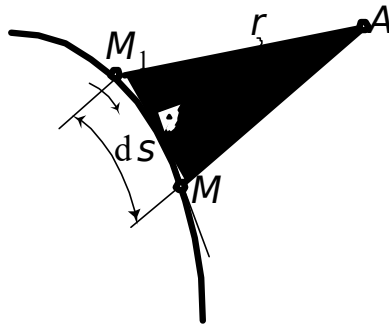


Рис. 2.11. Секторіальна система координат

Розглянемо середню лінію контуру поперечного перерізу. Виберемо на цьому контурі початок відріку M_1 , і з заданого полюса A проведемо два промені до кінців елементарного відрізка dS . Подвоєну площу трикутника AM_1M позначимо через $d\omega$:

$$d\omega = r dS,$$

де r – відстань від полюса до дотичної до лінії контуру в точці M .

Інтеграл

$$\omega = \int_0^S r dS \quad (2.23)$$

називається секторіальною площею (координатою).

Для прямолінійного контуру, що складається з прямих ділянок $r = \text{const}$ (ω залежить від S лінійно), значення секторіальної площі в довільній точці N може бути знайдено за формулою (рис. 2.12)

$$\omega_n = \omega_k + y_k z_n - z_k y_n,$$

де ω_k – секторіальна площа в попередній точці;

y_k, z_k – координати точки k (початок елемента);

y_n, z_n – координати точки n (кінець елемента).

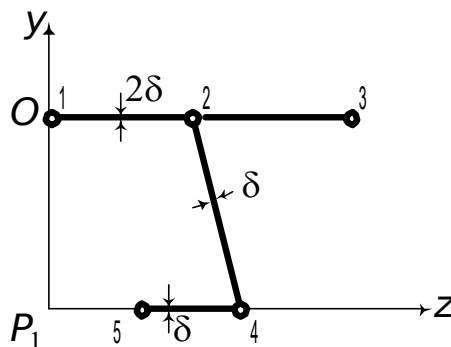


Рис. 2.12. Схема поперечного перерізу стержня

Починають обчислення з точки, у якій обраний початок відліку “0”. Значення секторіальної площі в цій точці завжди дорівнює нулю. Потім необхідно послідовно обчислити секторіальну площу в інших точках. Якщо переріз розгалужується (на рис. 2.12 – точка 2), потрібно рухатися від точки розгалуження спочатку в одному напрямку, потім – в іншому. Так, наприклад, секторіальна площа в точках 3, 4, 5 дорівнює

$$\omega_3 = \omega_2 + y_2 z_3 - z_2 y_3;$$

$$\omega_4 = \omega_2 + y_2 z_4 - z_2 y_4;$$

$$\omega_5 = \omega_4 + y_4 z_5 - z_4 y_5.$$

2.4.2. Секторіальні характеристики перерізу

Як було зазначено вище, для одержання секторіальних геометричних характеристик необхідно у формулах (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) замінити декартові координати на секторіальні. У результаті одержимо

$$S_\omega = \int_A \omega dA - \quad (2.24)$$

секторіальний статичний момент, м⁴;

$$J_\omega = \int_A \omega^2 dA - \quad (2.25)$$

секторіальний момент інерції, м⁶;

$$J_{z\omega} = \int_A y \omega dA; J_{y\omega} = \int_A z \omega dA - \quad (2.26)$$

секторіально-лінійні статичні моменти відносно осей Z і Y .

Оскільки секторіальна площа (координата) може мати як додатні, так і від'ємні значення, секторіально-лінійні статичні моменти (2.26) також можуть бути як додатними, так і від'ємними. Поліус, відносно якого секторіально-лінійні моменти обертаються на нуль, називається головним поліусом.

2.4.3. Визначення положення головного поліуса

Для визначення координат головного поліуса задамося спочатку довільною точкою B , користуючись якою як головним поліусом при довільному початку відліку M_1 , знайдемо секторіальну координату ω_B (рис. 2.13).

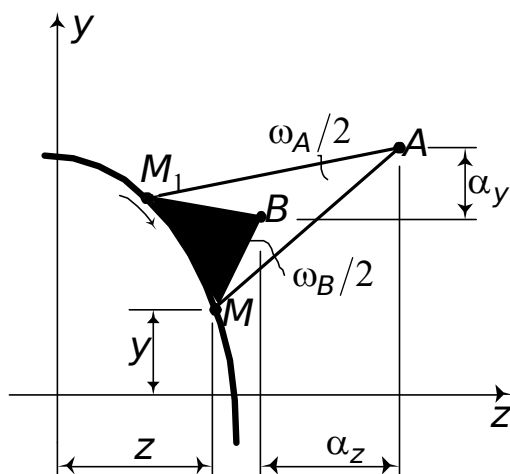


Рис. 2.13. До визначення положення головного полюса

Нехай α_z і α_y – координати точки A відносно точки B .
Секторіальні координати ω_A і ω_B пов'язані рівністю

$$\omega_A = \omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z + C, \quad (2.27)$$

де C – довільна постійна.

Підставляючи (2.27) у (2.26), прийдемо до системи рівнянь відносно α_z і α_y :

$$J_{z\omega} - \alpha_z J_z + \alpha_y J_{zy} + C \cdot S_z = 0;$$

$$J_{y\omega} - \alpha_z J_{zy} + \alpha_y J_y + C \cdot S_y = 0.$$

Будемо вважати, що Z і Y – центральні осі перерізу. Тоді $S_z = 0$ і $S_y = 0$ (див. п. 2.1).

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо формули для координат точки A :

$$\alpha_z = \frac{-J_{z\omega} J_y + J_{y\omega} J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}; \quad (2.28)$$

$$\alpha_y = \frac{J_{y\omega} J_z - J_{z\omega} J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}. \quad (2.29)$$

Якщо Z і Y – головні центральні осі перерізу, то $J_{zy} = 0$, і формули (2.28), (2.29) значно спрощуються:

$$\alpha_z = -J_{z\omega} / J_z; \quad \alpha_y = J_{y\omega} / J_y. \quad (2.30)$$

Якщо отримані за формулами (2.28) – (2.30) значення координат α_z і α_y додатні, то їх слід відкладати від точки B по напрямку осей координат.

Тепер знайдемо головну нульову точку відліку секторіальних координат, тобто точку, коли S_ω (2.24) обернеться в нуль. Очевидно, що ω_A і ω , знайдені для дійсної точки M_0 , відрізняються на деяку постійну C :

$$\omega = \omega_A + C.$$

Підставивши в (2.24) і вимагаючи, щоб $S_\omega = 0$, знайдемо

$$C = -\frac{S_{\omega A}}{A}. \quad (2.31)$$

2.4.4. Визначення секторіального моменту інерції

Процес обчислення секторіального моменту інерції простежимо на прикладі перерізу тонкостінного стержня, показаного на рис. 2.14.

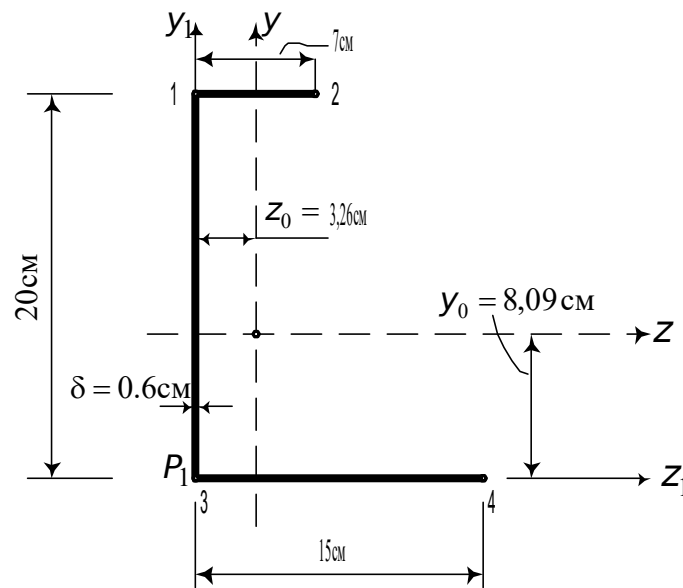


Рис. 2.14. Переріз тонкостінного стержня

Заданий переріз розташовуємо в додатній чверті. Пронумеруємо характерні точки перерізу (початок і кінець елементів) і уявимо його у вигляді набору прямокутних елементів, що мають товщину δ_{kn} і довжину H_{kn} . Допоміжні осі проведемо так, щоб вони збіглися з осями елементів 1-3 і 3-4. Визначимо координати центру ваги перерізу (див. п. 2.2). У результаті нескладних обчислень вони виявляються рівними

$$y_0 = 8,09 \text{ см}, \quad z_0 = 3,26 \text{ см}.$$

Обчислимо центральні моменти інерції (2.5), (2.6) і відцентровий момент інерції (2.7). Для тонкостінних елементів, що мають постійну товщину, зазначеним формулам можна надати такий вигляд:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_A y^2 dA = \sum S_i \int_{S_i} y \cdot y ds, \\ J_y &= \int_A z^2 dA = \sum S_i \int_{S_i} z \cdot z ds, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$J_{zy} = \int_A zy dA = \sum_{S_j} \delta_j \int_{S_j} y \cdot z ds.$$

Тут $dA = \delta_j ds$, $\delta_j = \text{const}$ – товщина тонкостінних елементів. При такій заміні не враховується власний момент інерції тонкостінного елемента відносно середньої лінії контуру, значення якого звичайно мале порівняно з моментом інерції усього перерізу. Кожний з інтегралів (2.32) будемо розглядати як інтеграл, у якого підінтегральний вираз являє собою добуток двох функцій: $z = f_1(s)$ і $y = f_2(s)$. Ці функції лінійні, і на деякій ділянці довжиною l графічно вони можуть уявлятися у вигляді трапецій (рис. 2.15).

Продовжимо прямолінійну епюру на рис. 2.15, а до точки 0. Тоді можна записати

$$\int_A^B zy ds = \text{tg } \alpha \int_A^B s' y ds = \text{tg } \alpha \omega S_0 = \omega Y_0. \quad (2.33)$$

Отриманий інтеграл (2.33) можна розглядати як статичний момент площі епюри на рис. 2.15, а відносно точки 0. Але статичний момент площі дорівнює статичному моменту її рівнодіючої, прикладеної в центрі ваги цієї площі.

Отже, шуканий інтеграл утворюється множенням площі епюри з рис. 2.15, а на розташовану під її центром ваги ординату епюри з рис. 2.15, б. При цьому ординати функцій (епюр) варто підставляти у формулу (2.33) з урахуванням їхніх знаків.

Тепер для обчислення моментів інерції описаним вище способом попередньо побудуємо епюри Y_0 і Z_0 (рис. 2.16).

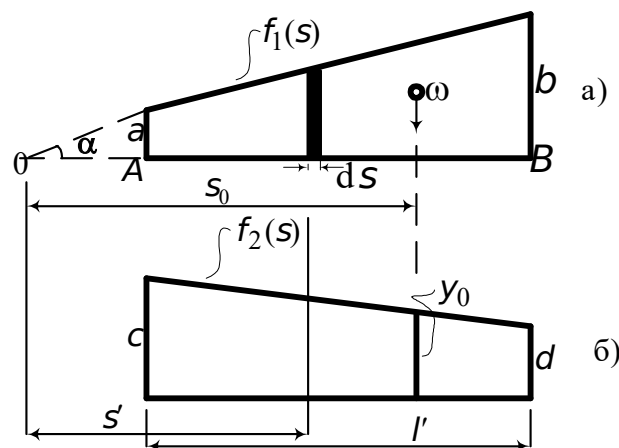


Рис. 2.15. До обчислення інтегралів (2.32)

а)

б)

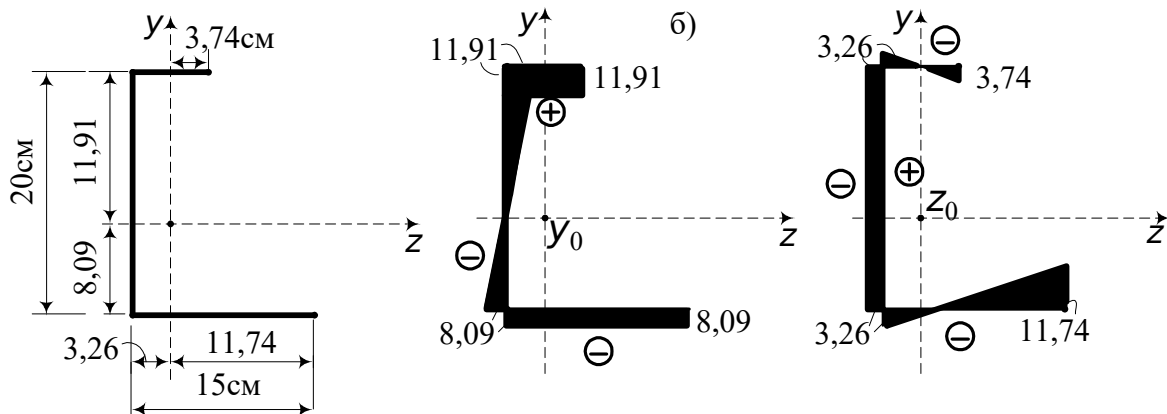


Рис. 2.16. Поперечний переріз тонкостінного стержня (а) і епюри Y (б), Z (в)

“Перемножуємо” побудовані епюри і знаходимо

$$J_y = 0,6 \left[\frac{1}{2} 3,26 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 3,26 - \frac{1}{3} 3,74 \right) + \frac{1}{2} 3,74 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 3,74 - \frac{1}{3} 3,26 \right) + 3,26 \cdot 20 \cdot 3,26 + \frac{1}{2} 3,26 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 3,26 - \frac{1}{3} 11,74 \right) + \frac{1}{2} 11,74 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 11,74 - \frac{1}{3} 3,26 \right) \right] = 475,47 \text{ см}^4;$$

$$J_z = 0,6 \left[11,91 \cdot 7 \cdot 11,91 + \frac{1}{2} 11,91 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 11,91 - \frac{1}{3} 8,09 \right) + \frac{1}{2} 8,09 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 8,09 - \frac{1}{3} 11,91 \right) + 8,09 \cdot 15 \cdot 8,09 \right] = 1628,57 \text{ см}^4;$$

$$J_{yz} = 0,6 \left[11,91 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2} 3,74 - \frac{1}{2} 3,26 \right) + 3,26 \cdot 20 \left(\frac{1}{2} 8,09 - \frac{1}{2} 11,91 \right) + 8,09 \cdot 15 \left(\frac{1}{2} 3,26 - \frac{1}{2} 11,74 \right) \right] = -371,43 \text{ см}^4.$$

Визначимо тепер секторіальні характеристики перерізу. Вибираємо полюс P_1 і початок відліку 0 у точці 3 (рис. 2.17). Визначаємо ω_n за формулою (див. п. 2.4.1)

$$\omega_n = \omega_k + \omega'_n = \omega_k + y_k z_n - z_k y_n.$$

Обчислення починаємо з точки 3:

$$\omega_3 = 0;$$

$$\omega_1 = \omega_3 + (y_3 z_1 - z_3 y_1) = 0 + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 20) = 0;$$

$$\omega_2 = \omega_1 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) = 0 + (20 \cdot 7 - 0 \cdot 20) = 140 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = \omega_3 + (y_3 z_4 - z_3 y_4) = 0 + (0 \cdot 15 - 0 \cdot 0) = 0.$$

Будуємо епюру ω_{P_1} (рис. 2.17).

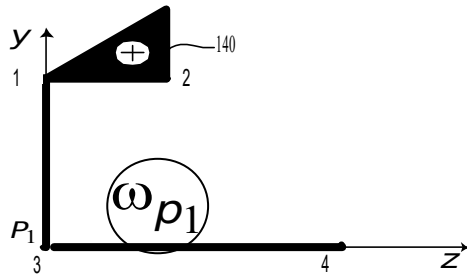


Рис. 2.17. Епюра секторіальної площі ω_{P_1} (P_1 – полюс, початок відліку в т. 3)

Обчислимо секторіально-лінійні статичні моменти інерції (2.26). Для цього “перемножимо” епюру ω_{P_1} (рис. 2.16) по черзі на епюри Y_0 і Z_0 (рис. 2.16 б, в):

$$J_{y\omega} = \int_A z\omega dA = 0,6 \frac{1}{2} 140 \cdot 7 \left(-\frac{1}{3} 3,26 + \frac{2}{3} 3,74 \right) = 413,56 \text{ см}^5,$$

$$J_{z\omega} = \int_A y\omega dA = 0,6 \frac{1}{2} 140 \cdot 7 \cdot 11,91 = 3501,54 \text{ см}^5.$$

Для визначення координат α_z і α_y використовуємо формули (2.28) і (2.29):

$$\alpha_z = \frac{-J_{z\omega} J_y + J_{y\omega} J_{yz}}{J_z J_y - J_{yz}^2} = \frac{-3501,54 \cdot 475,47 + 413,56 \cdot (-371,43)}{1628,57 \cdot 475,47 - (371,43)^2} = -2,86 \text{ см},$$

$$\alpha_y = \frac{J_{y\omega} J_z - J_{z\omega} J_{yz}}{J_z J_y - J_{yz}^2} = \frac{413,56 \cdot 1628,57 - 3501,54 \cdot (-371,43)}{1628,57 \cdot 475,47 - (371,43)^2} = 3,10 \text{ см}.$$

Сумістимо полюс P_1 із центром згинання, початок відліку 0 залишимо в попередньому положенні (рис. 2.18).

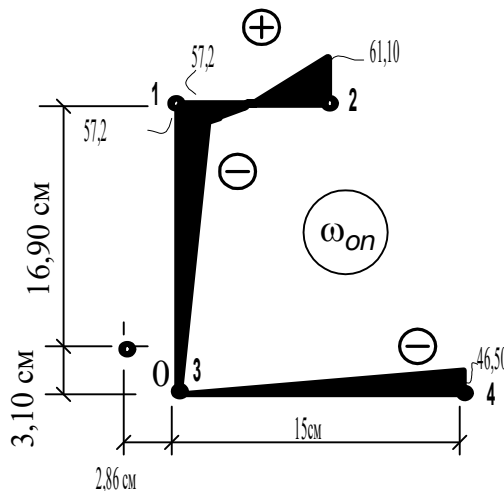


Рис. 2.18. Епюра секторіальної площі ω_{O1}

Визначимо нове значення секторіальної площі ω_{O1} :

$$\omega_{on} = \omega_{ok} + (y_k - \alpha_y)(z_n - \alpha_z) - (z_k - \alpha_z)(y_n - \alpha_y);$$

$$\omega_{03} = 0;$$

$$\omega_{01} = \omega_{03} + (y_3 - \alpha_y)(z_1 - \alpha_z) - (z_3 - \alpha_z)(y_1 - \alpha_y) = 0 + (0 - 3,10)(0 + 2,86) - (0 + 2,86)(20 - 3,10) = -57,20 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{02} = \omega_{01} + (y_1 - \alpha_y)(z_2 - \alpha_z) - (z_1 - \alpha_z)(y_2 - \alpha_y) = 61,10 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{04} = \omega_{03} + (y_3 - \alpha_y)(z_4 - \alpha_z) - (z_3 - \alpha_z)(y_4 - \alpha_y) = -46,50 \text{ см}^2.$$

За знайденими значеннями ω_{01} , ω_{02} , ω_{03} , ω_{04} будемо епюру секторіальної площі (рис. 2.18).

Обчислюємо секторіальний статичний момент $S_{\omega 0}$ і допоміжну величину C (2.31):

$$S_{\omega 0} = \int_A \omega_{on} dA = 0,6 \left[\frac{1}{2} 61,10 \cdot 7 - \frac{1}{2} 57,2 \cdot 7 - \frac{1}{2} 57,2 \cdot 20 - \frac{1}{2} 46,5 \cdot 15 \right] = -544,26 \text{ см}^4;$$

$$C = -\frac{S_{\omega 0}}{A} = \frac{544,26}{25,2} = 21,60 \text{ см}^2.$$

Для побудови головної епюри секторіальної площі знаходимо

$$\omega_{гол} = \omega_{on} + C;$$

$$\omega_{3гол} = \omega_{03} + C = 0 + 21,60 = 21,60 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{1гол} = \omega_{01} + C = -57,20 + 21,60 = -35,60 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{2гол} = \omega_{02} + C = 61,10 + 21,60 = 82,70 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{4гол} = \omega_{04} + C = -46,50 + 21,60 = -24,90 \text{ см}^2.$$

За отриманими значеннями будемо епюру головних секторіальних площ (рис. 2.19).

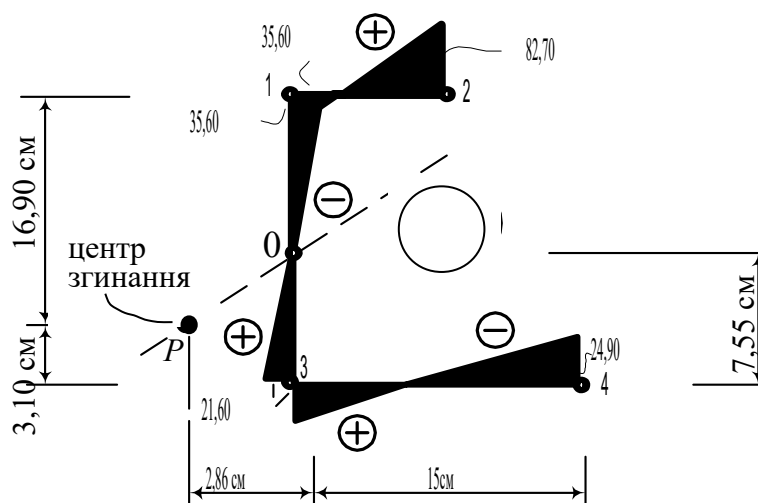


Рис. 2.19. Епюра головної секторіальної площі

Значення секторіального моменту інерції знаходимо “перемножуванням” епюри $\omega_{\text{гол}}$ на себе:

$$\begin{aligned}
 J_{\omega} = \int_A \omega_{\text{гол}}^2 dA = & 0,6 \left[\frac{1}{2} 82,70 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 82,70 - \frac{1}{3} 35,60 \right) + \frac{1}{2} 35,60 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 35,60 - \frac{1}{3} 82,70 \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} 35,60 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 35,60 - \frac{1}{3} 21,60 \right) + \frac{1}{2} 21,60 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 21,60 - \frac{1}{3} 35,60 \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{2} 21,60 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 21,60 - \frac{1}{3} 24,40 \right) + \frac{1}{2} 24,40 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 24,40 - \frac{1}{3} 21,60 \right) \right] = 12733,58 \text{ см}^6.
 \end{aligned}$$

Знайдена величина, як буде показано, входить до формули нормальних напружень при крученні.

Розділ 3

РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

У різних елементах конструкцій і машин виникають тільки поздовжні зусилля, що викликають у них деформацію розтягання або стискання. Наприклад, трос підіймача при підніманні вантажу розтягнутий, колони каркаса багатоповерхового будинку переважно стиснуті, елементи ферм можуть бути розтягнутими або стиснутими і т. д. (див. п. 1.7.1).

У найпростішому випадку розтягнутий або стиснутий стержень – це стержень із силами, прикладеними до його кінців і спрямованими уздовж його осі (рис. 3.1).

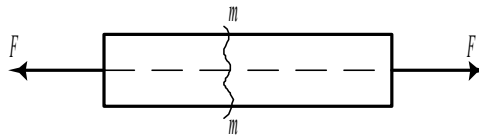


Рис. 3.1. Центральньо розтягнутий стержень

Біля кінців бруса напруження розподіляються за складним законом, що залежить від способу прикладення сил до бруса. Проте цей вплив з віддаленням від кінців позначається на напруженні усе менше і менше. У частинах бруса, віддалених від точок прикладення сил на відстані, що приблизно дорівнює найбільшому розміру поперечного перерізу, спосіб прикладення навантаження майже не впливає на напруження (принцип Сен-Венана*). Надалі будемо виключати з розгляду частини бруса, близькі до місць прикладення сил.

3.1 Напруження в перерізах, перпендикулярних до осі бруса

Зробимо поперечний розтин $m-m$ і відкинемо праву частину, дію якої замінимо силами, розподіленими по перерізу (рис. 3.2).

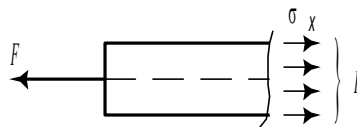


Рис. 3.2. До виведення формули для нормальних напружень

Оскільки внутрішні сили повинні замінити прикладену до відкинутої частини зовнішню силу F , припустимо, що вони мають такий самий напрямок, який мала відкинута сила F , тобто повинні бути горизонтальними, а отже, нормальними до перерізу і спрямованими вправо. Рівнодіюча внутрішніх сил дорівнює зовнішній силі F , прикладеній до частини, що залишилася, тому що обидві сили повинні

* Барре де Сен-Венан (1797-1886) – французький вчений у галузі механіки, його основні праці присвячені теорії пружності, опору матеріалів та гідродинаміці.

врівноважувати одна одну. Інтенсивність внутрішніх сил, тобто величина їх на одиницю площі буде нормальним напруженням.

Досліди, проведені в лабораторіях, показують, що при розтяганні або стисканні бруса поздовжні волокна, розташовані на його поверхні, відчують однакові подовження. Природно припустити, що й усередині всі поздовжні волокна відчують таке саме подовження, а тому поперечні перерізи, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після деформації (гіпотеза плоских перерізів – гіпотеза Я. Бернуллі*.

Оскільки подовження у всіх точках поперечного перерізу однакові, то можна вважати, що і напруження постійні по всьому перерізу, тобто $\sigma_x = \text{const}$. Використовуючи залежність (1.12)

$$N = \int_A \sigma_x dA,$$

одержимо

$$N = \sigma_x A,$$

звідки нормальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) може бути застосована при визначенні нормальних напружень у розтягнутих стержнях і в коротких стиснутих стержнях.

Дотичні напруження τ в поперечному перерізі дорівнюють нулю, тому що усі внутрішні сили перпендикулярні до перерізу.

3.2. Напруження в перерізах, похилих до осі бруса

Розглянемо напруження, що виникають у брусі по площадках, похилих до його осі (рис. 3.3, а).

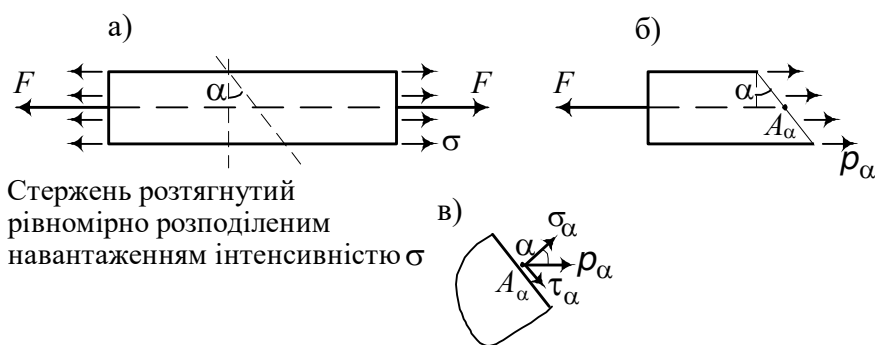


Рис. 3.3. Напруження на похилих площадках розтягнутого стержня

Розсічемо стержень по похилому перерізу і відкинемо його праву частину (рис. 3.3, б). На похилій площадці повні напруження ρ_α будуть спрямовані уздовж поздовжньої осі і розподілені рівномірно. Ліва частина

*Якоб Бернуллі (1654-1705) – швейцарський математик, фізик, механік.

стержня, що залишилася, знаходиться в рівновазі. Тому зовнішнє навантаження F і рівнодіючі повні напруження повинні бути рівними між собою:

$$F = \rho_{\alpha} A_{\alpha} = N,$$

де $A_{\alpha} = A/\cos\alpha$ – площа похилого перерізу.

Таким чином, повне напруження на похилій площадці дорівнює

$$\rho_{\alpha} = \sigma \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Розкладемо повне напруження на нормальне і дотичне напруження (рис. 3.3, в). Тоді з урахуванням формули (3.2) маємо

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2 \alpha. \quad (3.3)$$

Нормальні напруження мають найбільше значення

$$\sigma_{\max} = \sigma \quad \text{при} \quad \alpha = 0,$$

тобто у поперечному перерізі $m-m$ (рис. 3.1), а найменше значення

$$\sigma_{\min} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 90^{\circ},$$

тобто на площадках, рівнобіжних осі бруса.

При $\alpha = 45^{\circ}$ $\sigma_{\alpha} = 0,5\sigma$.

Дотичні напруження мають найбільше значення за абсолютною величиною при $\alpha = 45^{\circ}$ ($\alpha = 135^{\circ}$), тобто на площадках, нахилених до осі бруса під кутом 45° (рис. 3.4). При цьому $\tau_{\max} = \sigma/2$.

Значення, що дорівнюють нулю, дотичні напруження мають по площадках, перпендикулярних і паралельних осі бруса.

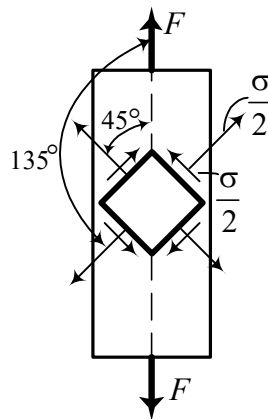


Рис. 3.4. Дія напружень на площадках, нахилених до осі бруса під кутом $\alpha = 45^{\circ}$ (135°)

Крім того, варто нагадати (див. (1.18)), що на двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за абсолютною величиною.

3.3. Деформації при розтяганні і стисканні

3.3.1. Подовжня деформація

Розглянемо брус, завантажений на кінці силою F (рис. 3.5).

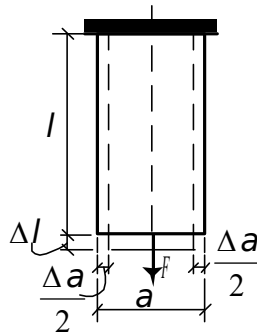


Рис. 3.5. Деформації бруса при розтяганні

Довжину бруса до деформації позначимо через l , а збільшення довжини (додатне або від'ємне) – через Δl . Збільшення довжини бруса називається повним або абсолютним подовженням (укороченням), або абсолютною подовжньою деформацією. Повне подовження (укорочення) вимірюється в лінійних одиницях (см, мм).

Відносним подовженням (відносною подовжньою деформацією) називають ту частку абсолютної подовжньої деформації, що припадає на одиницю довжини бруса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.4)$$

Розміри як відносних, так і абсолютних подовжніх деформацій стержнів, виконаних із найбільше поширених будівельних матеріалів, дуже малі (див. п. 1.1). Так, для реальних будівельних матеріалів вони мають порядок $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Якщо розглядати тільки пружні деформації, то для них дослідним шляхом встановлена пряма пропорційність між розміром сили, що розтягує, і відповідним їй подовженням (див. п. 1.8.3).

При розтяганні або стисканні стержня (або його ділянки), як відомо, єдине зусилля, що відрізняється від нуля, – нормальна сила N . Тоді нормальне напруження визначається формулою (3.1), і зв'язок між напруженнями і деформаціями відповідно до закону Гуку (1.27) набуває вигляду

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (3.5)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності і характеризує спроможність матеріалу чинити опір лінійній деформації (розмірність – МПа).

Графічно пряма пропорційність зображується похилою прямою. Прямолінійна залежність між напруженням і деформацією є найпростішим наближенням вираження складного фізичного закону і досить добре

дотримується для багатьох матеріалів при напруженнях, що не перевищують визначеної для даного матеріалу границі.

Чисельне значення модуля E для різноманітних матеріалів визначають лабораторним шляхом. Ці значення для найчастіше застосовуваних матеріалів наведені у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Значення модуля пружності E і коефіцієнта Пуассона ν

Матеріал	E , МПа	ν
Сталь прокатна	$(2 - 2,1) \cdot 10^5$	0,3
Чавун сірий (білий)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^5$	0,3
Алюмінієві сплави	$0,7 \cdot 10^5$	0,31 – 0,35
Мідь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^5$	0,18
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^5$	0,16 – 0,2
Цегельна кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^5$	0,25
Деревина при розтяганні (стисканні)		
уздовж волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^5$	0,5
поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^5$	0,02
Гума	$(0,00007 - 7) \cdot 10^5$	0,47 – 0,5
СВАМ при співвідношенні поздовжніх і поперечних прошарків:		
1:1	$0,35 \cdot 10^5$	0,13
10:1	$0,58 \cdot 10^5$	-
Пробка	-	0
Парафін	-	0,5

3.3.2. Поперечна деформація

Поздовжня деформація супроводжується зміною поперечних розмірів: при розтяганні вони зменшуються, а при стисканні збільшуються. Зміна поперечних розмірів бруса при розтяганні і стисканні називається поперечною деформацією.

Розглянемо брус, що розтягується силою F (рис. 3.5). Позначимо через a один з поперечних розмірів бруса до деформації. При розтяганні цей розмір зменшиться на величину Δa , що назовемо абсолютною поперечною деформацією або абсолютним поперечним звуженням. Відношення абсолютного поперечного звуження до початкового розміру називається відносною поперечною деформацією

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (3.6)$$

Відносна поперечна деформація прямо пропорційна відповідній поздовжній деформації й протилежна їй за знаком (див. (1.27)):

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon, \quad (3.7)$$

де ν – коефіцієнт поперечної деформації (див. п. 1.8.3).

Цей коефіцієнт являє собою абсолютну величину відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.8)$$

Визначимо, у яких межах може змінюватися величина ν . Із бруса до його деформації виділимо двома поперечними і чотирма поздовжніми площинами кубик зі сторонами, що дорівнюють одиниці (рис. 3.6).

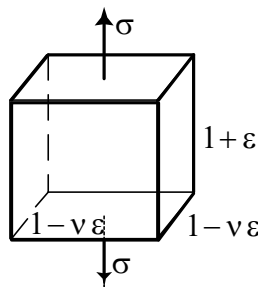


Рис. 3.6. Деформації елемента при його розтяганні

У результаті деформації кубик одержить нові розміри: висоту $(1 + \varepsilon)$, сторони основи $(1 - \nu \varepsilon)$. Початковий об'єм кубика $V = 1 \text{ см}^3$, а після деформації $V' = (1 + \varepsilon)(1 - \nu \varepsilon)^2$. Нехтуючи розмірами другого порядку малості, після перемножування одержимо

$$V' = 1 + \varepsilon(1 - 2\nu).$$

Відносна зміна об'єму кубика

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu).$$

Якщо врахувати (3.5), то

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu)$$

Вважаючи, що об'єм куба при розтяганні не може зменшуватися (він незначно збільшується або в граничному випадку залишається без зміни), одержимо

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon (1 - 2\nu) \geq 0, \\ (1 - 2\nu) \geq 0, \quad 2\nu \leq 1, \quad \nu \leq 0,5.$$

Таким чином, для різноманітних матеріалів значення коефіцієнта Пуассона знаходяться в межах $0 \leq \nu \leq 0,5$. Значення коефіцієнта Пуассона для деяких матеріалів наведені у табл. 3.1.

3.4. Визначення переміщень при розтяганні і стисканні

Визначення переміщень при відомих значеннях напружень полягає в інтегруванні системи диференціальних залежностей (1.20)-(1.25):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

3.4.1. Розтягання стержня силою на кінці

При розтяганні або стисканні (див. рис. 3.7, а також п. 1.7.1)

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \quad (3.9)$$

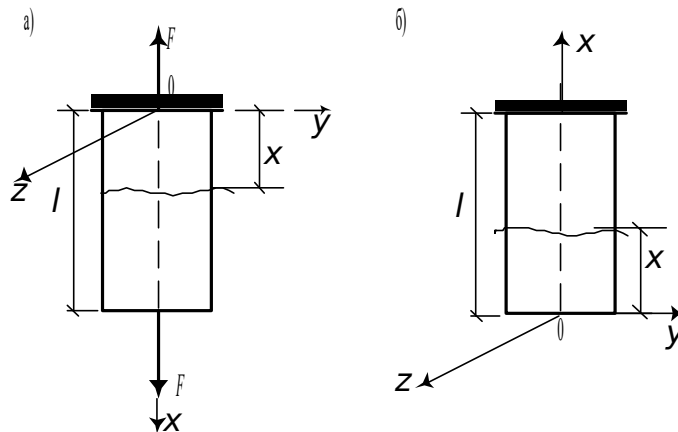


Рис. 3.7. До визначення переміщень у стержні при розтяганні або стисканні

На підставі закону Гуку (1.27), (1.28) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0. \end{aligned}$$

Прирівнюючи (1.20)-(1.25) і (1.27), (1.28), одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EA}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.11)$$

Інтегрування перших трьох рівнянь дає

$$u = \frac{Nx}{EA} + D, \quad v = -\frac{\nu Ny}{EA}, \quad w = -\frac{\nu Nz}{EA}. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.10) при цих значеннях u, v і w виконуються, отже, (3.12) – шуканий розв’язок. Жорсткі переміщення в напрямках осей Y, Z і жорсткі повороти навколо координатних осей під дією поздовжніх сил неможливі. Тому в другому і третьому рівняннях (3.11) постійні інтегрування прийняті такими, що дорівнюють нулю. Що стосується першого рівняння (3.12), то тут утримана тільки одна постійна D , тому що закріплення повинно перешкоджати тільки зсуву стержня в напрямку осі OX (рис. 3.7). Якщо стержень закріплений у початку координат, то за умовою $u=0$ при $x=0$, і постійна $D=0$. Якщо початок координат розташовано на вільному кінці (рис. 3.7), то

$$u = \frac{Nx}{EA} + D.$$

За умовою $u=0$ при $x=l$, тому постійна

$$D = -\frac{Nl}{EA}.$$

Переміщення v і w (3.12) не залежать від відстані до закріплення, тобто від розташування перерізу. На осі стержня вони дорівнюють нулю, а з віддаленням від осі зростають за абсолютною величиною. Знак мінус указує на напрямок переміщень, протилежний напрямку координатних осей OY і OZ (при додатних значеннях координат Y та Z). Переміщення u точок стержня в напрямку розтягання однакові в кожному поперечному перерізі (X фіксоване). Це означає, що при розтяганні плоска форма перерізу не спотворюється. Переріз переміщається як жорсткий по напрямку дії сили на величину, пропорційну відстані до закріпленого кінця. У випадку рис. 3.7, а найбільші переміщення співпадають з абсолютним подовженням стержня:

$$u_{x=l} = \Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

де N – нормальна сила, яка дорівнює силі F , що розтягує.

Якщо стержень розтягується декількома силами (рис. 3.8), прикладеними в різних перерізах, то в межах кожної ділянки, де нормальна сила має постійне значення, обчислення переміщень можна робити за формулами (3.12). Постійна D при цьому на різних ділянках має різні значення. Останні визначаються умовами сполучення ділянок між собою. Покажемо це.

$$F_1 + F_2 + F_3$$

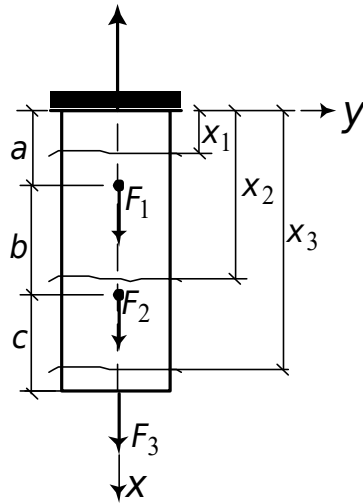


Рис. 3.8. Переміщення в стержні, навантаженому декількома силами

Переміщення U на ділянках стержня подаються рівностями

$$u_1 = \frac{N_1 x_1}{EA} + D_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$u_2 = \frac{N_2 x_2}{EA} + D_2, \quad a \leq x_2 \leq a+b;$$

$$u_3 = \frac{N_3 x_3}{EA} + D_3, \quad a+b \leq x_3 \leq a+b+c.$$

Тут $N_1 = F_1 + F_2 + F_3$; $N_2 = F_2 + F_3$; $N_3 = F_3$.

За умовою $u_1 = 0$ при $x_1 = 0$ (защемлення), звідси

$$D_1 = 0.$$

На межі між першою і другою ділянками при $x_1 = a, x_2 = a$ повинно бути $u_2 = u_1$, тобто

$$\frac{N_2 a}{EA} + D_2 = \frac{N_1 a}{EA},$$

звідки

$$D_2 = \frac{F_1 a}{EA}.$$

Аналогічно, за рівністю $u_3 = u_2$ при $x_2 = a+b$ і $x_3 = a+b$, тобто на межі між другою і третьою ділянками

$$\frac{N_3(a+b)}{EA} + D_3 = \frac{N_2(a+b)}{EA} + D_2,$$

звідки

$$D_3 = \frac{F_1 a + F_2(a+b)}{EA}.$$

Всі постійні знайдені, тепер можна визначити переміщення. Розподіл на ділянки при обчисленні переміщень потрібно робити й у тих випадках,

коли стержень має східчасту форму, тобто складається з окремих частин із різними площами поперечних перерізів (див. рис. 1.12).

3.4.2. Розтягання стержня під дією власної ваги

Припустимо, що складові напружень в аналізованій задачі (рис. 3.9) визначаються такими самими формулами (3.9), як і в стержні, що розтягується силою на кінці.

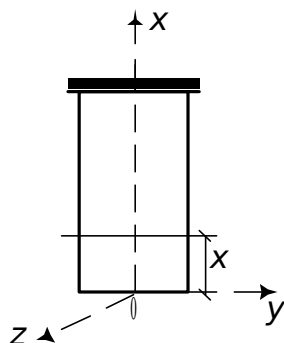


Рис. 3.9. До визначення переміщень у брусі під дією власної ваги

Нормальна сила в перерізі X дорівнює

$$N = \gamma x A,$$

де γ – об'ємна вага матеріалу стержня, A – площа поперечного перерізу.

Напруження в перерізі відповідно до (3.1) дорівнює

$$\sigma_x = \gamma x. \quad (3.13)$$

Отже, при розтяганні стержня власною вагою у поперечних перерізах виникають тільки рівномірно розподілені нормальні напруження. У будь-якій точці перерізу матеріал знаходиться в лінійному напруженому стані. Напруження σ_x змінюються за довжиною стержня відповідно до лінійного закону.

Використовуючи (1.27), (1.20) – (1.22) і (3.13), одержимо

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma x}{E}; \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}; \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.16)$$

Інтегруємо рівняння (3.14). У результаті знайдемо

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + f_0, \quad (3.17)$$

де f_0 – функція від координат Y і Z , що підлягає надалі визначенню.

Підставивши (3.17) у (1.23) і (1.24), одержимо

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.18)$$

звідки

$$v = -x \frac{\partial f_0}{\partial y} + v_0; \quad w = -x \frac{\partial f_0}{\partial z} + w_0, \quad (3.19)$$

де v_0 і w_0 є функціями координат Y і Z .

Підставивши (3.19) у рівняння (3.15) і (3.16), знайдемо:

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu \gamma x}{E}; \quad -x \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.20)$$

Оскільки v_0 і w_0 не залежать від X , рівняння (3.20) ми зможемо задовольнити, лише прийнявши

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\nu \gamma}{E}, \\ v_0 = 0; \quad w_0 = 0; \quad f_0 = \frac{\nu \gamma}{2E} (y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Підставивши вираз (3.19) для V й W у рівняння (1.25), знайдемо

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} - x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \quad (3.22)$$

а оскільки v_0 і w_0 не залежать від X , то повинні бути виконані умови

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0. \quad (3.23)$$

На підставі рівнянь (3.21) і (3.23) можемо написати загальні вирази для функцій u , v і w :

$$u = \frac{\gamma}{2E} [x^2 + \nu(y^2 + z^2)] + D, \quad (3.24)$$

$$v = -\frac{\nu \gamma x y}{E}, \quad (3.25)$$

$$w = -\frac{\nu \gamma z x}{E}. \quad (3.26)$$

На осі стержня $y = z = 0$

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + D, \quad (3.27)$$

$$v = w = 0. \quad (3.28)$$

Як і раніше (див. п. 3.4), жорсткі повороти навколо координатних осей під дією рівномірно розподіленого навантаження γA , що являє собою вага бруса, неможливі. Тому в рівняннях (3.25) і (3.26) постійні інтегрування дорівнюють нулю. У рівнянні (3.24) постійна D визначається з граничних умов: при $x = l$ $u = 0$ (див. рис. 3.9).

Площини поперечних перерізів при розтяганні власною вагою не залишаються плоскими, вони скривлюються. Перекручування перерізів не залежить від розташування їх уздовж довжини стержня (величина $v(y^2 + z^2)$ постійна і не залежить від X). Точки ж стержня, що лежать на осі X , мають лише вертикальні переміщення (3.27).

Як показує формула (3.27), подовження бруса (рис. 3.9) від власної ваги вдвічі менше того, що викликав би вантаж, що дорівнює вазі бруса і прикладений на його кінці.

Отримані формули (3.24)-(3.28) застосовні й у випадку стискання вертикально розташованих брусів, у яких опорним перерізом є нижній (рис. 3.10).

Вплив власної ваги на напруження і деформації при розтяганні або стисканні є істотним лише в тих випадках, коли довжина l розтягнутого бруса або висота h стиснутого є великими. Прикладами можуть служити високі кам'яні стовпи, заводські труби, стіни високих будинків і т. п. У цих випадках раціонально застосовувати бруси змінного перерізу. Форму їхньої бічної поверхні можна підібрати так, що у всіх поперечних перерізах будуть виникати однакові напруження. Такий брус називають брусом рівного опору при розтяганні або стисканні (рис. 3.10, б). Брус рівного опору є найбільш економічним із погляду витрати матеріалу, проте виготовлення його є важким внаслідок нелінійної бічної поверхні. Замість брусів рівного опору застосовують бруси у вигляді усічених пірамід (рис. 3.10, а) або східчасті (рис. 3.10, в).

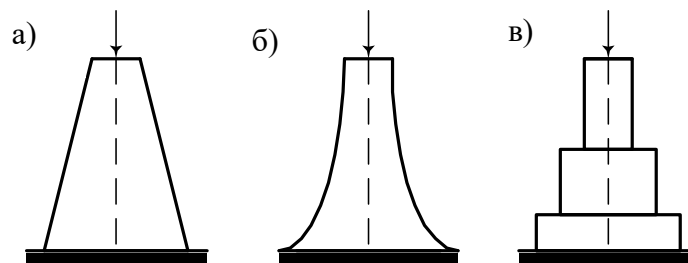


Рис. 3.10. Бруси змінного перерізу:
а – усічена піраміда; б – брус рівного опору; в – східчастий брус

3.5. Статично невизначні системи, що працюють на розтягання або стискання

Статично невизначними стержневими системами називаються системи, що мають число невідомих реакцій або зусиль у стержнях, яке перевищує число рівнянь рівноваги, що можна скласти для визначення цих невідомих. Для розв'язання таких задач необхідно скласти рівняння рівноваги і встановити, скільки є зайвих невідомих. Після чого скласти додаткові рівняння, виходячи з розгляду умов деформації системи.

3.5.1. Розрахунок статично невизначних систем на силові впливи

Нехай, наприклад, стержень AB постійного перерізу (рис. 3.11), виконаний з однорідного матеріалу, закріплений по кінцях, навантажений силою F в межах його довжини l .

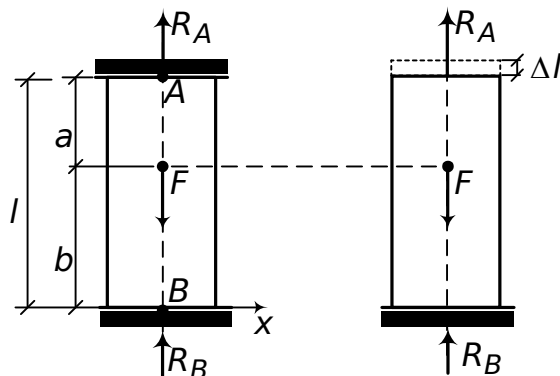


Рис. 3.11. До розрахунку статично невизначних систем на силові впливи
Від дії сили F в защемленнях A і B виникають опорні реакції R_A і R_B . Прийmemo їхні напрямки протилежними напрямку сили F . Складемо єдине рівняння рівноваги $\sum Y = 0$:

$$R_A + R_B = F.$$

Число невідомих перевищує число можливих рівнянь рівноваги на одиницю. Отже, система один раз статично невизначна.

Для її розв'язання складемо одне додаткове рівняння. Воно в даній задачі виражає таку думку: довжина бруса l не може змінитися, тому що він жорстко закріплений із двох боків, тобто

$$\Delta l = 0.$$

Відкинемо одне з защемлень, наприклад, верхнє, і заміниmo його дію на стержень реакцією R_A . У цій системі (тепер статично визначній), використовуючи принцип незалежності дії сил, знайдемо Δl :

$$\Delta l = \frac{R_A l}{EA} - \frac{F b}{EA} = 0.$$

Звідси визначимо

$$R_A = \frac{F b}{l}.$$

З рівняння рівноваги впливає

$$R_B = \frac{F a}{l}.$$

Реакції R_A і R_B визначені й отримані зі знаком плюс, що вказує на слушність обраного напрямку. Таким чином, розкрита статична невизначеність системи. Епюра поздовжніх сил будується звичайним способом із застосуванням методу перерізів (див. п. 1.7.1).

3.5.2. Розрахунок статично невизначних систем на

температурні впливи і неточність виготовлення

У статично визначних системах температурні впливи і неточність виготовлення елементів систем не викликають зусиль.

При зміні температури в статично невизначних системах виникають відмінні від нуля зусилля.

Покажемо це. Розглянемо сталевий брус (рис. 3.12, а), защемлений своїми кінцями в стіни, що вважаються нерухожими, так що довжина бруса l залишається незмінною.

Температура бруса підвищилася з t_1 до t_2 . Перевищення температури складає $t = t_2 - t_1$. Від підвищення температури брус прагне подовжи-

тися, але стіни перешкоджають цьому подовженню, давлять на кінці бруса і викликають у ньому стискальні напруження від реакції R_t .

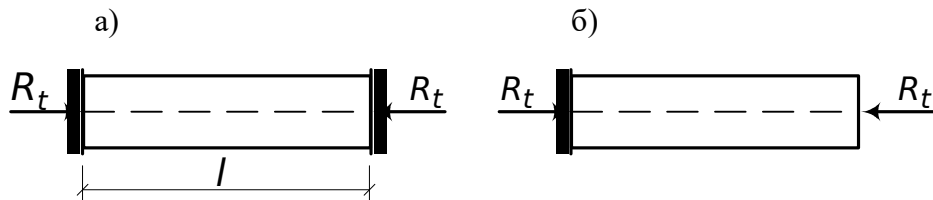


Рис. 3.12. До розрахунку статично невизначних систем на температурні впливи

Припустимо, що права стіна відкинута (рис. 3.12, б). Тоді подовження бруса, викликане температурою, дорівнює

$$\Delta l_t = \alpha t l,$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу бруса (для сталі $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$).

У дійсності стіна у правого кінця бруса є. Вона стискає брус силою R_t , укорочуючи його:

$$\Delta l_R = \frac{R_t l}{EA}.$$

Подовження Δl_t й укорочення Δl_R повинні бути рівними, тому що в дійсності довжина бруса не змінюється:

$$\alpha t l = \frac{R_t l}{EA},$$

звідси

$$R_t = \alpha t EA.$$

Напруження, викликане зміною температури бруса, складає

$$\sigma_t = \frac{R_t}{A} = \alpha t E.$$

При виготовленні конструкції неминучі невеличкі неточності, наприклад, у довгих елементах. У статично визначних системах такі

неточності не викликають ніяких додаткових напружень. Цілком інша справа, якщо система статично невизначна. Нехай брус підвішений на трьох стержнях (рис. 3.13), причому в результаті неточності виготовлення середній стержень 2 зроблений коротше на величину δ .

Щоб зібрати конструкцію і з'єднати з брусом, середній стержень необхідно розтягнути на величину Δl_2 , а крайні стержні стиснути на величину Δl_1 так, щоб нижні кінці усіх стержнів розташувалися на одній горизонталі. Звідси одержимо рівняння спільності деформацій:

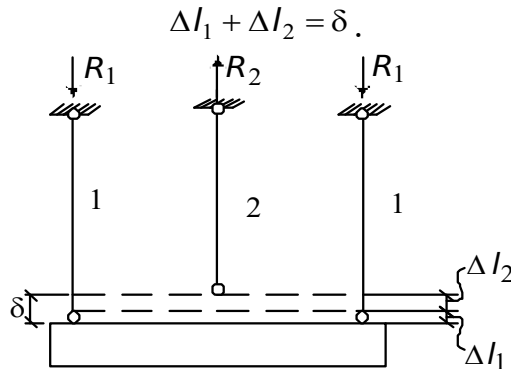


Рис. 3.13. До розрахунку статично невизначних систем на неточність складання

При складанні в стержнях з'являться зусилля, хоча зовнішнього навантаження немає: у крайніх стержнях – стискальні R_1 , у середньому – розтягувальні R_2 . Складемо рівняння статички $\sum Y = 0$: $R_2 - 2R_1 = 0$.

Виразимо подовження через зусилля:

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} + \frac{R_2 l}{E_2 A_2} = \delta.$$

Розв'язуючи спільно рівняння статички і рівняння сумісності, знайдемо

$$R_1 = \frac{\delta}{l \left[\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]};$$

$$R_2 = \frac{2\delta}{l \left[\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}.$$

3.6. Відомості про будівельні матеріали несучих конструкцій

До основних будівельних матеріалів, із яких виготовляються несучі конструкції, належать сталь, алюміній і його сплави, залізобетон, деревина, пластмаси й ін.

Сталю називають сплав заліза з вуглецем і головними добавками марганцю (його позначають буквою Г), кремнію (С). Для поліпшення її властивостей сталь легують (з'єднують, зв'язують) добавками хрому (Х),

нікелю (Н), міді (Д), молібдену (М), титану (Т), ванадію (Ф), цирконію (Ц). Шкідливими домішками є сіра і фосфор.

Сталі маркують буквами і цифрами; вміст вуглецю в сотих частках процента вказують першими двома цифрами, легуючі добавки позначають буквами, а їхній вміст понад 1,5 % ставлять після відповідної букви в цілих одиницях. Вміст добавок менше 0,3 % не фіксують. Наприклад, низьколегована сталь марки 23Х2Г2Т містить 0,23 % вуглецю; хрому і марганцю від 1,5 до 2 %; титану від 0,3 до 1,5 %. Вміст інших легуючих добавок до 0,3 % не показано.

Залежно від призначення і характеристик, що гарантуються, вуглецеву сталь поділяють на три групи: група А гарантує механічні властивості сталі; Б – її хімічний склад; В – механічні властивості і хімічний склад.

За ГОСТом 380-71 марку вуглецевої сталі позначають буквами Ст; порядковими номерами 0, 1 – 6 характеризують її хімічний склад і механічні властивості; указують групу сталі – Б, В (групу А не вказують); позначають ступінь розкислення – кп (кипляча сталь, відразу розлита з ковша в наложниці), пс (напівспокійна сталь; займає проміжне становище за тривалістю витримки), сп (спокійна сталь, витримана якийсь час у ковшах); пишуть категорію від нормованих механічних властивостей – від 1-ї до 6-ї (першу категорію не вказують); при підвищеному вмісті марганцю після позначення марки ставлять букву Г. Таким чином, марка вуглецевої сталі ВСт3сп2 означає: сталь 3, спокійна, 2-ї категорії, групи В; ВСт3Гпс – сталь 3 із підвищеним вмістом марганцю, напівспокійна, групи В.

У будівельних нормах для спрощення маркування будівельні та арматурні сталі поділяють на умовні класи міцності (класи сталі): будівельні – С38/23... С85/75; арматурні – А-1...А-V, Ат-IV...Ат-VI, В-I, В-II, Вр-II, К-7. Цифри в індексах класів будівельних сталей позначають: чисельник – мінімальний тимчасовий опір на розрив за ГОСТом, кгс/мм²; знаменник – мінімальна границя текучості за ГОСТом, кгс/мм². Букви в індексах класів арматурних сталей позначають: Ат – термічно зміцнена, В (волочіння) – дріт гладкий, Вр – дріт періодичного профілю (рифлений), К – канат.

Будівельні сталі застосовують переважно у вигляді прокатних профілів, листів; арматурні – у вигляді стержнів або дроту, одержуваного волочінням.

Алюміній і сплави відіграють другорядну роль і застосовуються в тих випадках, коли це економічно доцільно або неможливе застосування сталі. Алюміній легше за сталь майже в 3 рази, міцність його сплавів мало їй поступається, але модуль пружності також майже в 3 рази менше, що визначає велику його деформативність у конструкціях.

Для будівельних конструкцій застосовують сплави алюмінію з міддю (АД1М, АД31Т1), із марганцем (АМц), магнієм (АМг2М, АМг2П), сплави з добавками цинку (1915Т) і міді (1925Т). Букви після позначення марки сплаву позначають його стан: М – відпалений (м'який), П – напівзагартований (шляхом витягування), Т – загартований (твердий), Т1 – загартований і штучно зістарений при підвищеній температурі.

Залізобетон – це комплексний матеріал, що вдало сполучає два різнорідних матеріали: сталь і бетон. Тривала і надійна спільна робота сталі і бетону забезпечується їхніми фізико-механічними властивостями, а також виконанням правил сполучення цих матеріалів (при конструюванні залізобетонних елементів).

Бетон добре опирається стисканню і набагато гірше – розтягання. Тому у всіх залізобетонних конструкціях розтягнуті, а іноді і стиснуті від навантаження зони бетону посилюють сталлю, яка добре опирається розтягання (і стисканню).

Деревина – найдавніший будівельний матеріал. У головних елементах будівельних конструкцій використовують хвойну деревину, тому що вона містить менше дефектів, ніж листяна деревина, а також містить смоли, що чинить кращий опір зволоженню і загниванню. З хвойної деревини найбільш високою якістю відрізняється соснова деревина. Серед листяних порід виділяється дубова деревина, що має підвищену міцність і стійкість проти загнивання, але більшу вартість.

Пластмаси. Конструкційні пластмаси використовують у складі елементів несучих і огорожуючих конструкцій. З найбільш міцних склопластиків виконують головні елементи несучих конструкцій. Прозорі склопластики застосовують в елементах огорожуючих конструкцій будівель. Надлегкі пінопласти використовують у середніх прошарках легких покриттів і стін.

3.7. Випробування матеріалів на розтягання і стискання

Щоб мати можливість судити про міцність конструкцій при навантаженні, потрібно вивчити головні властивості застосовуваних матеріалів і їхнє поведіння при збільшенні навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтягання виготовляють у вигляді стержнів круглого або прямокутного перерізу. Круглі зразки мають на кінцях стовщення (голівки), а плоскі – уширення. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань даного матеріалу, зроблених на різноманітних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні

співвідношення розмірів. Ці співвідношення і самі розміри встановлені стандартом (ГОСТ 1497-84).

3.7.1. Діаграми розтягання пластичних і крихких матеріалів

Розглянемо спочатку результати випробувань на розтягання зразків із низьковуглецевої сталі (рис. 3.14). З цієї групи сталей найбільше застосування для будівельних конструкцій знаходять сталі марок Ст3 і Ст3ГПс.

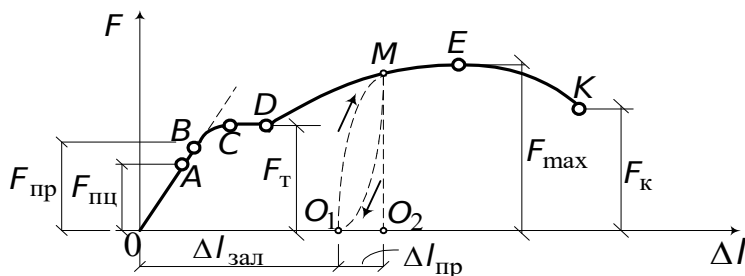


Рис. 3.14. Діаграма розтягання низьковуглецевої сталі

У початковій стадії навантаження до точки **A** діаграма розтягання являє собою похилу пряму, що вказує на пропорційність між навантаженням і деформацією – справедливість закону Гука (3.5). Навантаження, при якому ця пропорційність ще не порушується, на діаграмі позначено через $F_{пц}$ і використовується для обчислення напруження $\sigma_{пц}$, до якого існує прямо пропорційна залежність між навантаженням і деформацією:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка.

Для сталі Ст3 границя пропорційності приблизно дорівнює $\sigma_{пц} = (195 - 200)$ МПа.

Зона **OA** називається зоною пружності. Тут виникають тільки пружні, дуже незначні деформації (0,1 %). Дані, що характеризують цю зону, дозволяють визначити значення модуля пружності **E**.

Після досягнення границі пропорційності деформації починають зростати швидше, ніж навантаження, і діаграма стає криволінійною. На цій ділянці в безпосередній близькості від точки **A** знаходиться точка **B**, що відповідає границі пружності. Границею пружності $\sigma_{пр}$ називається максимальне напруження, при якому в матеріалі не виявляється ознак пластичної (залишкової) деформації (0,001 – 0,03%). Границя пружності характеризує початок переходу від пружної деформації до пластичної.

У більшості металів значення границі пропорційності і границі пружності незначно відрізняються одне від одного. Для сталі Ст3 $\sigma_{пр} = (205 - 210)$ МПа.

При подальшому навантаженні криволінійна частина діаграми переходить у майже горизонтальну ділянку **CD** – площадку текучості. Тут

деформації зростають практично без збільшення навантаження. Навантаження F_T , що відповідає точці D , використовується при визначенні фізичної границі текучості:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

Фізичною границею текучості σ_T називається найменше напруження, при якому зразок деформується без помітного збільшення навантаження, що розтягує.

Границя текучості є однією з головних механічних характеристик міцності металів. Для Ст3 $\sigma_T = (220 - 250)$ МПа. При цьому відносна деформація складає $\varepsilon = (\Delta l / l) \cdot 100\% \approx 2\%$.

Зона BD називається зоною загальної текучості. У цій зоні значно розвиваються пластичні деформації. При цьому у зразках зростає температура, змінюються електропровідність і магнітні властивості. Особливо наочно фронт поширення пластичної деформації уздовж зразка можна спостерігати при випробуванні плоских полірованих зразків. На поверхні таких зразків у момент виникнення пластичної деформації з'являються темні похилі смуги, що, як правило, із віссю зразка складають кути $45^\circ - 60^\circ$ (лінії Людерса-Чернова). Ці лінії виникають унаслідок необоротних зсувів, що відбуваються у кристалах під дією невеличких дотичних напружень. Описані явища викликають зміну внутрішньої структури металу, що призводить до його зміцнення. Діаграма після зони текучості знову стає криволінійною. Зразок спроможний сприймати зростаюче зусилля до значення F_{\max} – точка E на діаграмі. Зусилля F_{\max} використовується для обчислення тимчасового опору:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A}.$$

Напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке передуює руйнуванню зразка, називається тимчасовим опором.

Для сталі марки Ст3 тимчасовий опір $\sigma_B = (370 - 470)$ МПа. Відносна деформація при цьому складає $\approx 16\%$.

Зона DE називається зоною зміцнення. Тут подовження відбувається рівномірно за всією довжиною, початкова циліндрична форма зразка зберігається, а поперечний переріз змінюється незначно і також рівномірно. При максимальному зусиллі на зразку в найбільш слабкому місці виникає локальне зменшення поперечного перерізу – шийка (а іноді і дві). Подальша деформація відбувається в цій зоні зразка. Переріз у середині шийки продовжує швидко зменшуватися, але напруження в цьому перерізі увесь час зростають, хоча зусилля, що розтягує, убуває. Поза областю шийки напруження зменшуються, і тому подовження іншої частини зразка не відбувається. Нарешті, у точці K зразок руйнується. Сила, що відповідає точці K , називається руйнуючою, а напруження – істинною границею міцності, що дорівнює

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_k},$$

де A_k – площа поперечного перерізу в місці розриву.

Зона EK називається зоною місцевої текучості. Істинне напруження у момент розриву (у шийці) у зразку зі сталі Ст3 досягає 900 – 1000 МПа.

Крім показаних характеристик міцності, за результатами випробувань зразка (рис. 3.14) визначають і характеристики пластичності.

Відносне подовження після розриву

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

де l_k – розрахункова довжина робочої частини зразка після розриву;

l_0 – початкова довжина робочої частини зразка ($l_0/d_0 = 5 - 10$);

d_0 – початковий діаметр зразка.

Для сталі марки Ст3 характеристика пластичності $\delta = (25 - 27)\%$.

Іншою характеристикою пластичності є відносне звуження після розриву ψ (%):

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%,$$

де A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка.

Для сталі марки Ст3 $\psi = (60 - 70)\%$.

Якщо зразок після навантаження, що відповідає границі текучості (рис. 3.14), розвантажити, то процес розвантаження буде зображений лінією MO_1 , майже паралельною початковій пружній ділянці діаграми. Подовження, отримане зразком до початку розвантаження, при розвантаженні цілком не зникає. Залишкове подовження $\Delta l_{\text{зал}}$ (відрізок OO_1 на рис. 3.14) називається пластичним подовженням ($\Delta l_{\text{пр}}$ – пружне подовження). Отже, за границею пружності повне подовження зразка складається з двох частин – пружної і пластичної:

$$\Delta l = \Delta l_{\text{пр}} + \Delta l_{\text{зал}},$$

а до границі пружності – тільки з чисто пружної: $\Delta l_{\text{зал}} = 0$.

Якщо після розвантаження зразка його відразу знову навантажити, то процес повторного навантаження зобразиться лінією O_1M , яка майже збігається з лінією MO_1 , що описує процес розвантаження. Обидві лінії (розвантаження і навантаження) утворюють петлю – петлю гістерезису. Площа петлі гістерезиса відповідає втратам механічної енергії за один цикл, що дуже малі. Ці втрати називаються внутрішнім (молекулярним) тертям.

При подальшому навантаженні (після точки M) крива продовжується так, начебто не було проміжного розвантаження. Отже, у зразка після попереднього деформування поліпшилися пружні властивості – підвищилися границя пропорційності і границя пружності, але при цьому погіршилися пластичні властивості – зменшилося залишкове подовження

після розриву, тобто матеріал став більш крихким.

Явище підвищення пружних властивостей матеріалу в результаті попереднього пластичного деформування називається наклепом.

Слід зазначити, що після попереднього витягування металу в деякому напрямку його механічні властивості змінюються при роботі на розтягання тільки в тому самому напрямку; при роботі на стискання у тому самому напрямку його властивості майже не змінюються. Остання обставина має велике значення для матеріалу, що піддається дії змінних напружень.

Діаграма розтягання $F = f(\Delta l)$ (див. рис. 3.14) характеризує властивості зразка, тому що залежить від його розмірів. Для оцінки механічних властивостей матеріалу діаграму розтягання перебудовують у координатах “напруження – деформація”. Для цього всі ординати поділяють на початкову площу поперечного перерізу A_0 , а всі абсциси – на початкову довжину робочої частини l_0 . У результаті одержуємо діаграму напружень $\sigma = f(\epsilon)$, що має той самий вигляд, що і діаграма $F = f(\Delta l)$, тому що A_0 і l_0 постійні. Ця діаграма є умовною, оскільки при її побудові не враховується зміна значень A_0 і l_0 в процесі випробування. Істинні напруження в кожний момент навантаження будуть більше умовних. Помітне відхилення істинних напружень від умовних відбувається після границі текучості, тому що звуження перерізу стає більш значним. Діаграми істинних напружень будуються, як правило, для теоретичних досліджень, наприклад, при розв’язанні задач утворення великих деформацій. Умовні діаграми напружень використовуються на практиці для визначення механічних характеристик матеріалу $\sigma_{пц}$, $\sigma_{уп}$, σ_T , σ_B , σ_K , δ , ψ , а також модуля пружності E .

Діаграма розтягання низьколегованої сталі зображена на рис. 3.15. Аналогічну діаграму мають і інші пластичні матеріали, наприклад, червона мідь, сплави алюмінію.

На початку діаграми між навантаженням і деформацією також дотримується прямо пропорційна залежність (закон Гука). Точка, де ця залежність порушується, відповідає границі пропорційності. Після точки **A** прямолінійна ділянка діаграми плавно переходить у криволінійну – зону пластичних деформацій.

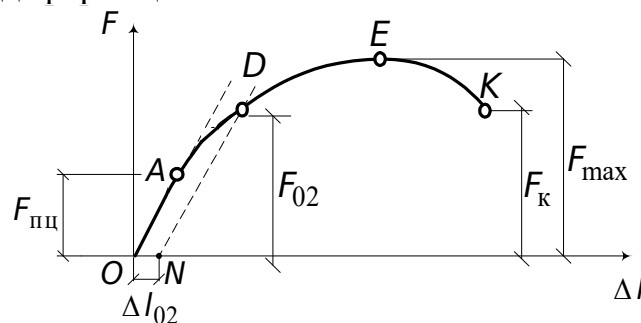


Рис. 3.15. Діаграма розтягання низьколегованої сталі

На діаграмі розтягання немає площадки текучості. Тому замість фізичної границі текучості визначають умовну границю текучості σ_{02} (точка D на рис. 3.15) – напруження, при якому залишкове подовження досягає 0,2 % робочої довжини зразка:

$$\sigma_{02} = \frac{F_{02}}{A_0}.$$

Для визначення навантаження F_{02} обчислюється значення залишкового подовження Δl_{02} , виходячи з робочої довжини зразка. Відрізок, що відповідає залишковій деформації Δl_{02} , відкладається управо від точки O . З точки N проводиться пряма, паралельна OA , до перетинання з діаграмою розтягання. При наближенні до максимального навантаження на зразку з'являється місцеве звуження (точка E). Після точки E навантаження починає зменшуватися. При навантаженні F_k зразок руйнується. Слід зазначити, що ділянка діаграми EK у низьколегової сталі (рис. 3.14) довшя, ніж у низькоуглецевої. Це вказує на те, що низьколегована сталь має меншу пластичність, тому шийка в ній є менш вираженою. Механічні ж характеристики міцності вище в низькоуглецевої, ніж у низькоуглецевої сталі.

При розтяганні зразків із крихкого матеріалу (чавуну) на діаграмі (рис. 3.16) майже не утворюється прямолінійної ділянки: скривлення лінії графіка починається при порівняно низьких напруженнях, але оскільки деформації в цьому випадку малі, відхилення від закону Гука незначне.

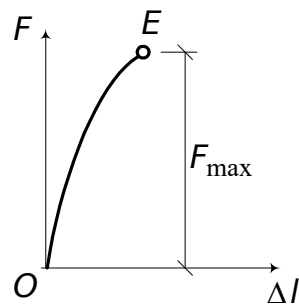


Рис. 3.16. Діаграма розтягання чавуну

Розрив зразків з крихких матеріалів відбувається майже раптово при дуже малих подовженнях ($\approx (0,4 - 1)\%$ від розрахункової довжини зразка).

Характер руйнування чавунного істотно відрізняється від руйнування сталевого зразка. Руйнування чавунного зразка відбувається в результаті відриву по площадці, перпендикулярній до напрямку сили, що розтягує. На поверхні зламу видно грубозернисту структуру матеріалу.

3.7.2. Діаграми стискування різних матеріалів

Якщо по кінцях прямого бруса прикладені сили, спрямовані уздовж його осі назустріч одна одній, то в брусі виникає стискування. Довжина бруса повинна бути не більш ніж у п'ять-шість разів більше меншого з його поперечних розмірів, щоб не виникало поздовжнього згинання.

Випробуванню на стискання піддають короткі зразки звичайно круглого або квадратного перерізу. Зразок поміщають між опорними плитами преса, що, зближуючись, стискають його. Але на результат досліду сильно впливає тертя, що виникає між основами зразка й опорними плитами преса. Стиснутий у поздовжньому напрямку зразок прагне розширитися в поперечних напрямках, проте біля кінців зразка тертя перешкоджає такому розширенню.

Для зменшення впливу тертя роблять змащення мастилом або парафіном. При цьому границя міцності утворюється дещо нижче порівняно зі зразками, випробовуваними без змащення. Таким чином, одержувана дослідно границя міцності є значною мірою умовною величиною, тому впроваджені стандарти.

Крихкі матеріали, наприклад, чавун (рис. 3.17), при випробуванні на стискання без змащення торців руйнуються в основному від зсуву по площадках із найбільшими дотичними напруженнями (рис. 3.17, б). Діаграма із самого початку має майже лінійну залежність (рис. 3.17, а). На цій ділянці діаграми форма і розміри зразка змінюються незначно. При наближенні до максимального навантаження крива діаграми стає більш пологою, і зразок приймає злегка бочкоподібну форму.

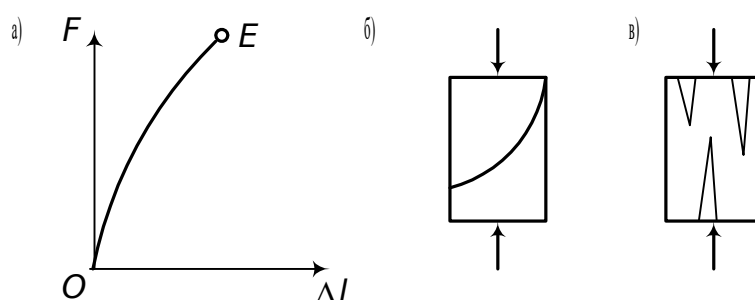


Рис. 3.17. Діаграма стискання чавуну

При добре змащених торцях руйнування зразків із крихких матеріалів супроводжується утворенням поздовжніх тріщин (рис. 3.17, в). Причиною їхньої появи є нерівномірний розподіл зусиль по поверхні зіткнення зразка з плитою, що при великих деформаціях викликає перекиє елементарних часток усередині зразка. У результаті з'являються зусилля, що відривають, у перерізах, паралельних осі бруса.

Більшість крихких матеріалів (бетон, камінь) руйнуються при стисканні так само, як чавун, і мають подібну діаграму. Крихкі матеріали опираються стисканню значно краще, ніж розтягання. Наприклад, у сірого чавуну границя міцності на стискання дорівнює 560–900 МПа, а на розтягання – 120–190 МПа, тобто приблизно в 4-5 разів менше.

Зразки з пластичних матеріалів – сталі, свинцю, міді (рис. 3.18) – при стисканні значно укоротшуються, сильно розширюючись у поперечному напрямку, але тріщин, характерних для зсуву, у них не спостерігається.

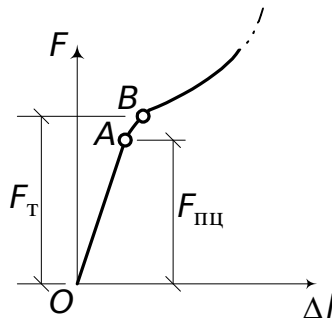


Рис. 3.18. Діаграма стискання низьковуглецевої сталі

Початкова ділянка діаграми є прямолінійною – до точки *A* (рис. 3.18). Кут нахилу збігається з кутом нахилу аналогічної ділянки діаграми розтягання. Це свідчить про те, що модуль пружності в сталі при розтяганні і стисканні можна приймати однаковим. Після точки *A* діаграма плавно переходить у криву, подібну до діаграми розтягання. Площадка текучості тут виражена слабо. При подальшому навантаженні, коли розвиваються значні пластичні деформації, зразок сплющується, приймаючи бочкоподібну форму. Звичайно на цьому випробування закінчують, тому що зразок зруйнувати не вдається, як не вдається визначити і границю міцності. Значення границі пропорційності і границі текучості при розтяганні і стисканні практично однакові.

Розглянемо ще діаграму стискання деревини (рис. 3.19, а). Деревина належить до анізотропних матеріалів, опірність яких зовнішньому навантаженню залежить від розташування волокон при випробуванні.

При стисканні зразка уздовж волокон (крива 1 на рис. 3.19, а) на ділянці *OA* деревина працює майже пружно, і зростання деформацій фактично відбувається пропорційно збільшенню навантаження.

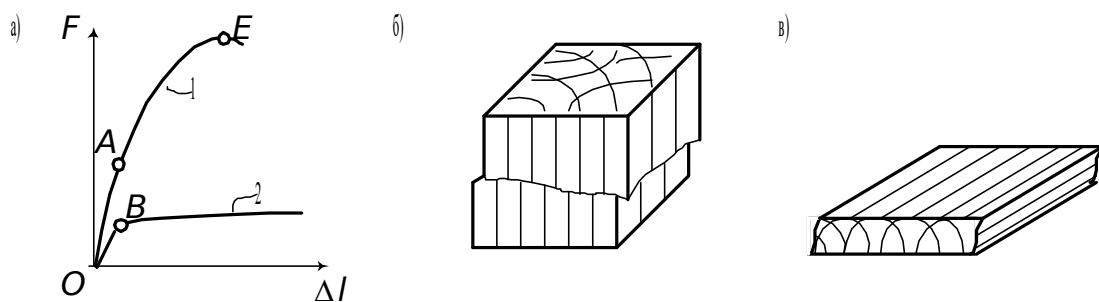


Рис. 3.19. Діаграма стискання деревини уздовж (1) і поперек (2) волокон

При подальшому збільшенні навантаження деформації починають зростати швидше, ніж зусилля. Це вказує на пружно-пластичну область роботи матеріалу. Руйнування зразка відбувається при навантаженні F_{\max} (точка *E*) з утворенням характерної складки (рис. 3.19, б).

При стисканні зразка поперек волокон до невеличкого навантаження (точка *B* на кривій 2 рис. 3.19, а), що відповідає границі пропорційності, між навантаженням і деформацією існує лінійна залежність. Потім деформації швидко збільшуються, а навантаження зростає незначно. У результаті зразок спресовується – ущільнюється. Руйнуюче навантаження визначається умовно. Воно відповідає деформації стискання зразка на $1/3$ своєї початкової висоти.

Опір деревини стисканню уздовж волокон у 8-10 разів більше від опору поперек волокон.

На закінчення наведемо механічні характеристики (при розтяганні і стисканні) найчастіше застосовуваних у будівельних конструкціях матеріалів (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Механічні характеристики деяких будівельних матеріалів

Матеріал	σ_B , МПа		σ_T (σ_{02}), МПа	δ , %	Ψ , %
	при розтяганні	при стисканні			
Ст3	370-470	-	220-250	23-27	60-70
О9Г2, 17ГС, 14Г2	450-520	-	310-350	21-23	-
Чавун сірий С4	120-380	500-1200	-	1-1,4	-
Дюралюміній Д16	230-465	-	100-350	8-13	30-15
Бетон	0,14-2,5	0,95-0,43	-	-	-
Цеглина	0,7-3	7,5-100	-	-	-
Деревина уздовж волокон	25-34	20-33	-	-	-
СВАМ					
1:1	480	420	-	1,4-2	-
10:1	900	-	-	-	-

3.8. Вплив різноманітних факторів на механічні характеристики матеріалів

Описані вище випробування матеріалів відбуваються при нормальних умовах, тобто при температурі 20°C , безперервному і плавному переміщенні захватів машини зі швидкістю не більше 10 мм/хв. Проте існують різноманітні умови, у яких доводиться працювати матеріалу будівельних конструкцій. Наприклад, при підвищених або знижених температурах, при дії радіоактивних, особливо нейтронних проникаючих випромінювань та ін. Зрозуміло, що механічні властивості матеріалів будуть змінюватися і залежати від умов експлуатації конструкцій, елементів машин і механізмів.

3.8.1. Вплив температури

При підвищенні температури в більшості матеріалів механічні характеристики міцності зменшуються, а при зниженні температури збільшуються. Наприклад, границю текучості сталі марки Ст3 залежно від температури можна визначити так:

$$\sigma_T(T) = \gamma_S \sigma_T(20^\circ\text{C}),$$

де T – температура, $^\circ\text{C}$;

γ_S – вибирається відповідно до табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Залежність коефіцієнта γ_S від температури

Кое- фіцієнт	Температура, $^\circ\text{C}$							
	20	100	200	400	500	600	700	750
γ_S	1	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,25	0

Як очевидно з табл. 3.3, при $T = 750^\circ\text{C}$ границя текучості $\sigma_T = 0$.

Залежність модуля пружності будівельної сталі марки Ст3 від температури показана на рис. 3.20.

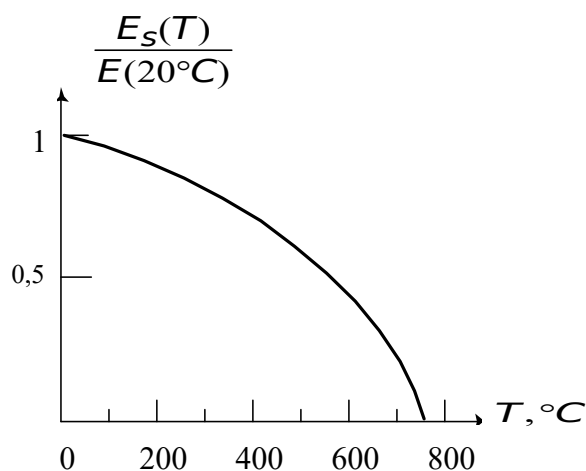


Рис. 3.20. Залежність модуля пружності Ст3 від температури

При мінусових температурах у сталей збільшується їхня крихкість: при $T < -45^\circ\text{C}$ Ст3 стає крихкою. Ця властивість називається хладноламкістю.

Коефіцієнт Пуассона сталі марки Ст3 мало залежить від температури і дорівнює приблизно 0,28-0,33.

3.8.2. Вплив швидкості деформації

Швидкість навантаження $\dot{\epsilon}$, отже, швидкість деформування впливають на механічні характеристики матеріалів. З їхнім збільшенням у матеріалів збільшуються механічні характеристики міцності, особливо пластмас і інших органічних матеріалів. На рис. 3.21 зображена діаграма напружень низьковуглецевої сталі при статичному і динамічному навантаженнях.

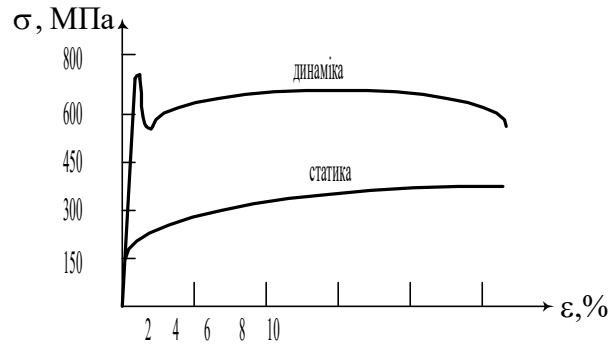


Рис. 3.21. Вплив на діаграму напружень низьковуглецевої сталі статичного і динамічного навантаження (середня швидкість деформації 970 1/с)

Порівняння цих діаграм показує, що границя текучості і тимчасовий опір сталі вище, а модуль пружності при динамічному випробуванні практично не змінюється.

Залежності σ_T , σ_B , δ низьковуглецевої сталі від середньої швидкості деформації показані на рис. 3.22.

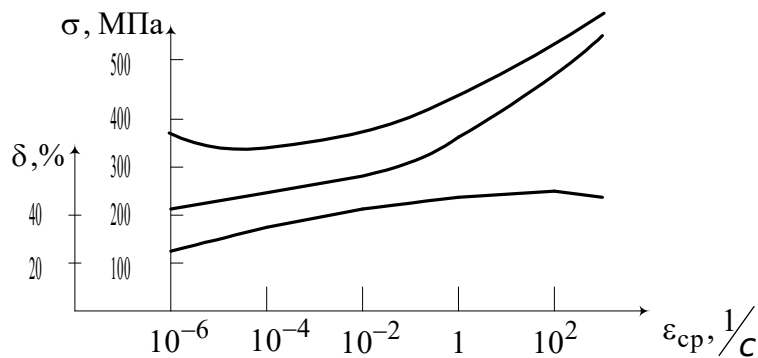


Рис. 3.22. Вплив швидкості деформації на механічні характеристики низьковуглецевої сталі

Графіки на рис. 3.22 також свідчать про те, що границя текучості σ_T і тимчасовий опір σ_B вище при динамічному навантаженні порівняно зі статичним.

3.8.3. Вплив технологічних факторів

Механічні характеристики сталі, навіть одного складу, залежать від способу її одержання й опрацювання. При литті можливість утворення різноманітних дефектів у вигляді пустот, раковин і вкраплень збільшується. Це призводить до зниження механічних характеристик міцності сталі.

Прокатка змінює структуру сталі – робить її анізотропною. При цьому значно змінюються механічні властивості в напрямку прокатки –

сталь стає більш міцною. В інших напрямках механічні властивості істотно відрізняються від властивостей у напрямку прокатки.

Волочіння являє собою витягування з обтисненням. Вироби, отримані таким способом, мають високі міцнісні властивості.

Існують і інші способи технологічної обробки сталі: токарська обробка, обробка поверхні роликми, хромуванням та ін. Всі ці способи спрямовані на те, щоб поліпшити міцнісні властивості металів.

3.9. Потенційна енергія деформації і робота, що витрачається на розтягання стержня

У пружній стадії після розвантаження деформованих тіл їхній початковий об'єм і форма цілком відновляються. Це вказує на наявність у навантаженому тілі деякого запасу енергії – потенційної енергії деформації.

Обчислимо роботу, що витрачається на розтягання призматичного стержня, закріпленого верхнім кінцем і навантаженого на нижньому кінці силою F (рис. 3.23, б). Залежність між силою, що розтягує, і подовженням зобразимо на діаграмі похилою прямою (рис. 3.23, а).

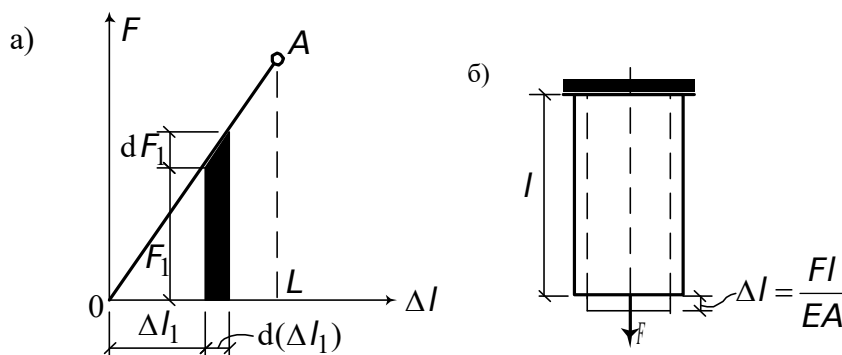


Рис. 3.23. До визначення потенційної енергії деформації

Нехай у деякий момент навантаження сила, що розтягує, дорівнює F_1 , а подовження Δl_1 , причому $F_1 = K \Delta l_1$, де $K = F/\Delta l$ – кутовий коефіцієнт.

Силі, що розтягує, дамо нескінченно мале збільшення dF_1 , тоді стержень одержить нескінченно мале подовження $d(\Delta l_1)$, і сила F_1 здійснить на переміщенні $d(\Delta l_1)$ роботу

$$F \cdot d(\Delta l_1).$$

Роботою сили dF_1 на переміщеннях $d(\Delta l_1)$ нехтуємо як нескінченно малою величиною другого порядку.

Тоді робота, що витрачається на розтягання зразка у пружній стадії, дорівнює

$$A = \int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1) = K \int_0^{\Delta l} \Delta l_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.29)$$

Ця робота зображується площею трикутника OAL (рис. 3.23, а).

При прийнятих передумовах витрачена на розтягання зразка робота цілком переходить у потенційну енергію. Втратами, що виникають при цьому, через їхню малість нехтуємо. Тоді

$$A = W = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.30)$$

До формули (3.30) входять скінченні величини сили і деформації.

Підставивши у (3.30) замість Δl його значення (див. п. 3.4 і рис. 3.23), знайдемо

$$W = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (3.31)$$

Формулою (3.31) можна користуватися тільки в тому випадку, коли поздовжня сила і площа поперечного перерізу постійні.

Питома потенційна енергія, тобто енергія, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює

$$u = \frac{W}{V} = \frac{F^2 l}{2EA} \frac{1}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (3.32)$$

Для визначення роботи, що витрачається на розтягання стержня за границею пропорційності, можна поширити ті самі міркування на всю діаграму розтягання (рис. 3.24).

З наведених раніше міркувань можна стверджувати, що робота, витрачена на розрив зразка, дорівнює повній площі діаграми розтягання:

$$A = \eta F_{\max} \Delta l, \quad (3.33)$$

де η – коефіцієнт заповнення діаграми; для сталі марки Ст3 $\eta = 0,85 - 0,87$.

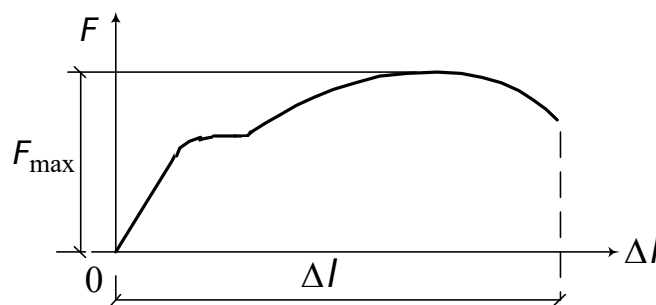


Рис. 3.24. До визначення роботи, що витрачається на розтягання стержня за границею пропорційності

3.10. Методи розрахунку будівельних конструкцій

3.10.1. Метод граничних станів

Цей метод був розроблений проф. М.С. Стрілецьким і почав використовуватись з 1955 р. За цим методом на сьогодні розраховують усі конструкції промислових і цивільних будівель і споруд, мости та ін.

Граничним вважається стан, при якому конструкція перестав задовольняти експлуатаційні вимоги, запропоновані у процесі зведення будівель і споруд.

Розрізняють дві групи граничних станів: перша – непридатність до експлуатації з причин втрати несучої спроможності; друга – непридатність до нормальної експлуатації відповідно до передбачених технологічних або побутових умов.

У правильно запроектованому спорудженні не має виникати жодного з показаних граничних станів, тобто повинна бути забезпечена його надійність.

Надійністю називається спроможність об'єкта зберігати в процесі експлуатації якість, закладену при проектуванні.

Фактори, від точного урахування яких залежить рівень надійності спорудження або окремого його елемента, такі:

- навантаження й інші впливи;
- механічні властивості матеріалів;
- геометричні параметри конструктивних елементів;
- умови роботи;
- ступінь відповідальності спорудження й ін.

3.10.1.1. Навантаження і впливи

Нормативні значення навантажень і впливів при нормальній експлуатації встановлюються “Строительными нормами и правилами” (СНиП). Можливі відхилення значень навантажень від їхніх нормативних значень враховуються коефіцієнтом надійності за навантаженням

$$n > 1.$$

Навантаження і впливи, отримані шляхом множення їхніх нормативних значень на коефіцієнт надійності за навантаженням, називаються розрахунковими. Наприклад, розрахункова сила

$$F = n F_n;$$

розрахункове рівномірно розподілене навантаження

$$q = n q_n.$$

Коефіцієнт надійності за навантаженням від власної маси прийнятий $n = 1,05 - 1,2$, а за сніговим навантаженням $n = 1,4 - 1,6$. Таке розходження в значеннях коефіцієнта n пояснюється тим, що снігове навантаження більш мінливе, ніж власна маса.

3.10.1.2. Механічні властивості матеріалів

Головною характеристикою опору матеріалів – силовим впливом – є нормативний опір R_n , що встановлюється СНиПом з урахуванням умов

контролю і статистичної мінливості механічних властивостей матеріалу. У якості нормативного опору будівельних сталей приймають найменше контрольоване (бракувальне) значення границі текучості σ_T або тимчасового опору σ_B . Ці значення встановлюються ГОСТами або технічними умовами на метал.

Можливі відхилення в несприятливий бік від значень нормативного опору враховуються коефіцієнтом надійності за матеріалом $\gamma_M > 1$. Цей коефіцієнт відбиває статистичну мінливість властивостей матеріалу і їхню відмінність від властивостей окремо випробуваних зразків. Наприклад, для металу $\gamma_M = 1,025 - 1,15$; для бетону $\gamma_M = 1,3 - 1,5$.

Величина, отримана у результаті ділення нормативного опору на коефіцієнт надійності по матеріалу, називається розрахунковим опором:

$$R = \frac{R_H}{\gamma_M}.$$

Вона являє собою найменшу можливу величину нормативного опору; значення для R встановлюються СНиПом.

3.10.1.3. Геометричні параметри конструктивних елементів

Можливе несприятливе відхилення геометричних характеристик враховується або за допомогою коефіцієнта точності, або шляхом додаткового складового, що додається до нормативного значення геометричної характеристики, чи у ряді випадків коефіцієнтів надійності за матеріалом.

3.10.1.4. Умови роботи

Особливості дійсної роботи матеріалів, елементів конструкцій, їхніх з'єднань враховуються коефіцієнтом умов роботи γ . Він відбиває вплив температури, агресивності середовища, тривалості і багатократної повторюваності впливу, наближеності розрахункових схем і умовність розрахункових передумов ($\gamma < 1$), а також перерозподіл зусиль при розвитку пластичних деформацій і інші сприятливі фактори ($\gamma > 1$). Числові значення для γ встановлюються СНиПом на підставі експериментальних і теоретичних досліджень і уводяться в якості множника до значення розрахункового опору R .

3.10.1.5. Ступінь відповідальності споруди

Ступінь відповідальності і капітальності споруд, а також значущість наслідків тих або інших граничних станів враховується коефіцієнтом надійності за призначенням $\gamma_H \leq 1$. Його уводять у якості дільника до значення розрахункового опору або в якості множника до значення розрахункових навантажень, впливів і зусиль.

3.10.1.6. Умова міцності при розтяганні

Надійність і гарантія від виникнення граничних станів першої групи (за несучою спроможністю) забезпечується виконанням такої умови:

$$N \leq S,$$

де N – зусилля, що діє в елементі конструкції, який розраховується;
 S – граничне зусилля, що може сприйняти елемент, який розраховується.

Зусилля N , що є найбільшим можливим зусиллям, визначається як

$$N = nF_H,$$

а граничне зусилля

$$S = AR_{\gamma/\gamma_H},$$

де A – площа поперечного перерізу.

Таким чином, умова міцності (надійності) для центрально розтягнутого (стиснутого) стержня ($\gamma_H = 1$) буде мати вигляд

$$N \leq AR_{\gamma}, \quad (3.34)$$

або

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R_{\gamma}. \quad (3.35)$$

3.10.2. Метод допустимих напружень

Цей метод залишається поки головним при розрахунку механічних вузлів і деталей машинобудівних конструкцій. Основою методу допустимих напружень є допущення, що критерієм міцності конструкції буде виконання такої умови міцності:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.36)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження, що виникає в одній з точок небезпечного перерізу й визначається розрахунком;

$[\sigma]$ – допустиме для даного матеріалу напруження, отримане на підставі експериментальних досліджень.

Допустимим напруженням називають те найбільше напруження, при якому конструкція буде працювати тривалий час без будь-якої небезпеки її руйнування.

Допустиме напруження повинне бути менше від небезпечного σ_0 в число разів, що дорівнює обраному коефіцієнту запасу.

Для пластичних матеріалів за небезпечне напруження при статичному навантаженні приймається границя текучості σ_T або σ_{02} , для крихких матеріалів – тимчасовий опір (границя міцності) σ_B .

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення спорудження, характеру дії навантажень і багатьох інших причин. Головними факторами, що впливають на вибір його значення, є відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції й окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції, що розраховується; ступінь точності методу визначення напружень; неточність завдання зовнішнього навантаження; довговічність і значущість проєктованого спорудження або машини.

Для будівельних сталей значення коефіцієнта запасу міцності приймається $n = 1,4 - 1,6$; для крихких матеріалів $n = 2,5 - 3,5$; для деревини $n = 3,5 - 6$.

Значення допустимих напружень установлюються технічними умовами і нормами проєктування. Для деяких матеріалів вони наведені в табл. 3.4.

Запишемо умови (3.36) у трьох варіантах:

– перевірка міцності

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]; \quad (3.37)$$

– добір перерізу

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}; \quad (3.38)$$

– визначення найбільшої допустимої сили

$$F_{\max} \leq [\sigma]A. \quad (3.39)$$

Таблиця 3.4

Значення допустимих напружень

Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
	Розтягання	Стискання
Сталь: вуглецева легована	160 100-400	160 100 - 400

Чавун сірий	28 - 80	120 - 150
Мідь	30 - 120	30 - 120
Латунь	70 - 140	70 - 140
Бронза	60 - 120	60 - 120
Алюміній	30 - 80	30 - 80
Дюралюміній	80 - 150	80 - 150
Текстоліт	30 - 40	30 - 40
Гетинакс	50 - 70	50 - 70
Сосна:		
уздовж волокон	7 - 10	10 - 12
поперек волокон	-	1,5 - 2
Дуб		
уздовж волокон	9,6 - 13	13 - 15
поперек волокон	-	2 - 3,5
Бетон	0,1 - 0,7	1 - 9
Камінь (кладка)	0,1 - 0,3	0,4 - 4
Цеглина (кладка)	0,1 - 0,2	0,6 - 2,5

3.10.3. Метод руйнуючих навантажень

Критерій міцності, прийнятий у методі допустимих напружень, а саме напружень у точці, не завжди і не цілком характеризує умову настання руйнування конструкції. У ряді випадків за такий критерій більш доцільно приймати граничне навантаження, що може витримати конструкція, не руйнуючись та істотно не змінюючи свою форму. При цьому умову міцності, яка полягає у тому, що граничне або руйнуюче навантаження не повинне перевищувати допустимого, можна подати у вигляді

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{гран}}}{n}, \quad (3.40)$$

де n – коефіцієнт запасу міцності, прийнятий таким самим, як і в методі допустимих напружень.

При визначенні руйнуючого навантаження для конструкцій із пластичного матеріалу приймається схематизована діаграма напружень – діаграма Прандтля (рис. 3.25).

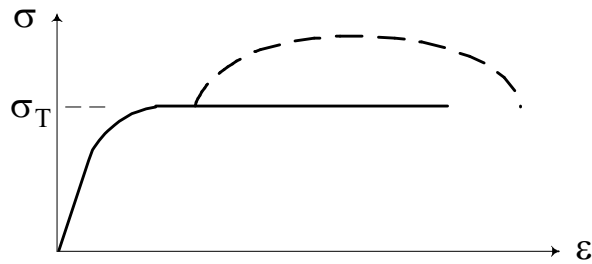


Рис. 3.25. Діаграма Прандтля

Схематизація діаграми полягає в допущенні, що матеріал працює у пружній стадії аж до границі текучості, а потім матеріал має безмежну площадку текучості. Матеріал, що працює за такою моделлю, називається ідеально пружно-пластичним. Як правило, ця діаграма найбільше відповідає діаграмі матеріалу, що має яскраво виражену площадку текучості.

Для статично визначних систем цей спосіб збігається з розрахунком за допустимими напруженнями. Для статично невизначних систем він дає більш ощадливе розв'язання. Покажемо це. Підберемо перерізи стержнів, на яких підвішений призматичний брус (рис. 3.26).

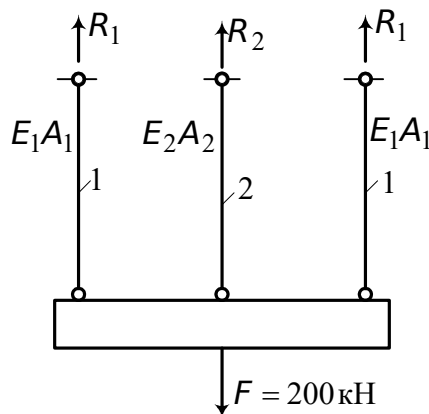


Рис. 3.26. До добору перерізів стержнів за методами допустимих напружень і руйнуючого навантаження

Довжини всіх стержнів однакові, а площі перерізів і матеріали різні: бічні стержні мають однакову площу A_1 і зроблені зі сталі, середній – із дюралюмінію і має площу A_2 . Відношення жорсткостей $E_1A_1/E_2A_2 = 2$, допустимі напруження $[\sigma_1] = 160 \text{ МПа}$, $[\sigma_2] = 140 \text{ МПа}$.

Складемо рівняння статички $\sum U = 0$:

$$2R_1 + R_2 = F.$$

Додаткове рівняння одержимо з умов деформації. У силу симетрії системи брус буде опускатися униз, зберігаючи горизонтальний стан, тобто

$$\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Виписуючи подовження через зусилля, одержимо

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} = \frac{R_2 l}{E_2 A_2}.$$

Звідси з урахуванням рівняння статки і заданого співвідношення $\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$ знайдемо

$$R_1 = \frac{2}{5} F, \quad R_2 = \frac{1}{5} F.$$

Виходячи з умови міцності (3.38),

$$A_1 = 5 \text{ см}^2, \quad A_2 = 7,5 \text{ см}^2, \quad \text{або} \quad A_1 = \frac{2}{3} A_2.$$

Для того, щоб знайти площі поперечних перерізів за методом руйнуючих навантажень, скористаємося такими умовами:

$$F = 2[\sigma_1] A_1 + [\sigma_2] A_2 = 2[\sigma_1] A_1 + \frac{3}{2} [\sigma_2] A_1.$$

Звідси знайдемо

$$A_1 = 3,8 \text{ см}^2; \quad A_2 = 5,7 \text{ см}^2.$$

Отримані площі перерізів на 24% менше відповідних площ, знайдених при розрахунку за допустимими напруженнями.

На закінчення зауважимо, що визначення руйнуючого навантаження можливе тільки для нескладних розрахункових схем.

3.10.4. *Поняття про імовірнісний метод розрахунку на міцність*

Чисельні експериментальні дані переконливо свідчать про те, що границя міцності, границя текучості, границя пружності й інші механічні характеристики матеріалів мають дуже значний розкид. Наприклад, при визначенні границі міцності бетону на стискання однакові результати не одержуються навіть тоді, коли зразки виготовлені з бетонної суміші одного замісу. Пояснюється це тим, що міцність бетону є функцією багатьох факторів: крупності і якості заповнювача, активності цементу, різноманітних технологічних факторів і т. п. Беручи до уваги випадкову природу цих факторів, природно вважати границю міцності випадковим значенням.

Аналогічна ситуація має місце і для інших будівельних матеріалів: деревини, цегельної кладки, полімерних композитних матеріалів, сталі, алюмінієвих сплавів і т. п.

Найбільш повну інформацію про випадкове значення містить функція розподілу (закон розподілу). Часто в якості розподілу міцності матеріалу використовуються нормальний закон (закон Гауса); розподіл Гумбеля-Вейбула; розподіл Пірсона III типу; логарифмічний нормальний розподіл та ін.

Поряд із мінливістю механічних характеристик матеріалів доводиться рахуватися з мінливістю геометричних характеристик елементів, зокрема площі поперечного перерізу стержнів, і зовнішніх впливів.

Розрахунок конструкцій на міцність зводиться до перевірки виконання умови

$$\sigma < R, \quad (3.41)$$

де R – границя міцності (або текучості матеріалу).

Границя міцності матеріалу R і напруження, що діє в конструкції, як зазначалося вище, є випадковими величинами, тому можна лише вимагати, щоб ця умова виконувалася з великою імовірністю, достатньо близькою до одиниці.

Уведемо випадкову величину

$$S = R - \sigma,$$

за допомогою якої умова міцності записується у вигляді

$$S > 0. \quad (3.42)$$

Обернення S на нуль, тобто порушення умови (3.42) відповідає настанню граничного стану конструкції, іншими словами – настанню її відмови.

Тоді ймовірність того, що S має додатне значення, називається можливістю безвідмовної роботи.

Розділ 4 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

4.1. Плоский напружений стан і плоска деформація

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких усі явища можна розглядати такими, що відбуваються в одній площині Oxy , тобто розглядати плоску задачу. При розрахунках інженерних споруд можуть зустрітися два види плоскої задачі: плоска деформація (рис. 4.1, а) і плоский напружений стан (рис. 4.1, б).

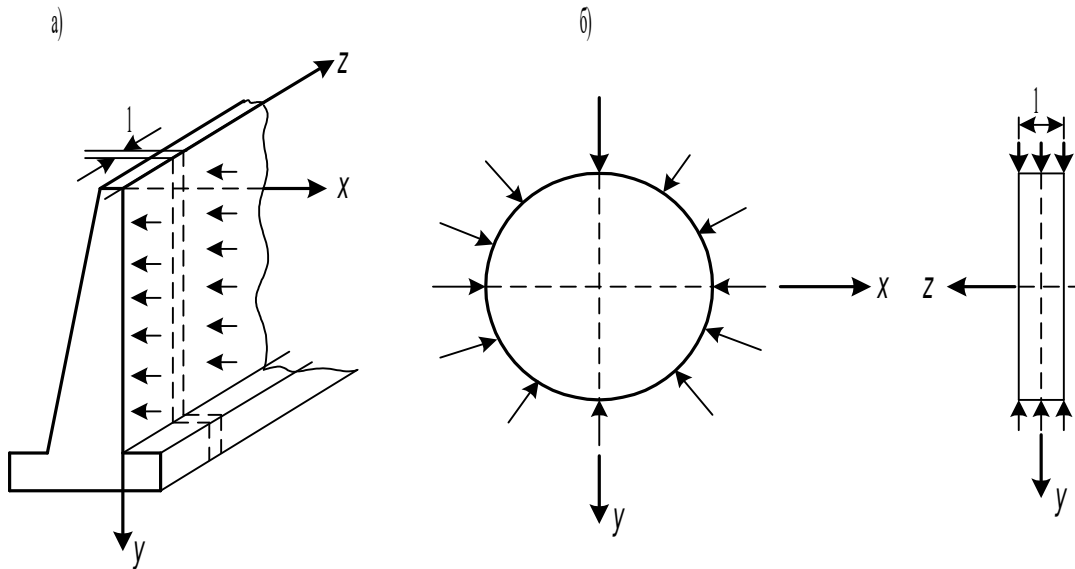


Рис. 4.1. Приклади конструкцій, що працюють в умовах плоскої деформації (а) і плоского напруженого стану (б)

Прикладом конструкції, яка працює в умовах плоскої деформації, є підпірна стінка (рис. 4.1, а), що зазнає дію бічного тиску, постійного за розміром уздовж стінки. Перерізи, віддалені від кінців стінки, залишаються плоскими і при вивченні розподілу напружень достатньо розглянути тільки один елемент стінки між двома суміжними поперечними перерізами (рис. 4.1,а). Для плоскої деформації маємо

$$\varepsilon_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.1)$$

Тоді відповідно до (1.27) і (1.28) з урахуванням (4.1) одержуємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y]; \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x]; \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_z = 0; \quad (4.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0. \quad (4.5)$$

В усіх випадках плоскої деформації розмір у напрямку осі Z не має значення, і надалі ми будемо довжину елемента приймати такою, що дорівнює одиниці.

Прикладом конструкції, що працює в умовах плоского напруженого стану, може служити тонка пластинка, що піддається дії сил, прикладених до її контуру (рис. 4.1, б). Тут складові напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} не залежать від координати Z , а складові напруження $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

На підставі (1.27) і (1.28) для плоского напруженого стану одержуємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y); \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (4.5)$$

Оскільки складові напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} не залежать від координати Z , то розміри пластини в напрямку осі Z не мають значення. Надалі цей вимір звичайно приймається таким, що дорівнює одиниці.

4.1.1. Напруження в точці

Знаючи складові напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} у будь-якій точці пластинки, що знаходиться в плоскому напруженому стані або зазнає плоскої деформації, можемо визначити з рівнянь статички напруження, які діють по будь-якій площадці, що проходить через цю точку перпендикулярно до пластинки і похило до осей X і Y .

Нехай точка O (рис. 4.2) є точкою напруженої пластинки і припустимо, що складові напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} відомі. Розглядаємо нескінченно малу трикутну призму об'є. Об'ємною силою нехтуємо. Будемо припускати, що напруження по гранях призми розподілені рівномірно. Позначимо: N – нормаль до площини bc ; \bar{X} , \bar{Y} – складові поверхневих сил, віднесені до одиниці площі; A – площа грані bc ; $A \cos \alpha$ – площа грані oc ; $A \sin \alpha$ – площа грані ob .

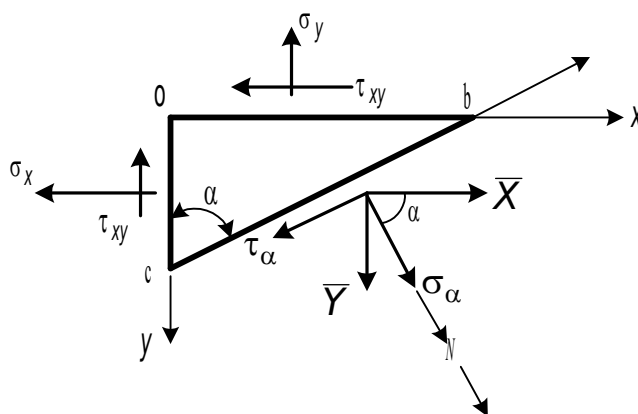


Рис. 4.2. Напружений стан у точці

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0: \quad \bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha;$$

$$\sum Y = 0: \quad \bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha;$$

$$\sum N = 0: \quad \sigma_\alpha = \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ураховуючи, що $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, одержимо

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.9)$$

Спроектуємо тепер сили, що діють на елемент, який розглядається, на грань bc

$$\sum bc = 0:$$

$$\tau_\alpha = \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \sin^2 \alpha.$$

Виконаємо угруповання членів і врахуємо, що

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

У результаті цих перетворень одержимо

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.10)$$

Формулу (4.9) іноді застосовують у дещо іншому вигляді, використовуючи відомі з тригонометрії рівності

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.11)$$

Формули (4.9) – (4.11) виражають закон зміни нормального і дотичного напружень залежно від кута нахилу площадки.

4.1.2. Головні напруження. Положення головних площадок

Зміна положення площадки bc (рис. 4.2.) стосовно координатних осей призводить до зміни напружень σ_α і τ_α . Як впливає з рівностей

(4.9) – (4.11), ці напруження є функціями кута α . Являє практичний інтерес відшукання максимальних і мінімальних значень нормальних σ_α і дотичних τ_α напружень і положень площадок, на яких вони діють. Для цього прирівнюємо до нуля похідну $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\alpha \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad (4.12)$$

Порівнюючи отримане рівняння з (4.10), бачимо, що, прирівнюючи до нуля похідну $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}$, ми тим самим прирівнюємо до нуля дотичне напруження (4.10), тому що відрізняються ці вирази на константу «2». Таким чином, на площадці дії екстремальних нормальних напружень дотичні напруження дорівнюють нулю. У кожній точці деформованого тіла, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану або плоскої деформації, є дві такі взаємно перпендикулярні площадки. Ці площадки називаються головними площадками.

Знайдемо положення головних площадок, прирівнявши (4.10) до нуля:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.13)$$

Вираз (4.13) дає два взаємно перпендикулярних напрямки з кутами нахилу α і $\alpha + 90^\circ$, по яких діють головні напруження. Кути α потрібно відкладати по осі Ox (рис. 4.2) за годинниковою стрілкою, якщо в результаті підрахунку $\alpha > 0$, і проти годинникової стрілки, якщо $\alpha < 0$. Підрахунок за формулою (4.13) призводить до цілком визначених значень кута α при всіх значеннях σ_x , σ_y , τ_{xy} , за винятком випадку, коли $\sigma_x = \sigma_y$ і $\tau_{xy} = 0$. Останнє значення напруження приводиться до невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$. У цьому випадку будь-яка площадка є головною.

Для визначення величин головних напружень скористаємося формулами (4.11), (4.13) і відомим із тригонометрії виразом

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

У результаті маємо

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.14)$$

Підкореневий вираз (4.14) при будь-яких напруженнях σ_x , σ_y , τ_{xy} більше нуля, тому корені σ_1 і σ_2 завжди дійсні.

Повернемося до формули (4.13). Вона дає напрямок, але не вказує, у якому з них діє σ_1 (σ_{\max}), а в якому σ_2 (σ_{\min}). Для вирішення цього питання за правилами математики можна було б досліджувати знак другої

похідної $\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d\alpha^2}$. Проте можна піти іншим шляхом. Із формули $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$ випливає, що при $\tau_\alpha > 0$ маємо $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} > 0$. Отже, σ_α зростає зі збільшенням α .

4.1.3. Екстремальні дотичні напруження

Той самий плоский напружений стан у точці може бути представлений різноманітними вихідними площадками і напруженнями. Оскільки дотичні напруження на головних площадках відсутні, то головні площадки найбільш просто визначають напружений стан у точці. Тому прийнемо їх за вихідні (рис. 4.3).

Використовуємо формули (4.10) і (4.11). Припускаємо тут

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \text{а} \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тоді

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad (4.15)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \quad (4.16)$$

З формули (4.15) випливає, що при $\alpha = 45^\circ$ $\sin 2\alpha = 1$, і дотичні напруження мають екстремальні значення

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.14) у формулу (4.17) і виконуючи найпростіші перетворення, знайдемо

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.18)$$

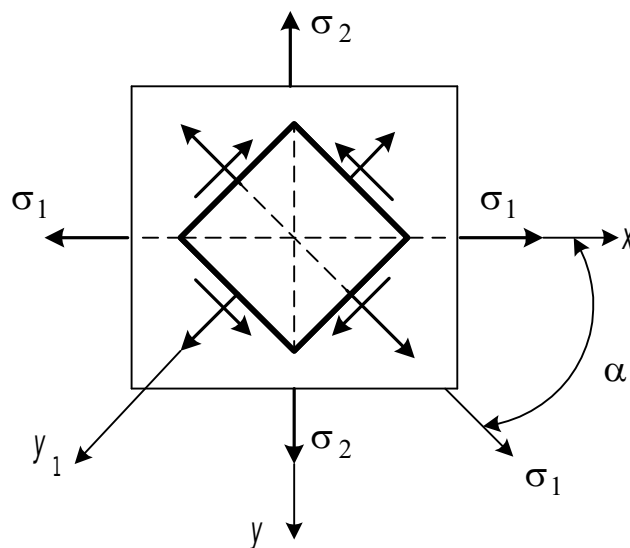


Рис. 4.3. До визначення екстремальних дотичних напружень

У загальному випадку на площадках із τ_{\max} нормальні напруження (4.16) не дорівнюють нулю.

Дійсно, при $\alpha = \pm 45^\circ$

$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (4.19)$$

В окремому випадку, коли на гранях призми діють два головних напруження $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$,

$$\tau_{\max} = \sigma, \quad (4.20)$$

а нормальні напруження на площадках із екстремальними дотичними напруженнями в цьому випадку дорівнюють нулю: чистий зсув (див. п. 1.8.3).

4.2. Дослідження напружень у трьох вимірах

Наші попередні дослідження (див. п. 4.1) обмежувалися площинними задачами, задачами в двох вимірах. Розглянемо тепер загальний випадок напруженого стану в трьох вимірах. Раніше було показано (див. п. 1.8), що напруження, які діють на шість граней елементарного куба, можна виразити шістьма складовими напружень, а саме – трьома нормальними напруженнями σ_x , σ_y , σ_z і трьома дотичними напруженнями τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} (див. рис. 1.28). Якщо ці складові напруження для якої-небудь точки відомі, то напруження, які діють по будь-якій похилій грані, що проходить через цю точку, можна визначити з рівнянь статички.

Розглянемо умову рівноваги елементарного чотиригранника (рис. 4.4).

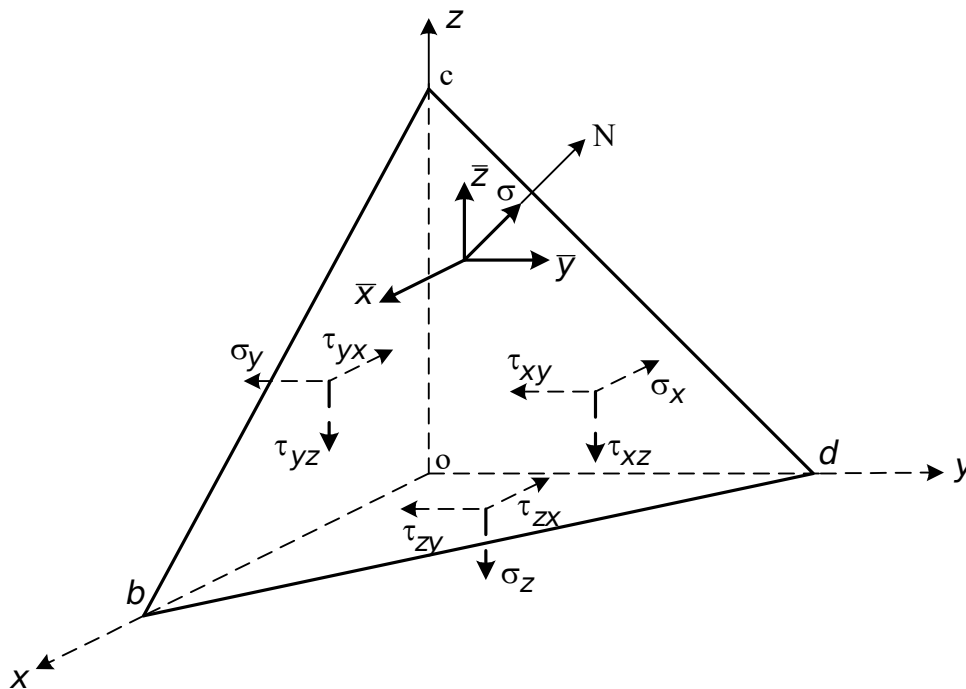


Рис. 4.4. До дослідження напружень у трьох вимірах

Виділений елемент дуже малий, тому об'ємними силами нехтуємо, а також нехтуємо змінами по його гранях і припускаємо, що напруження розподілені рівномірно.

Введемо такі позначення: N – нормаль до площини bcd ; $\cos(N, x) = \ell$ – косинус кута між нормаллю до похилої грані і віссю X ; $\cos(N, y) = m$; $\cos(N, z) = n$; A – площа грані bcd ; $A\ell$ – площа грані odc ; Am – площа грані obc ; An – площа грані bod ; \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – віднесені до одиниці площі складові поверхневих сил у даній точці.

Спроектуємо всі сили, що діють на елемент, на вісь X :

$$A\bar{X} - A\ell\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0.$$

Звідси

$$\bar{X} = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (4.21)$$

Аналогічно, спроектувавши всі сили на осі Y і Z , знайдемо

$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} \ell; \quad (4.22)$$

$$\bar{Z} = \sigma_z n + \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m. \quad (4.23)$$

Повне напруження в точці знайдемо, використовуючи властивість діагоналі прямого паралелепіпеда (рис. 4.5):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\bar{Z})^2 + (\bar{Y})^2 + (\bar{X})^2}. \quad (4.24)$$

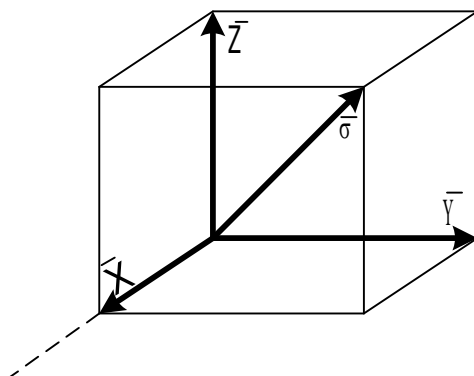


Рис. 4.5. До визначення повного напруження

Складову повного напруження, спрямовану по нормалі N , тобто нормальне напруження σ на площадці bcd , визначимо як суму проєкцій на цю нормаль напружень \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} (рис. 4.6)

$$\sigma = \bar{X}\ell + \bar{Y}m + \bar{Z}n. \quad (4.25)$$

Дотичні напруження по тій самій площадці (рис. 4.6)

$$\tau = \sqrt{(\bar{\sigma})^2 - \sigma^2}. \quad (4.26)$$

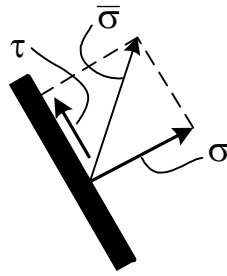


Рис. 4.6. До визначення дотичного напруження

4.2.1. Головні напруження і положення головних площадок

Знайдемо положення головних площадок, що проходять через точку O (рис. 4.4), і визначимо величини напружень, що діють на них, якщо відомі напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Припустимо, що площадка bcd (рис. 4.4) – одна з трьох головних площадок. Тоді по цій площадці дотичне напруження $\tau = 0$ (рис. 4.6, формула (4.26)), а вектор повного напруження $\bar{\sigma}$ (рис. 4.5, формула (4.24)) збігається з напрямком нормалі. Напруження $\bar{\sigma}$ є одним із шуканих головних напружень $\bar{\sigma} = \sigma$. Складові цього напруження по координатних осях визначаються рівняннями

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma \ell; \\ \bar{Y} &= \sigma m; \\ \bar{Z} &= \sigma n. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Зазначимо, що рівняння (4.27) можна одержати шляхом безпосереднього проектування $\bar{\sigma}$ на ті самі осі.

Прирівнявши праві частини рівнянь (4.21), (4.22), (4.23), (4.27) і врахувавши, що відповідно до закону парності дотичних напружень (1.18) $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{zy} = \tau_{yz}; \tau_{xz} = \tau_{zx}$, одержимо однорідну систему лінійних рівнянь щодо невідомих ℓ, m, n :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{xy} \ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Між напрямними косинусами нормалі N існує залежність

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (4.29)$$

тому вони не можуть одночасно дорівнювати нулю. З вищої алгебри відомо, що за умови (4.29) визначник системи рівнянь (4.28) повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Розкривши його і виконавши угруповання членів, одержимо

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0; \quad (4.31)$$

де

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (4.32)$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2; \quad (4.33)$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{zy}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}. \quad (4.34)$$

Корені рівняння (4.31) будуть значеннями трьох головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Головні напруження не залежать від вибору осей X, Y, Z . Таким чином корені рівняння, а отже, і його коефіцієнти J_1, J_2, J_3 не змінюються при повороті осей координат. Величини J_1, J_2, J_3 називаються тому першим, другим і третім інваріантами напруженого стану.

Щоб розшукати ℓ, m, n , що відповідають одному з трьох головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, треба значення цього головного напруження підставити у (4.28) замість σ . Спільне розв'язання (4.28) і (4.29) дає шукані величини ℓ, m, n . Одне з трьох головних напружень буде алгебраїчно найбільшим у даній точці; позначимо його σ_1 , найменше напруження позначимо σ_3 , а проміжне σ_2 , тобто $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

4.2.2. Екстремальні значення дотичних напружень

Знайдемо найбільші дотичні напруження в точці тіла, що деформується і положення площадки, на якій вони виникають. З цією метою використовуємо формули

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \quad (4.35)$$

$$\tau_\alpha^2 = (\bar{\sigma}_\alpha)^2 - \sigma_\alpha^2 = \sigma_1^2 \ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2; \quad (4.36)$$

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.29)$$

Тут σ_α і τ_α – нормальні і дотичні напруження на похилій площадці, що розглядається.

Формула (4.35) отримана наступним чином. Якщо за початкову систему координат прийнято не випадкову систему X, Y, Z , а систему головних осей 1, 2, 3, то умови (4.21), (4.22) і (4.23) спрощуються, тому що координатні площини будуть головними площадками і всі дотичні напруження, що діють по цих гранях, дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \sigma_1 \ell; \\ \bar{Y}_2 &= \sigma_2 m; \\ \bar{Z}_3 &= \sigma_3 n. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тоді складова повного напруження, спрямована по нормалі N , буде дорівнювати (див.(4.25))

$$\sigma_{\alpha} = \bar{X}_1 \ell + \bar{Y}_2 m + \bar{Z}_3 n. \quad (4.38)$$

Підставляючи сюди (4.37), одержимо (4.35).

Дотичне напруження по тій самій площадці знайдемо з (4.26), якщо переписати цей вираз в такому вигляді:

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{(\bar{\sigma}_{\alpha})^2 - \sigma_{\alpha}^2},$$

де $\bar{\sigma}_{\alpha} = \sqrt{(X_1)^2 + (Y_2)^2 + (Z_3)^2}$.

Порівнюючи з цими виразами рівняння (4.37) і (4.38), одержимо формулу (4.36). Тепер виключимо із виразу (4.36) напрямний косинус ℓ за допомогою рівності (4.29):

$$\ell^2 = 1 - m^2 - n^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}^2 = & \sigma_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)m^2 + (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)n^2 - \\ & - [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2]^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Аналогічно виключимо з (4.36) m^2 і n^2 :

$$m^2 = 1 - \ell^2 - n^2;$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}^2 = & \sigma_2^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\ell^2 + (\sigma_3^2 - \sigma_2^2)n^2 - \\ & - [\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\ell^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n^2]^2; \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$n^2 = 1 - \ell^2 - m^2;$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}^2 = & \sigma_3^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\ell^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 - \\ & - [\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Як показує аналіз цих рівнянь, екстремальні значення повних дотичних напружень утворюються на площадках, обумовлених напрямними косинусами:

– для рівняння (4.39)

$$m = 0, \quad \ell = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

– для рівняння (4.40)

$$n = 0, \quad \ell = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

– для рівняння (4.41)

$$\ell = 0, \quad n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Дотичні напруження на цих площадках визначимо підстановкою у вирази (4.39), (4.40) і (4.41) вказаних напрямних косинусів.

Підставляємо в рівняння (4.39). У результаті одержуємо

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (4.42)$$

Підстановка в рівняння (4.40) і (4.41) дає відповідно:

а) $m = 0; \ell = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$ б) $n = 0; \ell = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$ в) $\ell = 0; n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (4.43)$$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (4.44)$$

Зроблені виклади призводять до таких висновків. Площадками дії екстремальних дотичних напружень є площадки, що проходять через одну з головних осей і складають з двома іншими осями кути 45° (рис. 4.7).

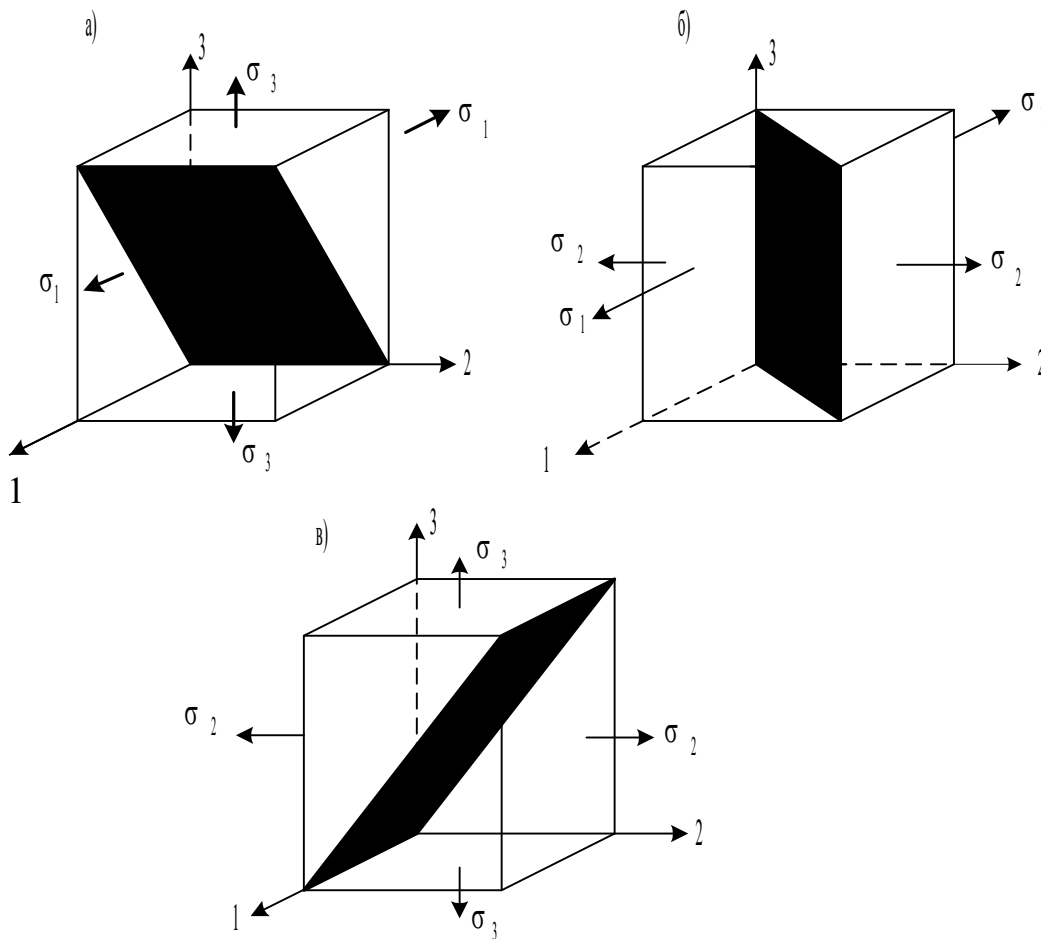


Рис. 4.7. Площини дії екстремальних дотичних напружень

Іншими словами, ці площини перпендикулярні до однієї з головних площин і нахилені до двох інших під кутом 45° . Оскільки кути можна відкласти по різні боки від головних осей, таких площин шість у кожній точці деформованого середовища. Якщо величини головних напружень підпорядковані нерівностям $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то найбільше дотичне напруження дорівнює $\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, тобто напіврізниці найбільшого і найменшого головних напружень.

4.2.3. Октаедричні напруження

Площина, рівнонахилена до напрямків трьох головних напружень, називається октаедричною, а діючі на ній напруження – октаедричними напруженнями. Показані площини відтинають на осях 1, 2, 3 рівні відрізки і утворюють у просторі октаедр (рис. 4.8).

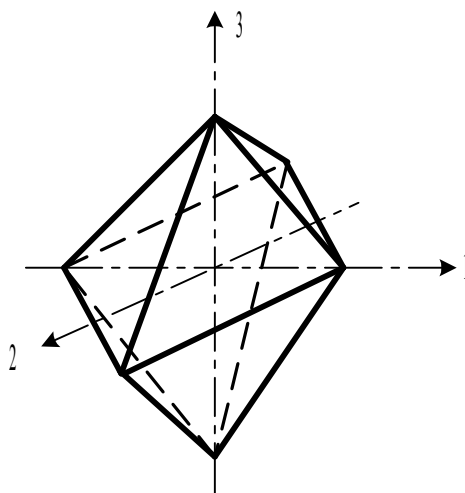


Рис. 4.8. Октаедричні площини

Косинуси кутів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є напрямними косинусами для нормалі ON і тому (див. (4.29)) пов'язані співвідношенням

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

Для октаедричних площин

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{\text{окт}},$$

отже,

$$\cos \alpha_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Повне октаедричне напруження одержимо, використовуючи (4.21) – (4.23) і (4.24),

$$\bar{\sigma}_{окт} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}. \quad (4.45)$$

Нормальне октаедричне напруження на підставі (4.25) дорівнює

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4.46)$$

а дотичне октаедричне напруження, використовуючи (4.26), буде мати такий вигляд:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (4.47)$$

При вивченні питань міцності і пластичності тіл загальна деформація матеріалу в околі точки поділяється на деформації зміни об'єму і форми. Важливе значення октаедричних напружень визначається тим, що з першою із цих деформацій пов'язане напруження $\sigma_{окт}$, а з другою $\tau_{окт}$.

4.3. Потенційна енергія деформації при об'ємному напруженому стані

При простому розтяганні або стисканні питома потенційна енергія деформації визначається формулою (3.32)

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Ураховуючи, що в цьому випадку $\sigma = E \varepsilon$ (див. формулу (3.5)), перетворимо залежність (3.32). Тоді

$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (4.48)$$

При об'ємному напруженому стані у випадку малих деформацій питома потенційна енергія може бути знайдена шляхом підсумовування:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (4.49)$$

Підставивши сюди ε_1 , ε_2 , ε_3 за законом Гука (1.27), одержимо

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (4.50)$$

Тут необхідно зазначити наступне. Формули закону Гука (1.27) записані щодо довільних осей X , Y , Z , тобто для загального випадку об'ємного напруженого стану. Ці залежності можуть бути поширені і на випадок головних осей, тому що вони справедливі при малих деформаціях, коли дотичні напруження, викликаючи зсуви, не впливають на лінійні деформації. У загальному випадку деформування відбувається зміна об'єму і форми елемента, що розглядається. Відповідно до цього питому

потенційну енергію деформації можна подати як енергію зміни об'єму $U_{об}$ та енергію зміни форми U_{ϕ} .

Уявимо, що кожне з діючих головних напружень складається з двох доданків

$$\sigma_1 = \sigma_{1,об} + \sigma_{1,\phi}; \quad \sigma_2 = \sigma_{2,об} + \sigma_{2,\phi}; \quad \sigma_3 = \sigma_{3,об} + \sigma_{3,\phi}.$$

Зміна об'єму при зберіганні форми характеризується умовою рівності між собою відносних лінійних деформацій у напрямку трьох осей $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Дотримання цієї умови можливе лише при всебічному рівномірному розтяганні або стисканні.

Припустимо, що напруження, які викликають зміну об'єму, дорівнюють середній арифметичній з трьох напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_{1,об} = \sigma_{2,об} = \sigma_{3,об} = \sigma_{сер} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (4.51)$$

Тоді напруження, що викликають зміну форми, дорівнюватимуть

$$\sigma_{1,\phi} = \sigma_1 - \sigma_{сер}; \quad \sigma_{2,\phi} = \sigma_2 - \sigma_{сер}; \quad \sigma_{3,\phi} = \sigma_3 - \sigma_{сер}. \quad (4.52)$$

Енергію зміни об'єму одержимо, підставивши в (4.50) напруження (4.51)

$$U_{об} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4.53)$$

Енергію зміни форми знайдемо за формулою (4.50), підставивши в неї (4.52)

$$U_{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (4.54)$$

Отримані формули (4.53) і (4.54) підтверджують, що при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ відбувається тільки зміна об'єму, тому що енергія зміни форми в цьому випадку дорівнює нулю.

4.4. Приклад дослідження напруженого стану в точці тіла

Вихідні дані: $\sigma_x = 130$ МПа; $\sigma_y = 100$ МПа; $\sigma_z = 70$ МПа; $\tau_{xy} = 90$ МПа; $\tau_{yz} = 100$ МПа; $\tau_{xz} = 90$ МПа. Схема дії заданих напружень показана на рис. 4.9.

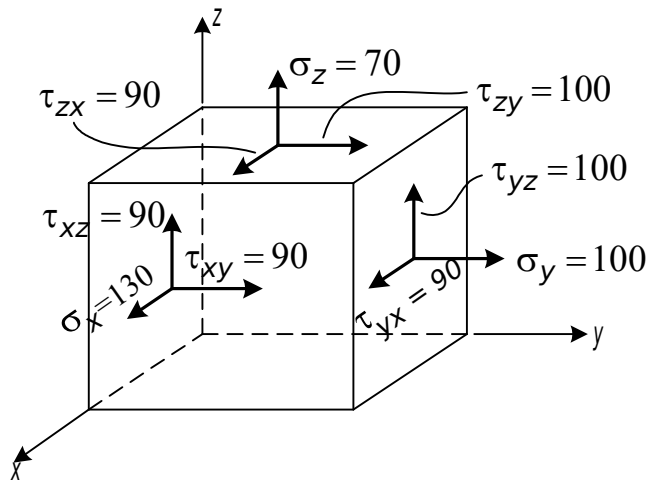


Рис. 4.9. Схема напружень, що діють у точці тіла

Обчислюємо інваріанти напруженого стану (див. формули (4.32), (4.33), (4.34)):

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 130 + 100 + 70 = 300 \text{ МПа};$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 130 \cdot 100 + 130 \cdot 70 + 100 \cdot 70 - 90^2 - 90^2 - 100^2 = 2900 (\text{МПа})^2;$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} = 130 \cdot 100 \cdot 70 - 130 \cdot 100^2 - 100 \cdot 90^2 - 70 \cdot 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 90 = -147000 (\text{МПа})^3.$$

Подамо рівняння (4.31) у такому вигляді:

$$y^3 + py + q = 0; \quad (4.55)$$

де

$$y = \sigma - \frac{J_1}{3}; \quad p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}; \quad q = -\frac{2J_1^3}{27} + \frac{J_1 J_2}{3} - J_3.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sigma' &= -2r \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{J_1}{3}; \\ \sigma'' &= 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{J_1}{3}; \\ \sigma''' &= 2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{J_1}{3}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Тут позначено:

$$\cos \varphi = \frac{q}{2r^3},$$

$$r = \pm \sqrt{|p| \cdot \frac{1}{3}} \quad (\text{знак } r \text{ повинний збігатися зі знаком } q, \text{ отже } \cos \varphi > 0).$$

Визначаємо:

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3} = 2900 - \frac{(300)^2}{3} = -27100;$$

$$q = -\frac{2J_1^3}{27} + \frac{J_1 J_2}{3} - J_3 = -\frac{2(300)^3}{27} + \frac{300 \cdot 2900}{3} + 147000 = -1563000;$$

$$r = -\sqrt{\frac{27100}{3}} = -95,04385;$$

$$\cos \varphi = \frac{q}{2r^3} = \frac{1563000}{2 \cdot (95,04385)^3} = 0,9102421;$$

$$\varphi = 24,461169^\circ;$$

$$\frac{\varphi}{3} = 8,153723^\circ; \quad \cos \frac{\varphi}{3} = 0,9898911;$$

$$60^\circ - \frac{\varphi}{3} = 60^\circ - 8,153723^\circ = 51,846277^\circ;$$

$$\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = 0,6177735;$$

$$60^\circ + \frac{\varphi}{3} = 60^\circ + 8,153723^\circ = 68,153723^\circ;$$

$$\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = 0,3721176;$$

$$\sigma' = 295,04385 \cdot 0,9898911 + \frac{300}{3} = 288,16612 \text{ МПа};$$

$$\sigma'' = -295,04385 \cdot 0,6177735 + \frac{300}{3} = -17,431143 \text{ МПа};$$

$$\sigma''' = -295,04385 \cdot 0,3721176 + \frac{300}{3} = 29,265022 \text{ МПа}.$$

Отриманим головним напруженням привласнюємо позначення
(див. п. 4.2.1 – $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

$$\sigma_1 = 288,16612 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 29,265022 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -17,431143 \text{ МПа}.$$

Здійснюємо перевірку правильності отриманого розв'язку. Як було зазначено в п. 4.2.1, величини J_1 , J_2 , J_3 не змінюються при повороті осей координат. Отже,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3; \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Перевіримо це:

$$J_1 = 288,16612 + 29,265022 - 17,431143 = 300 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} J_2 &= 288,16612 \cdot 29,265022 + 288,16612 (-17,431143) + \\ &+ 29,265022 (-17,431143) = 2900,002 \text{ (МПа)}^2; \end{aligned}$$

$$J_3 = 288,16612 \cdot 29,265022 (-17,431143) = -147000,1 \text{ (МПа)}^3.$$

Як бачимо, результати збігаються з раніше обчисленими. Отже, головні напруження знайдені правильно.

Знайдемо тепер положення головних площадок, для цього систему рівнянь (4.28) подамо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \frac{\ell}{n} + \tau_{xy} \frac{m}{n} &= -\tau_{xz}; \\ \tau_{xy} \frac{\ell}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz}; \\ \tau_{xz} \frac{\ell}{n} + \tau_{yz} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

а співвідношення між квадратами напрямних косинусів (4.29) запишемо так:

$$\left(\frac{\ell}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}. \quad (4.59)$$

Розв'язуємо систему перших двох рівнянь (4.58):

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{\tau_{xy} \tau_{xz} - (\sigma_x - \sigma) \tau_{yz}}{(\sigma_y - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_{xy}^2}; \\ \frac{\ell}{n} &= \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - \tau_{xz} (\sigma_y - \sigma)}{(\sigma_y - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_{xy}^2}; \end{aligned} \quad (4.60)$$

а третє рівняння використовуємо для контролю знайдених розв'язків.

Знайдемо напрямні косинуси ℓ_1 , m_1 , n_1 до площадки, по якій діє $\sigma_1 = 288,16612$ МПа:

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{90 \cdot 90 - (130 - 288,16612) \cdot 100}{(100 - 288,16612)(130 - 288,16612) - 90^2} = 1,1041067;$$

$$\frac{\ell_1}{n_1} = \frac{90 \cdot 100 - (100 - 288,16612) \cdot 90}{(100 - 288,16612)(130 - 288,16612) - 90^2} = 1,197283.$$

Перевіримо правильність знайдених значень (див. третє рівняння (4.58)):

$$9 \cdot 1,197283 + 100 \cdot 1,1041067 + (70 - 288,16612) = 0.$$

Зі співвідношення (4.59) визначаємо n_1 :

$$(1,197283)^2 + (1,1041067)^2 + 1 = \frac{1}{n_1^2};$$

$$n_1 = \pm 0,523242; \quad \ell_1 = \pm 0,6264688; \quad m_1 = \pm 0,577715.$$

Аналогічно визначаємо напрямні косинуси ℓ , m , n до площадок, по яких діють $\sigma_2 = 29,265022$ МПа, $\sigma_3 = -17,431143$ МПа.

Напрямні косинуси до площадки, по якій діє σ_2 ,

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{90 \cdot 90 - (130 - 29,265022) \cdot 100}{(100 - 29,265022) \cdot (130 - 29,265022) - 90^2} = 2,0251112;$$

$$\frac{\ell_2}{n_2} = \frac{90 \cdot 100 - (100 - 29,265022) \cdot 90}{(100 - 29,265022) \cdot (130 - 29,265022) - 90^2} = -2,7027355.$$

Визначаємо n_2 з рівняння (4.59):

$$(2,7027355)^2 + (2,0251112)^2 + 1 = \frac{1}{n_2^2};$$

$$n_2 = \pm 0,2839135; \quad \ell_2 = \mp 0,7673441; \quad m_2 = \pm 0,5749575.$$

Перевіримо правильність знайдених результатів, для чого використовуємо третє рівняння системи (4.58):

$$90 \cdot (-2,7027355) + 100 \cdot 2,0251112 + (70 - 29,265022) = 0.$$

Напрявні косинуси до площадки, по якій діє σ_3 ,

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{90 \cdot 90 - (130 + 17,431143) \cdot 100}{(100 + 17,431143) \cdot (130 + 17,431143) - 90^2} = -0,7210582;$$

$$\frac{\ell_3}{n_3} = \frac{90 \cdot 100 - (100 + 17,431143) \cdot 90}{(100 + 17,431143) \cdot (130 + 17,431143) - 90^2} = -0,1702813.$$

Перевіримо правильність отриманих результатів. Для цього скористаємося третім рівнянням системи (4.58):

$$90 \cdot (-0,1702813) + 100 \cdot (-0,7210582) + (70 + 17,431143) = 0.$$

Визначимо напрямні косинуси з рівняння (4.59):

$$(0,1702813)^2 + (0,7210582)^2 + 1 = \frac{1}{n_3^2};$$

$$n_3 = \pm 0,8034992; \quad \ell_3 = \mp 0,1368209; \quad m_3 = \pm 0,5793697.$$

Здійснимо останню перевірку з умов взаємної перпендикулярності нормалей до головних площадок. Математично це виглядає так:

$$\begin{aligned} \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ \ell_1 \ell_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0; \\ \ell_2 \ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Підставимо в ці рівності знайдені значення напрямних косинусів:

$$0,6264688(-0,7673441) + 0,577715 \cdot 0,5749575 + 0,523242 \cdot 0,2839135 = 0;$$

$$0,6264688(-0,1368209) + 0,577715 \cdot (-0,5793697) + 0,523242 \cdot 0,8034992 = 0;$$

$$(-0,7673441)(-0,1368209) + 0,5749575(-0,5793697) +$$

$$+ 0,2839135 \cdot 0,8034992 = 0.$$

Маємо тотожності, отже, напрямні косинуси знайдено правильно.

Зображення головних площадок показано на рис. 4.10.

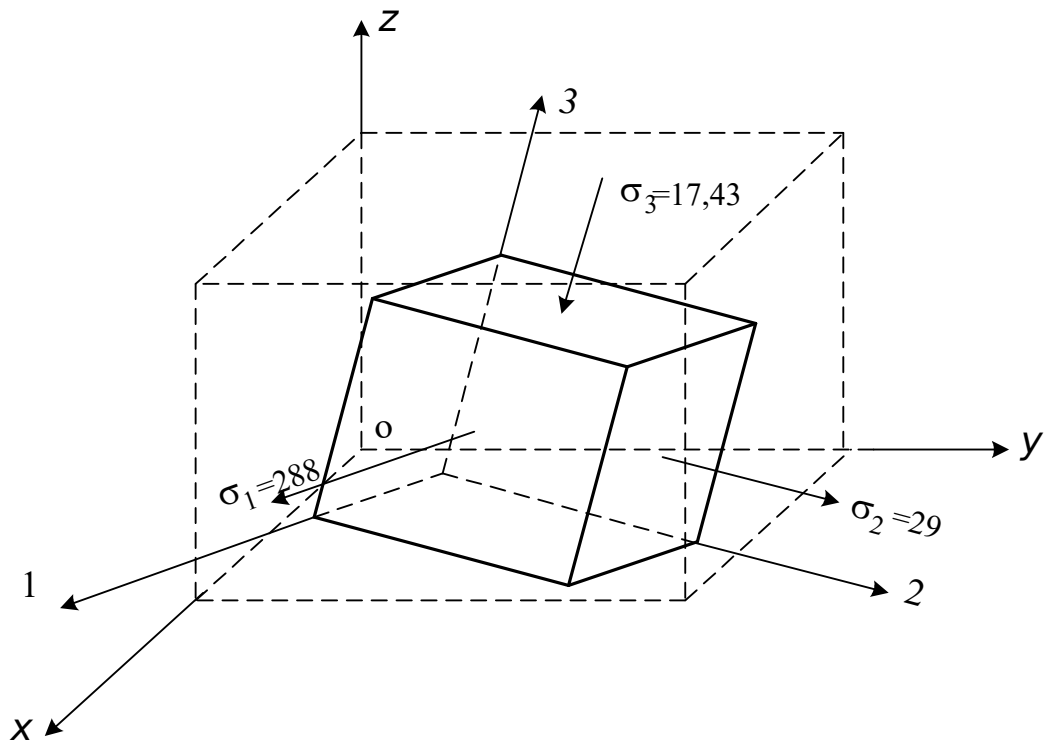


Рис. 4.10. Схема напруженого стану в точці

Розділ 5

ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

Як було відзначено в першому розділі курсу, міцність споруди залежить від міцності матеріалу, із якого вона виконана. Механічні властивості матеріалів визначають за допомогою випробувальних машин. Випробування проводять головним чином на найпростіші види дії сил: для пластичних матеріалів (метал) – на розтягання; для крихких матеріалів (камінь, бетон) на стискання. Здатність матеріалів чинити опір цим видам дії добре вивчена. Здатність матеріалів чинити опір більш складним видам дії сил експериментально менше вивчена. В даний час відсутні випробувальні машини і вимірювальна техніка, що дозволили б створити будь-який напружений стан у зразку й одержати достовірні результати.

Проте в практиці такі випадки постійно зустрічаються. У зв'язку з цим необхідно мати якийсь критерій, по якому можна було б на підставі дослідів на найпростіші види дії сил (розтягання, стискання) судити про міцність у більш складних випадках навантаження. Отже, потрібні деякі загальні положення, теоретично обґрунтовані й апробовані. Такі положення називаються гіпотезами, або теоріями міцності.

Задачею вказаних гіпотез є встановлення умов граничного стану матеріалу, тобто моменту руйнування або появи залишкових деформацій у випадках складного напруженого стану за даними, наявними для простого розтягання або стискання.

Будь-який складний напружений стан будемо характеризувати головними напруженнями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При цьому будемо вважати σ_1 найбільшим і σ_3 найменшим головними напруженнями, тобто $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (див. п. 4.2.1). Небезпечні напруження при розтяганні позначимо σ_0 (це або границя текучості $\sigma_0 = \sigma_T$, або тимчасовий опір $\sigma_0 = \sigma_B$ при розрахунку за методом допустимих напружень, або $\sigma_0 = R$, де R – нормоване значення розрахункового опору, при розрахунку за методом граничних станів), а при стисканні σ'_0 . При простому розтяганні або стисканні раніше були отримані такі величини, що характеризують міцність і деформативність (формули (3.1), (3.3), (3.5)):

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ – осьове нормальне напруження;}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \text{ – найбільше дотичне напруження по площадках, розташованих під кутом } 45^\circ \text{ до осі стержня;}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ – відносне подовження в напрямку осі стержня;}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \quad \text{– кут зсуву.}$$

5.1. Теорія найбільших нормальних напружень

Цю теорію в літературі пов'язують з ім'ям Галілея*. Відповідно до неї небезпечний стан настає тоді, коли найбільші нормальні напруження досягають деякого граничного значення. При розтяганні граничними напруженнями є σ_0 , при стисканні σ'_0 . Відповідно до формулювання гіпотези небезпечний, або граничний, стан визначається рівностями

$$\sigma_1 = \sigma_0, \quad |\sigma_3| = \sigma'_0. \quad (5.1)$$

Таким чином, за гіпотезою найбільших нормальних напружень граничний стан не може бути визначений однією рівністю. Умову міцності одержимо з (5.1) після заміни σ_0 і σ'_0 допустимими напруженнями $[\sigma]_p$, $[\sigma]_c$ або розрахунковими опорами R_p і R_c :

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p, \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_c; \quad (5.2)$$

$$\sigma_1 \leq R_p, \quad |\sigma_3| \leq R_c,$$

тобто для забезпечення міцності необхідно, щоб головні напруження в складному напруженому стані матеріалу не перевищували напружень при розтяганні і стисканні.

Недоліки теорії очевидні: складний напружений стан у ній прирівнюється до простого лінійного. Крім того, при зсуві (див. п. 1.8.3), наприклад, головні напруження $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, де τ – дотичні напруження на площадці зсуву (рис. 1.34, б). Тому умова граничного стану $\tau = \sigma_0$. Це означає, що руйнування або початок пластичних деформацій повинно відбуватися тоді, коли дотичні напруження τ досягнуть за величиною устанавленого при простому розтяганні (або стисканні) тимчасового опору ($\sigma_0 = \sigma_B$), якщо матеріал крихкий, або границі текучості ($\sigma_0 = \sigma_T$), якщо матеріал пластичний.

Стан чистого зсуву (рис. 1.34, г) можна відтворити в лабораторних умовах (кручення тонких труб). Установлено, що руйнування крихких матеріалів відбувається при дотичних напруженнях τ , які дорівнюють $(0,75 - 0,80) \sigma_B$, а текучість пластичних матеріалів настає при

* Галілео Галілей (1564-1642) – італійський фізик, механік, астроном і математик. Основні відкриття в області механіки: закон інерції, закон падіння тіл та ін.

$\tau_T = (0,55 \dots 0,60) \sigma_T$. Отже, експериментальні дослідження чистого зсуву не підтверджують гіпотези найбільших нормальних напружень.

Відповідно до уявлень гіпотези, що розглядається, руйнування можливе у випадку тристороннього рівномірного обтиснення матеріалу і повинно відбутися, якщо $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| = \sigma'_0$. Це також експериментально не підтверджується.

Незважаючи на вказані недоліки, для перевірки міцності елементів, напружений стан яких незначно відхиляється від лінійного, тобто якщо абсолютні значення двох головних напружень малі порівняно з третім, гіпотеза найбільших нормальних напружень застосовується в інженерно-технічних розрахунках.

5.2. Теорія найбільших подовжень

Небезпечний напружений стан настає тоді, коли найбільше відносне подовження досягає деякого граничного значення. Позначимо останнє через ε_0 , у небезпечному, або граничному, стані маємо

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0.$$

Вважаючи закон Гука (1.27) справедливим до моменту руйнування, можна виразити ε_{\max} і ε_0 через напруження.

Нехай у складному напруженому стані

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

За змістом правої частини граничних рівностей за ε_0 потрібно прийняти відносне подовження у випадку розтягання, тобто

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

Умова граничного стану за цією теорією набуває форми

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \quad (5.3)$$

У випадку плоского напруженого стану (при $\sigma_3 = 0$) співвідношення (5.3) набуває вигляду

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0.$$

При розрахунку за допустимими напруженнями умова міцності записується таким чином:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p, \quad (5.4)$$

а при розрахунку за методом граничних станів

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R_p.$$

Виражаючи головні напруження через σ_x , σ_y , τ_{xy} (4.14), одержимо для плоского напруженого стану таку умову:

$$\frac{1-\nu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R_p.$$

В одержані нерівності включені всі головні напруження, тому особливості напруженого стану характеризуються найбільш повно.

У випадку стискання

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0,$$

і, отже, (див. (5.3))

$$\sigma_0 = -\nu \sigma_3. \quad (5.5)$$

Але експериментально можна установити прямий зв'язок σ_3 із небезпечним напруженням при стисканні σ'_0 :

$$\sigma'_0 = -\sigma_3. \quad (5.6)$$

Порівняння двох виразів для граничних станів (5.5) і (5.6) дозволяє прийти до висновку, що небезпечні напруження при стисканні і розтяганні повинні бути пов'язані між собою рівністю

$$\sigma_0 = \nu \sigma'_0. \quad (5.7)$$

Як витікає з рівності (5.7), теорія міцності нав'язує матеріалу визначені властивості: напруження σ_0 повинні бути менше σ'_0 у стільки разів, у скільки разів ν менше одиниці. Таке співвідношення між σ_0 і σ'_0 не виконується для пластичних матеріалів, тому що абсолютні значення границь текучості при розтяганні і стисканні для більшості з них приблизно рівні. Тимчасовий опір крихких матеріалів при розтяганні менше тимчасового опору при стисканні. Проте виконання залежності $\sigma_0 = \nu \sigma'_0$ для них спостерігається далеко не завжди. Це відхилення від вимог гіпотези пов'язано, по-перше, із тим, що закон Гука при розтяганні крихких матеріалів має, як правило, наближений характер, і, по-друге, із зміною коефіцієнта Пуассона після навантаження за границю пропорційності (у пластичній зоні): $\nu = 0,5$ (див. п. 3.3.2).

У випадку чистого зсуву (див. п. 1.8.3)

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \nu) \tau$$

і в граничному стані

$$\tau = \frac{\sigma_0}{(1 + \nu)},$$

тобто руйнування наступає, коли дотичні напруження (тимчасовий опір при зсуві τ_T) дорівнюють $(0,75 - 0,83)\sigma_0$ при середніх значеннях

коефіцієнта Пуассона $\nu = \left(\frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}\right)$. Отримані кількісні залежності τ_T від σ_B добре узгоджуються з результатами експериментів для крихких матеріалів. Поводження матеріалу в стані рівномірного тристороннього стискання з позицій гіпотези, що розглядається, пояснюється тим, що при такому навантаженні немає яких-небудь подовжень, і тому руйнування неможливе.

Теорію міцності, що розглядається, цілком обґрунтовано застосовують при перевірці міцності конструкцій і деталей із крихких матеріалів (при крихкому руйнуванні). При цьому розірвання відбувається в напрямку найбільших подовжень: при розтяганні – по площині поперечного перерізу, при стисканні – по площинах, перпендикулярних до площини поперечного перерізу, при крученні – під кутом 45° до осі стержня.

5.3. Теорія максимальних дотичних напружень

Руйнування пластичних матеріалів істотно відрізняється від руйнування крихких. Воно супроводжується розвитком залишкових деформацій, тобто зсувів у матеріалі, і тому повинно бути пов'язане не з нормальними напруженнями і відносними подовженнями, а з дотичними напруженнями. Обґрунтуванням цієї теорії послужили роботи Кулона і досвіди Треска. В остаточному вигляді вона була висловлена Сен-Венаном, з ім'ям якого звичайно і пов'язується. Ця теорія формулюється таким чином. Пластичний стан матеріалу починається тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають деякої граничної величини. Такою граничною величиною є границя текучості для дотичних напружень τ_T , отже, умова пластичності може бути записана у вигляді

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Оскільки $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ (див. (4.42)) і $\sigma_0 = \sigma_T$, $\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}$ (див. п. 3.2), маємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (5.8)$$

Умова міцності за цією теорією має таку форму: при розрахунку за методом допустимих напружень

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (5.9)$$

При розрахунку за методом граничних станів

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R.$$

У випадку плоского напруженого стану одне з головних напружень дорівнює нулю. Використовуючи (4.18), одержимо

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R_p.$$

При $\sigma_y = 0$ ця умова набуває вигляду

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_p.$$

Ця сама умова при розрахунку за методом допустимих напружень записується таким чином:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p.$$

При розтяганні ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) і стисканні ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$) початок текучості визначається тим самим значенням границі текучості

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad \text{і} \quad -\sigma_3 = \sigma_T,$$

що має місце для пластичних матеріалів.

При чистому зсуві ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$) $\tau = \frac{\sigma_T}{2}$, тобто границя текучості для дотичних напружень τ_T складає $0,5 \sigma_T$, що менше τ_T , визначеного експериментом.

Умова неруйнування матеріалів у випадку тристороннього рівномірного обтиснення ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) виконується автоматично, тому що ліва частина рівності (5.8) обертається в нуль, і тому вона не може бути виконана. Відповідно до вказаної теорії текучість не виникає і при яких завгодно великих головних напруженнях, якщо найбільша різниця між ними $\sigma_1 - \sigma_3$ за абсолютною величиною менша σ_T .

Умова (5.6) широко використовується в технічних розрахунках для перевірки міцності пластичних матеріалів у складних напружених станах. Недоліки її – відсутність у розрахунковій формулі середніх за величиною головних нормальних напружень σ_2 , що призводить до неточності в оцінці напруженості матеріалу.

5.4. Енергетична теорія міцності

За кількісну характеристику початку пластичних деформацій за цією теорією прийнята потенційна енергія зміни форми, пов'язана, як вказувалося в п. 5.2, із розвитком зсувів у матеріалі. Ця теорія пов'язана з іменами Губера, Мізеса, Генки.

Пластичний стан матеріалу починається тоді, коли питома потенційна енергія зміни форми досягне деякої граничної величини

$$u_\phi = u_{оп}. \quad (5.10)$$

У формулі (5.10)

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

За праву частину рівності (5.10) слід прийняти потенційну енергію зміни форми при розтяганні

$$u_{оп} = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_0^2.$$

Після підстановки u_{ϕ} і $u_{оп}$ у (5.10), скорочень і добуття кореня одержимо таку формулу, що визначає початок текучості:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_0 = \sigma_{\tau}. \quad (5.11)$$

Звідси впливає така форма умови міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (5.12)$$

При розрахунку за методом граничних станів $[\sigma]_p$ слід замінити розрахунковим опором при розтяганні R_p .

Для плоского напруженого стану, використовуючи (4.14) і вважаючи в ньому $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, знайдемо

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

При розрахунку конструкцій за методом граничних станів міцність перевіряється за такою формулою:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$$

У випадку стискання (5.11) маємо

$$|\sigma_3| = \sigma_0.$$

Але оскільки небезпечний стан при стисканні експериментально встановлюється рівністю

$$|\sigma_3| = \sigma'_0,$$

то узгодження енергетичної умови міцності з результатом дослідів можливе тільки при приблизно однакових границях текучості матеріалу у випадках розтягання і стискання.

У випадку зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$) на підставі рівності (5.11) маємо $\sqrt{3} \tau = \sigma_0$, або $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \approx 0,57 \sigma_0$, тобто границя текучості для дотичних напружень τ_{τ} повинна дорівнювати 0,57 границі текучості при розтяганні σ_{τ} .

За експериментальними дослідженнями пластичних матеріалів τ_{τ} знаходиться в межах $(0,55 \dots 0,60) \sigma_{\tau}$. У випадку рівномірного тристороннього стискання або розтягання, а також у випадках близьких між собою за значеннями як завгодно великих за абсолютною величиною головних напружень у відповідності з енергетичною умовою небезпечного

стану, як і за умовою найбільших дотичних напружень, перехід матеріалу в пластичний стан неможливий. Це не відповідає істинному стану справи.

Незважаючи на показані невідповідності, енергетична умова достатньо точно визначає початок пластичних деформацій для широкого класу напружених станів, що звичайно зустрічаються на практиці. Енергетична гіпотеза міцності з успіхом застосовується для перевірки міцності конструкцій і деталей машин із пластичного матеріалу.

5.5. Теорія міцності Мора

Жодна з перерахованих вище гіпотез міцності не є досконалою. По-перше, виконання кожної з них потребує дотримання визначених обмежень значень механічних характеристик матеріалу. За гіпотезами найбільших дотичних напружень і енергетичною, наприклад, повинна виконуватись рівність границь текучості при стисканні і розтяганні. За гіпотезою найбільших відносних подовжень тимчасовий опір розтягання повинен бути не більше 0,5 тимчасового опору стискання.

По-друге, жодна з показаних гіпотез принципово не може охопити руйнування у всіх напружених станах. Справа в тому, що в основу гіпотез покладене уявлення про руйнування матеріалу від відриву (перша і друга гіпотези), а в основу інших – руйнування його від зсуву (третья і четверта гіпотези). Установлено, що властивості матеріалу істотно залежать від виду напруженого стану. При одних співвідношеннях головних напружень матеріал може бути крихким, при інших пластичним. Тому поділ матеріалів на крихкі і пластичні умовний. Таким чином, застосування в кожному окремому випадку тієї або іншої гіпотези повинно бути пов'язане з характером напруженого стану. Для повного вичерпного установлення граничних рівностей необхідна гіпотеза міцності, рівною мірою застосована як до крихкого, так і до пластичного руйнування.

Найбільш широке визнання у зв'язку з цим одержала пропозиція Мора, що узагальнює гіпотезу найбільших дотичних напружень на крихке руйнування матеріалів.

Умова граничного стану за Мором має вигляд

$$\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 + \sigma_3) = 2\sigma_0. \quad (5.13)$$

В окремому випадку рівних небезпечних напружень $\sigma'_0 = \sigma_0$ вона збігається з умовою гіпотези найбільших дотичних напружень (5.8).

Умова міцності має такий вигляд:

$$\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 + \sigma_3) \leq 2[\sigma]_p.$$

У випадку плоского напруженого стану, використовуючи (4.18) і поклавши в ньому $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\tau_{xy} = \tau$, одержимо

$$\frac{1-\kappa}{2} \sigma + \frac{1+\kappa}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p,$$

де $\kappa = \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}$.

Теорія Мора дає результати, що добре узгоджуються з експериментальними даними в тих випадках, коли $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

Відмітною рисою теорії Мора порівняно з розглянутими раніше є те, що вона цілком базується на експериментальних даних і з їх накопиченням може уточнюватися. Недоліком теорії Мора є неврахування (як і в теорії найбільших дотичних напружень) проміжного головного напруження σ_2 .

Розділ 6

ТЕОРІЯ ЗГИНАННЯ

Під плоским поперечним згинанням розуміється такий вид деформації, при якому всі діючі активні і реактивні сили прикладені до осі балки та лежать у головній площині. Головною називається площина, яка проходить через головні центральні осі поперечних перерізів. Припускаємо, що поперечні перерізи балки симетричні відносно цієї площини, в якій лежать зовнішні сили (рис. 6.1), тобто площиною навантаження є площина симетрії.

Віссю балки називається лінія, яка проходить через центри ваги всіх поперечних перерізів. До деформації балки вісь являє собою пряму лінію (див. п. 1.2).

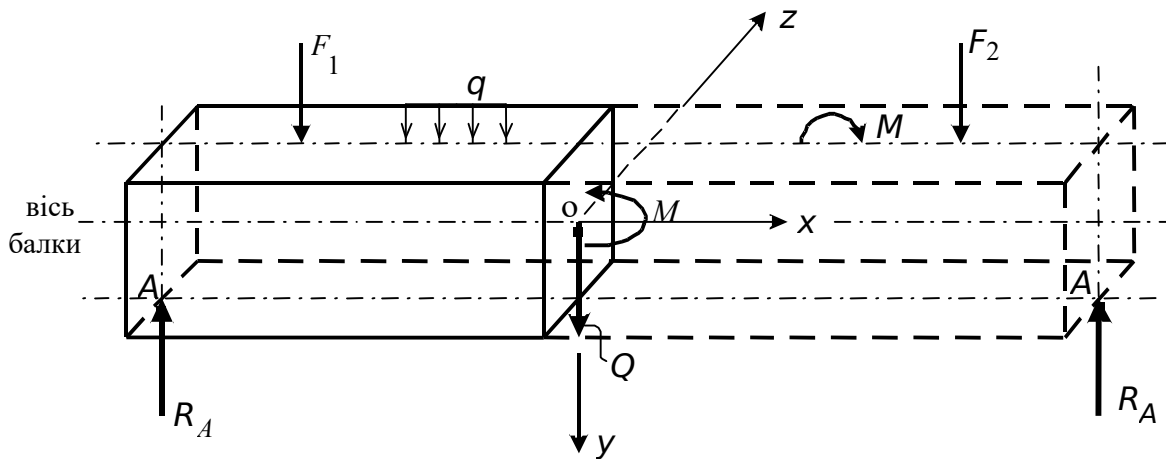


Рис. 6.1. Схема зусиль, що виникають у поперечних перерізах балки

При цих умовах внутрішні сили, що виникають у поперечних перерізах балки, приводяться до головного вектора Q , що збігається з віссю OY , і головного моменту M , площина дії якого збігається з головною площиною XOY (рис. 6.1).

Якщо в поперечних перерізах балки виникають обидва внутрішні силові фактори – згинальний момент M і поперечна сила Q , то згинання називається поперечним, якщо тільки згинальний момент – чистим.

6.1. Чисте згинання

Розглянемо спочатку такі ділянки балок, у яких є тільки згинальний момент, а поперечна сила дорівнює нулю. Як приклад візьмемо балку, показану на рис. 6.2.

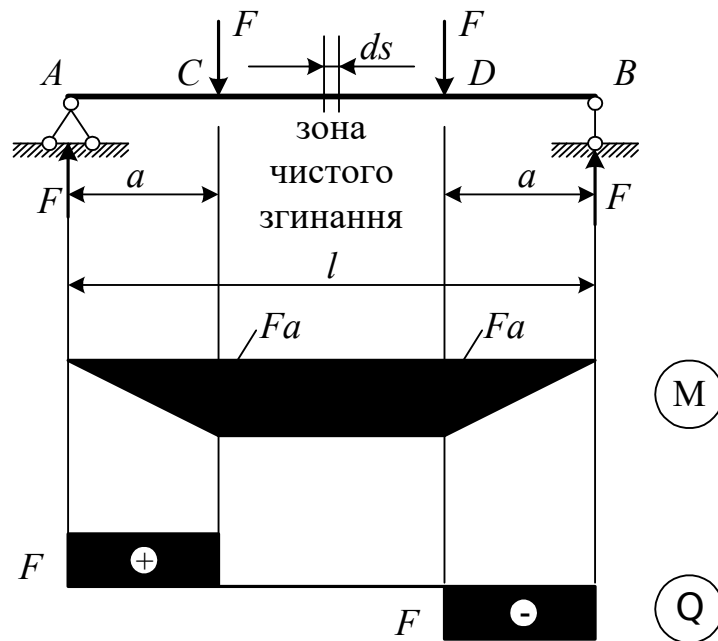


Рис. 6.2. Схема навантаження балки, що призводить до виникнення зони чистого згинання

При дії сил F балка згинається, її вісь (пряма до згинання) після згинання набуває вигнутої форми (рис. 6.3). Верхні волокна балки стискаються, нижні – розтягуються.

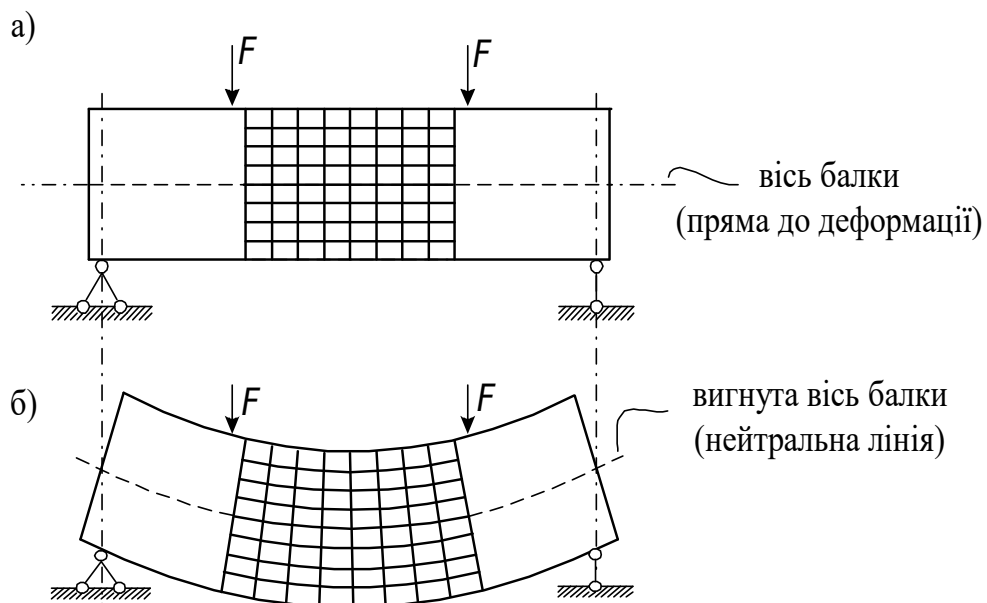


Рис. 6.3. Схеми скривлення горизонтальних і вертикальних ліній у зоні чистого згинання

Якщо переглянути усі волокна балки, починаючи з крайніх верхніх і закінчуючи крайніми нижніми, то легко встановити, що крайні верхні

волокна стискаються найсильніше, у наступних за ними стискання поступово зменшується і на деякій висоті переходить у розтягання. Останнє поступово зростає і у крайніх нижніх волокнах буде найбільшим. Між стиснутими і розтягнутими волокнами буде такий шар, волокна якого при згинанні не змінюють своєї довжини. Цей шар називається нейтральним.

Якщо на бічну поверхню балки нанести сітку з горизонтальних і вертикальних ліній (рис. 6.3), то при згинанні горизонтальні лінії скривляться приблизно так само, як і вісь балки; вертикальні лінії залишаться прямими; вони тільки трохи нахилиються, залишаючись перпендикулярними до вигнутої осі балки. Окремі прямокутники сітки спотворюються, але прямі кути залишаються прямими. Тоді поперечні перерізи балки (рис. 6.1), плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї (гіпотеза плоских перерізів, Якоб Бернуллі, 1705 р., див. п. 3.1).

Двома поперечними перерізами виріжемо в середній ділянці балки елемент довжиною ds (рис. 6.2) і подамо його на окремому кресленні (рис. 6.4, а).

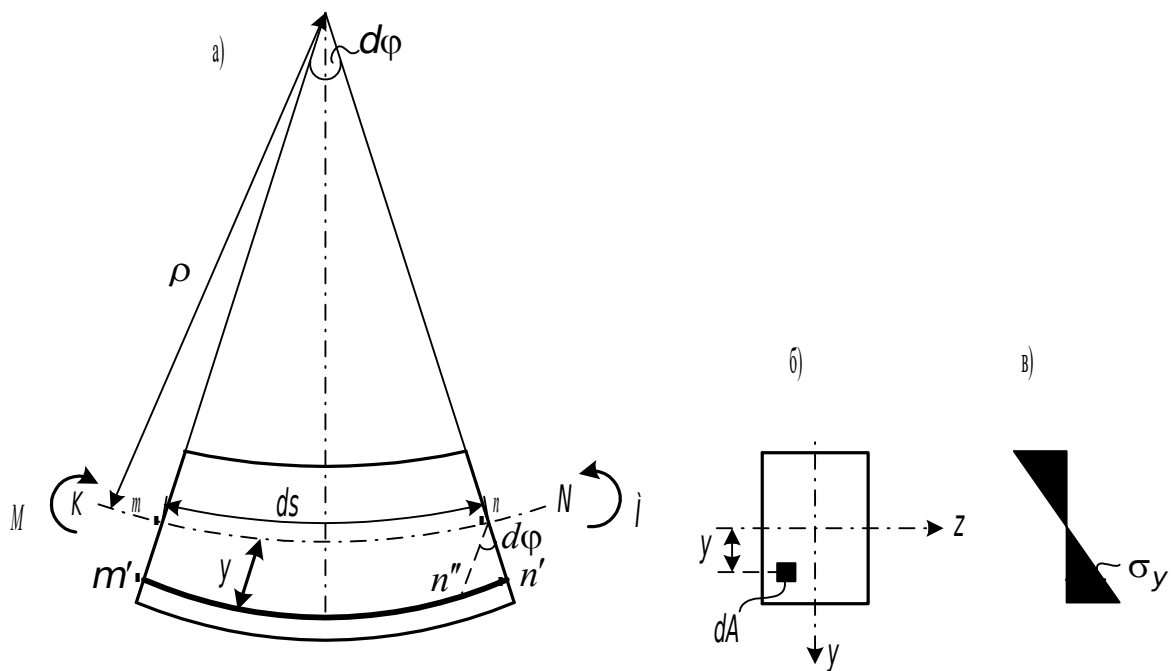


Рис. 6.4. Елемент балки

До деформації перерізи балки паралельні між собою (рис. 6.2). Після деформації вони дещо нахилиються, створюючи кут $d\varphi$ (рис. 6.4). Нехай KN – нейтральний шар балки, ρ – радіус його кривизни, mn – довжина поздовжнього волокна, що лежить у нейтральному шарі, яка не змінюється при згинанні балки і увесь час залишається такою, що дорівнює ds :

$$mn = ds = \rho d\varphi. \quad (6.1)$$

Візьмемо волокно $m'n'$. При деформації це волокно подовжиться. Щоб визначити збільшення його довжини, через точку n проведемо лінію, паралельну mm' , до перетинання з волокном $m'n'$ у точці n'' .

Тоді $m'n'' = mn$ і відрізок $n'n''$ буде являти собою повне подовження волокна $m'n'$. Можна прийняти з точністю до малих другого порядку

$$n'n'' = y d\varphi. \quad (6.2)$$

Відносне подовження волокна $m'n'$

$$\varepsilon = \frac{n'n''}{mn} = \frac{n'n''}{ds} = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (6.3)$$

Для визначеного перерізу радіус кривизни вигнутої осі балки ρ є величиною постійною, і тому відносне подовження волокна прямо пропорційне відстані цього волокна до нейтральної осі балки.

Перейдемо від деформацій до напружень, тобто розглянемо фізичний аспект задачі. Якщо встановити, що при згинанні балки одні з її волокон подовжуються, а інші укорочуються, можна сказати, що явище згину зведеться до деформації поздовжніх волокон.

Введемо іншу гіпотезу. Прийнемо, що при згинанні поздовжні волокна не натискають одне на одне і не прагнуть відірватися одне від одного. При такому припущенні кожне волокно деформується ізольовано, зазнаючи простого одноосьового стискання або розтягання.

Отже, можна використовувати закон Гука у вигляді (3.5), тобто

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Тоді, підставляючи замість ε її значення (6.3), одержимо

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (6.4)$$

Ці напруження нормальні до площини поперечного перерізу (рис. 6.4, в) балки і змінюються за лінійним законом, а саме: напруження прямо пропорційне відстані волокна від нейтральної осі.

Тепер освітимо статичний бік задачі. Розглянемо ліву частину балки. Замінімо відкинуту праву частину балки зусиллями і складемо рівняння рівноваги (рис. 6.5).

На поперечному перерізі (рис. 6.4, б) виділимо елементарні площадки dA . Тоді елементарне розтягуюче зусилля у волокні $n'm'$ дорівнює

$$\sigma dA = \frac{E y}{\rho} dA. \quad (6.5)$$

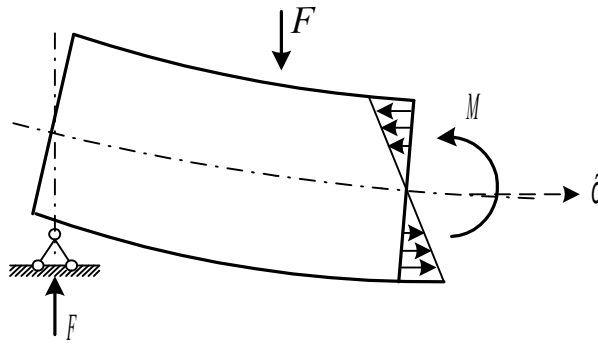


Рис. 6.5. До виведення формули для нормальних напружень

Спроекуємо всі сили, що діють у перерізі, на вісь X :

$$\sum X = 0: \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0. \quad (6.6)$$

Оскільки $E \neq 0$, $\rho \neq 0$, то

$$\int_A y dA = 0,$$

тобто статичний момент площі поперечного перерізу щодо нейтральної осі повинен дорівнювати нулю.

Це буде лише в тому випадку, якщо нейтральна вісь проходить через центр тяжіння поперечного перерізу. Отже, нейтральний шар у балці проходить через центри тяжіння поперечних перерізів.

Складемо друге рівняння рівноваги:

$$\sum M_{лів} = 0: \int_A \sigma_y dA = \int_A E \frac{y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M. \quad (6.7)$$

Але $\int_A y^2 dA = J$ – момент інерції (див. п. 2.3).

Отже,

$$\frac{EI}{\rho} = M \quad \text{або} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}, \quad (6.8)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна зігнутої осі балки;

EJ – жорсткість балки при згинанні.

Кривизна вигнутої осі балки прямо пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна жорсткості балки.

У формулу (6.4) підставимо (6.8). У результаті знайдемо

$$\sigma = \frac{M y}{J}. \quad (6.9)$$

Для матеріалів, що однаково (або майже однаково) добре працюють на розтягання і стискання (сталь), найбільш вживані перерізи, симетричні відносно нейтральної осі (прямокутники, двотаври, швелери, ...).

Позначимо висоту перерізу через h . Тоді виходячи з (6.9) $\sigma = \frac{M}{J} \frac{h}{2}$.

Позначимо $\frac{J}{h} = W$ – момент опору перерізу. Тоді

$$\sigma = \frac{M}{W}. \quad (6.10)$$

Якщо переріз несиметричний відносно нейтральної осі (рис. 6.6), то

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1} \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}, \quad (6.11)$$

де $W_1 = \frac{J}{h_1}$, $W_2 = \frac{J}{h_2}$.

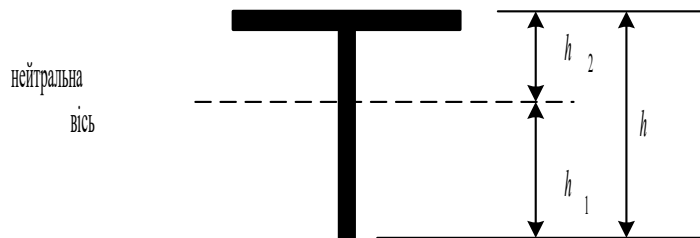


Рис. 6.6. Несиметричний відносно нейтральної осі поперечний переріз балки

6.2. Поширення висновків теорії чистого згинання на поперечне згинання

При виведенні формул для нормальних напружень (6.9), (6.10), (6.11) ми мали на увазі чисте згинання, тобто згинальний момент передбачався постійним по довжині ділянки, що розглядається. Проте в розрахунковій практиці найчастіше зустрічається поперечне згинання, коли в перерізах балки є як згинальний момент, так і поперечна сила. При цьому згинальний момент уже не постійний, а змінюється по довжині балки.

Розглянемо ділянку балки (рис. 6.7, а). На відстані u від нейтральної лінії виділимо волокно mn площею dA (рис. 6.7, б).

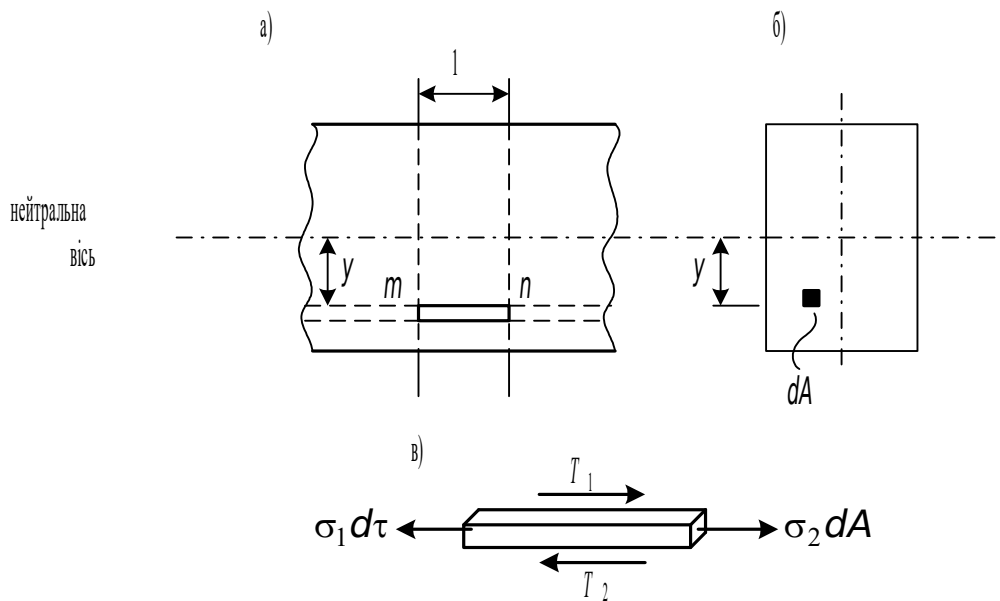


Рис. 6.7. До поширення висновків теорії чистого згинання на поперечне згинання

При моменті, що змінюється, зусилля на кінцях виділеного волокна (рис. 6.7, в) різні. Але волокно знаходиться в рівновазі, а це можливо лише за умови, що по його поздовжніх гранях діють дотичні зусилля T_1 і T_2 . Отже, при поперечному згинанні виникають не тільки нормальні, але і дотичні напруження. Оскільки нормальні напруження змінюються за висотою перерізу, і дотичні теж будуть змінюватися, то взаємні зсуви волокон не однакові. Переконаємося в цьому за допомогою досліду. Візьмемо дерев'яний брусок $abcd$, розпілимо його на горизонтальні смужки і навантажимо силою F (рис. 6.8, а). Кожна смужка згинається самостійно, у кожній з них верхні прошарки стиснуті, а нижні розтягнуті. Кінці полиць дещо зрушаться один відносно іншого по площинах розтинів. Торцеві грані приймуть східчасту форму (рис. 6.8, б). Чому до розтину бруска окремі його прошарки не зрушувалися, а після розтину зрушуються? Очевидно, сили, що прагнуть зробити цей зсув, були і до розтину, але виконати його заважало зчеплення волокон бруска.

На підставі закону взаємності дотичних напружень (1.18) можна стверджувати, що при поперечному згинанні будуть виникати дотичні напруження і по площадках, перпендикулярних до нейтрального прошарку, тобто по вертикальних поперечних перерізах (рис. 6.8, в). Більш точними дослідженнями встановлено, що вплив поперечної сили на величину нормальних напружень незначний. Він залежить від відношення висоти балки до її прогону. При невеличкій висоті перерізу $h = \left(\frac{1}{10} \dots \frac{1}{20}\right) l$ вони складають частки одного відсотка. Тому нормальні напруження при

поперечному згинанні визначають за формулами, виведеними у припущенні *чистого згинання*, – (6.9), (6.10), (6.11).

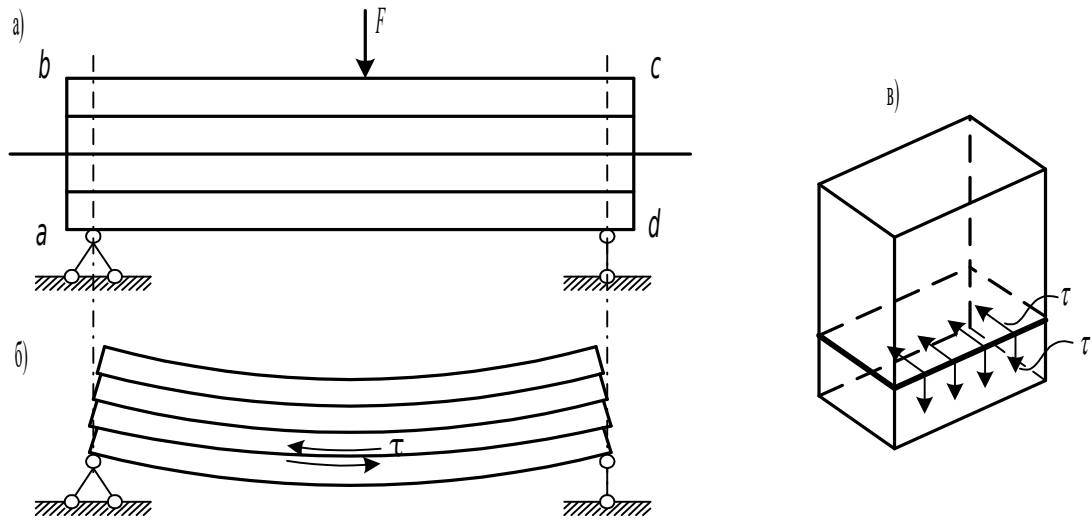


Рис. 6.8. Згинання балки, складеної з горизонтальних брусів

6.3. Виведення формули дотичних напружень

Для аналітичного визначення дотичних напружень візьмемо таку ділянку балки, на якій поперечна сила не дорівнює нулю. Виріжемо двома поперечними перерізами елемент $mnrS$ довжиною dx (рис. 6.9). Потім проведемо переріз pq , паралельний нейтральному шару. Цими розтинами виділимо із балки елемент $mnpq$.

Згинальний момент у перерізі X позначимо через M , а згинальний момент у перерізі $x + dx$ через M_1 (рис. 6.9, а). Припустимо, що $M_1 > M$, так що збільшення моменту на довжині ділянки dx , що розглядається, $M_1 - M = dM$.

Нормальне напруження в перерізі X для волокна, що лежить на відстані y від нейтрального шару (рис. 6.9, б, в), відповідно до (6.9) дорівнює

$$\sigma = \frac{M y}{J}.$$

Нормальне напруження в перерізі $x + dx$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{J}.$$

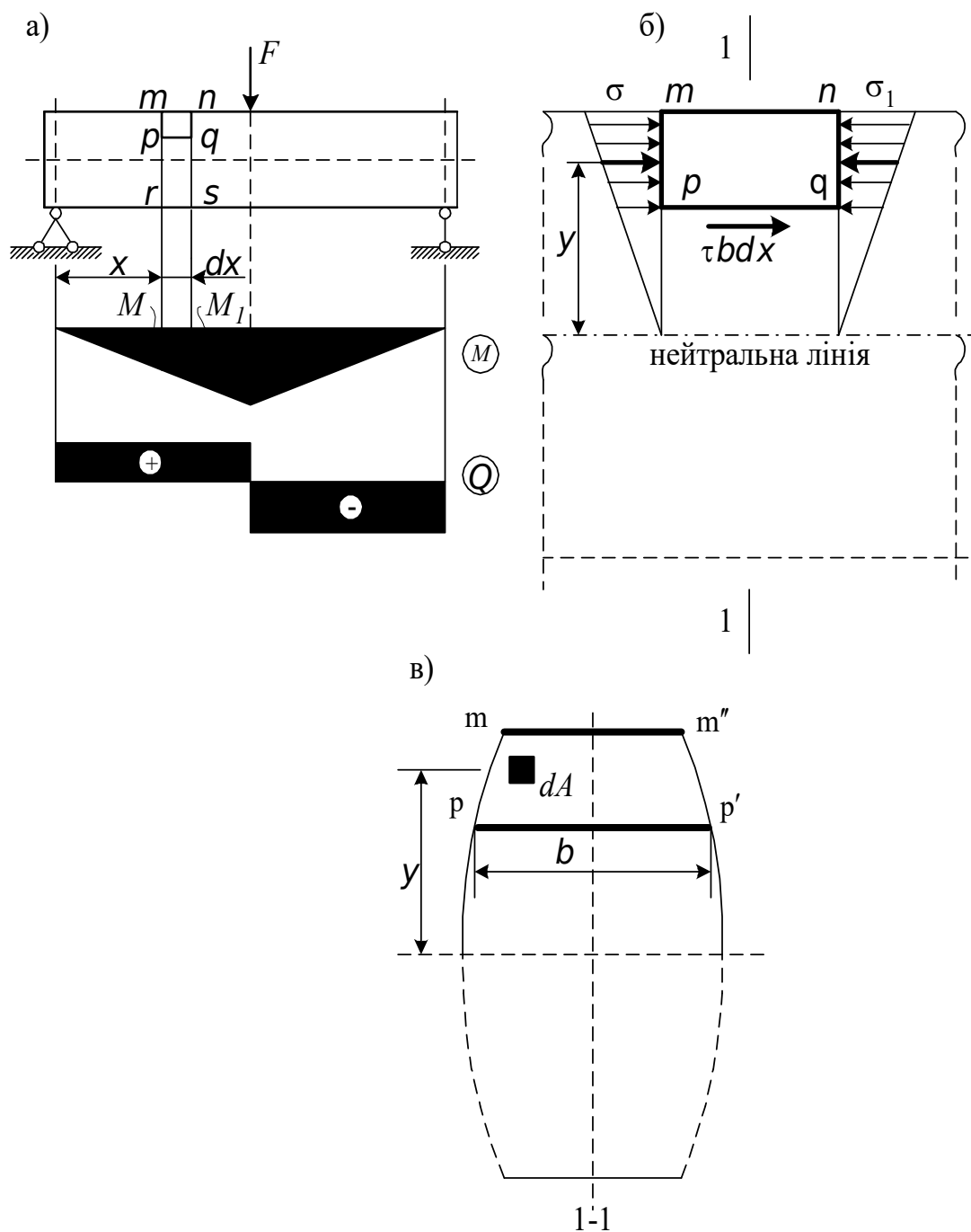


Рис. 6.9. До виведення формули дотичних напружень

Сили N і N_1 , що діють по площі розтину $mm'pp'$, відповідно дорівнюють

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{M}{J} \int_A y dA = \frac{M S}{J};$$

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA = \frac{M_1}{J} \int_A y dA = \frac{M_1 S}{J}.$$

На нижній грані елемента (рис. 6.9, б) повинні бути сили, що характеризують дію відкинutoї нижньої частини. Оскільки поздовжні

волокна балки не тиснуть одне на одне, нормальні напруження по нижній грані елемента прикладати не потрібно, достатньо прикласти лише дотичні напруження τ , які будемо вважати рівномірно розподіленими по ширині перерізу балки.

Рівняння рівноваги для горизонтальних сил

$$\sum X = 0: N - N_1 + \tau b dx = 0.$$

Підставивши в цю рівність значення N і N_1 , одержимо

$$\tau b dx = dM \frac{S}{J}.$$

Оскільки $\frac{dM}{dx} = Q$ (див. (1.5)), то

$$\tau = \frac{QS}{Jb}. \quad (6.12)$$

Тут b – ширина перерізу на рівні тієї площадки, на якій визначається дотичне напруження; S – статичний момент площі відносно нейтральної осі тієї частини поперечного перерізу, що лежить вище площадки, яка розглядається.

Формула (6.12) отримана в 1855 р. Д.І. Журавським*. Вона, як ми бачили, ґрунтується на двох допущеннях: дотичні напруження в будь-якій точці перерізу спрямовані паралельно силі Q , величина дотичного напруження залежить тільки від координати Y точки перерізу; іншими словами, по ширині перерізу дотичні напруження розподілені рівномірно.

6.3.1. Дотичні напруження для прямокутного перерізу

Зміни дотичних напружень по висоті перерізу можна наочно зобразити на графіку, який називають епюрою дотичних напружень. З формули (6.12) очевидно, що для заданого перерізу балки зміна τ по висоті перерізу залежить від величин S і b . Розглянемо прямокутний переріз (рис. 6.10).

Статичний момент заштрихованої площі відносно осі Z дорівнює:

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

* Дмитро Іванович Журавський (1824-1891) – видатний інженер шляхів сполучення Росії, будівник мостів Петербурзько-Московської залізниці.

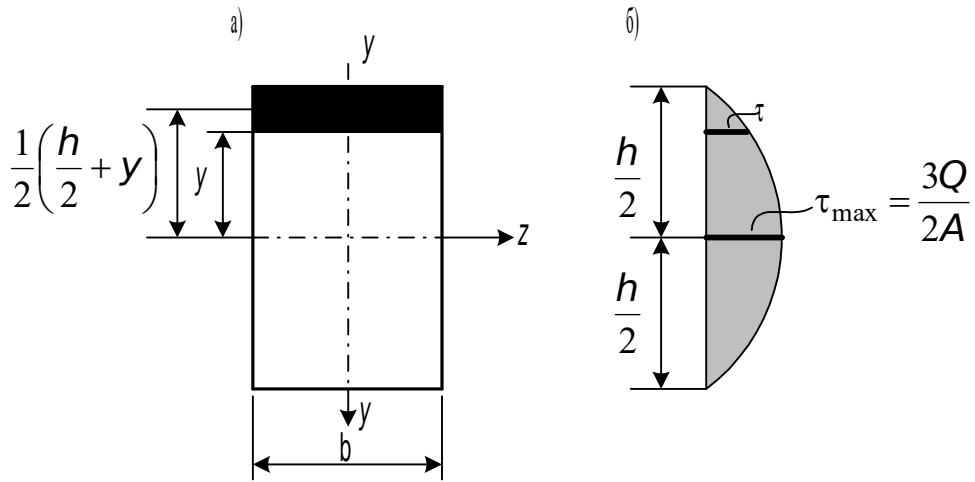


Рис. 6.10. Дотичні напруження в балці прямокутного поперечного перерізу

Підставивши отриманий вираз в (6.12), знайдемо

$$\tau = \frac{Q}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.13)$$

З цієї формули очевидно, що дотичні напруження по висоті перерізу змінюються за законом параболи. Ці напруження дорівнюють нулю при $y = \pm \frac{h}{2}$ і досягають максимуму на рівні нейтральної осі ($y = 0$), де вони дорівнюють

$$\tau_{\max} = Q \frac{12}{bh^3} \frac{h^2}{8} = \frac{3Q}{2A}. \quad (6.14)$$

Тут A – площа поперечного перерізу, $A = bh$. Нагадаємо, що момент інерції прямокутника відносно осі Z дорівнює $J_z = \frac{bh^3}{12}$ (див. п. 2.3.4).

6.3.2. Дотичні напруження для кругового перерізу

Для бруса кругового перерізу (рис. 6.11) шляхом нескладної операції інтегрування можна знайти $S = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$.

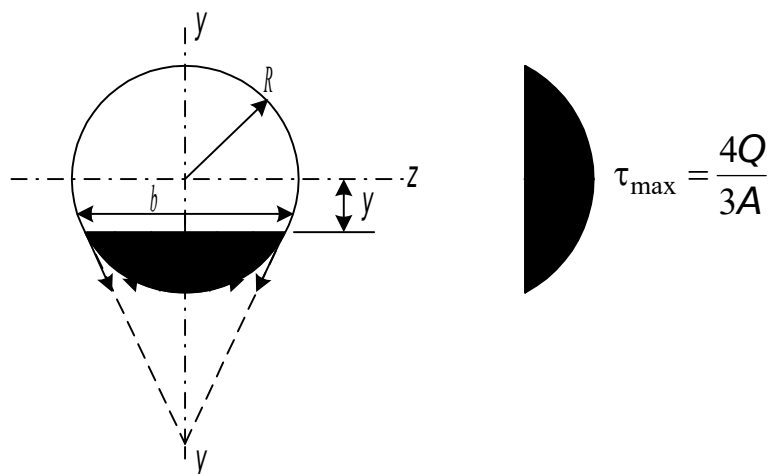


Рис. 6.11. Розподіл дотичних напружень у балці кругового поперечного перерізу

Крім того, згідно до п. 2.3.4,

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4},$$

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

звідки

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y^2) \quad (6.15)$$

і

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}. \quad (6.16)$$

6.3.3. Дотичні напруження для трикутного перерізу

Для бруса, що має переріз у формі трикутника з основою b і висотою h (рис. 6.12), можна знайти

$$S_z = \frac{1}{3} \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right)^2 \left(\frac{h}{3} + y \right), \quad J_z = \frac{bh^3}{36},$$

$$\tau = \frac{4Q}{3bh^3} (2h - 3y)(h + 3y). \quad (6.17)$$

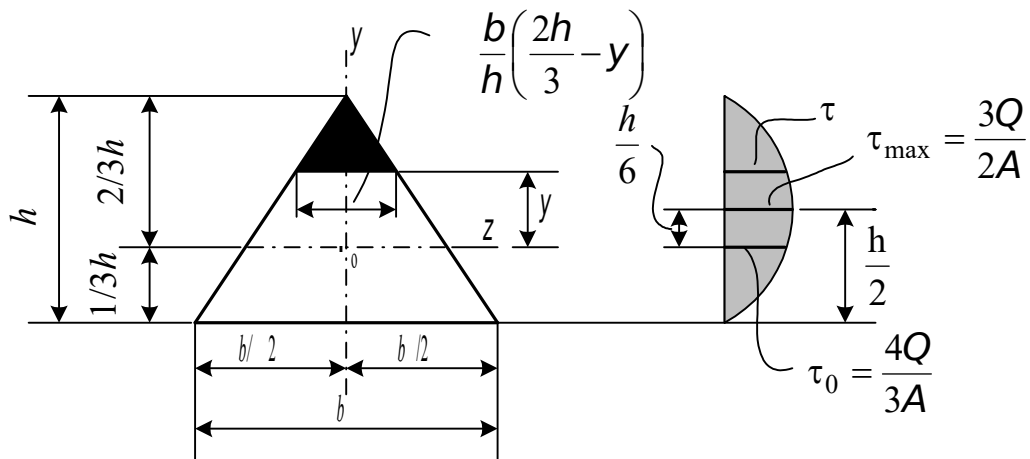


Рис. 6.12. Розподіл дотичних напружень у балці трикутного поперечного перерізу

Максимальні дотичні напруження мають місце при $y = \frac{h}{6}$:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}, \quad (6.18)$$

де $A = \frac{1}{2}bh$.

На рівні нейтральної осі (при $y = 0$) дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_{y=0} = \frac{4Q}{3A}. \quad (6.19)$$

Слід зазначити, що для кругового і трикутного поперечних перерізів отримані вище формули (6.15) і (6.17) носять наближений характер, тому що тут дотичні напруження мають складові по осі Z . Для визначення цих складових варто вдаватися до більш складних прийомів, ніж ті, що розглядаються в курсі опору матеріалів. У більшості випадків складові τ по осі Z відіграють істотно меншу роль, ніж складові по осі Y , тому ними можна знехтувати при оцінці міцності балок.

6.3.4. Дотичні напруження для двотаврового перерізу

Розглянемо тонкостінний поперечний переріз балки у вигляді двотавра (рис. 6.13).

Щоб уявити закон зміни дотичних напружень по висоті перерізу, зупинимося, як і раніше, на аналізі впливу на їх величину статичного моменту відсіченої площі S_z . На відстані Y від нейтральної осі (рис. 6.13, а) статичний момент відсіченої площі дорівнює

$$S_z = \frac{1}{2} \left\langle d \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - y^2 \right] + bt(h-t) \right\rangle. \quad (6.20)$$

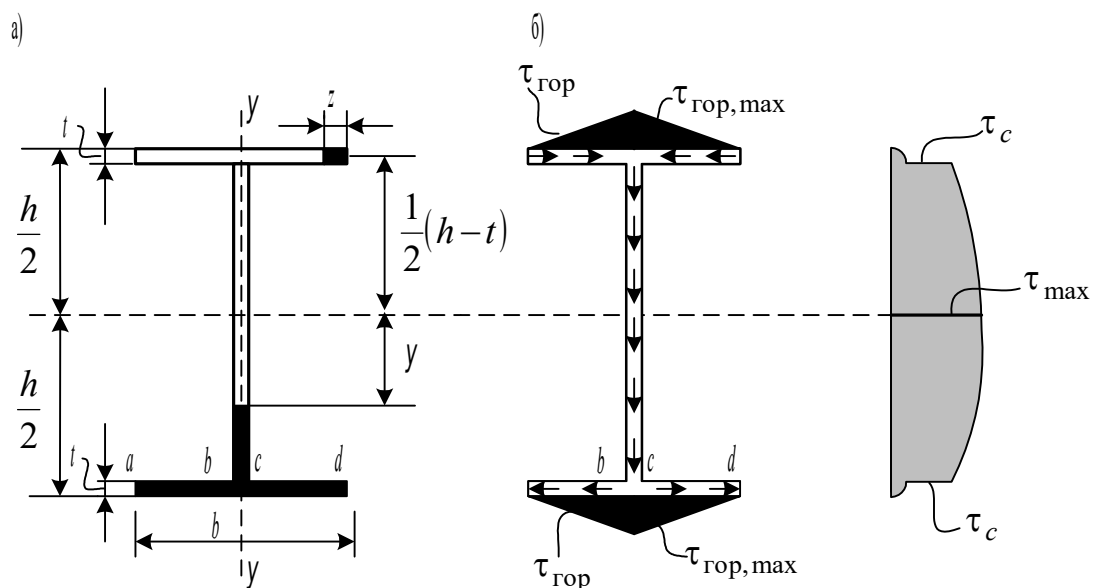


Рис. 6.13. Дотичні напруження в балці двотаврового поперечного перерізу

При $y = 0$ (на рівні нейтральної осі) дотичні напруження досягають максимального значення

$$\tau_{\max} = \frac{Q \left[d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 + bt(h-t) \right]}{2J_z \cdot d}. \quad (6.21)$$

При $y = \left(\frac{h}{2} - t \right)$, тобто в місці переходу від стінки до полиці, дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_c = \frac{Qbt(h-t)}{2J_z \cdot d}. \quad (6.22)$$

Звичайно товщина стінки d дуже мала порівняно із шириною полки b , тому різниця між τ_{\max} (6.21) і τ_c (6.22) невелика. Розподіл дотичних напружень у місці з'єднання стінки з полицею має більш складний закон і не може бути проаналізований у рамках елементарного підходу, тобто на підставі формули (6.22), підстановкою в неї замість " d " - " b ". Це очевидно з того факту, що при $y = \left(\frac{h}{2} - t \right)$ дотичні напруження на вільних поверхнях ab і cd (рис. 6.13, а) повинні дорівнювати нулю, тоді як відповідно до (6.20) вони мають скінченну величину. У місцях переходу

від широкої частини перерізу (полиці двотавра) до більш вузької (її стінки) має місце концентрація напружень (див. п. 10.8). Для зменшення цього небезпечного явища вхідні кути в місці переходу стінки до полиці округляються (див. сортамент прокатної сталі, наприклад, Дод. 1). Закінчуючи аналіз розподілу вертикальних дотичних напружень, підкреслимо, що в полицях двотавра вони дуже малі, тому що значну частину поперечної сили (близько 95%) сприймає вертикальна стінка, полиці ж сприймають тільки малу частину її.

У полицях двотаврової балки виникають також горизонтальні напруження. Їх можна визначити за формулою (6.12), але тільки відстань до площадки, яка розглядається, потрібно вимірювати від вертикальної осі по горизонталі, а статичний момент відсіченої частини полиці брати відносно нейтральної осі перерізу (рис. 6.13, а). І замість ширини поперечного перерізу b потрібно ввести товщину стінки t . Тоді статичний момент відсіченої частини полиці дорівнює

$$S_z = \frac{1}{2} z t (h - t) ,$$

а горизонтальні дотичні напруження в полиці визначаються за такою формулою:

$$\tau_{\text{гор}} = \frac{Q z (h - t)}{2 J_z} . \quad (6.23)$$

$$\text{При } z = \frac{b}{2}$$

$$\tau_{\text{гор. max}} = \frac{Q b (h - t)}{4 J_z} . \quad (6.24)$$

Як видно з рис. 6.13, б, траєкторії дотичних напружень у перерізі при поперечній силі, спрямованій униз, направлені від верхніх країв полиці до центра, далі проходять по стінці і потім направлені назовні до країв нижньої полиці.

6.4. Головні напруження при згинанні балок

На практиці зустрічаються такі випадки, коли найбільшими бувають напруження по похилих до осі балки площадках. Вони виникають у результаті одночасної дії нормальних і дотичних напружень і називаються головними напруженнями. Найбільші і найменші головні напруження діють по двох взаємно-перпендикулярних площадках, що називаються головними площадками (див. розд. 4). На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю. Кути нахилу головних площадок визначаються за формулою (4.13), якщо в ній покласти $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$:

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \tau}{\sigma} . \quad (6.25)$$

Рівність (6.25) для кута α дає два значення, що відрізняються на 90° (див. п. 4.1.2).

Формула для визначення головних напружень має такий вигляд (отримана із (4.14) заміною: $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$):

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} . \quad (6.26)$$

Для того щоб зрозуміти, як змінюються величина і напрямок головних напружень у балці, що має прямокутний поперечний переріз, виберемо по висоті перерізу (рис. 6.14) п'ять точок А, В, С, D і Е. Точки А і Е знаходяться на верхній і нижній поверхні відповідно, а точка С – на середині висоти балки. Знаючи згинальний момент і поперечну силу, що діють у даному поперечному перерізі, можна підрахувати напруження за (6.9), (6.12), (6.26). Приймаємо, що ці напруження діють на малі елементи, які виділимо із балки біля відповідних точок (рис. 6.14, а, б).

Зі схем, наведених на рис. 6.14, а, очевидно, що в точці А головні стискальні напруження спрямовані горизонтально, при цьому головні розтягуючі напруження дорівнюють нулю. При переміщенні до нейтральної осі головні стискальні і головні розтягуючі напруження будуть відхилятися відповідно від горизонталі і вертикалі і на нейтральній осі складуть кути 45° із цими осями. У точці Е головні розтягуючі напруження горизонтальні, а головні стискальні – дорівнюють нулю.

Площинки з найбільшими дотичними напруженням (див. (4.18), $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$)

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6.27)$$

розташовані під кутом 45° до площадок із найбільшими нормальними напруженнями (рис. 6.14, б). На цих площадках нормальні напруження в нуль не обертаються (див. точки А, В, D, Е на рис. 6.14, б (див. також п. 4.1.3)).

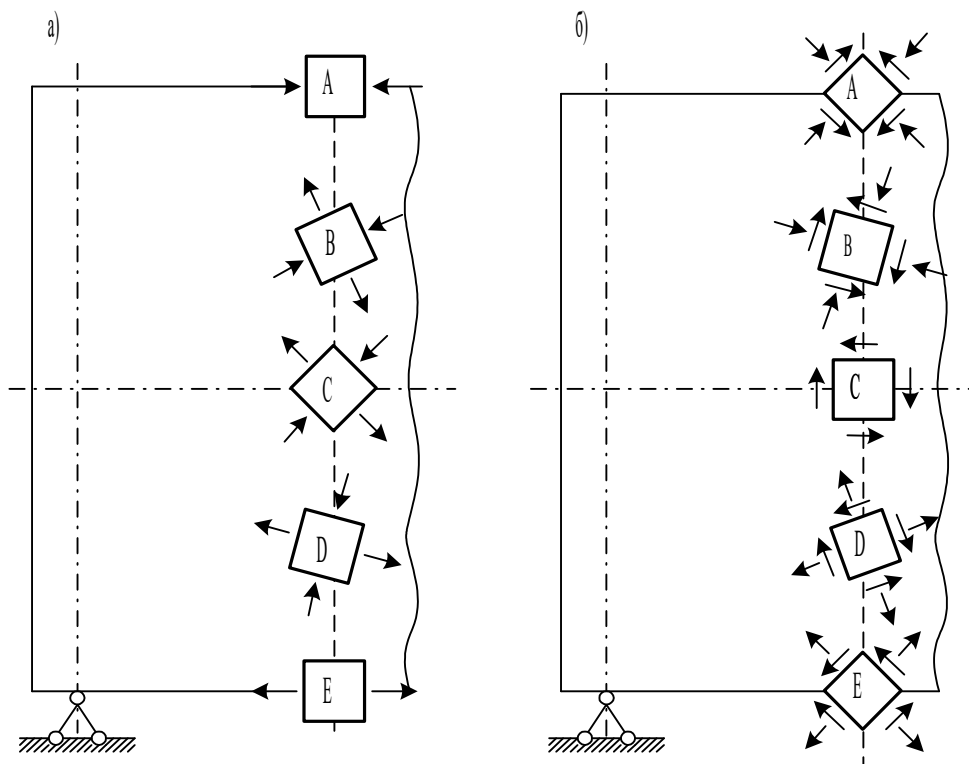


Рис. 6.14. Напруження в балці прямокутного поперечного перерізу в точках А, В, С, Д, Е: а – головні напруження; б – максимальні дотичні напруження

6.5. Перевірка міцності балок при згинанні

З формули (6.26) видно, що головні напруження будуть мати більшу величину у таких точках балки, у котрих одночасно є великі нормальні (6.9) і великі дотичні напруження (6.12). Як дотичні, так і нормальні напруження змінюються, по-перше, по довжині балки і, по-друге по висоті кожного поперечного перерізу. Зміна σ і τ по довжині балки залежить від величини M і Q . Найбільші нормальні напруження будуть у тих перерізах балки, де згинальний момент досягає максимального за абсолютною величиною значення. Найбільші дотичні напруження виникають там, де максимального значення досягає поперечна сила. Якщо обидва перерізи збігаються, то тут будуть і найбільші головні напруження. Тоді цей переріз балки і буде небезпечним. Частіше за все переріз з найбільшим згинальним моментом і найбільшою поперечною силою не збігаються. У цьому випадку за небезпечні перерізи слід прийняти: перерізи, де згинальний момент має найбільші значення; перерізи, де поперечна сила найбільша; перерізи, де M і Q хоча і не приймають найбільших значень, але у своїй комбінації створюють найбільш невідгдане сполучення (тобто головні напруження будуть найбільшими).

Після того як небезпечні перерізи балки визначені, для кожного з них будують епюри нормальних і дотичних напружень і вказуються вже небезпечні точки в перерізі. Зміни напружень по висоті перерізу пов'язані з

виглядом поперечного перерізу, тому положення небезпечних точок залежить від форми перерізу (рис. 6.15).

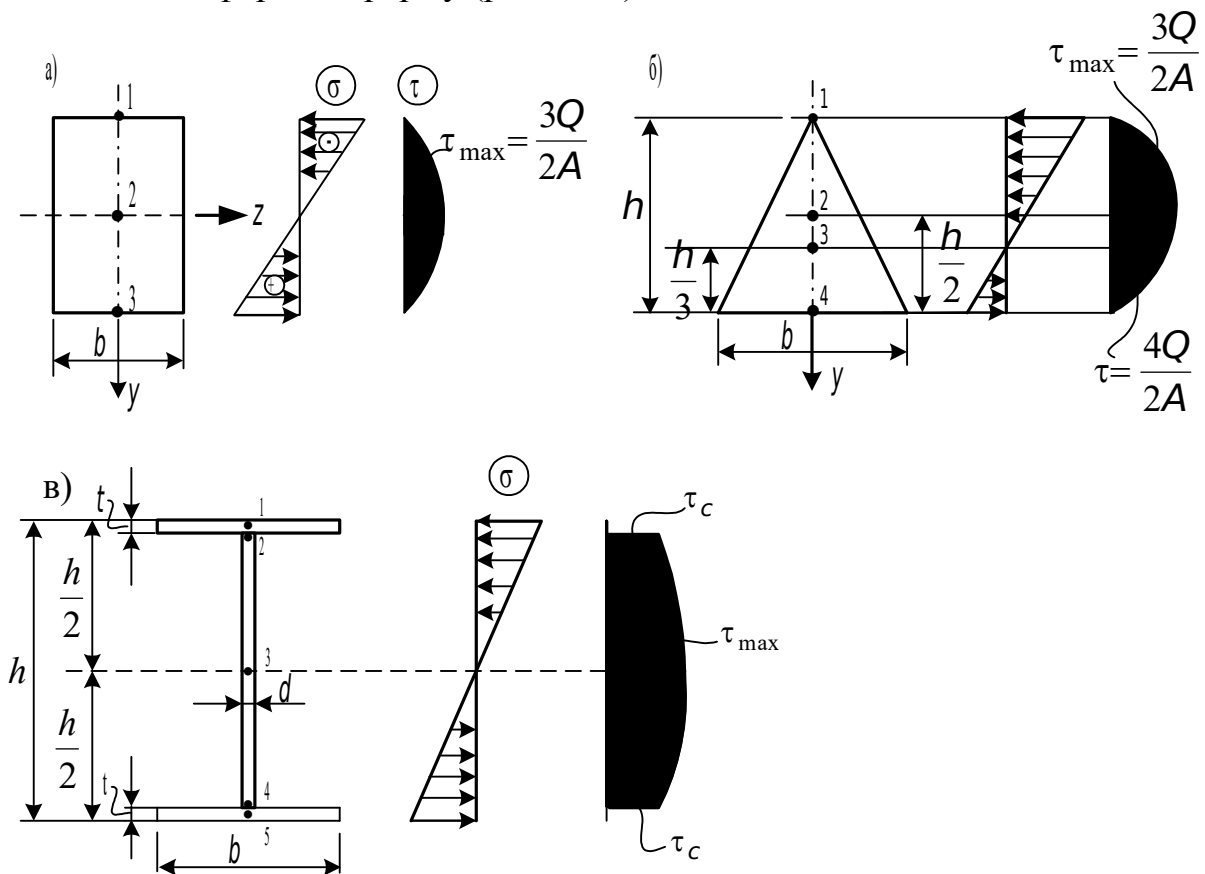


Рис. 6.15. Розподіл нормальних і дотичних напружень у поперечних перерізах балок

Для прямокутного перерізу (рис. 6.15, а) небезпечними точками будуть 1, 2, 3. У точках 1, 3 дотичні напруження дорівнюють нулю, а нормальні – досягають найбільших за абсолютною величиною значень. Напружений стан у цих точках лінійний (одноосьовий), і кутові міцності за методом допустимих напружень і граничних станів набувають відповідного вигляду:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (6.28)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq R.$$

У точці 2 (рис. 6.15, а) нормальні напруження дорівнюють нулю, а дотичні напруження мають найбільші значення. Тут спостерігається чистий зсув, тому перевірку міцності необхідно зробити за формулами

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq [\tau], \quad (6.29)$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq R_{cp},$$

де R_{cp} – розрахунковий опір на зріз матеріалу балки; $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження.

Що стосується інших точок, то де b вони не були обрані в поперечному перерізі (наприклад, точка 2 на рис. 6.15, б і в), у них буде плоский напружений стан, при якому визначальними є головні напруження (6.26). У цих випадках умови міцності, що відповідають різноманітним теоріям, набувають такого вигляду:

– теорія найбільших нормальних напружень (див. п. 5.1)

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p; \quad (6.30)$$

при стисканні $\left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq [\sigma]_c;$

– теорія найбільших відносних подовжень (див. п. 5.2)

$$\frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.31)$$

– теорія найбільших дотичних напружень (див. п. 5.3)

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.32)$$

– енергетична теорія міцності (див. п. 5.4)

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.33)$$

При розрахунку за методом граничних станів у правій частині формул (6.30) – (6.33) $[\sigma]$ замінюється на R (розрахунковий опір).

6.6. Зігнута вісь прямого бруса

6.6.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі

Зігнутою віссю балки або її пружною лінією назовемо ту криву, в яку обертається прямолінійна до деформації вісь балки після прикладання до неї навантаження. Щоб визначити цю вісь, потрібно вміти скласти її рівняння, тобто виразити її ординати як функції положення точки по довжині балки. Помістимо початок координат на її лівому кінці (рис. 6.16). Позначимо через Y прогин балки в перерізі X .

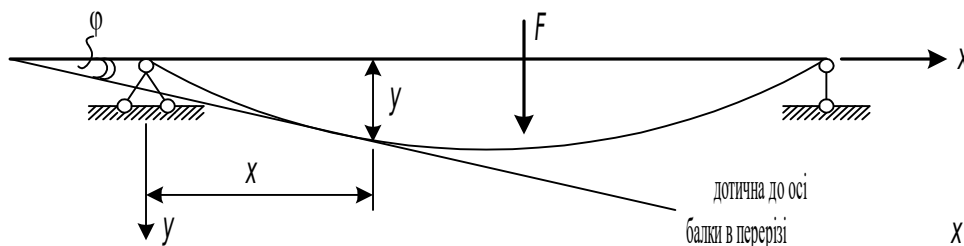


Рис. 6.16. До виведення диференціального рівняння
зігнутої осі балки

Прогини униз вважаємо додатними. Проведемо в перерізі X дотичну до зігнутої осі балки. Кут φ будемо вважати додатним, якщо він утворений обертанням дотичної за годинниковою стрілкою.

Знайдемо залежність

$$y = f(x).$$

Скористаємося рівністю (6.8):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{EJ}.$$

Нагадаємо, цю формулу читають так: кривизна балки в перерізі, що розглядається, пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна її жорсткості (див. п. 6.1).

У курсі вищої математики наводиться такий вираз для визначення кривизни:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (6.34)$$

З цієї формули випливає, що якщо відоме рівняння кривої $y = y(x)$, то її кривизна в кожній точці може бути обчислена через першу $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$ і другу $\left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ похідні від цієї функції. Підставивши (6.34) у (6.8), одержимо

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (6.35)$$

За своєю структурою це рівняння є нелінійним, тому що містить $(y')^2$. Воно рідко застосовується при практичних розрахунках, тому що більшість балок, які застосовуються у будівництві, є дуже жорсткими, а їхні прогини являють собою величини дуже малі порівняно з їхньою довжиною. Для більшості балок максимальні прогини не перевершують $\left(\frac{1}{200} \dots \frac{1}{600}\right) \ell$. Зігнута вісь таких балок являє собою дуже положисту криву,

кути нахилу котрої рідко перевершують $\left(\frac{1}{3} \dots \frac{1}{2}\right)^\circ$ і майже ніколи не перевищують 1° ; $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\right)^\circ = 0,001$; $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 0,0087$; $\operatorname{tg}(1)^\circ = 0,017$. До знаменника формули (6.35) входять квадрати y' (тобто тангенси). Вони являють собою величини мізерно малі порівняно з одиницею: $(0,006)^2 = 3,6 \cdot 10^{-5}$; $(0,0087)^2 = 7,6 \cdot 10^{-5}$; $(0,017)^2 = 2,89 \cdot 10^{-4}$. Ними можна знехтувати і прийняти $\frac{1}{\rho} = y''$, тоді

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (6.36)$$

Рівняння (6.36) установлює зв'язок між згинальним моментом M і другою похідною прогину y'' .

При додатному згинальному моменті кривизна в будь-якому перерізі буде від'ємною, оскільки вона виражається похідною від функції, яка убиває: $\frac{1}{\rho} = (y')'$. З двох знаків рівняння (6.36) потрібно вибрати той, що буде відповідати прийнятому напрямку осей координат (рис. 6.16) і установленому правилу знаків для згинальних моментів (п. 1.7.3, рис. 1.17, б).

Для нашого випадку

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}. \quad (6.37)$$

Таким чином, диференціальне рівняння (6.37) виявляється справедливим за умови, що вісь X спрямована уздовж осі балки вправо, а вісь Y униз. Здійснивши диференціювання рівняння (6.37) один раз по X і урахувавши залежність (1.5), одержимо

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -Q. \quad (6.38)$$

Здійснивши диференціювання (6.38) один раз по X і з огляду на залежність (1.4), знайдемо

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (6.39)$$

Рівняння (6.37), (6.38), (6.39) використовують для визначення прогинів балок. Прогин y можна знайти із розв'язку будь-якого з наведених рівнянь залежно від того, яка з величин M , Q або q задана і що є більш зручним з математичної точки зору. Процедура визначення прогину містить у собі послідовне інтегрування рівнянь (6.37), (6.38), (6.39), причому постійні інтегрування, що утворюються при цьому, знаходяться з граничних умов. Зазначимо, що метод безпосереднього інтегрування вказаних диференціальних рівнянь доцільно використовувати за наявності лише однієї ділянки (іноді – двох), оскільки при великій їхній кількості він стає громіздким через наявність великої кількості довільних постійних, які попередньо необхідно визначити.

6.6.2. Розв'язання диференціального рівняння методом безпосереднього інтегрування

Розглянемо балку, показану на рис. 6.17.

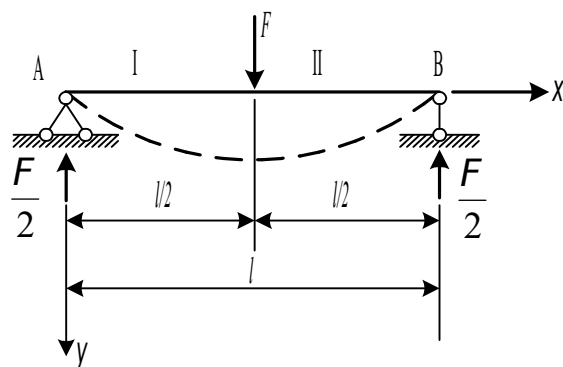


Рис. 6.17. Розрахункова схема балки

Знайдемо її прогин шляхом розв'язання диференціального рівняння (6.37).

Складемо вираз згинального моменту по ділянках. При цьому будемо враховувати сили розташування тільки зліва (або тільки справа) від перерізу балки, що розглядається:

$$M_1 = \frac{F}{2} x,$$

$$M_2 = \frac{F}{2} x - F \left(x - \frac{\ell}{2} \right).$$

Складемо диференціальні рівняння зігнутої осі балки. На першій ділянці: $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$

$$EJ y_1'' = -\frac{F}{2} x.$$

На другій ділянці: $\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell$

$$EJ y_2'' = -\frac{F}{2} x + F \left(x - \frac{\ell}{2} \right).$$

Тепер інтегруємо отримане рівняння

$$EJ y_1' = -\frac{F x^2}{4} + C_1;$$

$$EJ y_1 = -\frac{F x^3}{12} + C_1 x + C_2;$$

$$EJ y_2' = -\frac{F x^2}{4} + \frac{F}{2} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + D_1;$$

$$EJ y_2 = -\frac{F x^3}{12} + \frac{F}{6} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^3 + D_1 x + D_2.$$

Зазначимо, що при інтегруванні диференціального рівняння на другій ділянці ми вважали $\left(x - \frac{\ell}{2} \right)$ новою змінною, тобто не розкривали дужок. Цей прийом, який значно спрощує обчислення, у середині

минулого сторіччя запропонував німецький учений Клебш. Умови спряження першої і другої ділянок балки: при $x = \frac{\ell}{2}$

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad y_1 = y_2.$$

Використовуючи ці умови, одержуємо

$$C_1 = D_1 \quad \text{і} \quad C_2 = D_2.$$

Таким чином, задоволення умов спряження призводить до рівності довільних постійних, отриманих при першому і другому інтегруванні. Граничні умови для балки, яка розглядається (рис. 6.17): при $x = 0$ $y_1 = 0$; при $x = \ell$ $y_2 = 0$. Задовольняючи першу з цих умов, одержимо $C_2 = 0$. Отже, $D_2 = 0$. Задовольнимо тепер другу умову:

$$-\frac{F \ell^3}{12} + \frac{F}{6} \left(\ell - \frac{\ell}{2} \right)^3 + D_1 \ell = 0. \quad \text{Звідси}$$

$$D_1 = \frac{F \ell^2}{16} = C_1.$$

Тепер запишемо остаточно:

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{F x^3}{12} + \frac{F \ell^2}{16} x \right];$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{F x^3}{12} - \frac{F}{6} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^3 + \frac{F \ell^2}{16} x \right].$$

Підставляючи в перше рівняння $x = \frac{\ell}{2}$, одержимо максимальний прогин у середині прогону $y_{\max} = \frac{F \ell^3}{48 EJ}$.

У якості другого прикладу, що ілюструє метод безпосереднього інтегрування, розглянемо балку прогоном ℓ , затиснену по краях і яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження q (рис. 6.18).

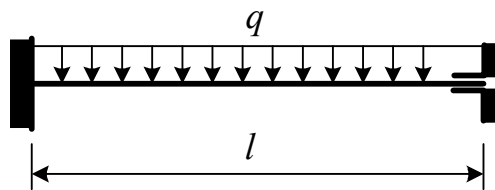


Рис. 6.18. До ілюстрації методу безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки візьмемо у вигляді (6.39):

$$EJ y^{IV} = q.$$

Інтегруємо це рівняння послідовно чотири рази:

$$EJ y''' = qx + C_1;$$

$$EJ y'' = \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2;$$

$$EJ y' = \frac{qx^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3;$$

$$EJ y = \frac{qx^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Для визначення довільних постійних запишемо такі граничні умови:

при $x = 0$ $y = 0$, $\varphi = 0$;

при $x = \ell$ $y = 0$, $\varphi = 0$.

У результаті одержимо

$$C_3 = C_4 = 0;$$

$$C_1 = -\frac{q\ell}{2}, C_2 = \frac{q\ell^2}{12}.$$

Підставляючи їх у рівняння для згину, знайдемо

$$y = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{q\ell}{12} x^3 + \frac{q\ell^2}{24} x^2 \right).$$

Покладаючи в отриманому рівнянні $x = \frac{\ell}{2}$, одержимо максимальний прогин балки в середині прогону

$$y_{\max} = \frac{q\ell^4}{384EJ}.$$

6.6.3. Метод початкових параметрів

В якості вихідного приймаємо рівняння 4-го порядку, тобто (6.39)

$$EJ y^{IV} = q.$$

Інтеграл цього рівняння отриманий у попередньому прикладі (див. п. 6.6.2)

$$EJ y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4 + Y(x). \quad (6.40)$$

Тут C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні постійні інтегрування. Перші чотири члени являють собою розв'язок однорідного рівняння (6.40). Останнім членом виражений частинний розв'язок, що відповідає правій частині диференціального рівняння

$$Y(x) = \int \int \int \int q(dx)^4. \quad (6.41)$$

Із (6.41) видно, що інтеграл $Y(x)$ виражає вплив зовнішнього навантаження. При рівномірно розподіленому навантаженні він дорівнює $\frac{qx^4}{24}$ (див. п. 6.6.2).

У курсі математичного аналізу доводиться, що n -кратний інтеграл функції $f(x)$ може бути приведений до однократного інтеграла

$$\int \int \int \dots \int f(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt. \quad (6.42)$$

Дотримуючись формули (6.42), інтеграл $Y(x)$ з (6.41) можна подати як однократний

$$Y(x) = \frac{1}{3!} \int_0^x q(t) (x-t)^3 dt. \quad (6.43)$$

У цьому інтегралі t – нова змінна, а X являє собою параметр підінтегрального виразу і є одночасно верхньою межею інтеграла. При обчисленні інтегралів, що залежать від параметра, інтегрування проводиться відомим способом, коли параметр X при узятті інтеграла розглядається як постійна величина. Фізичний зміст інтеграла: момент третього ступеня від усіх навантажень, розташованих лівіше перерізу X . Обчислимо за формулою (6.43) значення функції $Y(x)$ для різноманітних навантажень і різноманітних випадків його прикладання.

6.6.3.1. Рівномірно розподілене навантаження q

Припустимо, що на ділянці балки, обмеженій координатами $x = a$ і $x = \ell$, діє рівномірно розподілене навантаження (рис. 6.19, а).

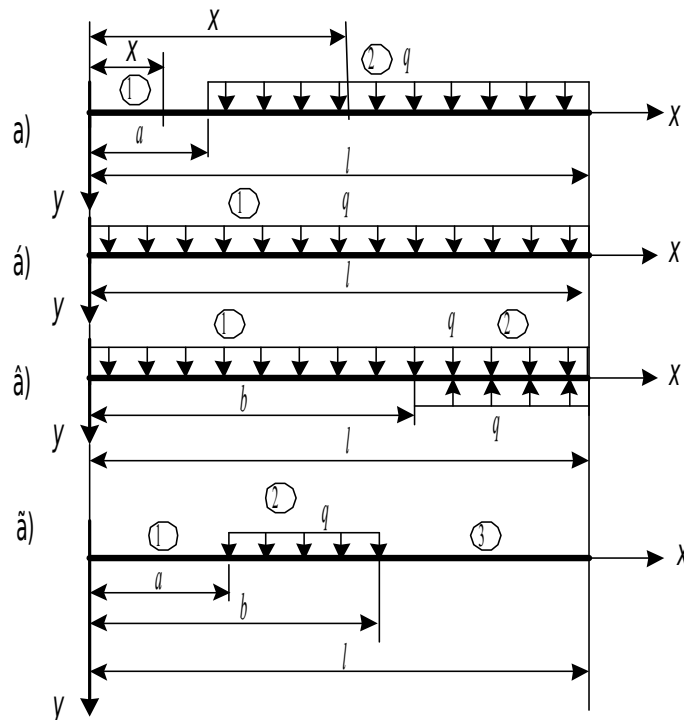


Рис. 6.19. До обчислення функції $Y(x)$ для різних випадків прикладання рівномірно розподіленого навантаження q

На першій ділянці $0 \leq x \leq a$ навантаження відсутнє, тому інтеграл $Y(x)$ дорівнює нулю:

$$Y(x) = 0.$$

На другій ділянці $x \geq a$

$$Y_2(x) = -\frac{q}{3!} \int_a^x (x-t)^3 dt = \frac{q(x-a)^4}{4!}. \quad (6.44)$$

Якщо $a = 0$ (рис. 6.19, б), то дія навантаження поширюється на всю довжину балки і

$$Y(x) = \frac{qx^4}{4!}.$$

При дії навантаження на ділянку l балки з координатами $x = 0$ і $x = b$ (рис. 6.19, в) на першій ділянці $0 \leq x \leq b$ функція $Y_1(x)$ визначається за формулою (6.44). Для обчислення функції на другій ділянці продовжимо навантаження до кінця балки і для того, щоб напружений стан балки не змінився, введемо компенсуюче навантаження тієї ж інтенсивності q , але спрямоване в протилежний бік.

Тоді очевидно, що

$$Y_2(x) = \frac{q}{3!} \int_b^x (x-t)^3 dt = -\frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.45)$$

Інтеграл $Y(x)$ для цього випадку розташування навантаження (рис. 6.19, в) запишеться так:

$$Y(x) = \frac{qx^4}{4!} - \frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.46)$$

Для навантаження, показаного на рис. 6.19, г, функція $Y(x)$ буде набувати такого вигляду:

$$Y_q(x) = \frac{q(x-a)^4}{4!} - \frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.47)$$

6.6.3.2. Зосереджена сила

Розглянемо балку, завантажену в перерізі $x = c$ зосередженою силою F (рис. 6.20).

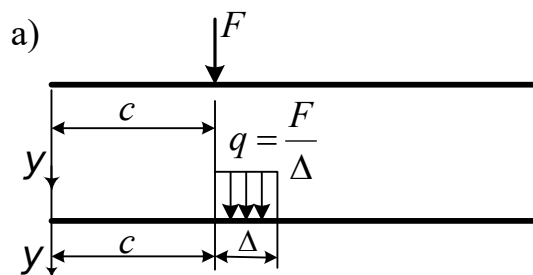


Рис. 6.20. До обчислення функції $Y(x)$ для зосередженої сили

На ділянці $x \leq c$ інтеграл $Y(x)$ дорівнює нулю, оскільки навантаження тут відсутні:

$$Y(x) = 0.$$

Для того щоб одержати значення інтеграла $Y(x)$ на другій ділянці, коли $x \geq c$, подамо зосереджену силу у вигляді навантаження $q = \frac{F}{\Delta}$,

рівномірно розподіленого на ділянці Δ . Тоді інтеграл обчислимо так само, як і у випадку рівномірно розподіленого навантаження:

$$Y(x) = \frac{F}{3! \Delta} \int_c^{c+\Delta} (x-t)^3 dt.$$

Скориставшись теоремою про середнє, запишемо інтеграл як добуток ділянки інтегрування Δ на деяке середнє значення підінтегральної функції $(x-t_{\text{сер}})^3$:

$$Y_2(x) = \frac{F}{3! \Delta} (x-t_{\text{сер}})^3 \Delta = \frac{F}{3!} (x-t_{\text{сер}})^3.$$

Якщо тепер ділянку інтегрування Δ спрямувати до нуля, то абсциса $t_{\text{сер}}$ буде прагнути до свого граничного значення c :

$$Y_F(x) = \frac{F}{3!} (x-c)^3. \quad (6.48)$$

6.6.3.3. Зосереджений момент

Розглянемо балку, у перерізі $x=d$ якої прикладений момент m (рис. 6.21, а).

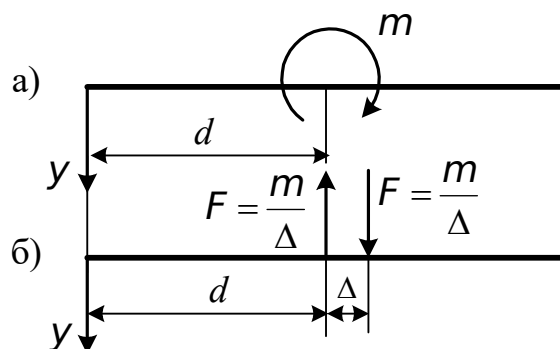


Рис. 6.21. До обчислення функції $Y(x)$ для зосередженого моменту

Зобразимо зосереджений момент у вигляді пари сил (рис. 6.21, б). Тоді значення інтеграла, що виражає вплив двох зосереджених сил, можна записати так:

$$\begin{aligned} Y(x) &= -\frac{m(x-d)^3}{3! \Delta} + \frac{m[x-(d+\Delta)]^3}{3! \Delta} = -\frac{m}{3!} \left[\frac{(x-d)^3}{\Delta} - \frac{(x-d)^3}{\Delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(x-d)^2 \Delta}{\Delta} - \frac{3(x-d) \Delta^2}{\Delta} + \frac{\Delta^3}{\Delta} \right] = \\ &= -\frac{m}{3!} [3(x-d)^2 - 3(x-d)\Delta + \Delta^2]. \end{aligned}$$

Спрямувавши $\Delta \rightarrow 0$, одержимо

$$Y_M(x) = -\frac{m(x-d)^2}{2!}. \quad (6.49)$$

Подамо отримане раніше рівняння (6.40) у такому вигляді:

$$y = \frac{1}{EJ} \left(C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4 + Y(x) \right). \quad (6.50)$$

Візьмемо першу, другу і третю похідні від цього рівняння:

$$y' = \varphi = \frac{1}{EJ} \left[C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 x + C_3 + Y'(x) \right]; \quad (6.51)$$

$$EJ y'' = -M = -C_1 x - C_2 - Y''(x); \quad (6.52)$$

$$EJ y''' = -Q = -C_1 - Y'''(x). \quad (6.53)$$

Обчислимо значення похідних від інтеграла $Y(x)$ (6.43). Для цього скористаємося відомою у вищій математиці формулою диференціювання інтеграла по верхній межі і параметру:

$$Y'(x) = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 q(t) dt;$$

$$Y''(x) = \int_0^x (x-t) q(t) dt;$$

$$Y'''(x) = \int_0^x q(t) dt.$$

Покладаючи в отриманих формулах і у (6.43) $x = 0$, одержимо

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0. \quad (6.54)$$

Позначимо відповідно через Y_0 , φ_0 , M_0 , Q_0 прогин, кут нахилу, згинальний момент і поперечну силу на початку координат (при $x = 0$). Ці величини назвемо початковими параметрами. Виразимо довільні постійні C_1 , C_2 , C_3 , C_4 через початкові параметри. Для цього у (6.50), (6.51), (6.52), (6.53) підставимо $x = 0$ і врахуємо (6.54). У результаті одержимо

$$Y_0 = \frac{C_4}{EJ};$$

$$\varphi_0 = \frac{C_3}{EJ}; \quad (6.55)$$

$$M_0 = -C_2;$$

$$Q_0 = -C_1.$$

Підставивши постійні інтегрування (6.55) у рівняння зігнутої осі балки (6.50), знайдемо

$$y = Y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} + \frac{Y(x)}{EJ}. \quad (6.56)$$

Тепер розглянемо балку, що знаходиться під дією всіх перерахованих вище навантажень (рис. 6.22).

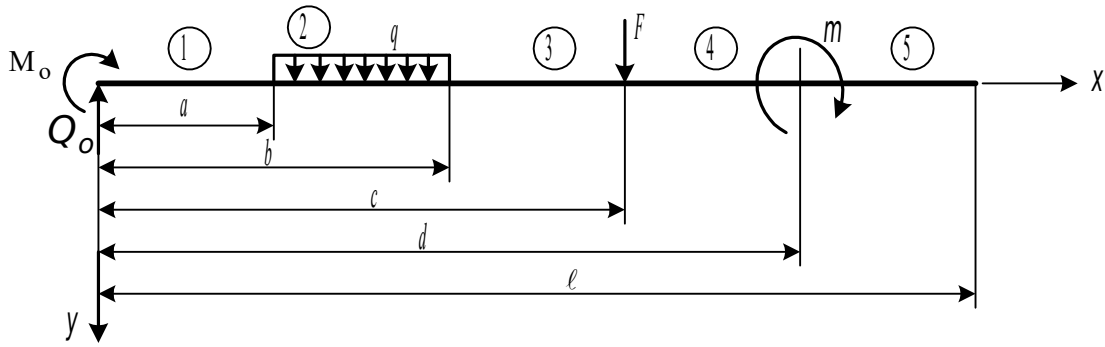


Рис. 6.22. До виведення рівнянь методу початкових параметрів

Запишемо для неї рівняння зігнутої осі, кута повороту, згинальних моментів і поперечних сил:

$$y_x = y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^4}{4!EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^4}{4!EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^3}{3!EJ} \Big|_4 - \frac{m(x-d)^2}{2!EJ} \Big|_5 ; \quad (6.57)$$

$$\varphi_x = \varphi_0 - \frac{M_0 x}{EJ} - \frac{Q_0 x^2}{2!EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^3}{3!EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^3}{3!EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^2}{2!EJ} \Big|_4 - \frac{m(x-d)}{EJ} \Big|_5 ; \quad (6.58)$$

$$M_x = M_0 + Q_0 x \Big|_1 - \frac{q(x-a)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{q(x-b)^2}{2!} \Big|_3 - F(x-c) \Big|_4 + m \Big|_5 ; \quad (6.59)$$

$$Q_x = Q_0 \Big|_1 - q(x-a) \Big|_2 + q(x-b) \Big|_3 - F \Big|_4 . \quad (6.60)$$

Таким чином, для будь-якої балки з будь-якою кількістю ділянок рівняння (6.57) – (6.60) визначаються з точністю до чотирьох початкових параметрів, із котрих два знаходять відразу ж із граничних умов, поставлених на лівому кінці балки. Для двох інших початкових параметрів необхідно сформулювати дві граничних умови на другому її кінці (рис. 6.23).

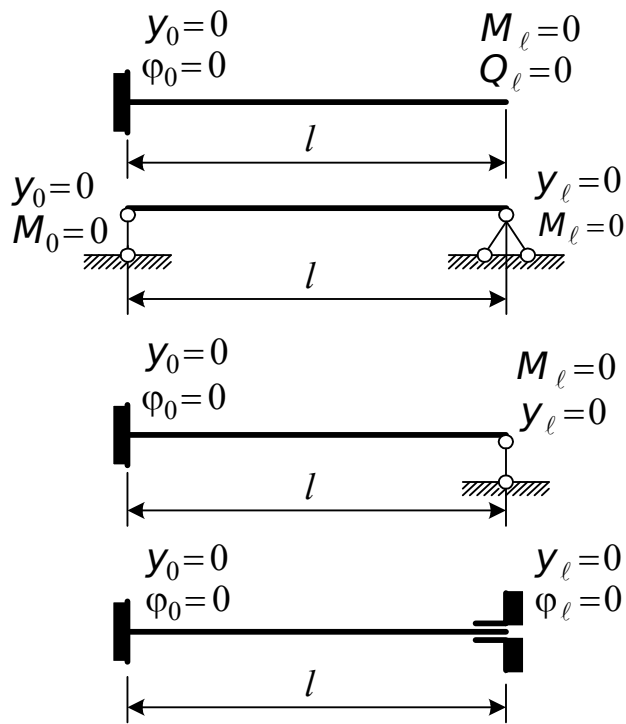


Рис. 6.23. До визначення початкових параметрів

У дод. 2 наведено формули для визначення відсутніх початкових параметрів різним чином навантажених і різним чином обіпертих статично визначних балок. Наприкінці цього пункту зазначимо, що напрямкам Q_0 , M_0 , Q , F , m , які показані на рис. 6.22, відповідають знаки перед однойменними членами в рівняннях (6.57) – (6.60). Якщо перераховані силові фактори (один або декілька) мають обернені напрямки, то і перед відповідними членами вказаних рівнянь варто змінити знаки на обернені.

Визначимо прогини і кути повороту в перерізах сталеві двотаврової балки (двотавр № 50), показаної на рис. 6.24. ($EJ = 7,945 \cdot 10^4 \text{ кНм}^2$).

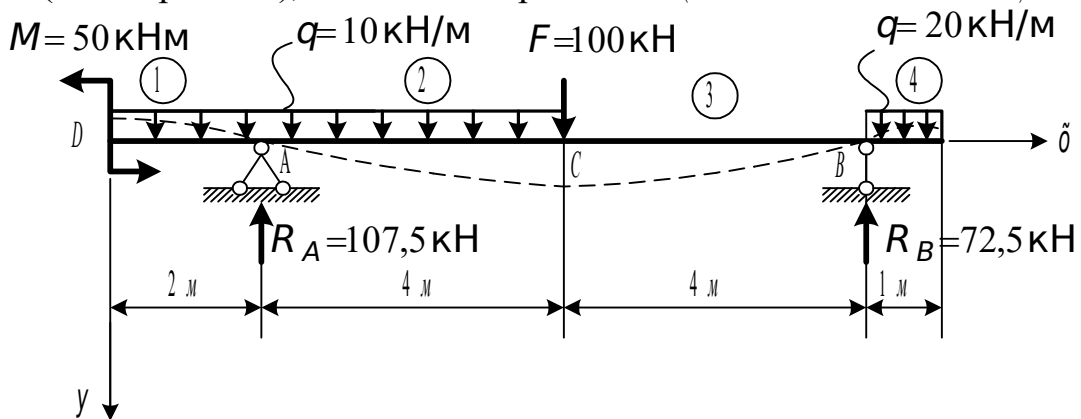


Рис. 6.24. До визначення переміщень методом початкових параметрів

Визначимо спочатку початкові параметри з умови опирання балки на початку координат.

При $x = 0$, $M_0 = -50$ кНм, $Q_0 = 0$.

Запишемо рівняння (6.57) і (6.58) як

$$y_x = y_0 + \varphi_0 x + \frac{50x^2}{21EJ} + \frac{10x^4}{24EJ} \Big|_1 - \frac{107,5(x-2)^3}{6EJ} \Big|_2 - \frac{10(x-6)^4}{24EJ} \Big|_3 +$$

$$+ \frac{100(x-6)^3}{6EJ} - \frac{72,5(x-10)^3}{6EJ} + \frac{20(x-10)^4}{24EJ} \Big|_4 ;$$

$$\varphi_x = \varphi_0 + \frac{50x}{EJ} + \frac{10x^3}{6EJ} \Big|_1 - \frac{107,5(x-2)^2}{2EJ} \Big|_2 - \frac{10(x-6)^3}{6EJ} + \frac{100(x-6)^2}{2} \Big|_3 -$$

$$- \frac{72,5(x-10)^2}{2EJ} + \frac{20(x-10)^3}{6EJ} \Big|_4 .$$

У цих рівняннях невідомими залишаються ще два початкових параметри – прогин y_0 і кут повороту φ_0 на початку координат балки. Для їх визначення складемо два додаткових рівняння: при $x = 2$ м $y_x = 0$ і при $x = 10$ м $y_x = 0$. У результаті одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими початковими параметрами

$$y_0 + 2\varphi_0 + \frac{50 \cdot 4}{2EJ} + \frac{10 \cdot 16}{24EJ} = 0 ;$$

$$y_0 + 10\varphi_0 + \frac{50 \cdot 100}{2EJ} + \frac{10 \cdot 10^4}{24EJ} - \frac{107,5 \cdot 8^3}{6EJ} - \frac{10 \cdot 4^4}{24EJ} + \frac{100 \cdot 4^3}{6EJ} = 0 .$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо

$$\varphi_0 = \frac{206,67}{EJ} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,148^\circ ,$$

$$y_0 = -\frac{520}{EJ} = -0,654 \text{ см} .$$

Тепер знайдемо прогини і кути повороту в перерізах балки:

$$x = 6 \text{ м} \quad y_x = 1,27 \text{ см} ;$$

$$\varphi_x = 0,048^\circ ;$$

$$x = 4 \text{ м} \quad y_x = 0,84 \text{ см} ;$$

$$\varphi_x = 0,215^\circ ;$$

$$x = 8 \text{ м} \quad y_x = 0,88 \text{ см} ;$$

$$\varphi_x = -0,21^\circ ;$$

$$x = 11 \text{ м} \quad y_x = -0,467 \text{ см};$$

$$\varphi_x = -0,27^\circ.$$

Вигнута вісь балки показана на рис. 6.24 пунктиром.

Наприкінці зазначимо, що максимальний прогин дорівнює $\frac{1}{629}$ прогону балки, а кут повороту не перевищує 0,50, що відповідає прийнятним в пп. 6.1 і 6.2 передумовам.

6.6.4. Метод фіктивного навантаження

У більшості задач, що зустрічаються на практиці, рівняння зігнутої осі балки знати не потрібно, а необхідно визначити прогини або кути повороту в однім або декількох найбільш характерних її перерізах. Викладемо суть методу.

Розглянемо диференціальні рівняння (6.37) і (6.39)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ},$$

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

Уявимо ці рівняння в такому вигляді:

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ y) = -M; \quad (6.61)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(M) = -q. \quad (6.62)$$

Порівнюючи ці рівняння, бачимо, що згинальний момент M пов'язаний з інтенсивністю зовнішнього навантаження q , як EJ , кратно значенню прогина, пов'язана із згинальним моментом.

Припустимо, що

$$EJ y = -M^\Phi, \quad (6.63)$$

де M^Φ – деякий фіктивний (тобто умовний) згинальний момент.

Тоді друга похідна від цього фіктивного моменту буде являти собою деяке фіктивне (умовне) навантаження

$$\frac{d^2}{dx^2}(M^\Phi) = q^\Phi. \quad (6.64)$$

Зазначена аналогія дозволяє зробити висновок: при визначенні прогинів і кутів повороту в балці немає необхідності інтегрувати диференціальне рівняння. Цей процес можна замінити чисельним процесом знаходження фіктивних згинальних моментів M^Φ , викликаних дією фіктивного навантаження q^Φ .

Таким чином, маємо





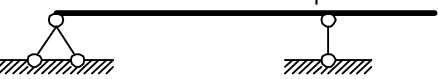
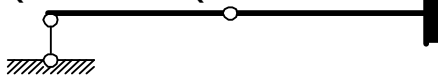
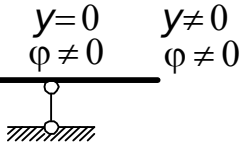
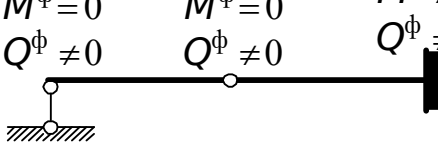
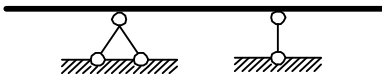
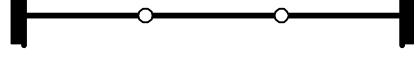

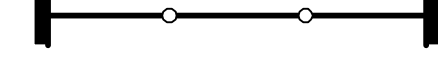
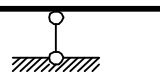
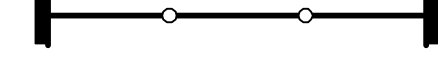
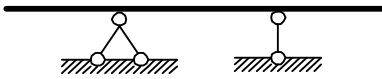
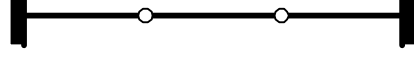
$$y = -\frac{M^\Phi}{EJ}, \quad (6.65)$$

$$\varphi = y' = -\frac{Q^\Phi}{EJ}. \quad (6.66)$$

Викладемо порядок визначення переміщень. Спочатку будується епюра згинальних моментів від зовнішнього навантаження. Потім на підставі залежностей (6.65) і (6.66) будується фіктивна балка (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Задані (дійсні) і фіктивні балки

Задана балка	Фіктивна балка
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi \neq 0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi \neq 0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi \neq 0$ $Q^\Phi \neq 0$ 

Тепер необхідно обчислити величини M^Φ і Q^Φ у перерізах, де потрібно знайти прогини і кути повороту, далі підставити їх у формули (6.65) і (6.66) і виконати остаточні обчислення. Основна складність розв'язання задач полягає в знаходженні фіктивних згинальних моментів M^Φ і фіктивних поперечних сил Q^Φ від навантаження, поданого дійсною епюрою згинальних моментів. Покажемо, як це зробити найпростіше (рис. 6.25). Нехай фіктивне навантаження q^Φ (дійсна епюра згинальних моментів) на якій-небудь ділянці балки довжиною ℓ має вигляд,

показаний на рис. 6.24, а. Зобразимо її у вигляді суми трьох навантажень (рис. 6.25, б, в, г). У свою чергу кожне з навантажень можна замінити їх рівнодіючими $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тоді ділянку балки завантажують трьома силами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, положення і величини яких відомі.

Наведемо приклад. Для балки, показаної на рис. 6.26, а, знайдемо прогин і кут повороту кінця консолі.

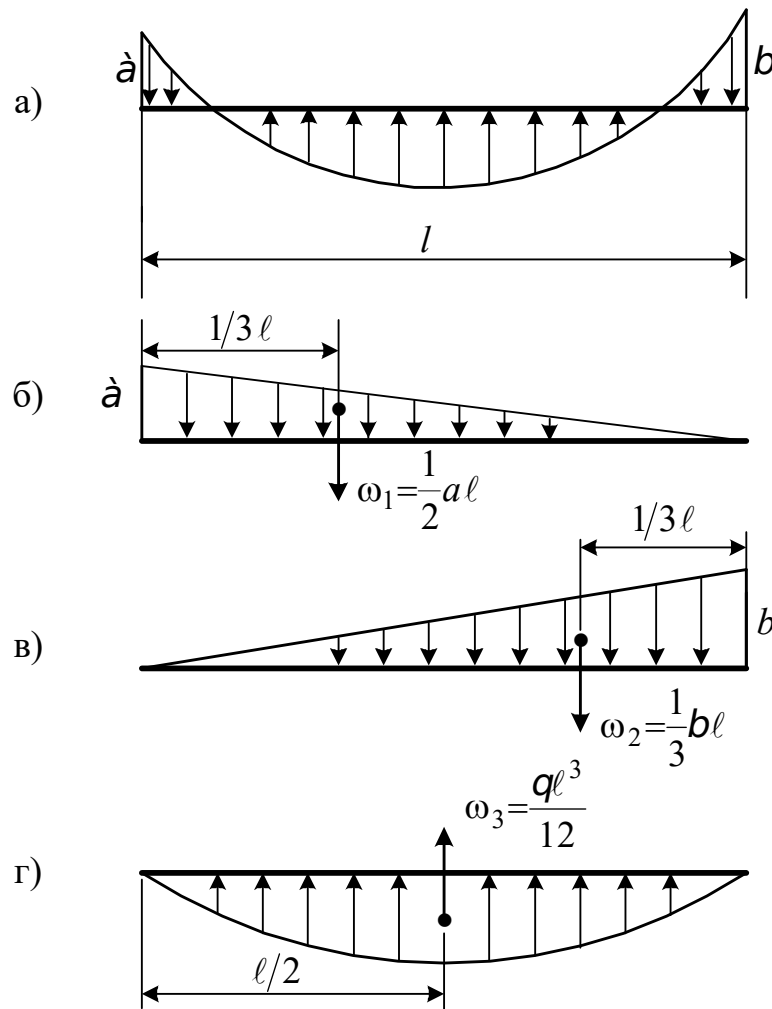


Рис. 6.25. Схема представлення фіктивного навантаження у вигляді суми простих навантажень

Будуємо епюру M (рис. 6.26, б). Побудовану епюру моментів уявляємо фіктивним навантаженням і прикладаємо рівнодіючу цього навантаження до фіктивної балки (рис. 6.26, в).

Знаходимо фіктивний згинальний момент і фіктивну поперечну силу в защемленні. Для спрощення обчислень схему фіктивної балки подамо у вигляді балок, що взаємодіють між собою: верхньої і нижньої. Визначивши праву реакцію у верхній балці (рис. 6.26, г), передамо її з протилежним знаком на нижню (рис. 6.26, д).

Тоді

$$M^{\Phi} = 30 \cdot 1 - 15 \cdot \frac{2}{3} = 20 ; Q^{\Phi} = 30 - 15 = 15$$

i
$$y = -\frac{20}{EJ} ; \varphi = -\frac{15}{EJ} .$$

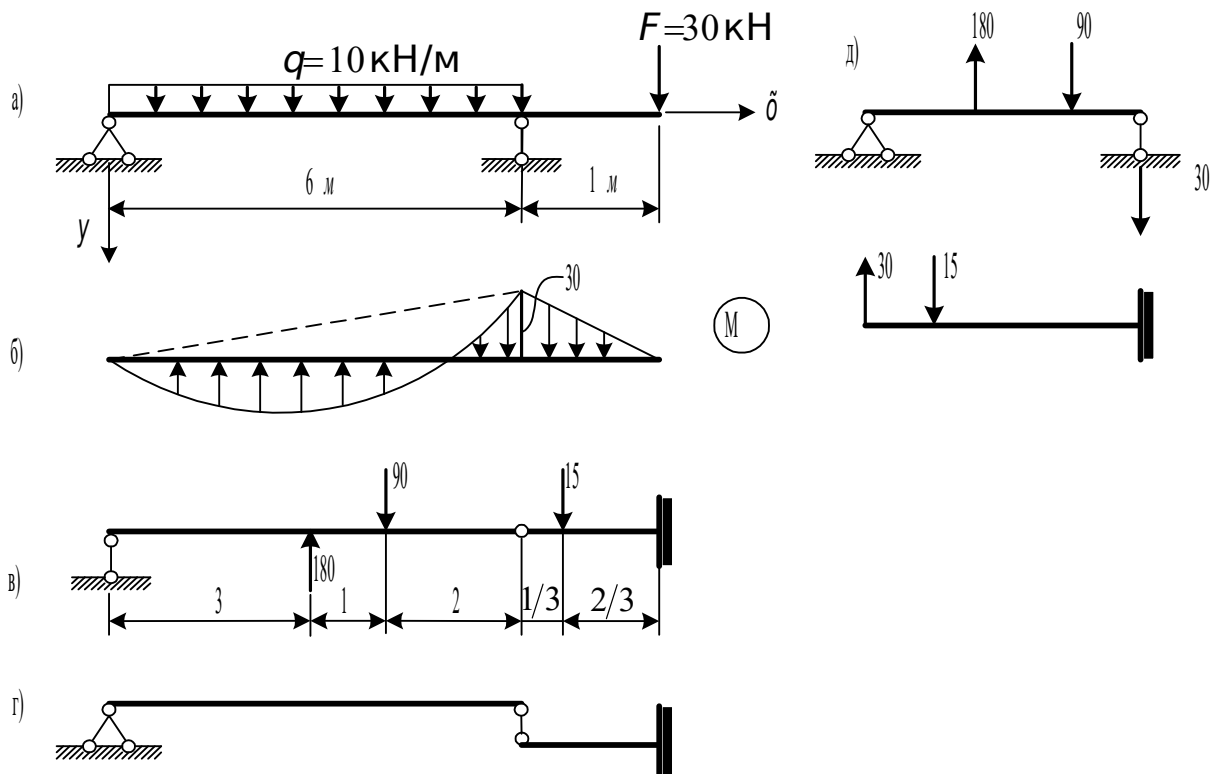


Рис. 6.26. До прикладу визначення переміщень методом фіктивного навантаження

Знак мінус перед отриманими формулами вказує на те, що прогин кінця консолі спрямований нагору (не збігається з додатним напрямком осі Y), а кут повороту утворений обертанням дотичної до перерізу, спрямованої проти годинникової стрілки (див. рис. 6.16).

6.6.5. Метод Мора

Перед тим, як викласти сутність цього методу, зазначимо таке. Дійсний підручник призначений для студентів будівельних спеціальностей, які у повному обсязі вивчають курс будівельної механіки, де викладається теорія визначення переміщень, у тому числі і метод Мора. У курсі будівельної механіки при виведенні рівняння методу Мора, що розв'язується, виходять з енергетичних принципів і враховують згинальні моменти, поздовжні і поперечні сили. Тут ми будемо вважати, що

переміщення є наслідком тільки вигину, а виведення формули Мора одержимо з простих геометричних розумінь.

Розглянемо балку, навантажену довільним навантаженням (рис. 6.27, а).

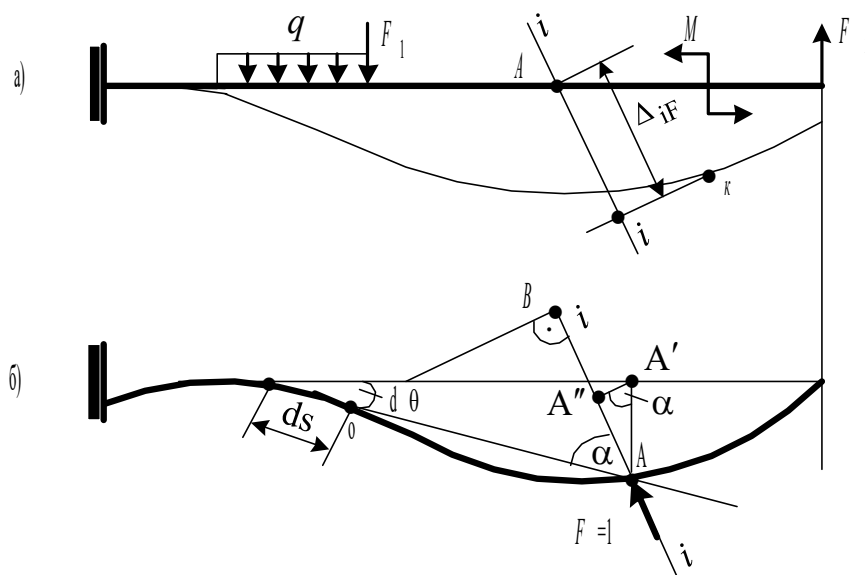


Рис. 6.27. До визначення переміщень за методом Мора

Визначимо переміщення точки А за напрямком $i-i$, Δ_{iF} . Під дією заданого навантаження балка деформується і пружна лінія займає положення, показане на рис. 6.27, б. У точці А балки в деформованому стані прикладаємо безрозмірну силу $F=1$ за напрямком шуканого переміщення. На елементарній ділянці балки довжиною ds відбудеться зміна кривизни і правий переріз повернеться відносно лівого на кут

$$d\theta = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) dS, \quad (6.67)$$

де $\frac{1}{\rho} = \frac{M_F + M_i}{EJ}$ – кривизна зігнутої осі балки на ділянці dS , викликана моментами від зовнішнього навантаження M_F і одиничної сили M_i ; $\frac{1}{\rho_0} = \frac{M_i}{EJ}$ – кривизна зігнутої осі балки, викликана одиничним моментом M_i .

Віднімаючи значення кривизн, одержимо

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{M_F}{EJ}, \quad (6.68)$$

$$d\theta = \frac{M_F ds}{EJ}. \quad (6.69)$$

Знайдемо елементарне переміщення $d\Delta_{iF}$. З побудов, виконаних на рис. 6.27, б, видно, що

$$d\Delta_{iF} = AA'' = AA' \sin \alpha = oA \cdot \sin \alpha d\theta = oB d\theta = M_i d\theta. \quad (6.70)$$

Повне переміщення одержимо як визначений інтеграл по всій довжині стержня:

$$\Delta_{iF} = \int_0^{\ell} \frac{M_i M_F}{EJ} ds. \quad (6.71)$$

Таким чином, геометрична задача визначення переміщень точок системи за відомими деформаціями її елементів звелася до добре вивченої статичної задачі, як-от побудови епюр моментів у вантажному стані F , те саме у допоміжному стані i від сили $F_i = 1$ і наступному обчислення інтеграла у формулі. Остання операція умовно називається «перемножуванням епюр»: площа нелінійної епюри помножується на ординату лінійної епюри під центром тяжіння нелінійної епюри; якщо функції M_i і M_F лінійні, то операція перемножування має властивості комутативності.

Наведемо приклад обчислення інтеграла Мора для ділянки балки з епюрами M_F і M_i , показаними на рис. 6.28, а, в.

Уявимо епюри M_F і M_i у вигляді простих фігур (рис. 6.28, б, г), для яких відомі положення центрів тяжіння і площі. Тепер

$$\Delta_{iF} = \int_0^{\ell} \frac{M_F M_i}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} a \ell \left(\frac{2}{3} c + \frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{1}{3} c + \frac{2}{3} d \right) - \frac{q \ell^3}{12} \left(\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d \right) \right].$$

Таким чином, для того щоб визначити лінійне або кутове переміщення балки методом Мора, необхідно: побудувати епюру моментів від заданого зовнішнього навантаження; за напрямком шуканого переміщення прикласти до балки одиничну силу (якщо необхідно визначити лінійне переміщення) або одиничний момент (якщо необхідно визначити кутове переміщення) і побудувати епюру моментів (одиничну епюру); обчислити інтеграл Мора (6.71), використовуючи застосоване вище правило.

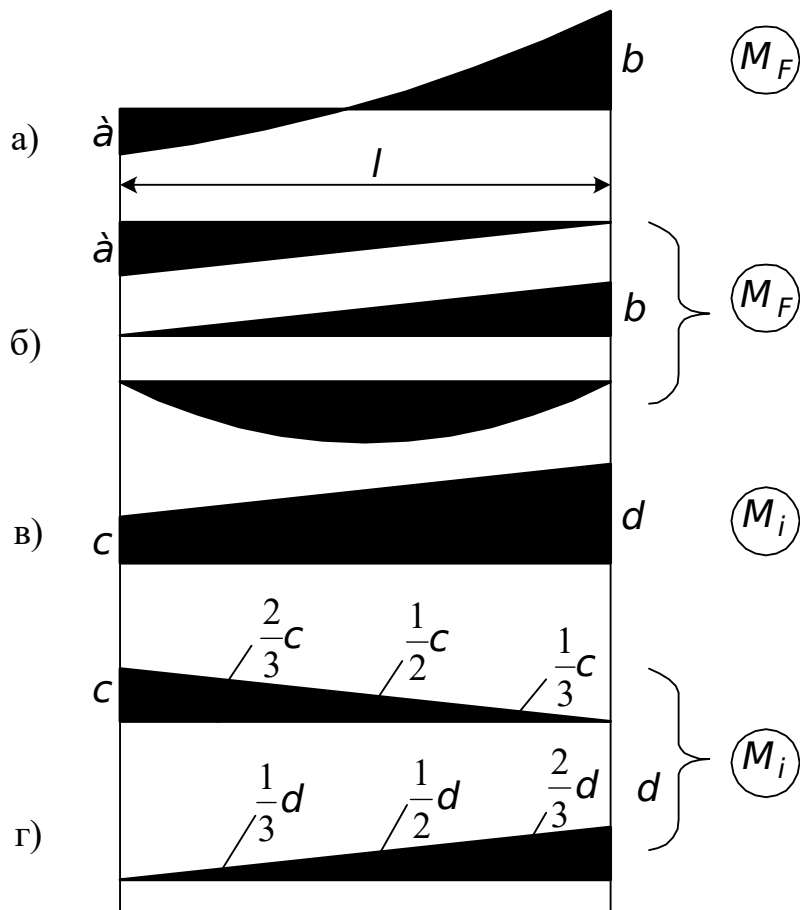


Рис. 6.28. До обчислення інтеграла Мора

Покажемо, як визначити лінійне і кутове переміщення на прикладі. Скористаємося умовою і даними задачі, наведеної в п. 6.7.4 (рис. 6.29).

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right] = -\frac{20}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right] = -\frac{15}{EJ}.$$

Пояснимо отримані результати. По-перше, результати збігаються з результатами, знайденими методом фіктивного навантаження (рис. 6.26, п. 6.6.4). У методі Мора від'ємні знаки показують, що вертикальне переміщення спрямоване в протилежний бік напрямку одиничної сили $F = 1$ (рис. 6.29, в), а кут повороту – у протилежний бік дії моменту $M = 1$ (рис. 6.29, г), тобто проти годинникової стрілки.

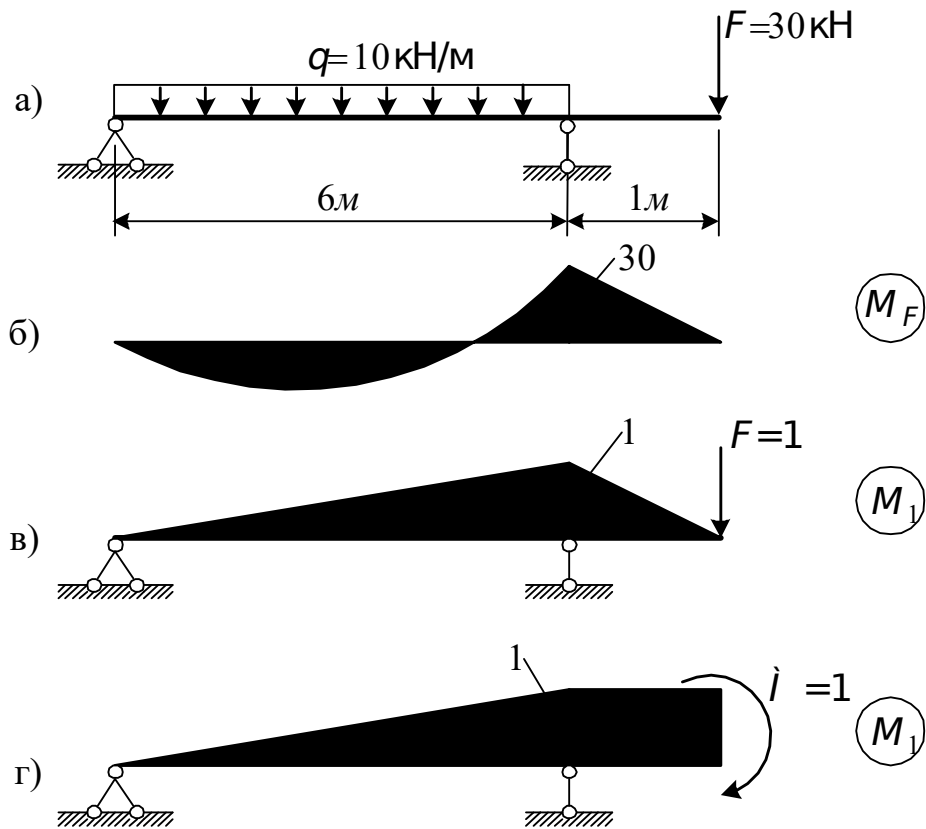


Рис. 6.29. До визначення прогину і кута повороту кінця консолі за методом Мора

6.7. Зсув як окремий випадок згинання

Зсув не виникає як самостійне явище, звичайно він супроводжує яку-небудь іншу основну деформацію. Розглянемо дуже короткий консольний брус, завантажений на кінці силою Q (рис. 6.30, а).

Оскільки довжина бруса дуже мала, нехтуємо згинальними деформаціями. Тоді в перерізі бруса відсутні нормальні напруження. Залишаються тільки дотичні. Середнє значення цих напружень у перерізі бруса дорівнює

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (6.72)$$

де A – площа поперечного перерізу.

Напружено-деформований стан, який характеризується тим, що на гранях виділеного з перерізу елемента (рис. 6.30, б) виникають тільки дотичні напруження, називають чистим зсувом (див. п. 1.8.3).

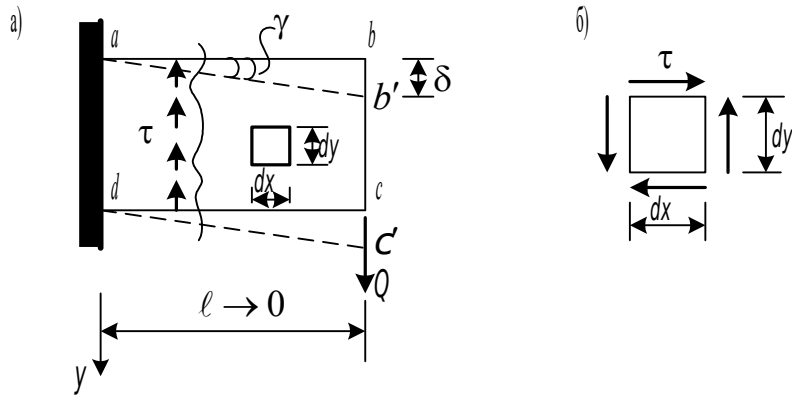


Рис. 6.30. Короткий брус, завантажений на кінці силою

Розглянемо деформації при зсуві. Дотичне напруження τ пов'язане з кутовою деформацією γ співвідношенням (див. (1.28))

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.73)$$

де через G , як ми вже знаємо (див. (1.29)) позначена величина

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

При чистому зсуві, як і при будь-якому напруженому стані, у тілі, що деформується, накопичується пружна потенційна енергія. Цю енергію легко підрахувати, коли маєш діаграму $Q - \delta$ (рис. 6.31).

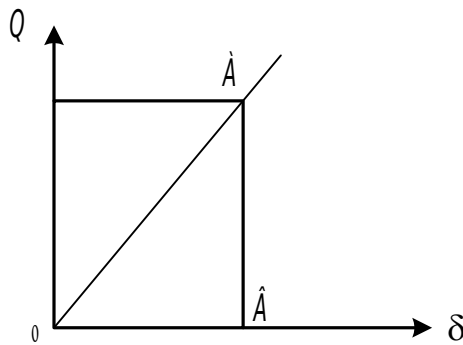


Рис. 6.31. До виведення формули для питомої потенційної енергії

Потенційна енергія деформації при зсуві аналогічна потенційній енергії при розтяганні і стисканні (див. (3.9)):

$$A = W = \frac{Q \delta}{2}. \quad (6.74)$$

Позначивши довжину бруса, що розглядається, через ℓ (рис. 6.30) і з огляду на те, що

$$\gamma = \frac{\delta}{\ell} = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GA}, \quad (6.75)$$

можна записати

$$W = \frac{Q^2 \ell}{2GA}. \quad (6.76)$$

Питома потенційна енергія деформації, тобто енергія, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює

$$w = \frac{W}{A \ell} = \frac{Q^2 \ell}{2GA^2 \ell} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (6.77)$$

6.7.1. Розрахунки з'єднань, що працюють на зсув

Розглянемо заклепувальні, болтові і зварні з'єднання, які широко використовуються в інженерній практиці. Їх дійсна робота складна і лише приблизно може бути охарактеризована як робота на зсув. Проте ці розрахунки дуже прості і достатньо надійні, тому що використовувані в цих розрахунках розрахункові опори призначаються на основі дослідних даних. Це опосередковане дозволяє врахувати визначною мірою дійсну роботу цих з'єднань.

Розглянемо спочатку заклепувальне з'єднання (рис. 6.32, а).

Одним із видів руйнування є зріз заклепки по перерізах $m n$ і $m_1 n_1$ з площею зрізу $A_{зр} = 2 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$. У момент текучості приблизно можна вважати, що дотичні напруження в цих перерізах розподілені рівномірно. Позначивши розрахунковий опір заклепки на зріз $R_{зр}$, одержимо розрахункову силу на одну заклепку по зрізі у вигляді

$$N_{зак}^{зр} = A_{зр} R_{зр}. \quad (6.78)$$

Для пакета листів у загальному випадку $A_{зр} = n_{зр} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$, де $n_{зр}$ – число зрізів заклепки.

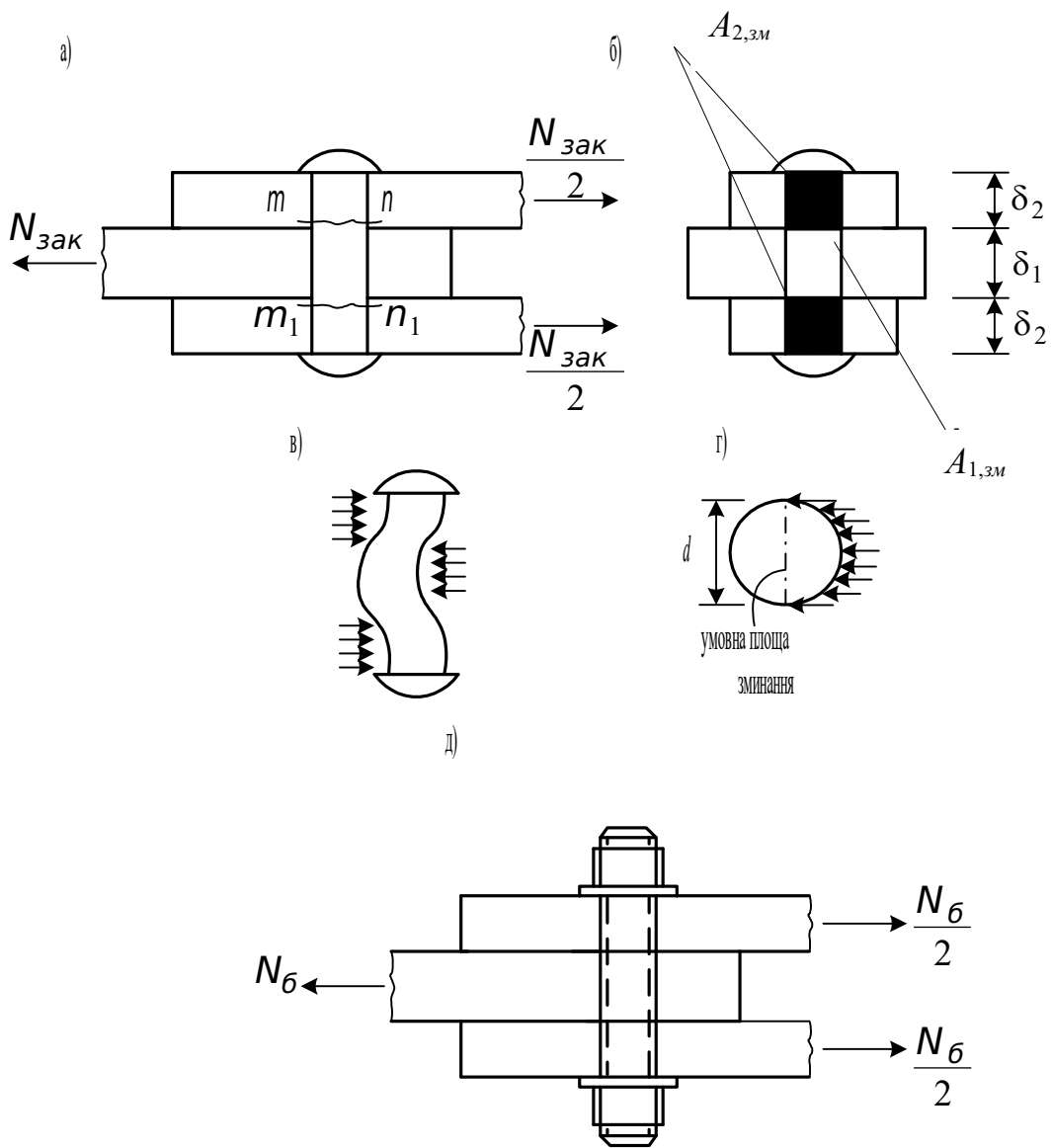


Рис. 6.32. Розрахунок заклепки і болта на зріз і зминання

При розрахунку заклепувальних з'єднань за допустимими напруженнями $R_{зр}$ замінюється на $[\tau]_{зр}$.

Крім зрізу, при відносно тонких листах можливо порушення з'єднання внаслідок зминання листів або заклепки по поверхні їхнього контакту. Фактичний розподіл контактних напружень дуже складний (рис. 6.32, в, г). Тому обчислюються умовні напруження зминання, віднесені до площі зминання $A_{зм}$, що є проекцією фактичної криволінійної площі на площину діаметрального перерізу заклепки (рис. 6.32, г).

З умови міцності

$$\sigma_{3M} = \frac{N_{зак}}{A_{3M}} \leq R_{3M},$$

де R_{3M} – розрахунковий опір на зминання, визначений експериментально, знайдемо розрахункову силу для заклепки по зминанню:

$$N_{зак}^{3M} = A_{3M} R_{3M}. \quad (6.79)$$

У загальному випадку

$$A_{3M} = d \Sigma \delta,$$

де d – діаметр заклепки; $\Sigma \delta$ – найменша сумарна товщина листів, які зминаються в одному напрямку. Наприклад, на рис. 6.32, б це буде менша з площ $A_{13M} = d \delta_1$ і $A_{23M} = d \cdot 2 \delta_2$. Природно, що з двох сил, знайдених за зрізом і зминанням, фактичною розрахунковою силою для заклепки $N_{зак}$ є менша з них.

Розрахунок заклепувального з'єднання звичайно полягає у визначенні необхідного числа заклепок n при дії на з'єднання заданого розрахункового зусилля N . У пружній стадії це зусилля нерівномірно розподіляється між заклепками. Проте в граничному стані завдяки деформаціям текучості зусилля в заклепках вирівнюються. Тому приймається допущення: сила N розподіляється між усіма заклепками порівну.

Тоді

$$n = \frac{N}{N_{зак}}, \quad (6.80)$$

де $N_{зак}$ – найменша з двох розрахункових сил, знайдених для однієї заклепки за зрізом (6.78) і за зминанням (6.79).

Болтові з'єднання (рис. 6.32, д) розраховуються так само, як і заклепка, на зріз і на зминання за відповідними формулами. Особливістю є розрахунок високоміцних болтів, що застосовуються у фрикційних з'єднаннях, де завдяки нормованому натягу болта, що досягається шляхом закручування гайки динамометричним ключем, створюється стиск пакета листів силою F_δ (рис. 6.33). При впливі на з'єднання сили N_δ вона сприймається силами тертя, що виникають на поверхнях контакту листів, які обтискаються.

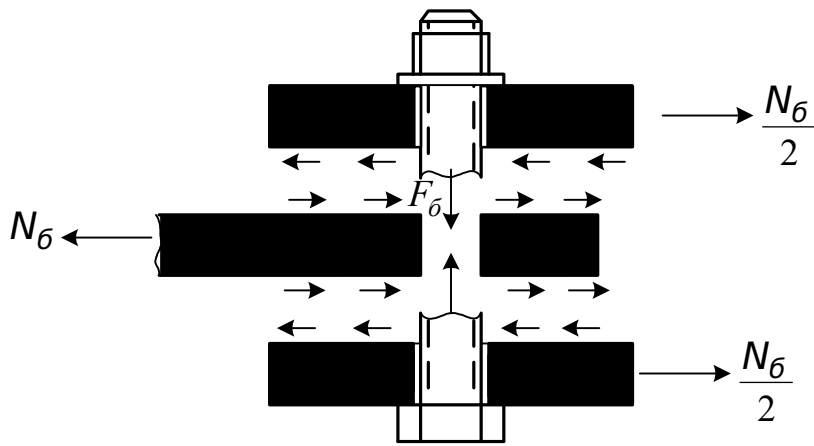


Рис. 6.33. Високоміцний болт, що обтискає пакет листів

Розрахункова сила, яку спроможний сприйняти болт за тертям, буде

$$N_b = n_{тр} F_b f m, \quad (6.81)$$

де f – коефіцієнт тертя; $n_{тр}$ – число площин тертя (те саме, що число площин зрізу в заклепці); m – коефіцієнт умов роботи (0,8 – 0,9).

Коефіцієнт тертя залежить від виду опрацювання поверхонь листів, що труться. Так, для звичайної маловуглецевої сталі при очищенні поверхонь, що з'єднуються пікоструминним апаратом, $f=0,45$; металевими щітками – $f = 0,35$; без очищення поверхонь – $f = 0,25$. Напруження натягу болта складають 0,5...0,6 границі міцності високоміцної сталі, із якої він виготовляється. Кількість болтів визначається за формулою (6.80) із заміною $N_{зак}$ на N_b .

Розглянемо тепер зварне з'єднання двох листів кутовими швами (рис. 6.34, а) і встановимо принцип його розрахунку. Зварні з'єднання не дають ослаблення елементів, менш трудомісткі, ніж інші види з'єднань, і тому більш економічні.

Руйнування швів у з'єднанні, що розглядається, відбувається внаслідок зрізу по найменшій можливій площі зрізу, розташованій у бісекторній площині кута, де наплавляється шов (рис. 6.34, б). При цьому площа зрізу на два шви буде $A_{зр} = 2 l h_{ш} \beta$, де β – коефіцієнт форми кутового шва. Він залежить від виду зварювання: для однопрохідного автоматичного $\beta=1$; однопрохідного напівавтоматичного і ручного $\beta=0,8$; багатопрохідного автоматичного і напівавтоматичного $\beta = 0,7$; $h_{ш}$ – висота катета кутового шва.

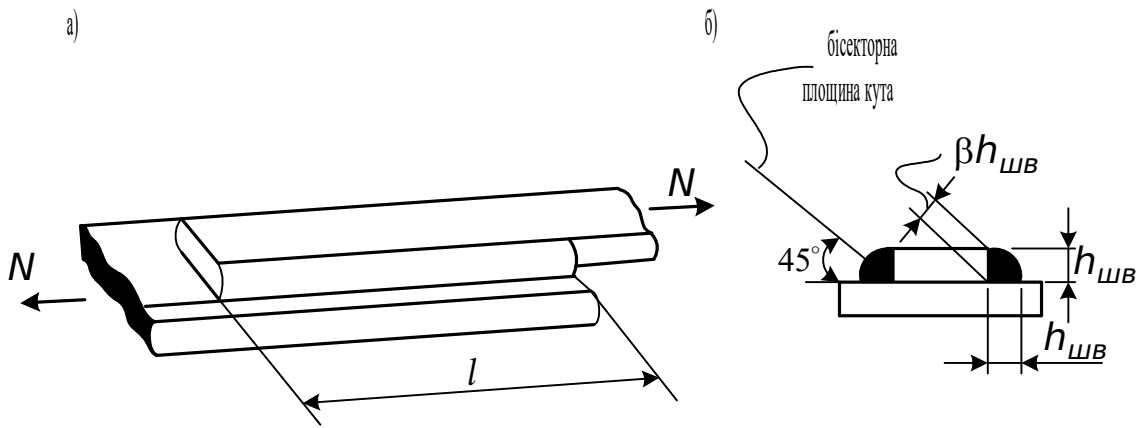


Рис. 6.34. Зварне з'єднання кутовими швами

Припускаючи рівномірний розподіл дотичних напружень по площі зрізу шва, умову міцності запишемо у вигляді

$$\tau = \frac{N}{A_{зр}} = \frac{N}{2 \ell \beta h_{ш}} \leq R_{зр} , \quad (6.82)$$

де $R_{зр}$ – розрахунковий опір матеріалу кутового зварного шва на зріз; ℓ – розрахункова довжина шва, що береться на 10 мм менше від фактичної через можливе погіршення якості зварювання по кінцях шва. Щоб не припускати надмірної нерівномірності розподілу напружень по довжині шва, ставиться обмеження на його довжину $\ell \leq 60 h_{ш}$. За формулою (6.82), якщо задати який-небудь один розмір шва, наприклад $h_{ш}$, можна знайти інший розмір – довжину шва ℓ .

6.8. Потенційна енергія при згинанні

Як було показано раніше (див. п. 3.9 і п. 6.7), потенційна енергія, що накопичується в одиниці об'єму тіла в межах пружної деформації, визначається таким чином:

– при дії нормальних напружень (див. формулу (3.32))

$$W = \frac{\sigma^2}{2E} ;$$

– при дії дотичних напружень (див. формулу (6.77))

$$W = \frac{\tau^2}{2G} .$$

Потенційна енергія в елементарному об'ємі

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} dV + \frac{\tau^2}{2G} dV.$$

Відомо, що при згинанні (див. формули (6.9) і (6.12))

$$\sigma = \frac{M y}{J}, \quad \tau = \frac{Q S}{J b}.$$

Підставимо ці вирази в попередні і здійснимо інтегрування всього об'єму балки:

$$W = \int_V \frac{M^2 y^2}{2E J^2} dV + \int_V \frac{Q^2 S^2}{2G J^2 b^2} dV.$$

З огляду на те, що $dV = dx dA$, одержимо

$$W = \int_{\ell} \frac{M^2}{2E J^2} dx \int_A y^2 dA + \int_{\ell} \frac{Q^2}{2G A} dx \int_A \frac{A S^2}{J^2 b^2} dA. \quad (6.83)$$

Введемо позначення

$$\int_A \frac{A S^2}{J^2 b^2} dA = \mu, \quad (6.84)$$

де A – площа поперечного перерізу, μ – коефіцієнт форми перерізу.

Врахуємо, що

$$\int_A y^2 dA = J$$

момент інерції перерізу відносно нейтральної осі (див. формули (2.5) і (2.6)).

Знайдемо остаточно

$$W = \int_{\ell} \frac{M^2}{2E J} dx + \int_{\ell} \frac{\mu Q^2}{2G A} dx. \quad (6.85)$$

Перший член отриманої рівності являє собою потенційну енергію згинання, другий – потенційну енергію зсуву.

Розділ 7

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНИХ БАЛОК

7.1. Загальні положення

Статично невизначною стержневою системою будемо називати таку систему, у якій при дії довільного навантаження не всі поздовжні, поперечні сили і моменти можуть бути знайдені з рівнянь рівноваги твердого тіла або системи твердих тіл (із рівнянь статyki).

Будемо говорити, що система має зайві, або надлишкові, зв'язки, якщо після їх видалення вона залишається геометрично незмінною і нерухомою. Наприклад, у балці, показаній на рис. 7.1, а, можна видалити не більше двох зв'язків (рис. 7.1, б, в, г), тому що інакше дана система загубить геометричну незмінність (рис. 7.1, д, е). Геометрично змінною називається така система, у якій переміщення її точок можуть відбуватися без деформації стержнів (такі можливі переміщення показані пунктиром на рис. 7.1, д, е), а геометрично незмінною – у якій переміщення точок можливі тільки за рахунок деформації стержня. Нагадаємо, що в якості інженерних споруд застосовуються тільки геометрично незмінні системи.

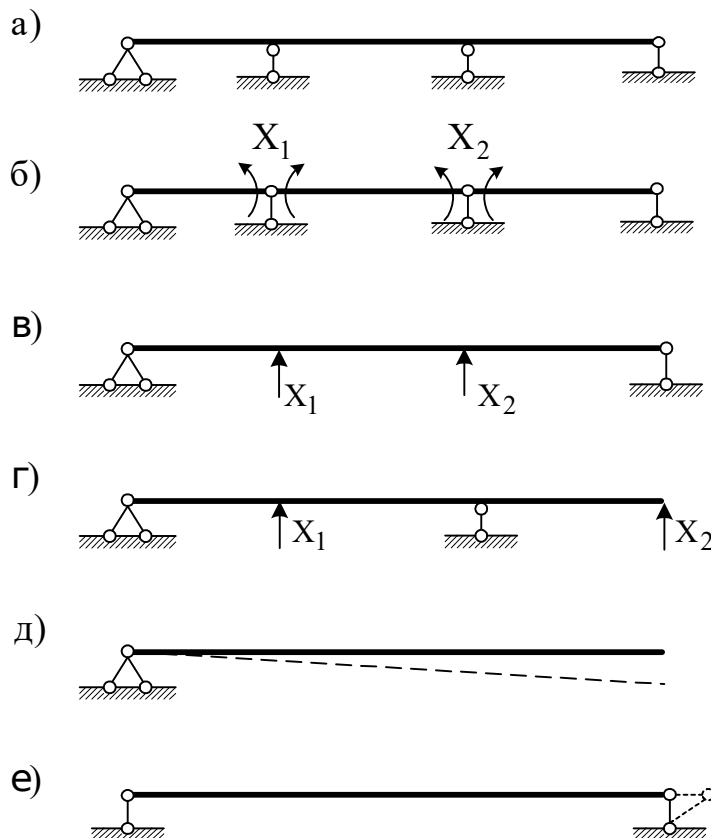


Рис. 7.1. Приклади статично невизначної (а), статично визначних і геометрично незмінних систем (б), (в), (г) і геометрично змінних систем (д), (е)

Кількість зайвих зв'язків називається ступенем статичної невизначності системи. Цей ступінь можна знайти як різницю між кількістю шуканих зусиль і кількістю незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для їхнього одержання.

У поодинокому випадку, для балки, яка показана на рис. 7.1, а, що називається нерозрізною (перекриває два і більше прогонів і проходить через свої опори, не перериваючись ніде шарнірами або розтинами), кількість зайвих зв'язків може бути знайдена за формулою

$$L = C_0 - 3, \quad (7.1)$$

де L – кількість зайвих зв'язків; C_0 – кількість опорних зв'язків; 3 – три рівняння статички для плоскої системи.

Характерною відмінністю нерозрізної балки від розрізної є те, що навантаження, розташоване в будь-якому її прогоні, згинає балку вздовж усіх прогонів, створюючи плавну пружну лінію.

Підводячи підсумок вищесказаному, зазначимо, що системи з зайвими зв'язками мають такі властивості:

- після втрати зайвих зв'язків зберігають свою геометричну незмінюваність (рис. 7.1, б, в, г);
- припускають нескінченну множину розв'язків, які задовольняють умови рівноваги, і мають лише один розв'язок, що задовольняє іншій умові задачі;
- мають відмінні від нуля зусилля при температурних впливах і зсуві опор;
- можуть мати початкові зусилля;
- зусилля в них залежать від геометричних розмірів перерізів стержнів і модуля пружності матеріалу цих стержнів.

Задача розрахунку статично невизначної системи, геометрична схема якої задана, полягає в такому: за заданим навантаженням підібрати раціональний переріз усіх елементів так, щоб система мала достатню надійність, жорсткість при мінімальній витраті матеріалу. У такій постановці, що має найбільше практичне значення, задача в загальному вигляді ще не розв'язана. У більш вузькій постановці задача розрахунку формулюється так: за заданими геометричною схемою, навантаженням і перерізами усіх стержнів визначити зусилля і деформації системи. При цьому доводиться задаватись перерізами на основі початкового, орієнтованого розрахунку, потім визначати зусилля і напруження, після чого в разі необхідності виправити деякі перерізи і повторити розрахунок знову. Метод розрахунку статично невизначних систем, елементи яких зазнають згинання, по суті, не відрізняється від розглянутих раніше методів розрахунку статично невизначних систем при розтяганні і стисканні (див. п. 3.5). Спочатку в заданій системі відкидаються зайві зв'язки, а замість них прикладаються зайві невідомі X_1, X_2, \dots, X_n

(рис. 7.1, б, в, г). При відкиданні зайвих зв'язків потрібно стежити за тим, щоб нова система була геометрично незмінною. Отримана таким чином статично визначна і геометрично незмінна система називається основною системою (рис. 7.1, б, в, г). Зайвими зв'язками (або основними невідомими) у випадку, поданому на рис. 7.1, б, вважаються зв'язки, що перешкоджають повороту перерізів, розташованих нескінченно близько зліва і справа від проміжних опор. На рис. 7.1, в і 7.1, г зайві невідомі – це реакції опор.

Своєрідною статично невизначною системою є балка на пружній основі, яка розглядається в п. 7.3. Тут у якості основної невідомої приймають функцію прогинів $y = y(x)$. Після чого, використовуючи диференціальні залежності (6.37), (6.38), одержують внутрішні зусилля в балці.

Як уже зазначалося, рівнянь рівноваги недостатньо для визначення зусиль у необхідних і зайвих зв'язках. Тому для знаходження зайвих невідомих складаються додаткові рівняння, які називаються рівняннями сумісності деформацій або рівняннями деформацій. Упорядкування цих рівнянь і їхній зміст викладені в наступному підрозділі. Тут же відзначимо, що метод розрахунку, у якому за невідомі приймаються зусилля в зайвих зв'язках, називається методом сил.

7.2. Розрахунок нерозрізних балок

Нехай задана нерозрізна балка постійного перерізу ($EJ = \text{const}$) (рис. 7.2, а), навантажена зосередженим, моментним і розподіленим навантаженнями.

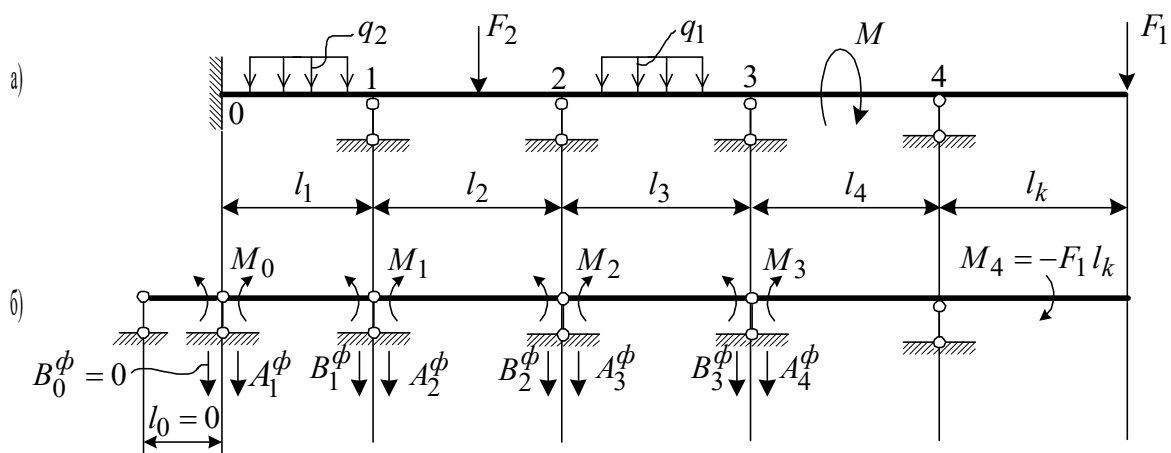


Рис. 7.2. Розрахункова схема нерозрізної балки (а), основна система (б)

Основна система (рис. 7.2, б) утворюється із заданої нерозрізної балки (див. п. 7.1) за допомогою усунення жорсткого зв'язку на кожній проміжній опорі і заміни її шарнірною. Вибір такої основної системи є вдалим, тому що поворот перерізів на будь-якій опорі залежить від трьох

невдомих моментів і від зовнішнього навантаження, розташованого на правому і лівому від цієї опори прогонах. Докладно особливості розрахунку нерозрізних балок обговорюються в курсі «Будівельна механіка».

На підставі зазначеного для подальшого аналізу виділимо два суміжних прольоти нерозрізної балки в основній системі (рис. 7.3, а). Побудуємо одиничні M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , і вантажну епюри (рис. 7.3, б, в, г, д).

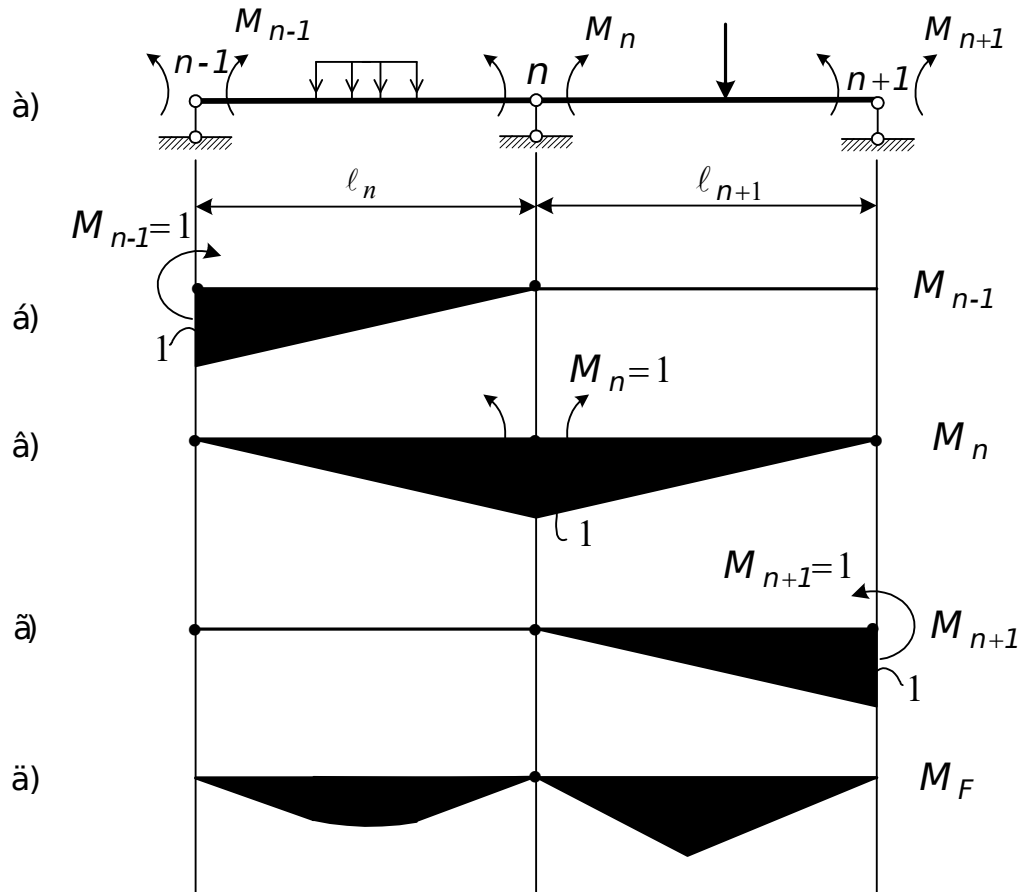


Рис. 7.3. Схема двох суміжних прогонів нерозрізної балки в основній системі (а), одиничні і вантажна епюри (б), (в), (г), (д)

Тепер необхідно скласти умову, яка вносить те саме обмеження на деформації основної системи, що є в нерозрізній балці. В основній системі (рис. 7.3, а) обидві сторони n -го опорного перерізу, розділені поставленим у балку шарніром, можуть повертатися під дією зовнішнього навантаження незалежно одна від одної.

У нерозрізній балці шарніра немає, отже, взаємний поворот перерізів, розташованих нескінченно близько зліва і справа від n -ї опори, дорівнює нулю. Тому умова сумісності деформацій буде такою:

$$M_{n-1} \delta_{n,n-1} + M_n \delta_{nn} + M_{n+1} \delta_{n,n+1} + \Delta_{nF} = 0, \quad (7.2)$$

де M_{n-1} , M_n , M_{n+1} – невідомі моменти відповідно на опорах $n-1$, n , $n+1$ (рис. 7.3, а); $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n,n+1}$ – взаємний кут повороту перерізів на n -й опорі, викликаний відповідно $M_{n-1}=1$, $M_n=1$, $M_{n+1}=1$; Δ_{nF} – взаємний поворот перерізів на n -й опорі, викликаний зовнішнім навантаженням. Залежність (7.2) можна скласти для кожної з проміжних опор i , виходить, написати стільки додаткових рівнянь, скільки є невідомих опорних моментів. Для визначення кутів повороту $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n,n+1}$, Δ_{nF} скористаємося методом фіктивного навантаження (див. п. 6.6.4). Відповідно до цього методу побудовані епюри M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , M_F (рис. 7.3, б, в, г, д) приймаємо за фіктивні навантаження. Спрямуємо їх до осі балки і прикладаємо до фіктивних прольотів (у даному випадку фіктивна і задана балки (прогони) збігаються, див. табл.6.1, рис. 7.4).

Тепер, використовуючи формулу (6.66), знайдемо

$$\delta_{n,n-1} = \frac{\ell_n}{6EJ_n};$$

$$\delta_{nn} = \frac{\ell_n}{3EJ_n} + \frac{\ell_{n+1}}{3EJ_n}, \quad \delta_{n,n+1} = \frac{\ell_{n+1}}{6EJ_n}, \quad \Delta_{nF} = \frac{B_n^\phi}{EJ} + \frac{A_{n+1}^\phi}{EJ}. \quad (7.3)$$

Отримані залежності можуть бути також знайдені за методом Мора (див. п. 6.6.5). Підставимо (7.3) у (7.2). Після найпростіших перетворень одержимо таке рівняння:

$$M_{n-1}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1}\ell_{n+1} = -6(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi). \quad (7.4)$$

Рівняння (7.4) називається рівнянням трьох моментів. Таких рівнянь складається стільки (про це говорилося раніше), скільки є невідомих опорних моментів. Наприклад, для балки, яка показана на рис. 7.2, б, система рівнянь для знаходження невідомих M_0 , M_1 , M_2 , M_3 має вигляд

$$2M_0\ell_1 + M_1\ell_1 = -6(A_1^\phi);$$

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2\ell_2 = -6(B_1^\phi + A_2^\phi);$$

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3\ell_3 = -6(B_2^\phi + A_3^\phi);$$

$$M_2\ell_3 + 2M_3(\ell_3 + \ell_4) + M_4\ell_4 = -6(B_3^\phi + A_4^\phi).$$

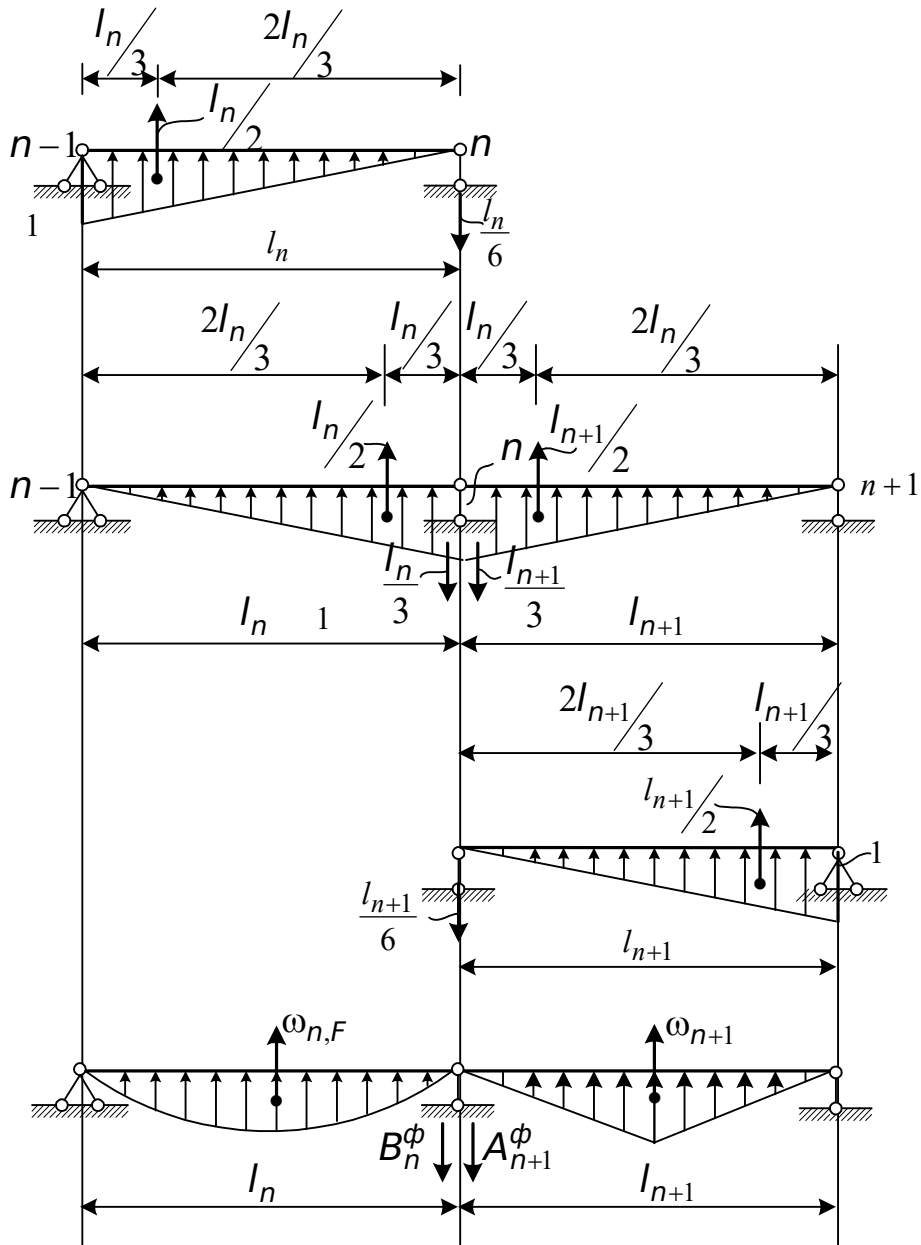


Рис. 7.4. До визначення взаємних кутів повороту $\delta_{n, n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n, n+1}$, Δ_{nF} методом фіктивного навантаження

Слід звернути увагу на те, що опорний момент M_4 тут відомий і дорівнює

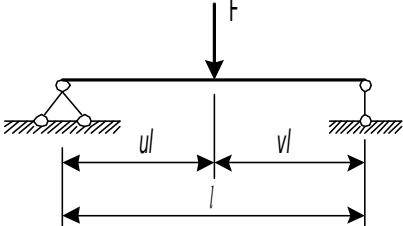
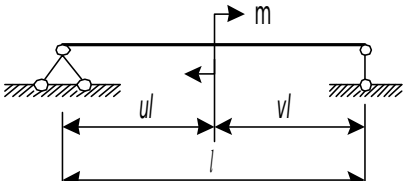
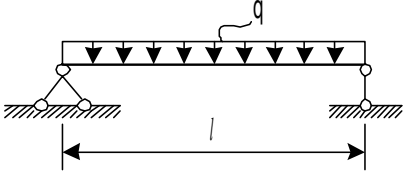
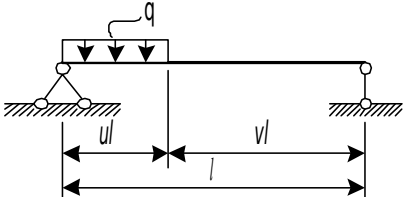
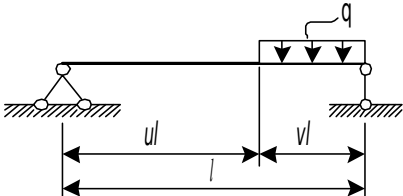
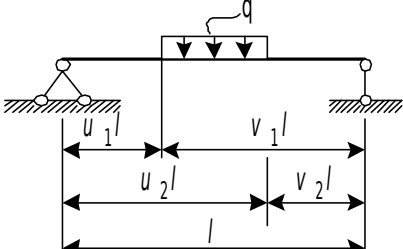
$$M_4 = -F_1 l_k,$$

а защемлення подане як додатковий ненавантажений прогін із $\ell_0 = 0$.

Величини фіктивних опорних реакцій для навантажень, які найчастіше зустрічаються, надані в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Формули для визначення фіктивних опорних реакцій

№№ III	Схема навантаження балки	Фіктивна реакція
1		$A^{\phi} = \frac{F\ell^2}{6} uv(1+v),$ $B^{\phi} = \frac{F\ell^2}{6} uv(1+u)$
2		$A^{\phi} = -\frac{m\ell}{6}(1-3v^2), B^{\phi} = \frac{m\ell}{6}(1-3u^2)$
3		$A^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24},$ $B^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24}$
4		$A^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} u^2(2-u)^2,$ $B^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} u^2(2-u^2)$
5		$A^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} v^2(2-v)^2,$ $B^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} v^2(2-v)^2$
6		$A^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} [1 - u_1^2(2-v_1)^2 - v_2^2(2-v_2^2)],$ $B^{\phi} = \frac{q\ell^3}{24} [1 - u_1^2(2-v_1^2) - v_2^2(2-v_2)^2]$

Після обчислення опорних моментів визначення зусиль і побудова епюр може провадитися шляхом розрахунку окремих балочок основної системи на дію зовнішніх навантажень і опорних моментів (рис. 7.5). Для виведення аналітичного виразу згинальних моментів припустимо, що ординати епюри M^0 і обидва моменти мають однакові знаки.

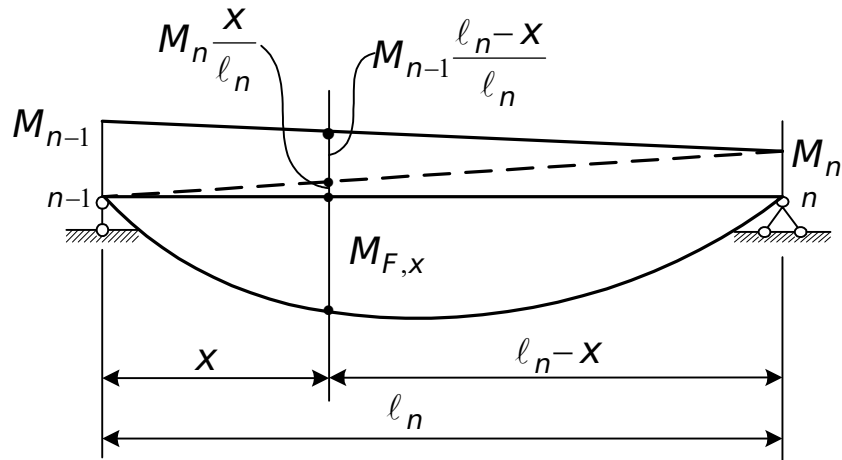


Рис. 7.5. До виведення аналітичного виразу згинальних моментів

Тоді одержимо

$$M_x = M_{F,x} + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n}. \quad (7.5)$$

Тут $M_{F,x}$ – згинальний момент у перерізі прогону, що розглядається, від зовнішнього навантаження (рис. 7.3, д); M_n і M_{n-1} – опорні моменти; x – абсциса перерізу; l_n – довжина прогону.

Формула (7.5) справедлива при яких завгодно комбінаціях знаків величин M_F , M_n , M_{n-1} . Для визначення поперечної сили скористаємося залежністю (1.5), яка говорить, що перша похідна від згинального моменту по абсцисі x дорівнює поперечній силі в тому самому перерізі:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = Q_{F,x} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (7.6)$$

де $Q_{F,x}$ – поперечна сила в перерізі, що розглядається, в основній системі нерозрізної балки (рис. 7.6); M_n і M_{n-1} у формулу підставляються зі своїми знаками.

Опорна реакція на будь-якій опорі n нерозрізної балки утворюється таким чином. Вирізаємо двома перерізами, розташованими по обох боках від опори, нескінченно малу ділянку балки (рис. 7.6).

Спроекуємо на вертикаль всі діючі на виділену ділянку балки сили:

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

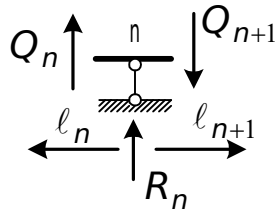


Рис. 7.6. До визначення опорної реакції на n -ій опорі нерозрізної балки

Використовуючи (7.6), знайдемо

$$R_n = R_{F,n} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}, \quad (7.7)$$

де $R_{F,n}$ – реакція опори n , що утворюється в ній у основній системі від заданого зовнішнього навантаження, розташованого на прогонах l_n і l_{n+1} (рис. 7.3, д).

Для перевірки правильності розв'язку задачі слід пригадати, що зігнута вісь нерозрізної балки неперервна на опорах, тобто взаємний кут повороту перерізів лівіше і правіше даної опори дорівнює нулю. Отже, епюра M в межах двох суміжних прогонів нерозрізної балки правильна, якщо алгебраїчна сума фіктивних реакцій на середній опорі дорівнює нулю:

$$B_n^\phi + A_{n+1}^\phi = 0. \quad (7.8)$$

7.2.1. Приклад розрахунку нерозрізної балки

Схема навантаження нерозрізної балки показана на рис. 7.7, а.

Встановимо ступінь статичної невизначності балки. На неї накладено шість опорних зв'язків (три, що здійснюють замазування лівої опори, і три, які є шарнірно рухливими опорами), тому відповідно до (7.1) маємо

$$L = C_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Балка тричі статично невизначна.

Виберемо основну систему шляхом постановки в опорні перерізи балки шарнірів, замазування заміняємо додатковим прогоном із нульовою довжиною. На третій опорі згинальний момент дорівнює

$$M_3 = -F_2 \cdot l_k = -32 \cdot 3 = -96 \text{ кНм.}$$

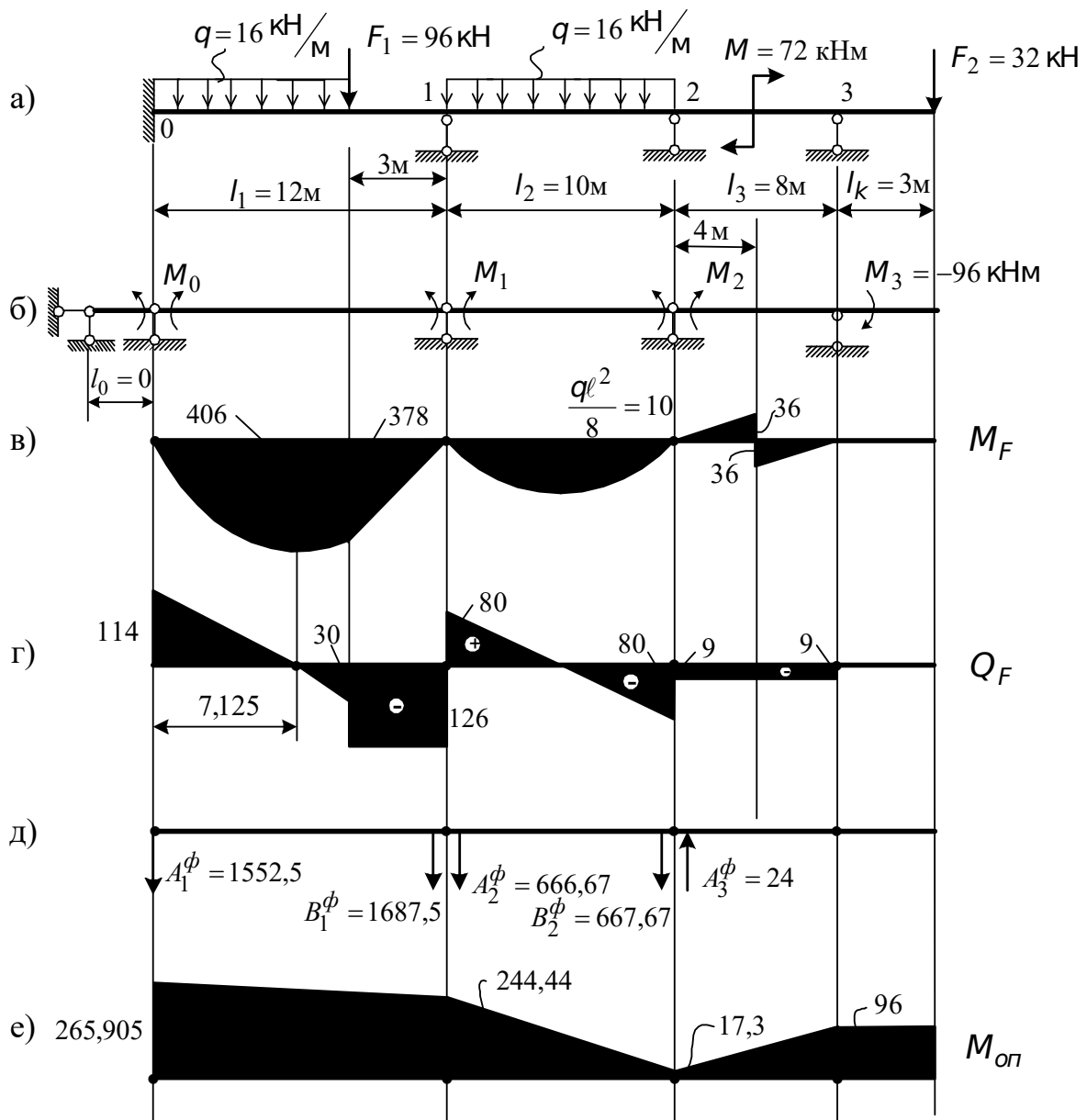


Рис. 7.7. Розрахункова схема нерозрізної балки (а), основна система (б), епюри M_F і Q_F в основній системі (в), (г), фіктивні реакції (д), епюра опорних моментів (е)

Основна система показана на рис. 7.7, б. Вона складається з чотирьох однопрогонових балок. Перша – із нульовим прогоном (взагалі нульовий прогіє додано винятково для зручності запису розв’язувального рівняння (7.2)), друга і третя відповідно з прогонами $\ell_1 = 12\text{ м}$ і $\ell_1 = 10\text{ м}$. Четверта балка з консоллю і прогоном $\ell_2 = 8\text{ м}$. Епюри моментів M_F і Q_F (рис. 7.7, в, г) побудовані в основній системі, тобто для кожної балки окремо від навантаження, прикладеного в межах прогонів. Слід звернути увагу, що для четвертої балки епюри побудовані тільки від $M = 72\text{ кНм}$. Сила $F_2 = 32\text{ кН}$, що діє на кінці консолі, перенесена в точку 3 із моментом $M_3 = -96\text{ кНм}$, що ввійде в рівняння (7.2) у якості відомої величини. Фіктивні опорні реакції знайдені за допомогою формул, які є в табл. 7.1.

При цьому потрібно враховувати, що якщо на прогоні прикладені навантаження двох видів (наприклад, на першому прогоні q і F_1), то застосовуємо принцип накладання (суперпозиції), тобто для знаходження фіктивних реакцій потрібно використовувати схеми 1 і 4 (див. табл. 7.1). При цьому потрібно також пам'ятати, що фіктивні опорні реакції вважаються додатними, якщо вони спрямовані зверху униз. На рис. 7.7, д показані величини і напрямки знайдених фіктивних опорних реакцій.

Для знаходження невідомих моментів M_0 , M_1 і M_2 записуємо систему рівнянь (7.2):

$$\begin{aligned} 2M_0l_1 + M_1l_1 &= -6(A_1^\phi) ; \\ M_0l_1 + 2M_1(l_1+l_2) + M_2l_2 &= -6(B_1^\phi + A_2^\phi) ; \\ M_1l_1 + 2M_2(l_2+l_3) - 96l_3 &= -6(B_2^\phi - A_3^\phi) . \end{aligned}$$

Розв'язуємо систему рівнянь. У результаті одержуємо

$$M_0 = -265,905 \text{ кНм}; M_1 = -244,44 \text{ кНм}; M_2 = -17,88 \text{ кНм}.$$

Еюра опорних моментів побудована на рис. 7.7, е.

Застосовуючи залежності (7.5) і (7.6), для нерозрізної балки (рис. 7.8, а) побудуємо еюри M і Q ; використовуючи (7.7), знайдемо реакції (рис. 7.8, а).

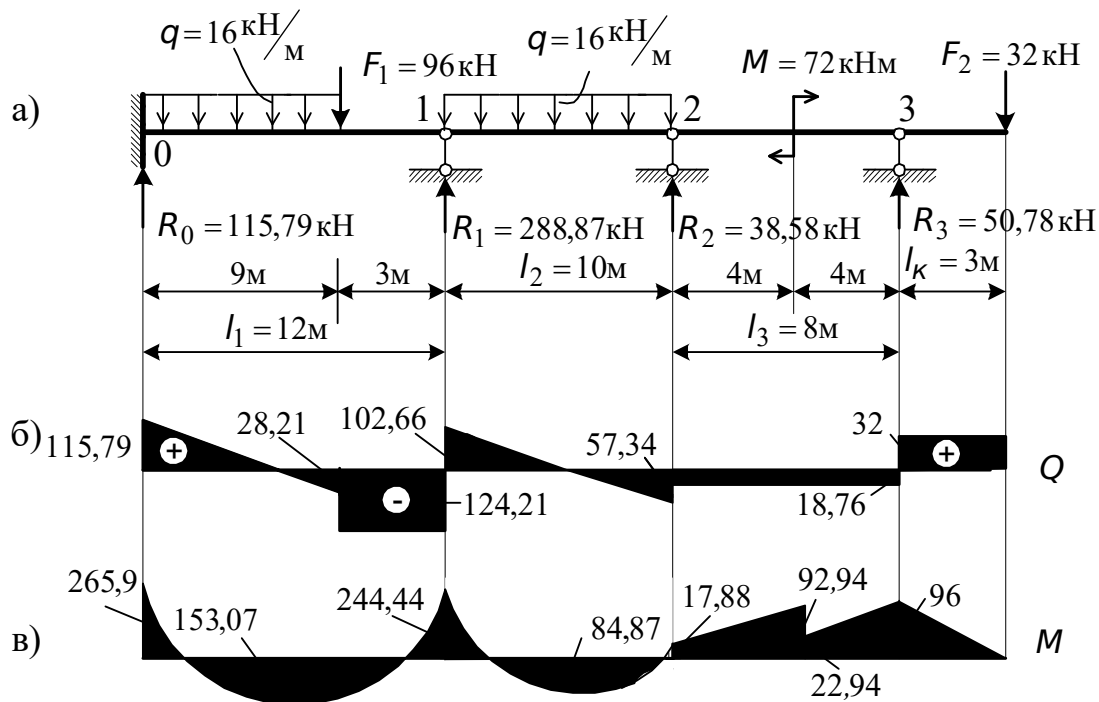


Рис. 7.8. Розрахункова схема нерозрізної балки (а), еюра поперечних сил (б), еюра моментів (в)

7.3. Розрахунок балки на пружній основі

Пружною основою називається така основа балки, що деформується під дією маси балки і розташованого на ній навантаження і при цьому чинить пружну протидію прогину. Наприклад, залізничні шпали, рейки, стрічкові фундаменти різноманітних споруд, що передають навантаження на ґрунт.

Балка, що лежить на пружній основі, відчуває з боку основи реактивний опір. Але характер розподілу реакції по її довжині невідомий і не може бути визначений із рівнянь статички. Тому і ця задача розрахунку балки є статично невизначною. Ступінь статичної невизначності такої балки теоретично можна вважати таким, що дорівнює нескінченності, оскільки еюра опору має нескінченно велику кількість невідомих ординат по довжині балки. Щодо характеру розподілу реактивного опору по довжині балки існує декілька гіпотез. Найпростіша з них була сформульована проф. Е. Вінклером* у 1867 р. Відповідно до цієї гіпотези реакція основи q_0 в кожній точці пропорційна пружному осіданню U у цій точці, тобто

$$q_0 = -kby, \quad (7.9)$$

де k – коефіцієнт, що характеризує жорсткість основи (коефіцієнт постелі); b – ширина подошви балки.

Коефіцієнт жорсткості основи визначається експериментально шляхом вдавлювання в ґрунт жорсткого штампа. Коефіцієнт постелі k – це сила, необхідна для вдавлювання в ґрунт штампа з площею, яка дорівнює одиниці, на прогин $U = 1$, розмірність коефіцієнта k – Н/м³, кН/м³. Значення k для деяких основ наведені в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Значення коефіцієнта k

Матеріал основи	k , кН/м ³
Пливун, пісок нещодавно насипаний, глина мокра, розм'якшена	$(0,1 - 0,5) \cdot 10^4$
Пісок злежаний, баластовий; гравій насипний; глина волога	$(0,5 - 5) \cdot 10^4$
Пісок, гравій, що щільно злежався, щебінь, хрящ; глина малої вологості	$(5 - 10) \cdot 10^4$
Піщано-глинистий ґрунт, штучно ущільнений, глина тверда	$(10 - 20) \cdot 10^4$
М'яка скеля, вапняк, піщаник	$(20 - 100) \cdot 10^4$

Моделлю основи Вінклера може служити ряд пружин однакової жорсткості, розміщених на абсолютно жорсткій основі, що діють

* Німецький учений Еміль Вінклер (1835-1888) – один із перших, хто ввів гіпотезу про розподіл реактивного опору в розрахункову практику.

незалежно одна від одної. Недоліками цієї моделі є: основа осідає лише в тих точках, що знаходяться безпосередньо під балкою і залишається цілком недеформованою поза балкою, тобто поверхня основи зазнає розриву на кінцях балки; гіпотеза Вінклера припускає, що реакція основи виникає і на тих ділянках, де балка піднімається під основою ("відлипає"), тобто вважається, що підшва балки склеєна з поверхнею основи. Проте для багатьох практичних задач, коли відлипання не виникає і немає необхідності досліджувати прогини основи за балкою, гіпотеза, що розглядається, дає прийнятні результати.

Виведемо диференціальне рівняння зігнутої осі балки. Для знаходження зігнутої осі балки на пружній основі використовуємо диференціальне рівняння (6.39):

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

Навантаження q , що входить у це рівняння, для балки на пружній основі складається з заданого навантаження $q(x)$ і реакції основи (7.9):

$$q_0 = -kby.$$

Тому

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - kby.$$

Розділивши обидві частини рівняння на EJ і позначивши

$$s = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}}, \quad (7.10)$$

одержуємо

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (7.11)$$

Рівняння (7.11) неоднорідне, лінійне, четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (7.11) складається з загального розв'язку однорідного

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = 0 \quad (7.12)$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$y_{\text{част}} = \frac{q(x)}{4s^4 EJ}. \quad (7.13)$$

Розв'язок рівняння (7.11) має такий вигляд:

$$y_x = Achx \cos sx + Bshx \cos sx + Cchsx \sin sx + Dshsx \sin sx + \frac{q(x)}{4s^4 EJ}, \quad (7.14)$$

де A, B, C, D – довільні постійні;

$chsx$, $shsx$ – гіперболічні функції (відповідно, гіперболічний косинус $chsx = \frac{e^{sx} + e^{-sx}}{2}$ і гіперболічний синус $shsx = \frac{e^{sx} - e^{-sx}}{2}$). Зазначимо, що обидві функції визначені для всіх значень SX , так що $sh0 = 0$, $ch0 = 1$, $shsx$ – непарна функція, $chsx$ – парна функція;

$$ch^2sx - sh^2sx = 1,$$

$$\frac{dshsx}{dx} = schsx, \quad \frac{dchsx}{dx} = sshsx.$$

Припустимо, навантаження, яке діє на балку, рівномірно розподілене по деякій ділянці. Тоді, якщо продиференціювати рівняння (7.14) один, два і три рази по X , знайдемо:

$$y'_x = A[s[shsx\cos sx - chsx\sin sx] + B[s[chsx\cos sx - shsx\sin sx] + C[s[shsx\sin sx + chsx\cos sx] + D[s[chsx\sin sx + shsx\cos sx]; \quad (7.15)$$

$$y''_x = -2As^2shsx\sin sx - 2Bs^2chsx\sin sx + 2Cs^2shsx\cos sx + 2Ds^2chsx\cos sx; \quad (7.16)$$

$$y'''_x = -2As^3[chsx\sin sx + shsx\cos sx] - 2Bs^3[shsx\sin sx + chsx\cos sx] + 2Cs^3[chsx\cos sx - shsx\sin sx] + 2Ds^3[shsx\cos sx - chsx\sin sx]. \quad (7.17)$$

Виразимо довільні постійні A , B , C , D через прогин y_0 , кут повороту y'_0 , згинальний момент $y''_0 = -\frac{M_0}{EJ}$ і поперечну силу $y'''_0 = -\frac{Q_0}{EJ}$ на початку координат.

При $x = 0$

$$y_0 = A + \frac{q_0}{4s^4EJ};$$

$$y'_0 = s(B + C);$$

$$y''_0 = -\frac{M_0}{EJ} = 2Ds^2; \quad (7.18)$$

$$y'''_0 = -\frac{Q_0}{EJ} = 2s^3(C - B).$$

Звідси знайдемо

$$A = y_0 - \frac{q_0}{4s^4EJ}; \quad (7.19)$$

$$B = \frac{y'_0}{2s} + \frac{Q_0}{4s^3EJ}; \quad (7.20)$$

$$C = \frac{y'_0}{2s} - \frac{Q_0}{4s^3EJ}; \quad (7.21)$$

$$D = -\frac{M_0}{2s^2EJ}. \quad (7.22)$$

Тепер підставимо (7.19) – (7.22) у рівняння (7.14) – (7.17), уведемо позначення

$$\begin{aligned} Y_1 &= chsx \cdot \cos sx; \\ Y_2 &= \frac{1}{2}(shsxcos sx + chsxsin sx); \\ Y_3 &= \frac{1}{2}(shsxs sin sx); \\ Y_4 &= \frac{1}{4}(chsxs sin sx - shsxcos sx) \end{aligned} \quad (7.23)$$

(ці функції називаються функціями О.М. Крилова*, числові значення цих функцій залежно від безрозмірного аргументу sX наведені в табл. 7.3) і одержимо:

$$y_x = y_0 Y_1 + \frac{y'_0}{s} Y_2 - \frac{M_0}{s^2EJ} Y_3 - \frac{Q_0}{s^3EJ} Y_4 - \frac{q_0}{4s^4EJ} (Y_1 - 1); \quad (7.24)$$

$$y'_x = -4sy_0 Y_4 + y'_0 Y_1 - \frac{M_0}{sEJ} Y_2 - \frac{Q_0}{s^2EJ} Y_3 + \frac{q_0}{s^3EJ} Y_4; \quad (7.25)$$

$$M_x = 4s^2EJy_0 Y_3 + 4sEJy'_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{s} Y_2 - \frac{q_0}{s^2} Y_3; \quad (7.26)$$

$$Q_x = 4s^3EJy_0 Y_2 + 4s^2EJy'_0 Y_3 - 4M_0sY_4 + Q_0 Y_1 - \frac{q_0}{s} Y_2. \quad (7.27)$$

Таблиця 7.3

Значення функцій О.М. Крилова

$$\begin{aligned} Y_1 &= chsx \cos sx; \\ Y_2 &= \frac{1}{2}(shsxcos sx + chsxsin sx); \\ Y_3 &= \frac{1}{2}shsxs sin sx; \\ Y_4 &= \frac{1}{4}(chsxs sin sx - shsxcos sx). \end{aligned}$$

$s \cdot X$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
-------------	-------	-------	-------	-------

*Академік Олексій Миколаєвич Крилов (1863-1945) – російський кораблебудівник, розробив метод початкових параметрів в динаміці споруд, дав розв'язок задачі про рух вантажу з рівномірною швидкістю по балці на двох опорах і багатьох інших задач будівельної механіки.

1	2	3	4	5
0	1,0	0	0	0
0,1	1,0	0,10	0,0050	0,00015
0,2	0,9997	0,20	0,0200	0,00135
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,00450
0,4	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107
0,5	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208
0,6	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360
0,7	0,9600	0,69440	0,24435	0,0571
0,8	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515
0,9	0,8931	0,88035	0,40205	0,1211
1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659
1,1	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515
1,3	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612
1,4	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
1,6	-0,0753	1,2535	1,18725	0,66145
1,7	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,9	-1,1049	1,0888	1,54635	1,0727
2,0	-1,5656	0,95575	1,64895	1,2325
2,1	-2,09223	0,7735	1,73585	1,40195
2,2	-2,6882	0,5351	1,8018	1,57905
2,3	-3,3562	0,23345	1,84075	1,7614
2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,94605
2,5	-4,9128	-0,5885	1,81045	2,12925
2,6	-5,8003	-1,1236	1,72555	2,3065
2,7	-6,7565	-1,7509	1,58265	2,47245
2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208

Продовження табл. 7.3

1	2	3	4	5
2,9	-8,8471	-3,3079	1,08375	2,7443
3,0	-9,9669	-4,24845	0,70685	2,8346
3,1	-11,1119	-5,30225	0,2303	2,8823
3,2	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
3,4	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
3,5	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
3,6	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
3,7	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
3,8	-17,6875	-15,67605	-6,8343	0,9969

3,9	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
4,0	-17,8498	-19,25235	-10,3265	-0,7073
4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,2	-16,3505	-22,70545	-14,52735	-3,1812
4,3	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,4	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
4,5	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
4,6	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,96380
4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,57323
4,8	5,3164	-27,60515	-30,2589	-16,4604
4,9	12,5239	-26,72385	-32,9814	-19,6232
5,0	21,0504	-25,05645	-35,57745	-23,0525
5,1	30,9997	-22,46605	-37,96185	-26,7317
5,2	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,3	55,5317	-13,9201	-41,68255	-34,72455
5,4	70,2637	-7,6440	-42,77265	-38,9324
5,5	86,7044	0,19005	-43,15925	-43,2557
5,6	104,8687	9,75435	-42,67745	-47,5558
5,7	124,7352	21,2199	-41,14535	-51,75625
5,8	146,2478	34,7564	-38,36395	-55,74285
5,9	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,38045
6,0	193,6813	68,65775	-28,2116	-62,5106
6,1	219,2004	89,29465	-20,30425	-64,9518
6,2	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,3	272,2487	138,4120	2,28855	-66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	-63,21045
6,6	349,2554	231,88005	57,2528	-58,6871
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	-51,74295

Продовження табл. 7.3

1	2	3	4	5
6,8	390,2947	306,0558	110,9087	-42,11895
6,9	404,7145	347,34985	143,4927	-30,1819
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	-13,2842
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,3	389,3783	509,41565	314,72645	60,0189
7,4	358,7306	546,93425	367,56875	94,1019
7,5	313,3700	580,67095	423,9858	133,6506
7,6	251,0334	609,0402	483,5233	179,00345
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,4412

7,8	65,8475	642,1835	609,25955	288,16805
7,9	-62,0375	642,58715	673,6057	352,3123
8,0	-216,8647	628,8779	737,31005	422,8713
8,1	-401,1674	598,23435	798,81785	499,7008
8,2	-617,4142	547,5808	856,28775	582,49745
8,3	-867,9091	473,5998	907,5542	670,7544
8,4	-1154,6587	372,78655	950,11575	763,7226
8,5	-1479,3701	241,41355	981,0984	860,3917
8,6	-1843,2880	75,6088	997,25265	959,44835
8,7	-2247,0402	-128,58235	994,93765	1059,2289
8,8	-2690,4845	-375,1167	970,1255	1157,69385
8,9	-3172,6917	-667,9794	818,86635	1252,35605
9,0	-3691,4815	-1010,87995	834,8607	1340,3007
9,1	-4243,5551	-1407,3690	714,40845	1418,0930
9,2	-4824,0587	-1860,5365	551,49275	1481,76105
9,3	-5426,5154	-2372,94855	340,3091	1526,7834
9,4	-6042,3167	-2946,2708	74,8875	1548,0229
9,5	-6660,9594	-3581,47555	-250,99585	1539,7419
9,6	-7269,3664	-4278,16925	-643,4861	1495,5985
9,7	-7851,7063	-5034,47135	-1108,61825	1408,6174
9,8	-8389,5687	-5847,0360	-1652,2517	1271,2663
9,9	-8860,9431	-6710,20695	-2279,7354	1075,3680
10,0	-9240,8733	-7616,14615	-2995,70945	812,3636

Розрахунок балки починають із визначення початкових параметрів, виходячи з граничних умов, тобто умов закріплення лівого і правого кінців балки (рис. 7.9).

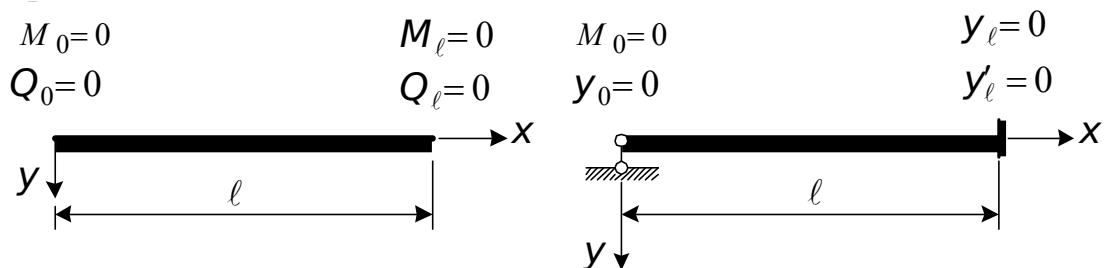


Рис. 7.9. Граничні умови балок

Як видно з рис. 7.9, два початкових параметри знаходяться відразу з умов закріплення балки на лівому кінці. Умови для визначення двох інших початкових параметрів записані на протилежному кінці балки, тобто при $x = l$. Вони показують, які рівняння треба скласти на основі залежностей (7.24) – (7.27), щоб визначити ці параметри.

У табл. 7.4 наведені готові вирази, за допомогою яких можна знайти початкові параметри для різних граничних умов і різних навантажень. Коли початкові параметри визначені, далі, використовуючи вирази (7.24) – (7.27), обчислюємо будь-які фактори в будь-яких перерізах балок.

У кінці підрозділа зробимо запис рівнянь (7.24) – (7.27) для балки, навантаженої зосередженим моментним і рівномірно розподіленим навантаженнями (рис. 7.10).

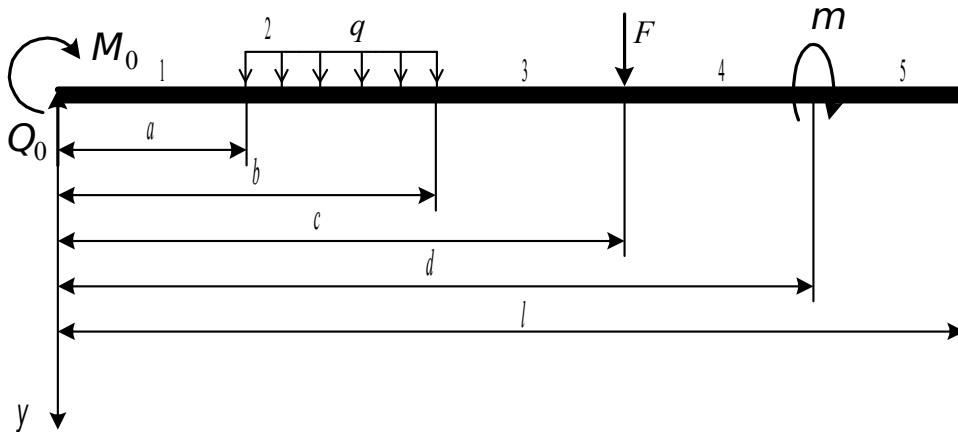
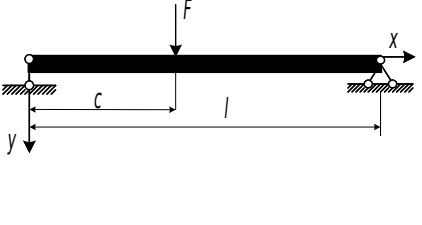
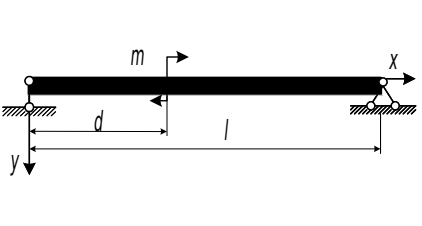
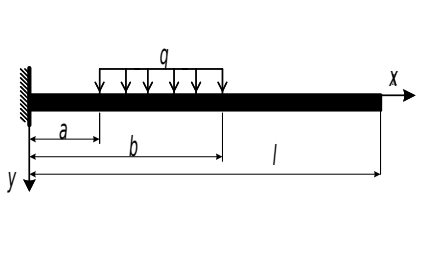
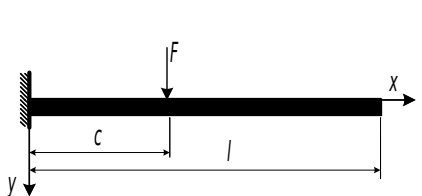


Рис. 7.10. Схема навантаження балки

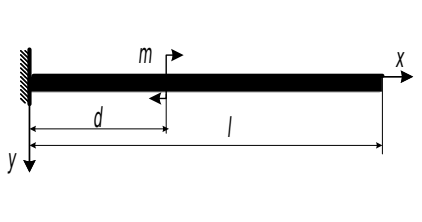
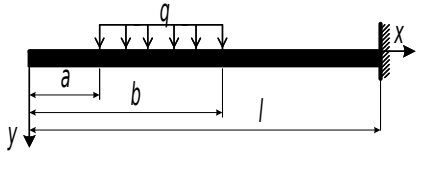
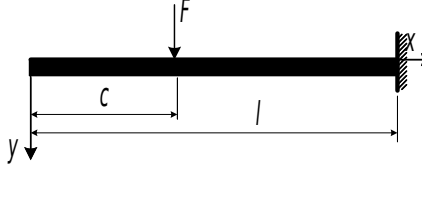
Таблиця 7.4

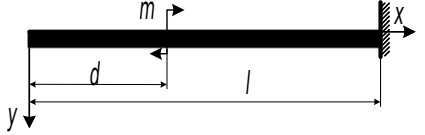
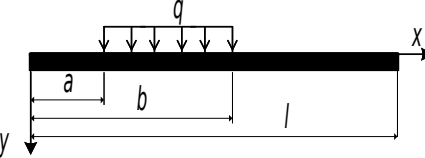
Знаходження початкових параметрів

№ № ПП	Схема балки	Значення початкових параметрів
1	2	3
1		$Q(0) = \frac{q Y_{2l} (Y_{3(\ell-a)} - Y_{3(\ell-b)}) - Y_{4l} (Y_{1(\ell-a)} - Y_{1(\ell-b)})}{Y_{2l}^2 + 4 Y_{4l}^2}$ $y'(0) = \frac{q}{4s^3 E J} \times$ $\times \frac{Y_{2l} (Y_{1(\ell-a)} - Y_{1(\ell-b)}) + 4 Y_{4l} (Y_{3(\ell-a)} - Y_{3(\ell-b)})}{Y_{2l}^2 + 4 Y_{4l}^2}$

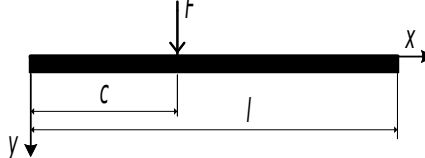
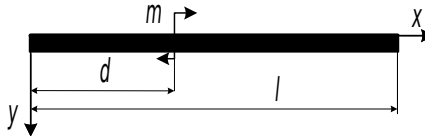
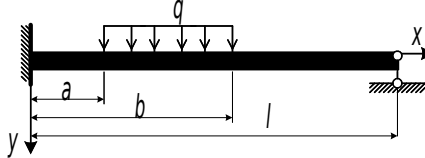
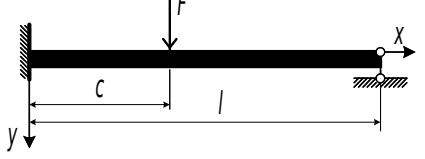
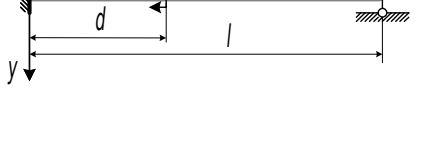
2		$Q(0) = F \frac{Y_{2l} Y_{2(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{Y_{4l} Y_{2(l-c)} - Y_{2l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
3		$Q(0) = -m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{3(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{m}{s EJ} \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
4		$Q(0) =$ $= \frac{q}{s} \cdot \frac{Y_{1l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) + 4Y_{4l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$ $M(0) =$ $= \frac{q}{s^2} \cdot \frac{Y_{1l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)}) - Y_{2l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$
5		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l} Y_{1(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{2(l-c)} - Y_{2l} Y_{1(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$

Продовження табл. 7.4

1	2	3
6		$Q(0) = 4m \cdot s \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = -m \cdot \frac{Y_{1l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{2l} Y_{4(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$
7		$y'(0) = \frac{q}{s^3 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{4l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) - Y_{1l} (Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$ $y(0) = \frac{q}{4s^4 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{1l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l} (Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$
8		$y'(0) = -\frac{F}{s^2 EJ} \frac{Y_{1l} Y_{3(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}},$ $y(0) = -\frac{F}{s^3 EJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-c)} - Y_{2l} Y_{3(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$

9		$y'(0) = \frac{m}{sEJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{2(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{3(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}},$ $y(0) = \frac{m}{s^2EJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{3(l-d)} - Y_{2l} Y_{2(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$
10		$y'(0) = \frac{q}{4s^3EJ} \times$ $\times \frac{Y_{3l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{2l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$ $y(0) = -\frac{q}{4s^4EJ} \times$ $\times \frac{Y_{4l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{3l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$

Продовження табл. 7.4

1	2	3
11		$y'(0) = \frac{F}{4s^2EJ} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-c)} - Y_{2l} Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{F}{4s^3EJ} \cdot \frac{Y_{4l} Y_{1(l-c)} - Y_{3l} Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
12		$y'(0) = \frac{m}{4sEJ} \cdot \frac{Y_{2l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{3l} Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{m}{4s^2EJ} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
13		$Q(0) = -\frac{q}{4s} \times$ $\times \frac{Y_{1l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$ $M(0) = \frac{q}{4s^2} \times$ $\times \frac{Y_{2l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$
14		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-c)} - Y_{3l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}},$ $M(0) = -\frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{2l} Y_{4(l-c)} - Y_{4l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$
15		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-d)} - Y_{1l} Y_{3(l-d)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}},$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$

Продовження табл. 7.4

1	2	3
16		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times \frac{Y_{1l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$ $y_0 = \frac{q}{4s^3EJ} \times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
17		$Q(0) = F \frac{Y_{2l}Y_{3(l-c)} - Y_{1l}Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2EJ} \frac{Y_{4l}Y_{3(l-c)} - Y_{3l}Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
18		$Q(0) = s \cdot m \cdot \frac{Y_{1l}Y_{3(l-d)} - Y_{2l}Y_{2(l-d)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{m}{sEJ} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{3(l-d)} - Y_{4l}Y_{2(l-d)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
19		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times \frac{Y_{2l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = -\frac{q}{4s^2} \times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$
20		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{3l}Y_{3(l-c)} - Y_{2l}Y_{4(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}},$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{4(l-c)} - Y_{4l}Y_{3(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}},$

Продовження табл. 7.4

1	2	3
21		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l}Y_{3(l-d)} - Y_{3l}Y_{2(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}},$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{4l}Y_{2(l-d)} - Y_{3l}Y_{3(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$

$$y_x = y_0 Y_1 + \frac{y'_0}{s} Y_2 - \frac{M_0}{s^2EJ} Y_3 - \frac{Q_0}{s^3EJ} Y_4 \Big|_1 - \frac{q}{4s^4EJ} [Y_{1(x-a)} - 1] \Big|_2 +$$

$$+ \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1(x-b)} - 1] \Big|_3 + \frac{F}{s^3 EJ} Y_{4(x-c)} \Big|_4 - \frac{m}{s^2 EJ} Y_{3(x-d)} \Big|_5 . \quad (7.28)$$

$$y'_x = -4sy_0 Y_4 + y'_0 Y_1 - \frac{M_0}{s EJ} Y_2 - \frac{Q_0}{s^2 EJ} Y_3 \Big|_1 + \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4(x-a)} \Big|_2 - \\ - \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4(x-b)} \Big|_3 + \frac{F}{s^2 EJ} Y_{3(x-c)} \Big|_4 - \frac{m}{s EJ} Y_{2(x-d)} \Big|_5 ; \quad (7.29)$$

$$M_x = 4s^2 EJ y_0 Y_3 + 4s EJ y'_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{s} Y_2 \Big|_1 - \frac{q}{s^2} Y_{3(x-a)} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{s^2} Y_{3(x-b)} \Big|_3 - \frac{F}{s} Y_{2(x-c)} \Big|_4 + m Y_{1(x-d)} \Big|_5 ; \quad (7.30)$$

$$Q_x = 4s^3 EJ y_0 Y_2 + 4s^2 EJ y'_0 Y_3 - 4s M_0 Y_4 + Q_0 Y_1 \Big|_1 - \frac{q}{s} Y_{2(x-a)} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{s} Y_{2(x-b)} \Big|_3 - F Y_{1(x-c)} \Big|_4 - 4sm Y_{4(x-d)} \Big|_5 . \quad (7.31)$$

7.3.1. Приклад розрахунку балки на пружній (вінклерівській) основі

Для заданої балки (рис. 7.11) потрібно побудувати епюри M і Q і епюру прогинів \mathcal{U} при таких вихідних даних:

$$E = 1 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2 ; \\ J = 0,256 \text{ м}^4 ; \\ k = 3,2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^3 ; \\ b = 1,25 \text{ м} .$$

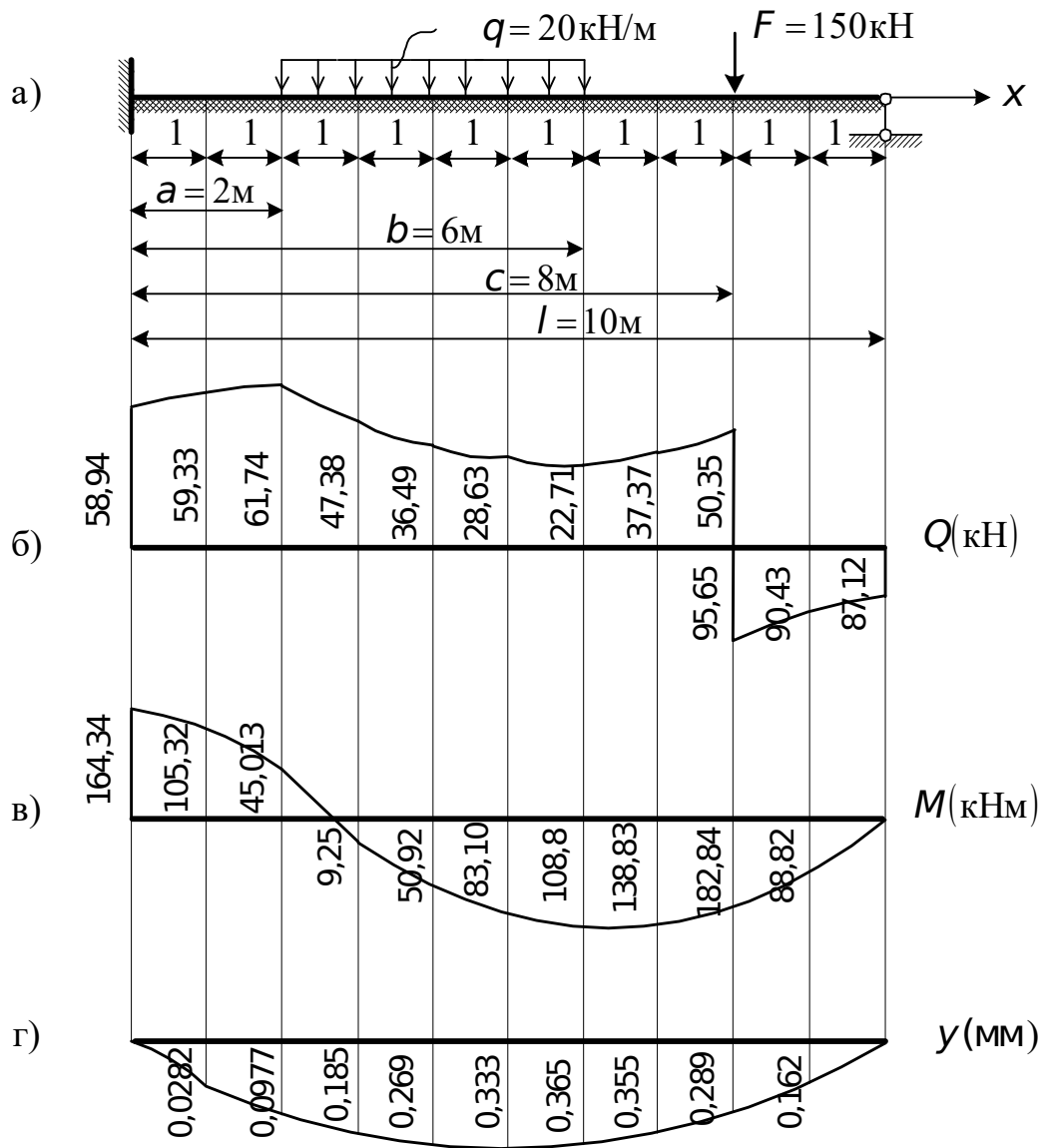


Рис. 7.11. Розрахункова схема балки (а) і епюри Q (б), M (в), y (г)

Обчислюємо характеристичне число

$$s = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{3,2 \cdot 10^4 \cdot 1,25}{4 \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,256}} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

За табл. 7.3 визначаємо значення функцій:

$$sl = 0,25 \cdot 10 = 2,5:$$

$$Y_{1sl} = -4,9128, \quad Y_{2sl} = -0,5885, \quad Y_{3sl} = 1,81045, \quad Y_{4sl} = 2,12925;$$

$$s(l-a) = 0,25(10-2) = 2:$$

$$Y_{1s(l-a)} = -1,5656, \quad Y_{2s(l-a)} = 0,95575, \quad Y_{3s(l-a)} = 1,64895,$$

$$Y_{4s(l-a)} = 1,2325;$$

$$s(\ell - b) = 0,25(10 - 6) = 1 :$$

$$Y_{1s(\ell-b)} = 0,8337, \quad Y_{2s(\ell-b)} = 0,96675, \quad Y_{3s(\ell-b)} = 0,49445, \\ Y_{4s(\ell-b)} = 0,1659;$$

$$s(\ell - c) = 0,25(10 - 8) = 0,5 :$$

$$Y_{1s(\ell-c)} = 0,9895, \quad Y_{2s(\ell-c)} = 0,49895, \quad Y_{3s(\ell-c)} = 0,1249, \\ Y_{4s(\ell-c)} = 0,0208.$$

Лівий край балки затиснений (рис. 7.11, а), отже

$$y_0 = 0 \quad \text{і} \quad y'_0 = 0$$

Інші два параметри Q_0 і M_0 знайдемо за формулами табл. 7.4 (схеми 13 і 14). Після обчислень:

$$Q_0 = 58,944 \text{ кН},$$

$$M_0 = -164,379 \text{ кНм}.$$

Тепер запишемо рівняння для знаходження прогинів, згинальних моментів і поперечних сил:

$$y_x = -\frac{M_0}{s^2 EJ} Y_{3sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} Y_{4sx} \Big|_1 - \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-a)} - 1] \Big|_2 + \\ + \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-b)} - 1] \Big|_3 + \frac{F}{s^3 EJ} Y_{4s(x-c)} \Big|_4 ;$$

$$M_x = M_0 Y_{1sx} + \frac{Q_0}{s} Y_{2sx} \Big|_1 - \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-a)} \Big|_2 + \\ \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-b)} \Big|_3 - \frac{F}{s} Y_{2s(x-c)} \Big|_4 ;$$

$$Q_x = -4M_0 s Y_{4sx} + Q_0 Y_{1sx} \Big|_1 - \frac{q}{s} Y_{2s(x-a)} \Big|_2 + \frac{q}{s} Y_{2s(x-b)} \Big|_3 - F Y_{1s(x-c)} \Big|_4 .$$

Результати обчислень наведені на рис. 7.11, б, в, г.

7.4. Розрахунок нескінченно довгої балки на пружній основі

У тих випадках, коли навантаження, що діє на балку, займає незначну порівнянно з довжиною балки ділянку, достатньо віддалену від її кінців, балку можна вважати нескінченно довгою. Прикладом може служити довга балка, навантажена зосередженою силою (рис. 7.12).

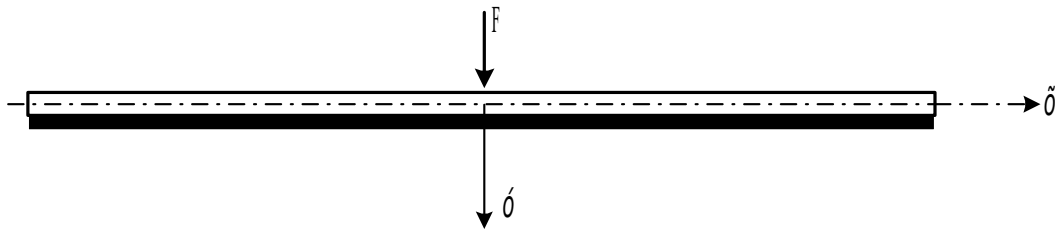


Рис. 7.12. Довга балка, навантажена зосередженою силою

У цьому випадку зігнута вісь буде симетричною відносно поперечного перерізу, проведеного по лінії дії сили. Тому будемо розглядати тільки одну її половину (рис. 7.13).



Рис. 7.13. До розрахунку нескінченно довгої балки на пружній основі

Дію відкинutoї частини заміняємо поперечною силою Q_0 і згинальним моментом M_0 . Оскільки права половина, що розглядається, вільна від навантаження, тобто $q_x = 0$, то диференціальне рівняння вигнутої осі (7.11) набуває вигляду

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = 0. \quad (7.32)$$

Розв'язок цього однорідного рівняння, як відомо (7.14), буде таким:

$$y_x = A \operatorname{ch} s x \cos s x + B \operatorname{sh} s x \cos s x + C \operatorname{ch} s x \sin s x + D \operatorname{sh} s x \sin s x. \quad (7.33)$$

Для визначення довільних постійних A , B , C , D сформулюємо граничні умови:

при $x \rightarrow \infty$ $y_\infty = 0$ і $\varphi_\infty = 0$.

Замінімо гіперболічні функції у (7.33) їх значеннями:

$$\operatorname{ch} s x = \frac{e^{s x} + e^{-s x}}{2}; \quad \operatorname{sh} s x = \frac{e^{s x} - e^{-s x}}{2}.$$

В результаті одержимо

$$y_x = \frac{e^{s x}}{2} \cos s x (A + B) + \frac{e^{s x}}{2} \sin s x (C + D) + \frac{e^{-s x}}{2} \cos s x (A - B) + \frac{e^{-s x}}{2} \sin s x (C - D). \quad (7.34)$$

Позначимо: $A + B = C_1$,
 $C + D = C_2$,

$$\begin{aligned} A - B &= C_3, \\ C - D &= C_4. \end{aligned}$$

З урахуванням позначень рівняння (7.34) набуває такого вигляду:

$$y_x = \frac{e^{sx}}{2}(C_1 \cos sx + C_2 \sin sx) + \frac{e^{-sx}}{2}(C_3 \cos sx + C_4 \sin sx). \quad (7.35)$$

При $x \rightarrow \infty$ перший доданок (7.35) необмежено зростає, а другий – обертається в нуль. Отже, щоб задовольнити граничній умові (при $x \rightarrow \infty$ $y = 0$), потрібно покласти $C_1 = C_2 = 0$.

Тоді

$$y_x = \frac{e^{-sx}}{2}(C_3 \cos sx + C_4 \sin sx). \quad (7.36)$$

Якщо продиференціювати (7.36) один, два і три рази по x , то в результаті одержимо

$$\frac{dy}{dx} = s \frac{e^{-sx}}{2}(C_4 - C_3) \cos sx - s \frac{e^{-sx}}{2}(C_3 + C_4) \sin sx, \quad (7.37)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = s^2 e^{-sx} (C_3 \sin sx - C_4 \cos sx), \quad (7.38)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = s^3 e^{-sx} (C_4 - C_3) \sin sx + s^3 e^{-sx} (C_3 + C_4) \cos sx. \quad (7.39)$$

Тепер використовуємо умову, що дотична до пружної лінії в початку координат паралельна осі абсцис, тобто

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Тоді з (7.37) одержуємо

$$C_3 = C_4. \quad (7.40)$$

З урахуванням (7.40) перепишемо вирази (7.37), (7.38), (7.39):

$$\frac{dy}{dx} = -s e^{-sx} C_3 \sin sx, \quad (7.41)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = s^2 e^{-sx} C_3 (\sin sx - \cos sx), \quad (7.42)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2s^3 e^{-sx} C_3 \cos sx. \quad (7.43)$$

Для визначення постійної C_3 скористаємося такою умовою:

$$\text{при } x = 0 \quad Q = -\frac{F}{2}.$$

З огляду на те, що (6.38)

$$EJ y_x''' = -Q,$$

із (7.43) знайдемо

$$C_3 = \frac{F}{4s^3 EJ}. \quad (7.44)$$

З урахуванням (7.44) із (7.36) одержуємо

$$y_x = \frac{F}{8s^3 EJ} e^{-sx} (\cos sx + \sin sx). \quad (7.45)$$

Аналогічно, із (7.41) кут повороту

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_x = -\frac{F}{4s^2EJ} e^{-sx} \sin sx, \quad (7.46)$$

Згинальний момент одержуємо із (7.42) з урахуванням (7.44) і (6.37):

$$M_x = -\frac{F}{4s} e^{-sx} (\sin sx - \cos sx). \quad (7.47)$$

І нарешті з (7.43) одержимо

$$Q_x = -\frac{F}{2} e^{-sx} \cos sx. \quad (7.48)$$

За отриманими формулами (7.45), (7.47) і (7.48) побудуємо епюри y , M і Q (рис. 7.14).

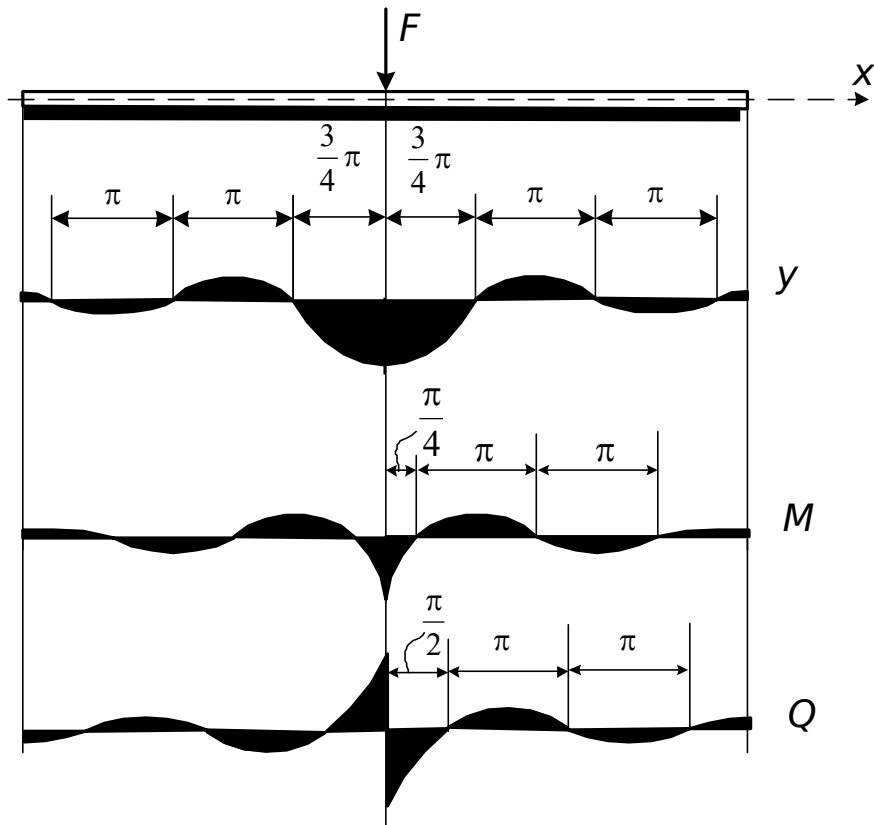


Рис. 7.14. Дія зосередженої сили на нескінченну балку

Розділ 8 КРУЧЕННЯ

8.1. Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом

Кручення виникає, коли на стержень діють пари сил, перпендикулярні до його осі. Розглянемо круглий стержень AB , що на однім кінці зашкелений у площині MN , до іншого кінця прикладена пара сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі стержня (рис. 8.1).

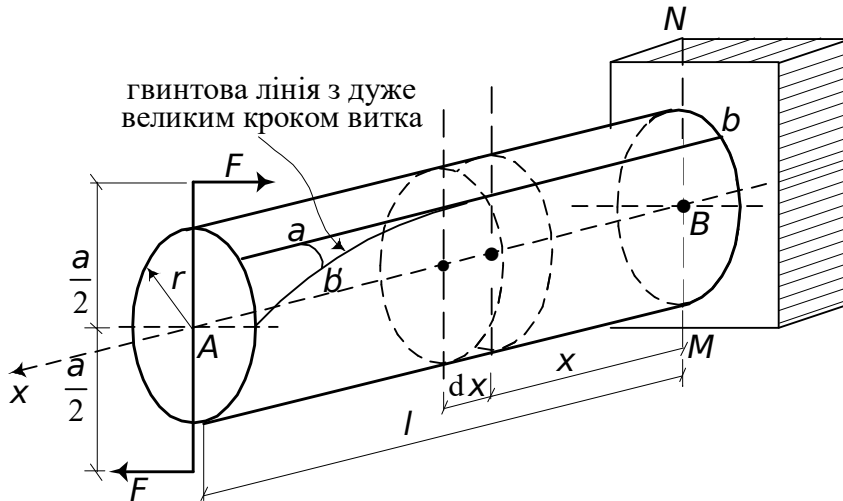


Рис. 8.1. Схема круглого стержня, що сприймає кручення

Ця пара сил створює момент $M_K = Fa$, що скручує стержень. Нагадаємо правило знаків для моменту (див. п. 1.7.2): при погляді на торцевий переріз елемента стержня dx з боку його зовнішньої нормалі бачимо, що додатний момент M_K спрямований по ходу годинникової стрілки. Кут повороту $\varphi > 0$, якщо при погляді на переріз у додатному напрямку осі X бачимо поворот проти ходу годинникової стрілки.

Досвід показує, що при закручуванні на невеликий кут у межах пропорційності матеріалу діаметр стержня і його довжина не змінюються, вісь залишається прямою, поперечний переріз плоским. Зміна форми відбивається твірними ab стержня, що із прямих ліній стають гвинтовими bb' (рис. 8.1). Це вказує на те, що при крученні відбувається зсув поперечних перерізів стержня. Іншими словами, кожний поперечний переріз повертається навколо осі X як жорсткий тонкий диск.

З використанням вказаних допущень на рис. 8.2 зображена деформація елемента стержня довжиною dx радіуса ρ , виділеного зі стержня радіуса r , що закручується, при довільному значенні X (рис. 8.1).

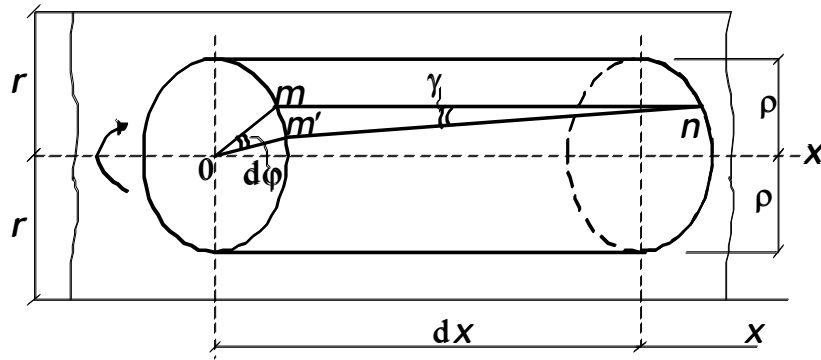


Рис. 8.2. Деформація елемента стержня при крученні

На рис. 8.2 умовно прийнято, що правий переріз елемента dx залишається нерухомим, а лівий повертається на кут $d\varphi$, утворюваний за рахунок закручування на довжині dx .

Один із радіусів перерізу Om повертається разом із перерізом на кут $d\varphi$, а твірна mn довільної точки m цього радіуса переходить у положення nm' , обертаючись на кут γ – кут зсуву в цій точці. Тут mm' – різниця абсолютних переміщень для двох точок, що лежать на одній твірній. Відносний зсув

$$\gamma = \frac{mm'}{mn}.$$

З огляду на те, що $mm' = \rho d\varphi$, $mn = dx$, знайдемо

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.1)$$

Отримана формула (8.1) показує, що для кожної точки перерізу відносний зсув пропорційний відстані цієї точки від осі стержня.

Переходимо до фізичного боку задачі. На підставі закону Гука при зсуві (див. п. 1.8.3)

$$\tau = G\gamma$$

одержимо

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.2)$$

де τ_ρ – напруження для довільного елемента усередині перерізу; ρ – відстань від цього елемента до центра перерізу; G (модуль зсуву) і $\frac{d\varphi}{dx}$ (кут повороту) – константи для всіх точок перерізу.

Приступимо до розгляду статичного боку задачі. Сума усіх внутрішніх сил у кожному поперечному перерізі повинна скласти момент, що дорівнює моменту, який скручує аналізований стержень у цьому перерізі. Закон розподілу напружень τ відповідно до формули (8.2) уздовж довільного радіуса в перерізі зображений на рис. 8.3.

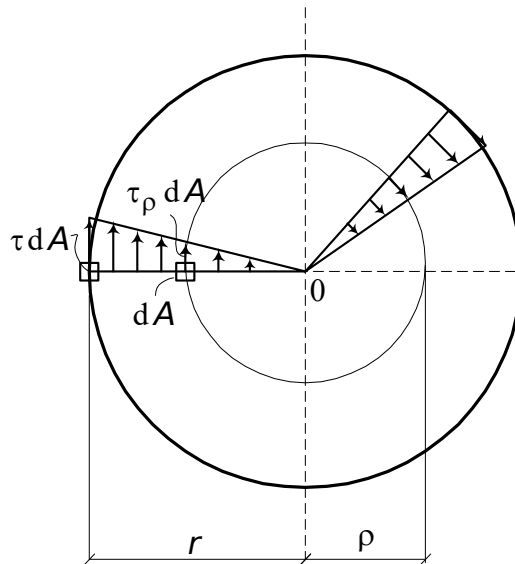


Рис. 8.3. Розподіл дотичних напружень у перерізі при крученні

Як було зазначено вище, напруження τ в перерізі (рис. 8.3) зводяться до крутного моменту M_K , тому

$$M_K = \int_A \tau_\rho \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (8.3)$$

Інтеграл по площі поперечного перерізу

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

являє собою полярний момент інерції перерізу (див. п. 2.3).

З урахуванням цього з (8.3) знаходимо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GJ_\rho}. \quad (8.4)$$

Співвідношення (8.4) далі використовується для обчислення кутів закручування. Добуток GJ_ρ називається жорсткістю перерізу при крученні ($\text{Н} \cdot \text{см}^2$).

Підставивши в цю формулу замість $\frac{d\varphi}{dx}$ вираз (див. формулу (8.2))

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau_\rho}{G\rho},$$

одержимо

$$\tau_\rho = \frac{M_K \rho}{J_\rho}. \quad (8.5)$$

Ця формула дає можливість визначити дотичні напруження при крученні в довільній точці поперечного перерізу круглого стержня.

При $\rho = r$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K r}{J_\rho}. \quad (8.6)$$

Запишемо формулу (8.6) у перетвореному вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}, \quad (8.7)$$

де $W_\rho = \frac{J_\rho}{r}$ – геометрична характеристика, яка називається моментом опору перерізу при крученні, м^3 . Для суцільного круглого перерізу

$$W_\rho = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Для порожнистого товстостінного циліндра (рис. 8.4, а)

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

а для тонкостінного кільцевого перерізу (рис. 8.4, б)

$$W_\rho = \frac{\pi d^2 \delta}{2}.$$

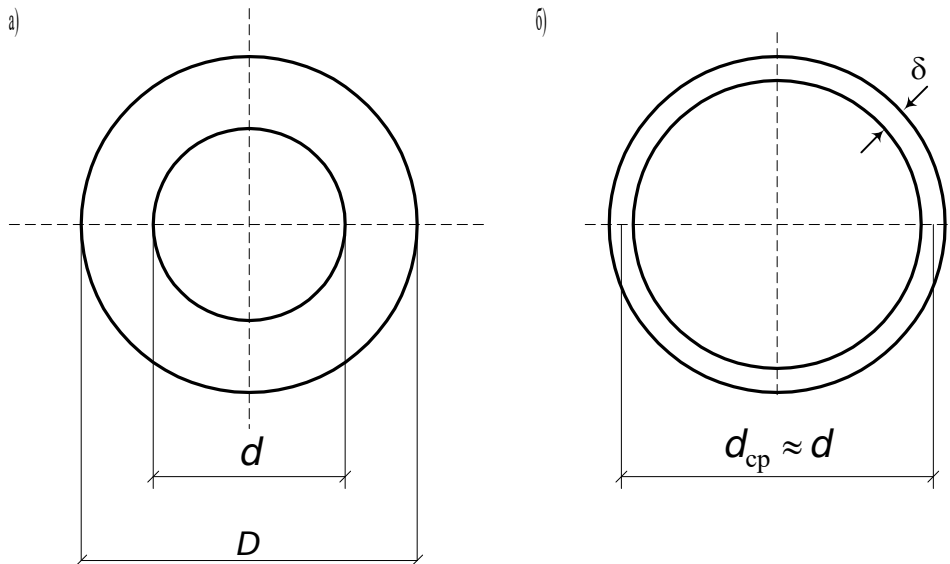


Рис. 8.4. Типи перерізів круглого стержня:
а – порожнистий товстостінний циліндр; б – тонкостінний кільцевий переріз ($\delta \ll d$)

Забезпечення міцності при крученні елементів конструкцій круглого перерізу провадиться за методом допустимих напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (8.8)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження матеріалу, або за методом граничних станів:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq R, \quad (8.9)$$

де R – розрахунковий опір матеріалу стержня при зсуві, а крутний момент M_K визначається за розрахунковими навантаженнями з урахуванням можливих перевантажень.

8.1.1. Визначення кутів закручування

Для визначення кутів закручування скористаємося рівнянням (8.4), із котрого, інтегруючи обидві частини рівності, знайдемо

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi = \int_0^x \frac{M_K}{GJ_\rho} dx + \varphi_0, \quad (8.10)$$

де φ_0 – кут повороту, обумовлений граничними умовами.

В окремому випадку при $M_K = \text{const}$, $GJ_\rho = \text{const}$ одержуємо

$$\varphi = \frac{M_K x}{GJ_\rho} + \varphi_0. \quad (8.11)$$

Якщо початок координат розташовано так, як на рис. 8.1, тобто в точці B , то

$$\text{при } x=0 \quad \varphi=0, \varphi_0=0;$$

при розташуванні початку координат у точці A

$$\varphi_0 = -\frac{M_K l}{GJ_\rho}.$$

Роздивимося приклад використання формули (8.11). Нехай потрібно побудувати епюру кутів закручування для вала, показаного на рис. 8.5, а. Попередньо побудуємо епюру крутних моментів (рис. 8.5, б).

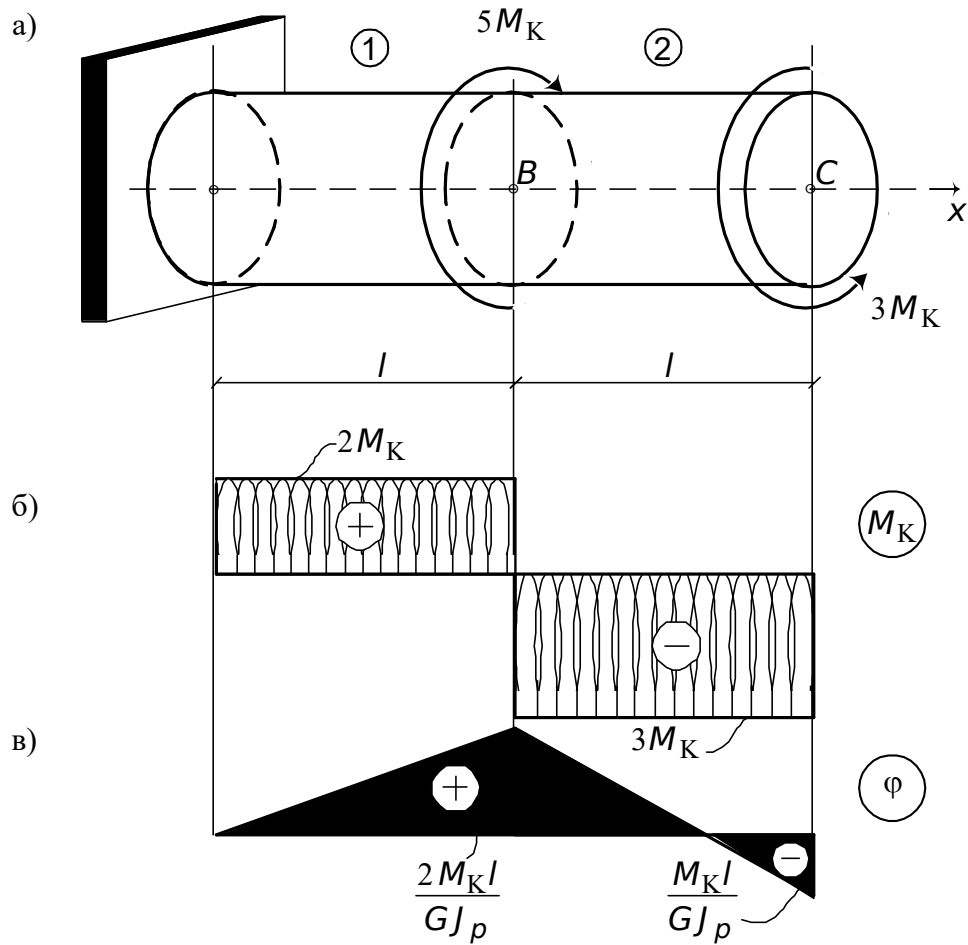


Рис. 8.5. Схема закручування стержня та епюри M_K і φ

Запишемо формулу (8.11) для визначення кутів закручування вала на першій і другій ділянках:

$$\varphi_1 = \frac{2M_K x}{GJ_p} + \varphi_{01}, \quad l \geq x \geq 0; \quad \varphi_2 = -\frac{3M_K x}{GJ_p} + \varphi_{02}, \quad 2l \geq x \geq l.$$

Кут повороту в точці A (защемленні) дорівнює нулю. Отже,

$$\text{при } x=0 \quad \varphi_1=0,$$

звідси

$$\varphi_{01} = 0.$$

Кут повороту φ_{02} знайдемо з умови безперервності переміщень, тобто відсутності розірвань функції φ на межі ділянок AB і BC (рис. 8.5, а).

На цій підставі маємо

$$\text{при } x=l \quad \varphi_1 = \varphi_2: \quad \frac{2M_K l}{GJ_\rho} = -\frac{3M_K l}{GJ_\rho} + \varphi_{02}.$$

Звідси

$$\varphi_{02} = \frac{5M_K l}{GJ_\rho}.$$

Тепер знайдемо ординати кутів закручування і побудуємо епюру φ (рис. 8.5, в):

$$\varphi_{01} = \varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \frac{2M_K l}{GJ_\rho};$$

$$\varphi_C = -\frac{6M_K l}{GJ_\rho} + \frac{5M_K l}{GJ_\rho} = -\frac{M_K l}{GJ_\rho}.$$

Аналогічно провадиться розрахунок і при більш складному навантаженні і більшій кількості ділянок.

Іноді при розрахунках на кручення потрібно виконати умову жорсткості, що обмежує кут закручування. За цією умовою кут закручування на одиницю довжини вала (погонний кут закручування) не повинний перевищувати величину $[\varphi]$, що задається технічними умовами, тобто

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K}{GJ_\rho} \leq [\varphi]. \quad (8.12)$$

З двох діаметрів вала, отриманих з умови міцності (8.8) або (8.9) і з умови жорсткості (8.12), приймається більше значення.

8.1.2. Напруження в поздовжніх і похилих перерізах, що проходять через вісь стержня

У поперечних перерізах круглого стержня виникають тільки дотичні напруження, що лежать у площині поперечного перерізу і спрямовані перпендикулярно до відповідних радіусів (див. рис. 8.3). За законом парності (див. п. 1.8), дотичні напруження виникають також у перпендикулярній площині (рис. 8.6). Ці напруження паралельні осі стержня. Звідси випливає, що при достатньо великих дотичних напруженнях у стержні з крихкого матеріалу, що слабо опирається зсуву, може з'явитися тріщина і початися руйнування не тільки по поперечному перерізу, але і по поздовжньому.

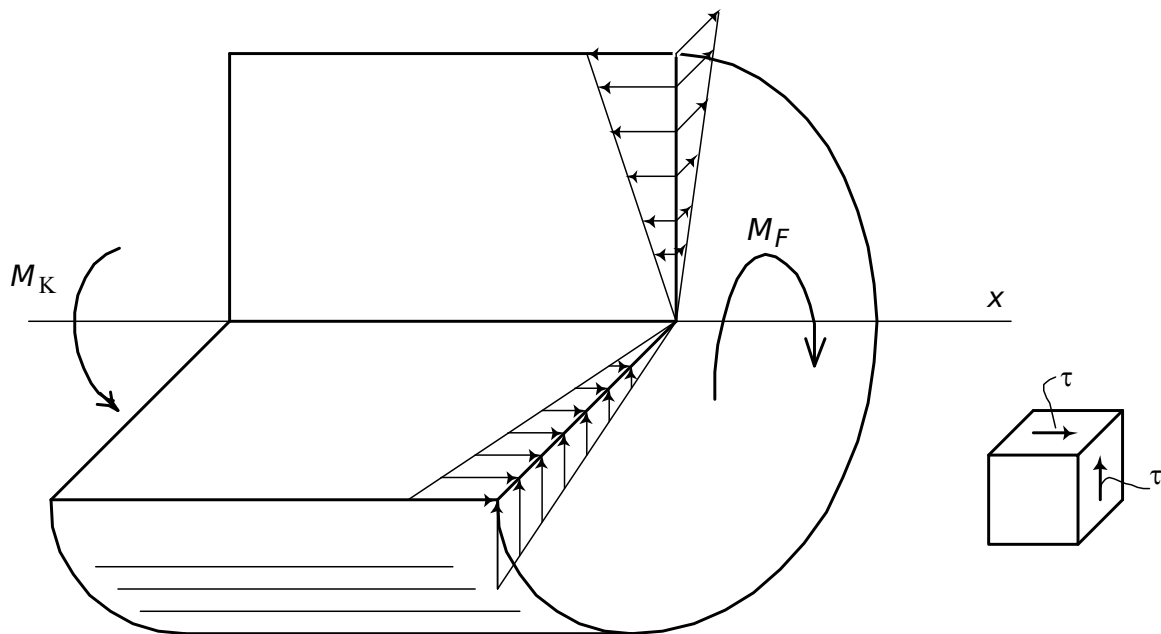


Рис. 8.6. Розподіл дотичних напружень у перерізах круглого стержня

Розглянемо тепер напруження по площадках, похилих до осі стержня (рис. 8.7). Виділений елемент зазнає напруженого стану чистого зсуву. Тому на похилих площадках, крім дотичних напружень, виникають і нормальні (див. п. 1.8.3):

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha ;$$

при

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\sigma_{\alpha} = \tau \sin 2\alpha .$$

Очевидно, що найбільші головні напруження будуть при $\sin 2\alpha = \pm 1$, тобто при $\alpha = 45^\circ$ і $\alpha = 135^\circ$:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau.$$

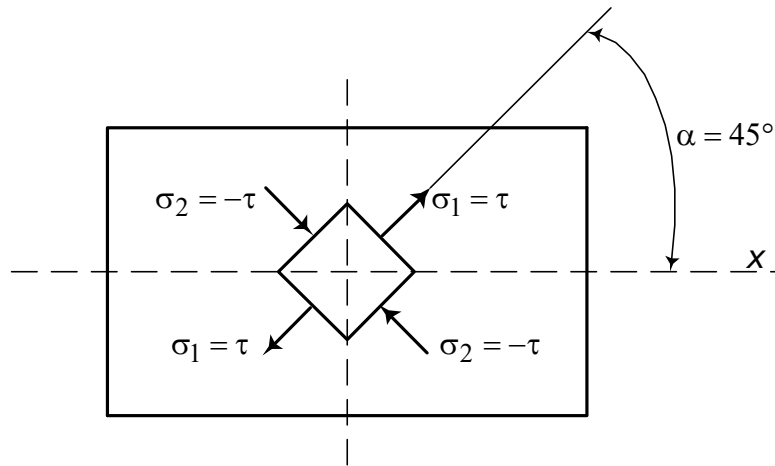


Рис. 8.7. До визначення напружень на похилих площадках стержня, що скручується

Стан чистого зсуву еквівалентний розтягання в одному напрямку і рівному йому стисканню в перпендикулярному напрямку. Прямокутний елемент із сторонами під кутом 45° до осі, вирізаний із зовнішнього прошарку скручуваного стержня, буде зазнавати напруження, показані на рис. 8.7.

Отримані результати можуть бути використані також при визначенні дотичних напружень дослідним шляхом. Деформації ε_1 і ε_2 на підставі закону Гука при плоскому напруженому стані (див. п. 4.1), а також з урахуванням попередніх викладень дорівнюють

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu).$$

Звідси можна виразити дотичні напруження через деформації, отримані в експерименті:

$$\tau = \frac{E \varepsilon_1}{1 + \nu} = -\frac{E \varepsilon_2}{1 + \nu}.$$

8.1.3. Статично невизначні задачі при крученні

Як відомо, задачу, у якій для визначення опорних реакцій і внутрішніх зусиль потрібно, крім рівнянь рівноваги, залучати умови деформації, називають статично невизначною (див. п. 3.5). Розглянемо специфіку розв'язання таких задач при крученні.

Нехай заданий стержень, що має нерухомі закріплення (защемлення) двох торцевих перерізів (рис. 8.8, а).

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum m_x = M_K - M_A - M_B = 0.$$

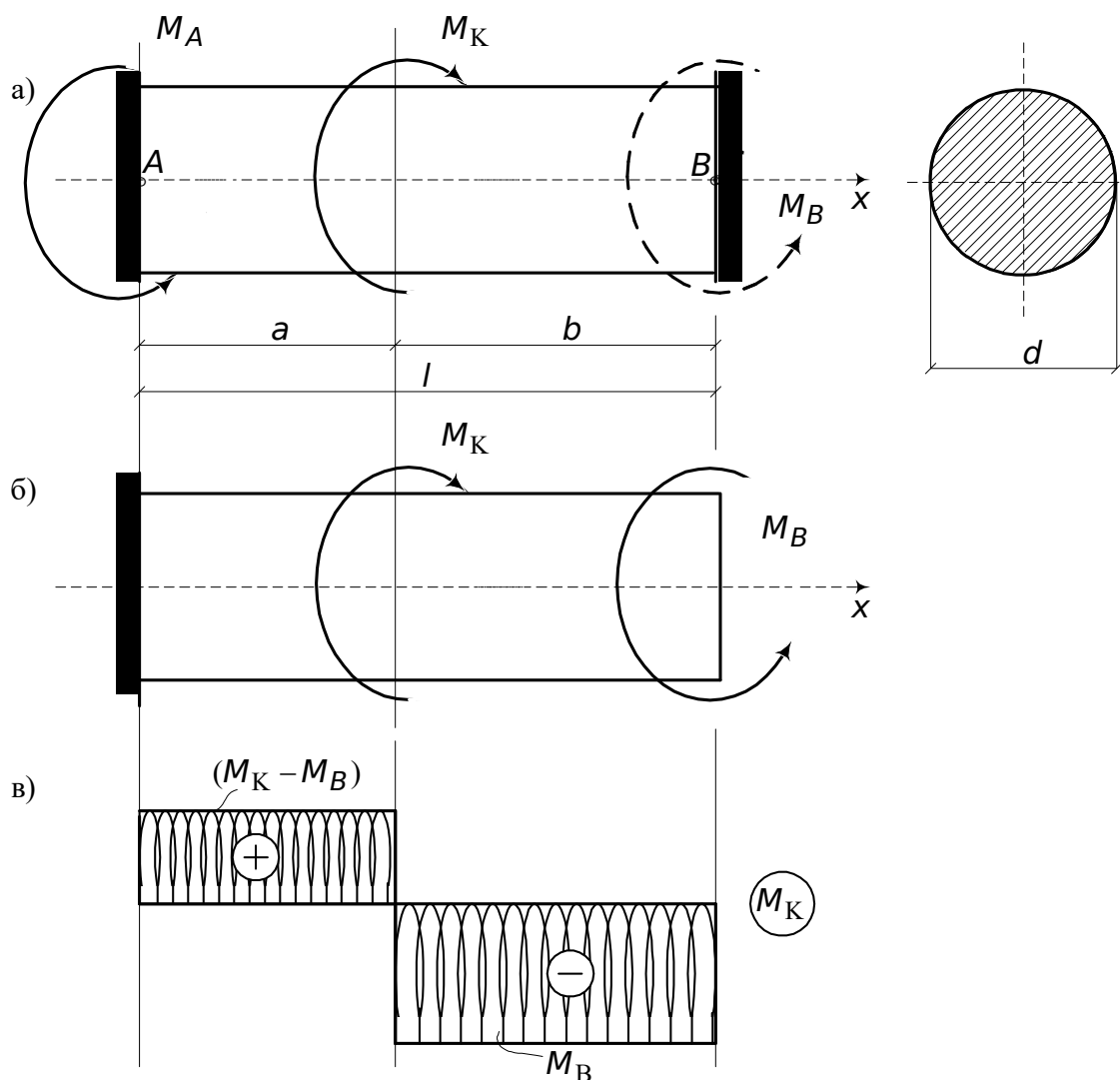


Рис. 8.8. До визначення крутих моментів і кутів закручування в статично невизначному стержні (валі)

Цього рівняння недостатньо для визначення двох невідомих опорних моментів.

Для забезпечення рівноваги вала достатньо мати одне защемлення, тому задача статично невизначна.

Складемо відсутні умови деформацій, відкинувши одне защемлення (наприклад, праве) і вимагаючи, щоб у цій новій, статично визначній, розрахунковій схемі дотримувалася умова відсутності кута закручування у відкинутому защемленні: $\varphi_B = 0$ (рис. 8.8, б). Для складання виразу φ_B застосуємо принцип суперпозиції (незалежності дії сил). З використанням формули (8.11) складаємо вираз для φ_B у вигляді

$$\varphi_B = -\frac{M_B l}{GJ_\rho} + \frac{M_K a}{GJ_\rho} = 0.$$

Звідси визначаємо невідомий момент M_B :

$$M_B = \frac{M_K a}{l}$$

і з рівняння рівноваги крутний момент

$$M_A = M_K \frac{b}{l}.$$

Далі знайдений опорний момент віднесемо до зовнішнього навантаження в прийнятій розрахунковій схемі (рис. 8.8, б) і зробимо розрахунок, як це виконано в п. 8.1.1 (рис. 8.8, в).

8.1.4. Потенційна енергія при крученні круглого стержня

Будемо вважати, що матеріал стержня при крученні працює при напруженнях, що не перевищують границю пружності. У цьому випадку робота зовнішніх сил, що витрачається на кручення стержня, дорівнює кількості потенційної енергії, накопиченої у стержні. Надалі нам будуть потрібні формули, що дозволяють обчислити цю енергію при крученні.

Уявимо собі відрізок вала довжиною dx , що одержав кут закручування $d\varphi$ від моменту M_K . Момент пружно зростає пропорційно кутові $d\varphi$ (рис. 8.9).

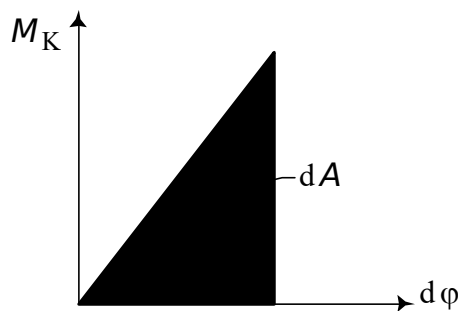


Рис. 8.9. До визначення потенційної енергії деформації при крученні

Тому елементарна робота цього моменту дорівнює площі заштрихованого трикутника:

$$dA = \frac{1}{2} M_K d\varphi.$$

Енергія, накопичена в елементах стержня,

$$dU = dA,$$

або з урахуванням (8.4)

$$dU = \frac{1}{2} M_K d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_K^2}{GJ_\rho} dx. \quad (8.13)$$

Інтегруючи (8.13) по довжині стержня, одержимо

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_K^2}{GJ_\rho} dx. \quad (8.14)$$

Якщо $GJ_\rho = \text{const}$ і крутний момент M_K постійний за довжиною стержня, то вираз для енергії деформування набуває вигляду

$$U = \frac{M_K^2 l}{2GJ_\rho}. \quad (8.15)$$

Щоб одержати вираз питомої потенційної енергії, розділимо (8.15) на об'єм зразка:

$$U^* = \frac{M_K^2 l \cdot 32}{2G\pi d^4} \cdot \frac{4}{\pi d^2 \cdot l} = \frac{64M_K^2}{G\pi^2 d^6}. \quad (8.16)$$

8.1.5. Розрахунок циліндричних пружин з малим кроком витка

Пружини дуже поширені в машинобудуванні. Розглянемо теорію розрахунку гвинтових циліндричних пружин із малим кроком витка, тобто таких, у яких кут нахилу витка α до площини, перпендикулярної до осі пружини (рис. 8.10, а), малий, і тому можна прийняти, що витки лежать у цій площині.

На рис. 8.10, а показана пружина, що розтягується силою F .

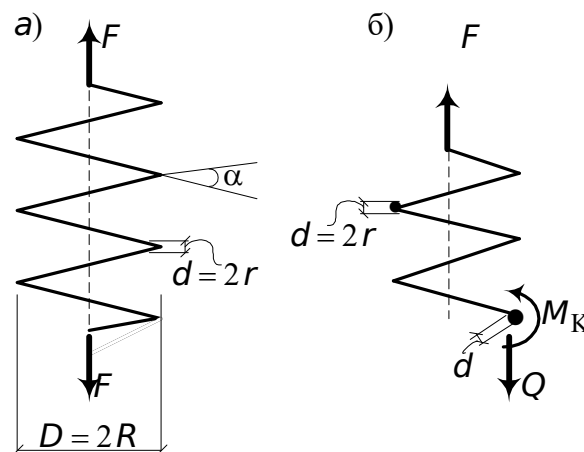


Рис. 8.10. До розрахунку циліндричних пружин із малим кроком витка

Покажемо, що пруток, із якого звита циліндрична пружина, при малому куті нахилу витків працює, головним чином, на кручення. Для цього відінемо частину пружини перерізом, що проходить через її вісь (рис. 8.10, б). Відкидаючи нижню частину пружини, замінимо її вплив поперечною силою $Q = F$ і крутним моментом $M_K = FR$. Якщо знехтувати кутом повороту витка α , поклавши $\alpha = 0$, то переріз витка можна вважати нормальним до осі витка. Тоді Q буде поперечною силою, що викликає деформацію зрізу, а M_K – крутним моментом у перерізі витка. Оцінімо значення напружень, що ними викликаються:

– від крутного моменту

$$\tau_1 = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{R \cdot F \cdot 2}{\pi r^3} = \frac{2FR}{\pi r^3}, \quad (8.17)$$

де R – радіус навивки пружини; r – радіус перерізу прутка;
 τ_1 – від зрізу

$$\tau_2 = \frac{Q}{A} = \frac{F}{\pi r^2}. \quad (8.18)$$

Найбільші напруження виникають у точці K витків, де напруження τ_1 і τ_2 складаються (рис. 8.11).

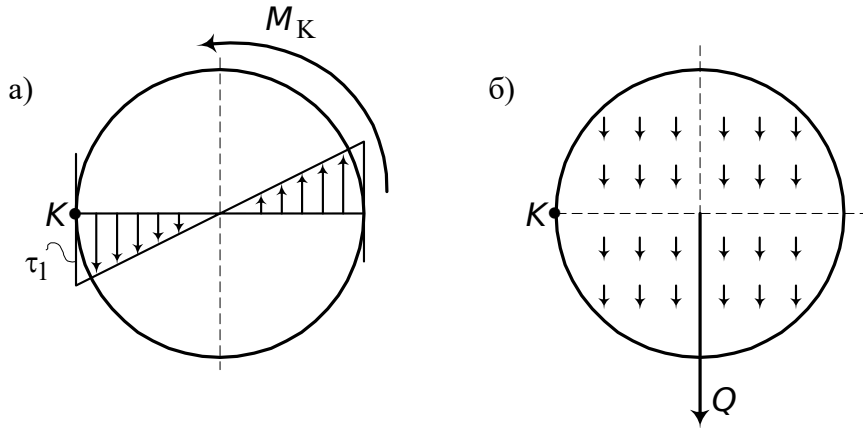


Рис. 8.11. Дотичні напруження в перерізі прутка пружини від кручення і зрізу

Складаючи (8.17) і (8.18), одержимо

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{2FR}{\pi r^3}(1 + \beta), \quad (8.19)$$

де $\beta = \frac{r}{2R}$.

Оскільки величина β дуже мала (наприклад, при $R = 10r$ $\beta = 0,05$), то головну роль у деформації пружини будуть відігравати деформації кручення. Тому в багатьох випадках вважають $\beta = 0$ і розрахункові напруження в пружині визначають тільки за формулою (8.17).

Визначимо деформацію пружини. Робота сили F на переміщеннях пружини λ дорівнює (див. п. 8.1.4)

$$A = \frac{1}{2} F \lambda.$$

Потенційна енергія в пружині від кручення визначається за формулою (8.15), де $l = 2\pi R \cdot n$ – довжина дроту, n – число витків пружини.

Підставляючи вказані величини у формулу (8.15), а також замінюючи $M_K = FR$, знайдемо

$$U = \frac{\pi R^3 n F^2}{G J_\rho}. \quad (8.20)$$

Тепер, прирівнюючи роботу A і потенційну енергію U (8.20) з огляду на те, що $J_\rho = \frac{\pi r^4}{2}$, одержимо

$$\lambda = \frac{4FR^3n}{Gr^4}. \quad (8.21)$$

Покладаючи в (8.21) $\lambda = 1$, знайдемо жорсткість пружини $C = F$ (сила F , що викликає подовження пружини на $\lambda = 1$):

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}. \quad (8.22)$$

8.1.6. Розрахунок на кручення круглих стержнів з урахуванням пластичних деформацій

Дотепер передбачалося, що матеріал скручуваного стержня деформується лінійно-пружно відповідно до закону Гуку. Замінімо реальну діаграму зсуву умовною – діаграмою Прандтля (рис. 8.12).

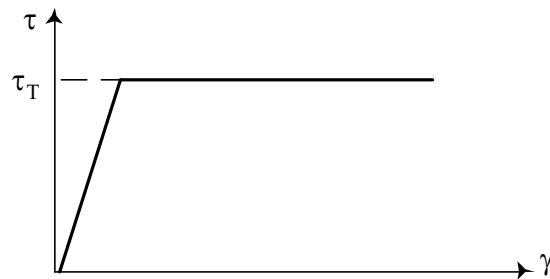


Рис. 8.12. Діаграма Прандтля при зсуві

З цієї діаграми випливає, що найбільші напруження, що виникають при зсуві, рівні границі текучості при зсуві τ_T , при цьому величина деформацій не обмежена.

З використанням показаного спрощення з'ясуємо, як буде видозмінюватися епюра дотичних напружень у перерізі при поступовому зростанні крутного моменту M_K (рис. 8.13).

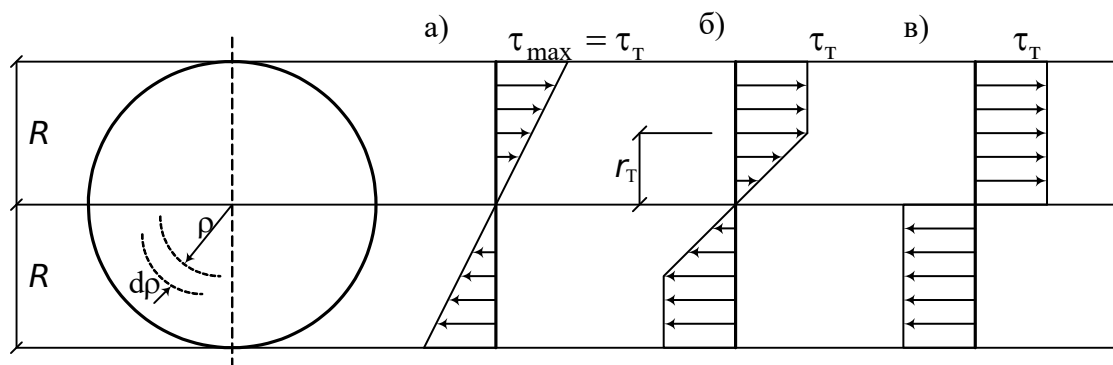


Рис. 8.13. Стадії роботи круглого стержня при крученні

У пружній стадії напруження τ розподілені уздовж діаметра вала за лінійним законом. При зростанні моменту M_K пропорційно зростають і напруження. Кінець цієї стадії (рис. 8.13, а) визначає рівність

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_p} = \tau_T.$$

Відповідний крутний момент дорівнює

$$M_T = \tau_T \cdot W_p = \tau_T \frac{\pi R^3}{2}.$$

При подальшому зростанні моменту пластична зона буде усе більше проникати усередину вала (рис. 8.13, б), а весь переріз розділиться на дві зони: пружне ядро, де $\tau \leq \tau_T$, із радіусом r_T і пластичну кільцеву зону $r_T \leq \rho \leq R$, де $\tau = \tau_T$.

Стан стержня, коли у всіх точках його поперечного перерізу виникають пластичні деформації, називають пластичним шарніром (рис. 8.13, в).

Граничний момент, що відповідає цій стадії, дорівнює

$$M_{\text{пр}} = \tau_T \int_0^{r_T} \rho dA = \tau_T \int_0^{r_T} 2\pi\rho^2 d\rho = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \tau_T. \quad (8.23)$$

При обчисленні цього моменту елементарна площа dA прийнята у вигляді тонкого кільця: $dA = 2\pi\rho d\rho$ (рис. 8.13).

Співвідношення $\frac{M_{\text{пр}}}{M_T} = \frac{4}{3} \approx 1,33$ показує, що від моменту першої появи пластичних деформацій у найбільш напружених точках вала до повного вичерпання несучої спроможності крутний момент повинний зрости в 1,33 рази. Це резерв несучої спроможності стержня за рахунок пружно-пластичних властивостей металу.

8.2. Кручення стержнів прямокутного перерізу

8.2.1. Загальні положення

При розгляді деформації кручення стержнів круглого перерізу (див. п. 8.1) ми користувалися гіпотезою плоских перерізів. Проте виявляється, що круглий переріз – це рідкісний, хоча і важливий, виняток, коли перерізи при закручуванні, не викривляючись, повертаються, як плоскі диски, навколо осі X . При цьому кут зсуву γ утворюється тільки за рахунок нахилу твірних (рис. 8.1), і формула для дотичних напружень набуває простого вигляду (8.5).

При крученні стержня прямокутного перерізу поперечні перерізи не залишаються плоскими: вони скривлюються по деякій поверхні $u = u(z, y)$, що називається депланацією перерізу (див. п. 2.4), рис. 8.14.

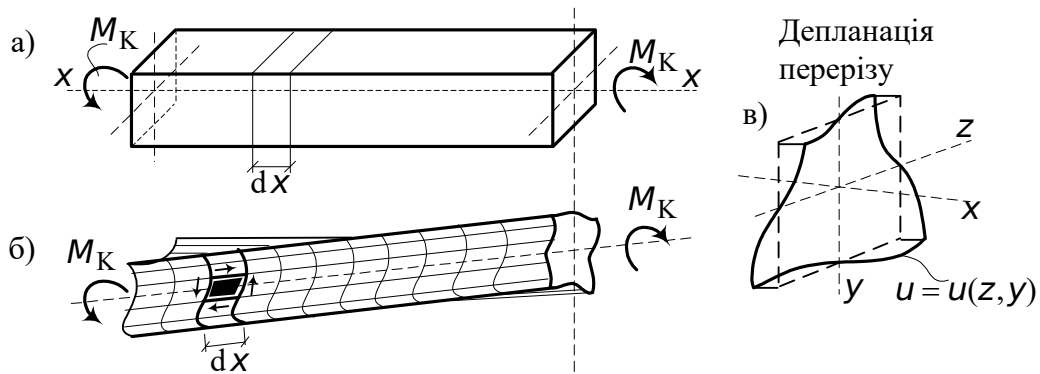


Рис. 8.14. Кручення стержнів прямокутного перерізу

Зміна прямого кута елемента, виділеного на поверхні (рис. 8.14, б), відбувається як за рахунок нахилу твірних, так і через нахил сторін, що лежать у поперечних перерізах. Останнє є наслідком депланації перерізу. Тому розподіл дотичних напружень по перерізу виявляється значно більш складним, ніж дає формула (8.5). Строго ця задача розв'язується методами теорії пружності, із результатами якої ми ознайомимося нижче.

У зв'язку з розвитком депланацій розрізняють два типи кручення стержнів: вільне і стиснене.

Кручення називається вільним, якщо депланації всіх поперечних перерізів однакові за довжиною стержня. На рис. 8.14, а, б, в зображене вільне кручення, коли функція депланації залежить тільки від Y і Z і не залежить від X . Кожне волокно за рахунок однакової депланації всіх перерізів переміститься в поздовжньому напрямку на U як жорстке ціле. Оскільки його подовження відсутнє, то

$$\sigma_x = 0.$$

Тобто при вільному крученні в поперечних перерізах виникають тільки дотичні напруження, а $\sigma_x = 0$.

Прикладом конструкції, що зазнає стисненого кручення, є консольний стержень, у якого стиснення розвитку депланацій створюється наявністю защемлення. Тут функція U змінюється уздовж координати X , і тому поздовжні волокна змінюють довжину й у перерізах виникають нормальні напруження σ_x .

Таким чином, стиснене кручення характерно тим, що в поперечних перерізах виникають, крім дотичних напружень, нормальні напруження σ_x .

На рис. 8.15 зображений розподіл напружень σ_x по перерізу.

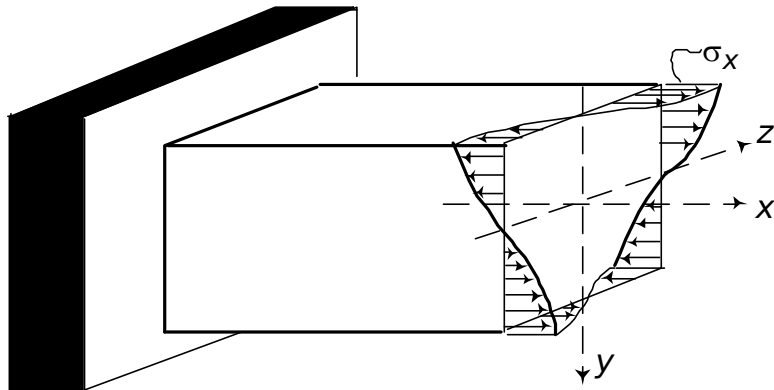


Рис. 8.15. Розподіл напружень σ_x по перерізу стержня при стисненому крученні

8.2.2. Вільне кручення стержнів прямокутного перерізу і тонкостінних стержнів відкритого профілю

Розв'язок задачі про визначення напружень при крученні стержня прямокутного перерізу в строгій математичній постановці отриманий Сен-Венаном.

Найбільші дотичні напруження, знайдені за цією теорією, можна одержати за такою формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{\alpha b h^2}, \quad (8.24)$$

де α – коефіцієнт, що залежить від співвідношення довжин сторін прямокутника (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Коефіцієнти для розрахунку прямокутних перерізів на кручення

b/h	1	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	$1/3$
β	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	$1/3$
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742

Найбільші дотичні напруження, знайдені за формулою (8.24), виникають у серединах довгих сторін контуру (рис. 8.16, точки "1").

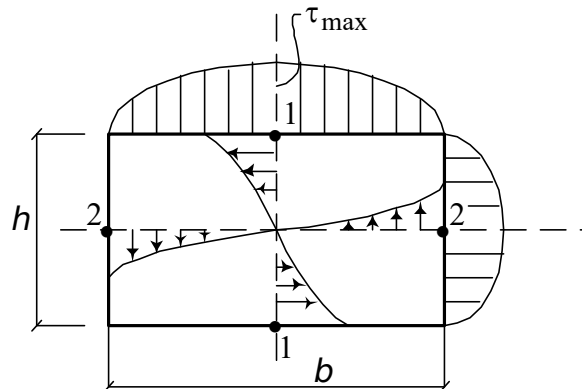


Рис. 8.16. Напруження в прямокутному перерізі при вільному крученні

У серединах коротких сторін у точках “2” виникають дещо менші дотичні напруження. Їх можна виразити через τ_{\max} таким чином:

$$\tau_2 = \gamma \tau_{\max}, \quad (8.25)$$

де γ – коефіцієнт, що залежить від відношення сторін прямокутника (див. табл. 8.1).

Погонний кут закручування одиниці довжини аналізованого стержня φ , рад/м, може бути знайдений за такою формулою:

$$\varphi = \frac{M_K}{GJ_{кр}} = \frac{M_K}{G\beta bh^3}, \quad (8.26)$$

де β – коефіцієнт, що визначається за табл. 8.1 так само, як α і γ , і залежить від співвідношення сторін прямокутника; G – модуль зсуву.

Наведених у цьому підрозділі даних достатньо для розрахунку на міцність і жорсткість стержнів прямокутного перерізу.

Поширимо отримані формули на перерізи, складені з одного або декількох вузьких прямокутників.

Для стержнів із поперечним перерізом у вигляді вузького витягнутого прямокутника $b \times h$, де $h \ll b$ (рис. 8.17, а), як впливає з табл. 8.1, коефіцієнти $\alpha = \beta = 1/3$.

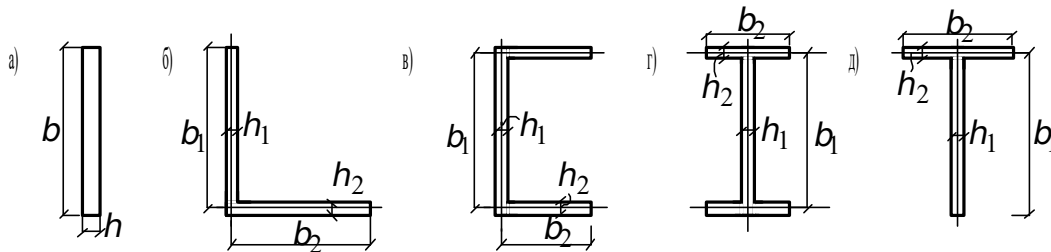


Рис. 8.17. Перерізи стержнів у вигляді вузьких прямокутників

Тоді моменти інерції при крученні вузького прямокутника і тонкостінних перерізів, складених з окремих прямокутників (пластин), як на рис. 8.17, б, в, г, д, можуть бути знайдені так:

$$J_{кр} = J_d = \frac{1}{3} \delta \sum b_i h_i^3, \quad (8.27)$$

де δ – експериментальний коефіцієнт, що враховує зростання жорсткості перерізу за рахунок областей перетинання прямокутників, що складають його, і перехідних скруглень у прокатних стержнях (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Коефіцієнт δ для розрахунку перерізів, складених із вузьких прямокутників

Тип перерізу	δ
Кутник, лист	1,0
Швелер	1,12

Тавр	1,15
Двотавр	1,20

Погонний кут закручування аналізованих перерізів може бути визначений за формулою

$$\varphi = \frac{M_K}{GJ_d}. \quad (8.28)$$

Для визначення дотичних напружень у кожній з пластинок (вузькі прямокутники) знаходимо з залученням (8.27) жорсткість усього перерізу GJ_d , а також жорсткість кожної пластинки GJ_{d_i} .

Далі скористаємося гіпотезою про недеформованість контуру, тобто будемо вважати, що кожна пластинка при скручуванні повертається на той самий кут, що і весь переріз:

$$\varphi_i = \frac{M_i}{GJ_{d_i}}, \quad (8.29)$$

де M_i – невідомий крутний момент у i -й пластинці.

Прирівнявши (8.28) і (8.29), знайдемо

$$M_i = \frac{GJ_{d_i}}{GJ_d} \cdot M_K. \quad (8.30)$$

Визначивши крутний момент, сприйнятий кожною пластинкою, знайдемо за (8.24) дотичні напруження в кожній пластинці:

$$\tau_{i,\max} = \frac{M_i}{\frac{1}{3}b_i h_i^2}. \quad (8.31)$$

8.2.2.1. Деформація незамкнутого тонкостінного перерізу

Розглянемо тонкостінний стержень відкритого профілю з довільною формою перерізу (п. 2.4, рис. 8.18).

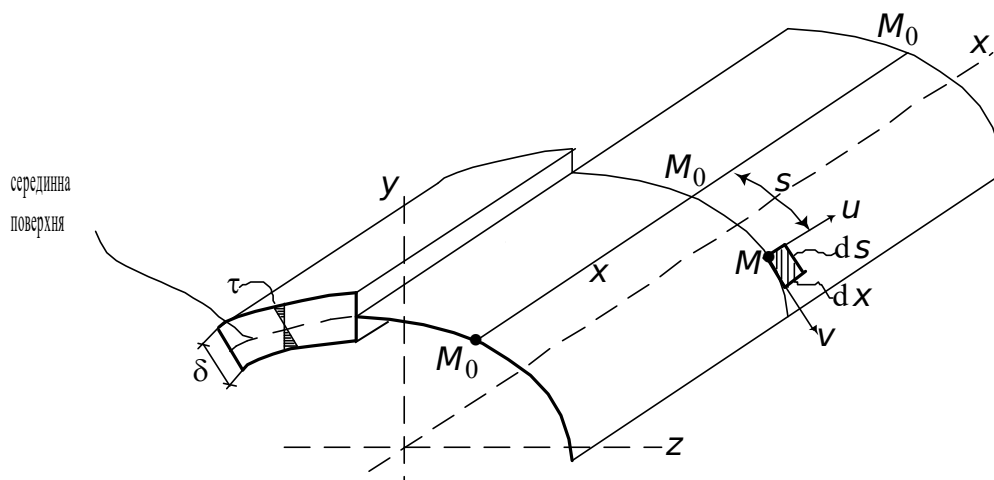


Рис. 8.18. Схема тонкостінного стержня відкритого профілю

Положення довільної точки $M(x, s)$ на серединній поверхні задано двома координатами X і S , причому дуга S відраховується від деякої початкової точки M_0 , що підлягає визначенню (див. п. 2.4). У точці M проведемо площину, дотичну до серединної поверхні, і позначимо переміщення точки в цій площині U і V , де V – переміщення в тангенціальному до контуру перерізу напрямку. На рис. 8.19 показано, що в результаті повороту перерізу і його депланації точка M перемістилася в положення M_1 разом з елементом серединної поверхні $dx \times ds$.

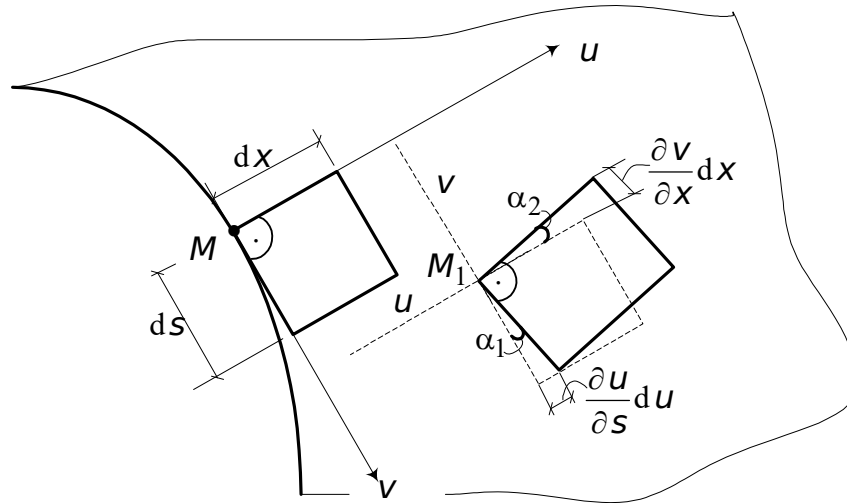


Рис. 8.19. Переміщення елемента $dx \times ds$ серединної поверхні у тангенціальній площині

Запишемо умову відсутності кута зсуву (дотичні напруження на рівні серединної поверхні дорівнюють нулю) елемента серединної поверхні $dx \times ds$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.32)$$

Знак мінус у (8.32) поставлений тому, що збільшення переміщення $(\partial v / \partial x) dx$ спрямовано у бік, протилежний напрямку відліку координати S . У рівнянні (8.32) використані позначення для частинних похідних, тому що переміщення U і V точки $M(x, s)$ залежать від двох координат: X і S .

Виразимо тангенціальне переміщення V через кут закручування $\varphi(x)$. На рис. 8.20 зображений поворот перерізу на кут φ відносно полюса, або центра кручення A (див. п. 2.4). Кут φ будемо вважати додатним, якщо він спрямований проти ходу годинникової стрілки при погляді на переріз у додатному напрямку осі X .

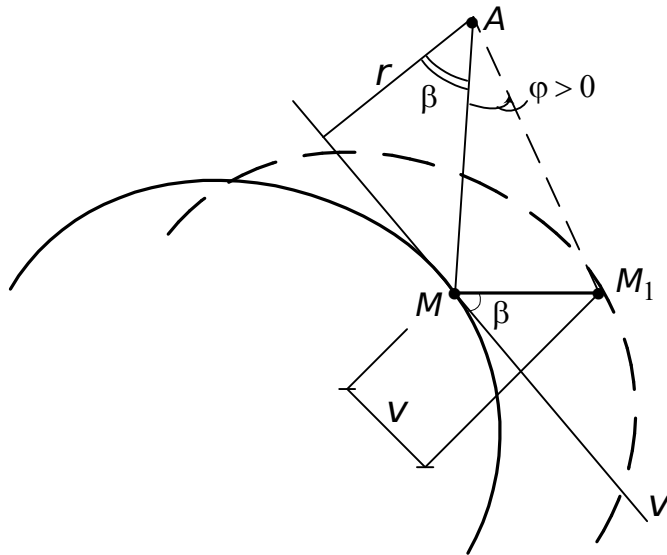


Рис. 8.20. Переміщення точки M , викликане поворотом перерізу навколо полюса A

Як видно з рисунка,

$$\begin{aligned} MM_1 &= AM \cdot \varphi, \\ v &= MM_1 \cos \beta = \varphi \cdot AM \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

Але оскільки $AM \cdot \cos \beta = r$, то

$$v = r\varphi. \quad (8.33)$$

Підставимо (8.33) у (8.32) і проінтегруємо по дузі S . У результаті одержимо

$$u = -\frac{\partial \varphi^M}{\partial x_{M_0}} \int r ds + w_0, \quad (8.34)$$

де w_0 – переміщення початкової точки M_0 .

Добуток $r ds = d\omega$ геометрично являє собою подвоєну площу елементарного трикутника з основою ds , а весь інтеграл уздовж дуги S від M_0 до M дає так звану секторіальну площу ω (рис. 8.21).

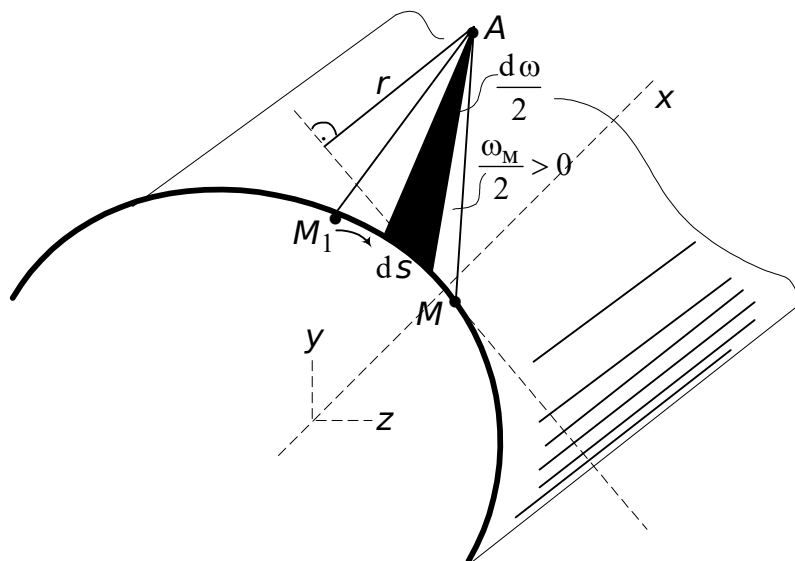


Рис. 8.21. До визначення секторіальних координат ω тонкостінного перерізу

Секторіальна площа $\omega > 0$, якщо радіус обертається проти ходу годинникової стрілки (при погляді на переріз у додатному напрямку осі X).

Надалі приймемо в (8.34) $w_0 = 0$. Тоді ця формула набуде вигляду

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \omega = -\varphi' \cdot \omega. \quad (8.35)$$

Ця залежність виражає закон зміни переміщення U уздовж контуру перерізу внаслідок депланації перерізу у серединній поверхні.

Переміщення U пропорційно ω , це означає, що у тонкостінному стержні відкритого профілю депланація відбувається за законом секторіальних площ. Між положенням точки на дузі S і площею ω існує однозначна відповідність. Тому секторіальну площу ω називають секторіальною координатою точки. Якщо її лінійні координати Z і Y мають розмірність м, то розмірність ω – це м².

8.2.3. Стиснене кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю

8.2.3.1. Головні припущення

Саме поняття про стиснене кручення стержня було дано вище (див. п. 8.2.1). Тут додамо, що розвиток інженерної теорії стисненого кручення виявився особливо необхідним для стержнів із незамкнутим контуром перерізу, що знаходять широке застосування в будівництві, кораблебудуванні, авіабудуванні і т. д. Нормальні напруження, що виникають при стисненому крученні в таких стержнях, можуть мати великі значення та істотно впливають на їхні міцність і жорсткість. Загальна теорія деформування тонкостінних стержнів відкритого профілю створена чл.-кор. АН СРСР В.З. Власовим.

При стисненому крученні загальний крутний момент M_K є сумою крутного моменту M_B , сприйманого дотичними напруженнями при вільному крученні, і крутного моменту M_ω , пов'язаного з депланацією:

$$M_K = M_B + M_\omega, \quad (8.36)$$

де M_B – момент вільного кручення;

M_ω – згинально-крутний момент.

Для визначення моменту вільного кручення M_B запишемо за аналогією з (8.11), прийнявши $\varphi_0 = 0$, кут закручування для тонкостінного стержня:

$$\varphi = \frac{M_B \cdot x}{GJ_d}. \quad (8.37)$$

Диференціюючи (8.37) по X , знайдемо

$$M_B = \frac{d\varphi}{dX} \cdot GJ_d = \varphi' \cdot GJ_d, \quad (8.38)$$

де J_d – момент інерції при крученні тонкостінних стержнів, який визначається за (8.27).

Згинально-крутний момент M_ω викликає появу дотичних напружень τ_ω і нормальних σ_ω . Покажемо розподіли цих напружень для двотаврового перерізу (рис. 8.22).

Як уже зазначалося, при стисненому крученні депланація по довжині стержня змінна і, як наслідок, у поперечних перерізах виникають нормальні напруження, що позначаємо σ_ω . Їхній розподіл показаний на рис. 8.22, б. Пов'язаний такий розподіл із поверхнею депланації $u(z, y)$ (див. п. 8.2.1). Ці напруження у даному випадку приводяться до біпари, тобто до двох протилежно спрямованих моментів M , що діють у рівнобіжних площинах. Взагалі ж у поперечних перерізах при стисненому крученні виникає система взаємно врівноважених поздовжніх сил і напружень (див. рис. 8.22, а, б).

Епюра нормальних напружень σ_ω задовольняє таким статичним умовам:

$$N = \int_A \sigma_\omega dA = 0, \quad (8.39)$$

$$M_z = \int_A (\sigma_\omega dA) y = 0, \quad M_y = \int_A (\sigma_\omega dA) z = 0. \quad (8.40)$$

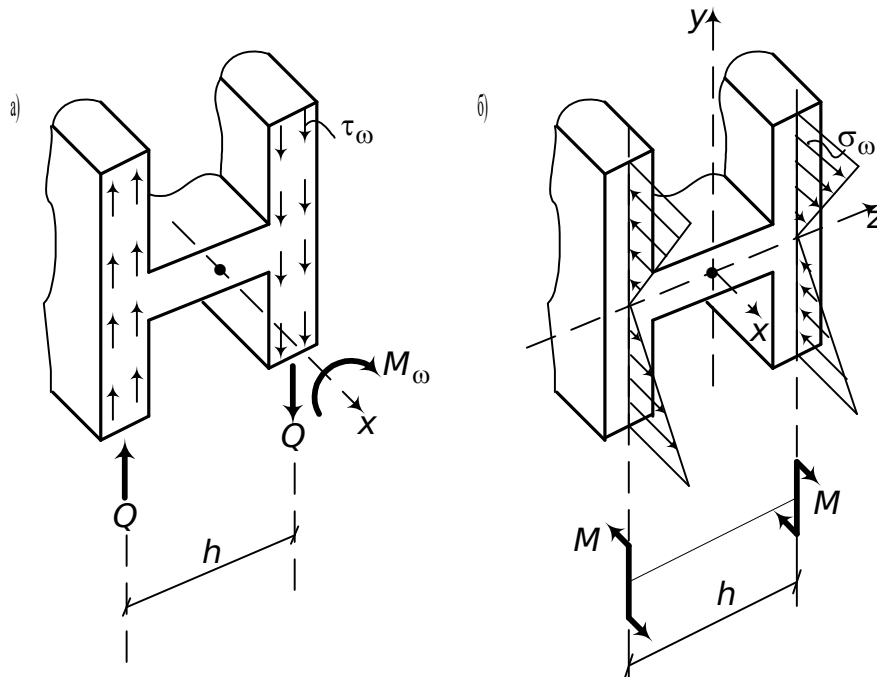


Рис. 8.22. Розподіли напружень, що викликаються згинально-крутним моментом по перерізу

Виразимо M_ω , σ_ω і τ_ω через функцію кутів закручування $\varphi(x)$.

8.2.3.2. Нормальні напруження σ_ω

Раніше був отриманий закон зміни переміщення U уздовж контуру перерізу (формула (8.35))

$$u = -\varphi'\omega.$$

За законом Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_\omega}{E} - \nu \frac{\sigma_s}{E}. \quad (8.41)$$

Приймаючи гіпотезу про ненависнення поздовжніх волокон одне на одне в поперечному напрямку, маємо $\sigma_s = 0$ і, отже,

$$\sigma_\omega = \varepsilon_x E = \frac{\partial u}{\partial x} E. \quad (8.42)$$

Підставимо (8.41) у (8.42) і знайдемо

$$\sigma_\omega = -\varphi'' E \omega. \quad (8.43)$$

Отримана формула показує, що нормальні напруження σ_ω розподілені в поперечному перерізі за законом секторіальних площ.

Визначимо роботу елементарних сил $\sigma_\omega dA$ у перерізі на одиничній депланації $1 \cdot \omega$.

Ця робота буде такою:

$$B_\omega = \int_A (\sigma_\omega dA) \omega. \quad (8.44)$$

Підставимо сюди замість σ_ω його значення за (8.43), при цьому величини, що не залежать від площі перерізу, винесемо за знак інтеграла:

$$B_\omega = -\varphi'' E \int_A \omega^2 dA, \quad (8.45)$$

де $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$ – секторіальний момент інерції поперечного перерізу (див. п. 2.4.2).

Тому

$$B_\omega = -\varphi'' E J_\omega. \quad (8.46)$$

Добуток $E J_\omega$ називається секторіальною жорсткістю тонкостінного поперечного перерізу.

B_ω є новим силовим фактором у перерізі, називаним бімоментом. Так, для двотавра (рис. 8.22, б) $B_\omega = M \cdot h$, тобто він являє собою біпару з плечем h .

Підставивши з (8.46) значення φ'' у вираз (8.43), одержимо остаточну формулу для напружень

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega, \quad (8.47)$$

аналогічну п. 6.1. Напруження $\sigma_\omega > 0$, одержуване за цією формулою, є розтягуючим.

8.2.3.3. Дотичні напруження τ_ω

Для визначення дотичних напружень τ_ω складемо умови рівноваги відсіченої частини стержня, спроектувавши усі сили на вісь X (рис. 8.23):

$$\tau_\omega dx \cdot \delta - dN^{\text{відс}} = 0 .$$

Звідси

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta} \frac{dN^{\text{відс}}}{dx} . \quad (8.48)$$

Відомо, що

$$N^{\text{відс}} = \int_{A^{\text{відс}}} \sigma_\omega dA = \frac{B_\omega}{J_\omega} S_\omega^{\text{відс}} , \quad (8.49)$$

де

$$S_\omega^{\text{відс}} = \int_{A^{\text{відс}}} \omega dA \quad - \quad (8.50)$$

секторіальний статичний момент відсіченої частини перерізу, м^4 .

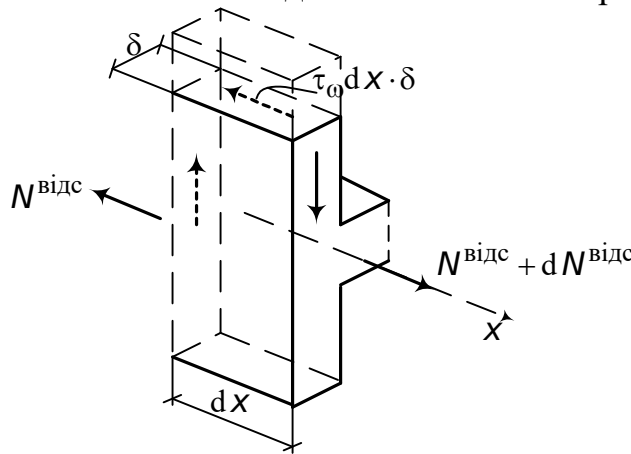


Рис. 8.23. Визначення τ_ω з умови рівноваги відсіченої частини стержня

Прийемо поперечний переріз постійним за довжиною. Отже, у виразі (8.49) J_ω і $S_\omega^{\text{відс}}$ не будуть залежати від X . Тоді, підставивши (8.49) у (8.48), одержимо

$$\tau_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} \frac{S_\omega^{\text{відс}}}{J_\omega \delta} . \quad (8.51)$$

Знайдемо похідну $\frac{dB_\omega}{dx}$. Для цього складемо умову рівноваги елемента стержня довжиною dx (рис. 8.24):

$$M_\omega d\varphi - dB_\omega \varphi' = 0 , \quad (8.52)$$

де $d\varphi$ – кут закручування елемента стержня, який дорівнює $d\varphi = \varphi' dx$.

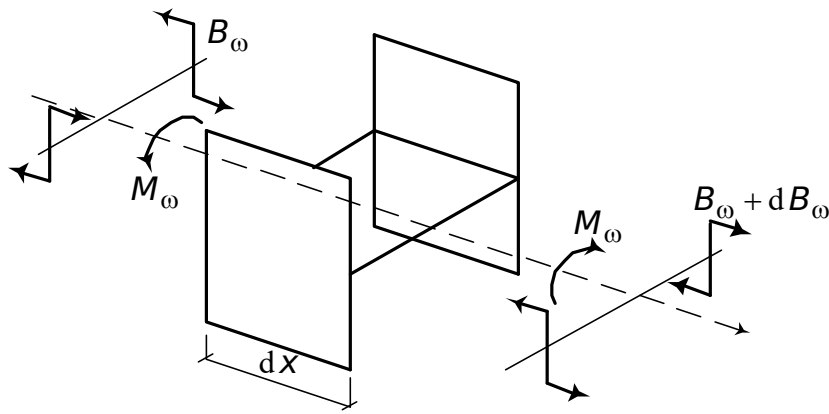


Рис. 8.24. До визначення похідної $\frac{dB_\omega}{dx}$

Підставивши сюди $d\varphi = \varphi' dx$ і скоротивши на φ' , одержимо

$$M_\omega = B'_\omega = -EJ_\omega \varphi'''. \quad (8.53)$$

Остаточно формула (8.51) набуває такого вигляду:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{відс}}}{J_\omega \delta}. \quad (8.54)$$

Напруження $\tau_\omega > 0$ в поздовжньому перерізі аналізованої відсіченої частини, якщо вони спрямовані у бік, протилежний осі X .

Тепер для того, щоб можна було використовувати формули для напружень \mathcal{U}_2 і τ_ω , необхідно знайти функцію кутів закручування $\varphi(x)$, через яку виражені внутрішні зусилля B_ω (8.46) і M_ω (8.53).

8.2.3.4. Диференціальні рівняння кутів закручування

Диференціальне рівняння для $\varphi(x)$ одержимо, виходячи з умови рівноваги (8.36):

$$M_K = M_B + M_\omega.$$

Підставивши сюди вирази (8.38) і (8.53), одержимо

$$M_K = \varphi' \cdot GJ_d - EJ \varphi''.$$

Диференціюючи ці вирази по U й ураховуючи, що $\frac{dM_K}{dx} = -m$ (див. розд. 1), доводимо його до такого вигляду:

$$\varphi^{IV} - \kappa^2 \varphi'' = \frac{m}{EJ_\omega}, \quad (8.55)$$

де $\kappa = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$, m^{-1} .

Роздивимося випадок однорідного рівняння, коли $m = 0$:

$$\varphi^{IV} - \kappa^2 \varphi'' = 0. \quad (8.56)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$\varphi_x = A \operatorname{sh} \kappa x + B \operatorname{ch} \kappa x + Cx + D, \quad (8.57)$$

де A, B, C, D – постійні інтегрування.

Виразимо постійні інтегрування через початкові параметри. Для цього продиференціюємо (8.57) тричі по x :

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= A \kappa \operatorname{ch} \kappa x + B \kappa \operatorname{sh} \kappa x + C, \\ \varphi''_x &= A \kappa^2 \operatorname{sh} \kappa x + B \kappa^2 \operatorname{ch} \kappa x, \\ \varphi'''_x &= A \kappa^3 \operatorname{ch} \kappa x + B \kappa^3 \operatorname{sh} \kappa x. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Підставимо в рівняння (8.57) і (8.58) $x = 0$. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B + D; \\ \varphi'_0 &= A \kappa + C; \\ \varphi''_0 &= B \kappa^2; \\ \varphi'''_0 &= A \kappa^3. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Звідси знайдемо

$$B = \frac{\varphi''_0}{\kappa^2}; \quad A = \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3}; \quad D = \varphi_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2}; \quad C = \varphi'_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2}.$$

Знайдені значення довільних постійних підставимо в (8.57):

$$\varphi_x = \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} \operatorname{ch} \kappa x + \left(\varphi'_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} \right) x + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} \right). \quad (8.60)$$

Згрупуємо члени і запишемо рівняння (8.60) у такому вигляді:

$$\varphi_x = \varphi_0 + \varphi'_0 x + \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} (\operatorname{ch} \kappa x - 1) + \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3} (\operatorname{sh} \kappa x - \kappa x). \quad (8.61)$$

З рівняння (8.46) при $x = 0$ знайдемо

$$\varphi''_0 = -\frac{B_{\omega,0}}{EJ_{\omega}}. \quad (8.62)$$

З рівняння (8.36) з урахуванням (8.38), (8.53) і (8.55) одержимо

$$\varphi'''_0 = -\frac{M_{\kappa,0}}{EJ_{\omega}} + \kappa^2 \varphi'_0. \quad (8.63)$$

Знайдені значення другої і третьої похідних (8.62) і (8.63) підставляємо в (8.61). У результаті маємо

$$\varphi_x = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{B_{\omega,0}}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} \kappa x) + \frac{M_{\kappa,0}}{\kappa GJ_d} (\kappa x - \operatorname{sh} \kappa x). \quad (8.64)$$

За отриманим рівнянням (8.64) складаємо формули для внутрішніх зусиль:

$$M_B = \varphi' GJ_d = \varphi'_0 GJ_d \operatorname{ch} \kappa x - \kappa B_{\omega,0} \operatorname{sh} \kappa x + M_{\kappa,0} (1 - \operatorname{ch} \kappa x); \quad (8.65)$$

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \varphi'' = -EJ_{\omega} \kappa \varphi'_0 \operatorname{sh} \kappa x + B_{\omega,0} \operatorname{ch} \kappa x + \frac{M_{\kappa,0}}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x; \quad (8.66)$$

$$M_{\omega} = -EJ_{\omega} \varphi''' = -GJ_d \varphi'_0 \operatorname{ch} \kappa x + B_{\omega,0} \kappa \operatorname{sh} \kappa x + M_{\kappa,0} \operatorname{ch} \kappa x. \quad (8.67)$$

Пояснимо обчислення початкових параметрів M_0 та B_0 . Нехай задані переріз і зосереджені сили в ньому (рис. 8.25).

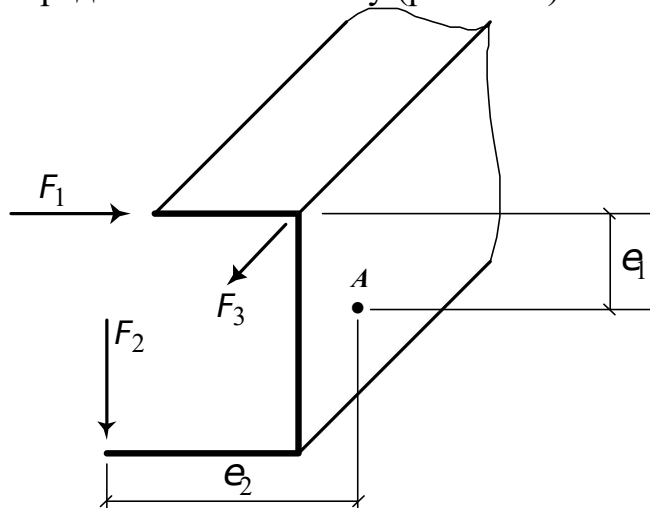


Рис. 8.25. Визначення крутного моменту і бімоменту в перерізі

З урахуванням правила знаків для крутного моменту складаємо вираз моменту відносно точки A (центр згинання):

$$M_{\kappa,0} = F_1 e_1 - F_2 e_2.$$

Поздовжня сила F_3 породжує бімомент B_0 . Оскільки в тонкостінному стержні відкритого профілю переміщення відбуваються за законом секторіальних площ (див. п. 8.2.2), то

$$B_0 = F_3 \omega_i,$$

де ω_i – секторіальна координата в місці прикладення сили.

За наявності декількох поздовжніх сил у перерізі бімомент визначається шляхом підсумовування.

Тепер ми одержали розв'язок однорідного рівняння (8.57). Якщо до тонкостінного стержня прикладемо розподілений момент $m = \text{const}$, спрямований проти годинникової стрілки, якщо дивитися з торця у бік додатного напрямку осі Ox , то до розв'язку однорідного рівняння (8.64) необхідно додати частинний розв'язок, що має вигляд

$$\varphi_{\text{част}} = \frac{m}{\kappa^2 GJ_d} \left(1 + \frac{\kappa^2 x^2}{2} - \operatorname{ch} \kappa x \right). \quad (8.68)$$

Відповідно у формули (8.65), (8.66), (8.67) додаються такі вирази:

$$M_{B, \text{част}} = \frac{m}{\kappa} (\kappa x - \operatorname{sh} \kappa x); \quad (8.69)$$

$$B_{\omega, \text{ част}} = -\frac{m}{\kappa^2}(1 - \operatorname{ch} \kappa x); \quad (8.70)$$

$$M_{\omega, \text{ част}} = \frac{m}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x. \quad (8.71)$$

Якщо тонкостінний стержень має декілька ділянок, то варто скористатися прийомом продовження розв'язку (див., наприклад, п. 6.6.3).

8.2.3.5. Загальний випадок навантаження тонкостінного стержня відкритого профілю. Приклад розрахунку

У загальному випадку навантаження нормальні і дотичні напруження визначаються за принципом суперпозиції як алгебраїчна сума напружень, що викликаються окремими складовими деформації. Так, нормальні напруження будуть визначатися за чотиричленною формулою

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}}, \quad (8.72)$$

а дотичні напруження – за тричленною формулою

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{відс}}}{J_z \delta} + \frac{Q_z S_y^{\text{відс}}}{J_y \delta} + \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{\text{відс}}}{J_{\omega} \delta}. \quad (8.73)$$

Крім того, у перерізі виникають дотичні напруження від вільного кручення, що визначаються за формулою (8.31).

Для ілюстрації сказаного роздивимося приклад розрахунку консольного стержня, показаного на рис. 8.26.

Раніше (див. приклад у п. 2.4.4) були визначені положення центра ваги перерізу, осьові і відцентровий моменти інерції, побудована епюра головної секторіальної площі, знайдений секторіальний момент інерції поперечного перерізу, координати центра згинання, положення головних центральних осей перерізу (рис. 8.26).

Перенесемо діючу силу в центр згинання і розкладемо її на складові по головних осях:

$$F_y = F \cos \alpha = 1 \cdot 0,9583 = 958,3 \text{ Н},$$

$$F_z = F \sin \alpha = 1 \cdot 0,2823 = 282,3 \text{ Н}.$$

Побудуємо епюри згинальних моментів M_z і M_y (рис. 8.26). Знайдемо початкові параметри (див. рівняння (8.64) – (8.67)):

$$\text{при } x = 0: \quad B_{\omega, 0} = 0, \quad M_{K, 0} = F \cdot 17,86 \text{ см} = 178,6 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } x = l: \quad \varphi_x = 0 \text{ і } \varphi'_x = 0$$

(у защемленні кут закручування дорівнює нулю, і момент вільного кручення, віднесений до жорсткості при крученні GJ_d , дорівнює нулю).

Вихідні дані:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$J_d = 3,387 \text{ см}^4;$$

$$J_\omega = 12733,58 \text{ см}^6;$$

$$J_{\max} = 1737,85 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = 366,18 \text{ см}^4$$

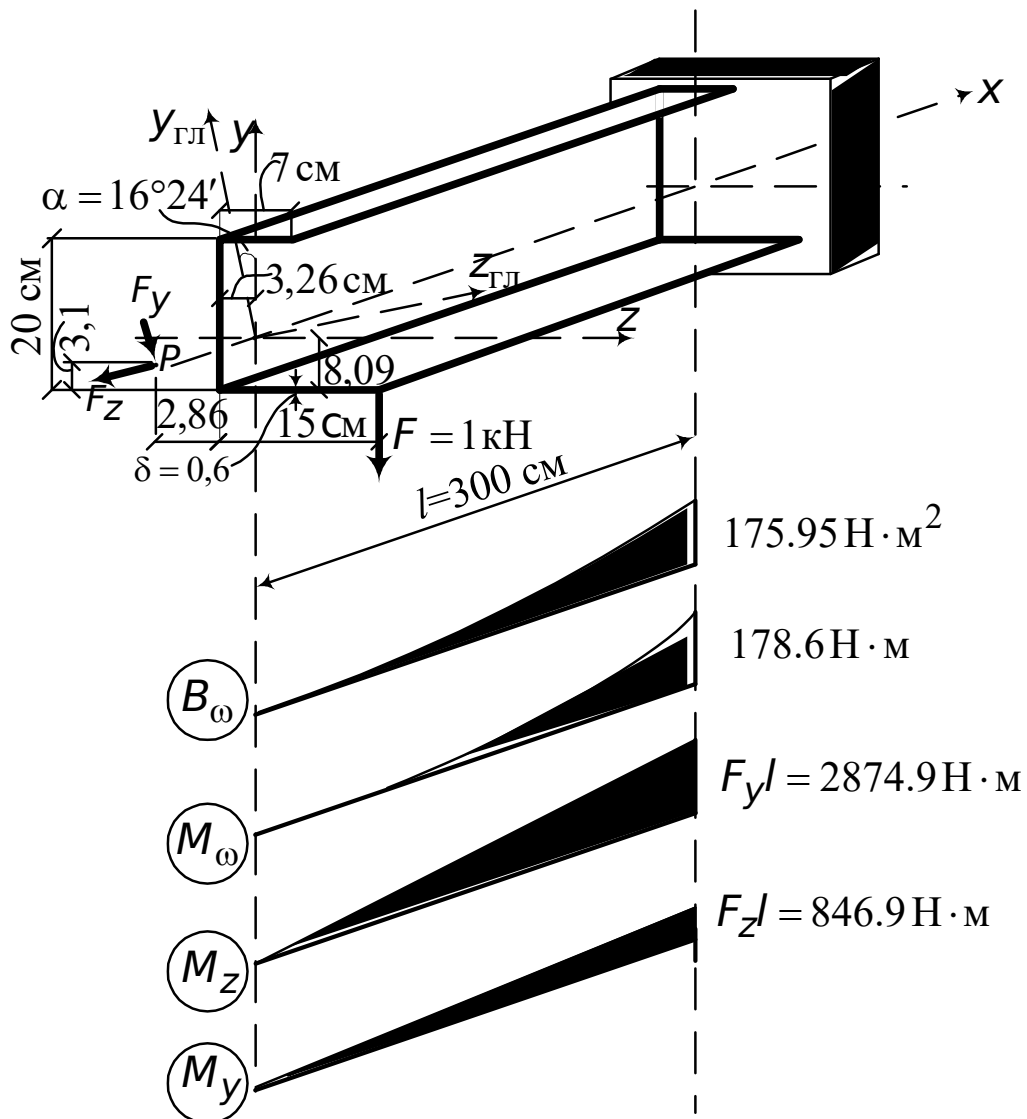


Рис. 8.26. Схема тонкостінного стержня та епюри моментів

Використовуємо ці умови і знаходимо

$$\varphi_0 = \frac{M_{K,0}}{\kappa G J_d} (\operatorname{th} \kappa l - \kappa l);$$

$$\varphi'_0 = \frac{M_{K,0}}{G J_d} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l} \right).$$

Підставляємо знайдені значення початкових параметрів $B_{\omega,0}$, $M_{K,0}$, φ_0 і φ'_0 в рівняння (8.66) і (8.67) і одержуємо

$$B_{\omega} = \frac{M_{K,0}}{\kappa} \frac{\operatorname{sh} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa l};$$

$$M_{\omega} = M_{K,0} \frac{\operatorname{ch} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa l}.$$

Обчислюємо згинально-крутильну характеристику

$$\kappa = \sqrt{\frac{G J_d}{E J_{\omega}}} = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^5 \cdot 3,387}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 12733,58}} = 0,0101 \frac{1}{\text{см}}$$

і будуємо епюри бімоменту B_{ω} і згинально-крутильного моменту M_{ω} (рис. 8.26).

За формулою (8.47) визначаємо нормальні напруження при крученні в защемленні, МПа

$$\sigma = \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}} \omega = \frac{1759500}{12733,58} \omega = 138,18 \cdot 10^{-2} \omega,$$

де B_{ω} – значення бімоменту в защемленні (рис. 8.26);

J_{ω} – секторіальний момент інерції поперечного перерізу (рис. 8.26: вихідні дані);

ω – еюра головної секторіальної площі.

Побудуємо епюру σ_{ω} (рис. 8.27).

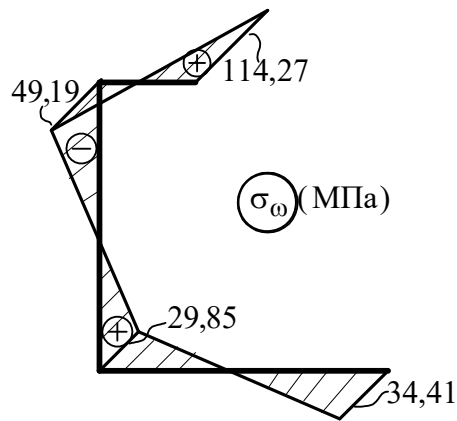


Рис. 8.27. Епюра нормальних напружень σ_ω

Визначимо дотичні напруження в тому самому перерізі, що і нормальні, тобто в защемленні. Для цього використовуємо формулу (8.54):

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{відс}}}{J_\omega \delta} = \frac{178600}{12733,58 \cdot 0,6} S_\omega^{\text{відс}} = 23,38 S_\omega^{\text{відс}} \cdot 10^{-2}.$$

У даному випадку при $\delta = \text{const}$ епюра τ_ω подібна епюрі $S_\omega^{\text{відс}}$. Епюру $S_\omega^{\text{відс}}$ будемо, переходячи послідовно від точки 4 профілю (рис. 8.28) до точки 3, потім – до точки 1 і до точки 2.

Складемо рівняння секторіального статичного моменту для нижньої полки профілю (ділянка 4-3):

$$S_\omega^{\text{відс}} = \int_A \omega dA = \delta \int_0^{t_k} \omega dt.$$

Тут $\omega = -24,90 + \frac{24,90 + 21,60}{15} t = -24,90 + 3,10t$, t – відстань від точки 4 до перерізу (див. рис. 8.28).

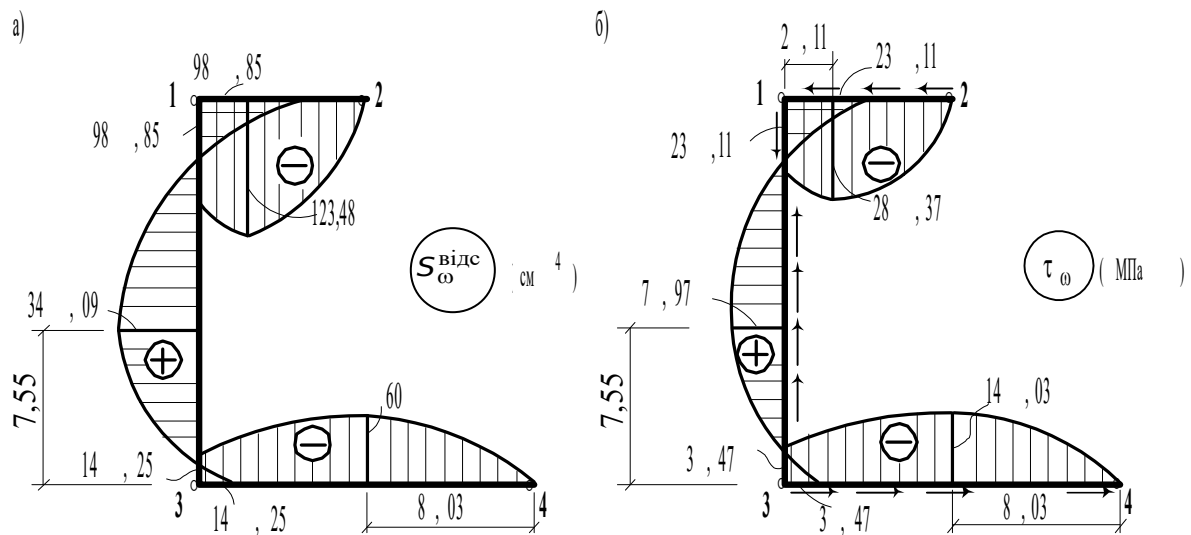


Рис. 8.28. Епюри $S_{\omega}^{\text{відс}}$ і τ_{ω}

Тепер $S_{\omega}^{\text{відс}} = 0,6 \int_0^{t_k} (-24,90 + 3,10t) dt$. Після інтегрування маємо

$$S_{\omega}^{\text{відс}} = -14,94t_k + 0,93t_k^2.$$

Визначимо t_k , при якому $S_{\omega}^{\text{відс}}$ досягає екстремального значення:

$$\frac{dS_{\omega}^{\text{відс}}}{dt_k} = 0, \quad -14,94 + 2 \cdot 0,93t_k = 0.$$

Звідси $t_k = 8,03 \text{ см}$.

При $t_k = 0$ $S_{\omega}^{\text{відс}} = 0$, при $t_k = 8,03 \text{ см}$ $S_{\omega}^{\text{відс}} = -60 \text{ см}^4$, при $t_k = 15 \text{ см}$ $S_{\omega}^{\text{відс}} = -14,25 \text{ см}^4$.

Аналогічно виконуючи обчислення на інших ділянках, побудуємо епюру $S_{\omega}^{\text{відс}}$ (рис. 8.28, а) і потім епюру τ_{ω} (рис. 8.28, б).

З двох систем дотичних напружень, що відповідають стисненому крученню (8.54) і (8.31), в аналізованому перерізі виникають лише напруження τ_{ω} (8.54), що ми і визначили (рис. 8.28, б). Напруження $\tau_{кр}$ дорівнюють нулю, тому що момент $M_B = \varphi' G J_d = 0$ у защемленні.

Знайдемо тепер для порівняння з σ_{ω} нормальні напруження від поперечного згинання.

Нормальні напруження, МПа

$$\sigma_y = \frac{M_z}{J_{\max}} y = \frac{287490}{1737,85} \cdot y = 165,43 \cdot y \cdot 10^{-2},$$

$$\sigma_z = \frac{M_y}{J_{\min}} z = \frac{84690}{366,18} \cdot z = 231,28 \cdot z \cdot 10^{-2}.$$

Епюри σ_y і σ_z показані на рис. 8.29.

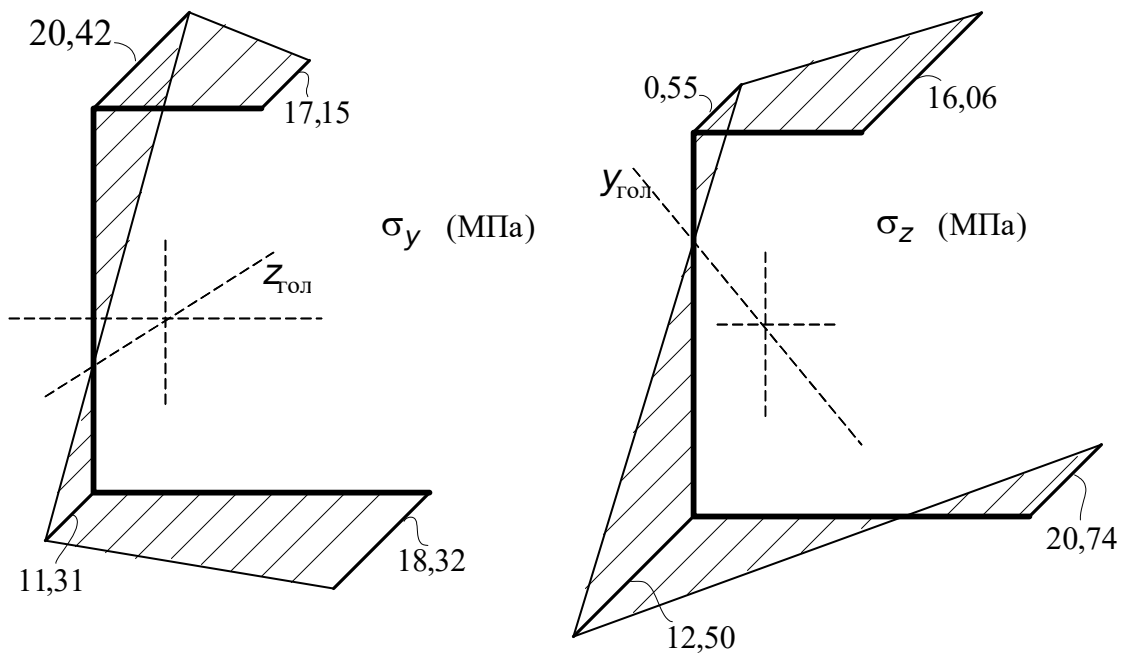


Рис. 8.29. Епюри нормальних напружень σ_y і σ_z від згинальних моментів

Порівнюючи епюри σ_ω з σ_y і σ_z , бачимо, що максимальні напруження, викликані депланацією перерізу, у три із половиною рази перевищують сумарні напруження від згинання.

Розділ 9

СКЛАДНИЙ ОПІР І СТІЙКІСТЬ

9.1. Загальні положення і передумови

Під складним опором розуміють різноманітні комбінації найпростіших видів деформації: осьового розтягання або стискання, кручення, плоского поперечного згинання й ін. Як відомо, у загальному випадку навантаження бруса в його поперечних перерізах виникає шість компонентів внутрішніх сил: Q_y , Q_z , N , M_z , M_y , M_K (див. рис. 1.11).

Залежно від комбінації цих зусиль розрізняють такі основні види складного опору: косе згинання, що характеризується тим, що в поперечних перерізах діють згинальні моменти і поперечні сили, а поздовжня сила і крутний момент відсутні; згинання із крученням – тут у загальному випадку напружено-деформовані стани створюють п'ять силових факторів, а поздовжня сила дорівнює нулю; позацентрове стискання і розтягання – $M_K = 0$, $Q_y = 0$, $Q_z = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $N \neq 0$.

Прикладами споруд, у яких елементи зазнають складного опору, є водонапірна башта, колона якої стискується вагою бака з водою, згинається тиском вітру; обрешітка покрівлі, де вертикальне навантаження від ваги покрівлі і власної ваги обрешітки нахилене до головної осі під деяким кутом; балка мостового крана при його гальмуванні, унаслідок якого вантаж відхиляється від вертикалі; прогонова будівля моста, балки якого згинаються в горизонтальній і вертикальній площинах і скручуються бічними горизонтальними впливами від рухомого складу та ін.

При побудові теорії розрахунку конструкцій, елементи яких зазнають складного опору, будемо припускати, що переміщення точок осі елемента (бруса) малі порівняно з його поперечними розмірами, а повороти малі порівняно з одиницею (див. п. 1.6). При цих припущеннях можна застосувати принцип незалежності дії сил. Таким чином, безпосередньо можуть бути використані результати теорії елементарних видів деформації бруса з прямолінійною віссю. Теорія складного опору в цьому випадку за умови дотримання закону Гука буде лінійною.

У цьому розділі поряд із косим згинанням, позацентровим розтяганням і стисканням, згинанням із крученням бруса розглядаються також питання стійкості стиснутих стержнів.

В опорі матеріалів питання про стійкість виникає при розрахунку довгих і тонких стержнів. Експериментальні дослідження і теорія показують, що якщо величина стискальної сили, що діє на стержень, досягає деякого критичного значення, то починається скривлення стержня. При незначному перевищенні стискальної силою критичного значення дуже сильно зростають прогини. Тому розмір критичної сили характеризує початок руйнування.

Питання про стійкість пружних стержнів набуває особливо великого значення в металевих конструкціях, де завдяки застосуванню високоміцних сталей поперечні розміри елементів малі порівняно з їхньою довжиною.

9.2. Косе згинання

Косим згинанням називається такий вид деформації, коли сили, що згинають балку, розташовані в площині, яка проходить через вісь балки, але похило до головних площин OXY і OXZ (див. рис. 9.1, а).

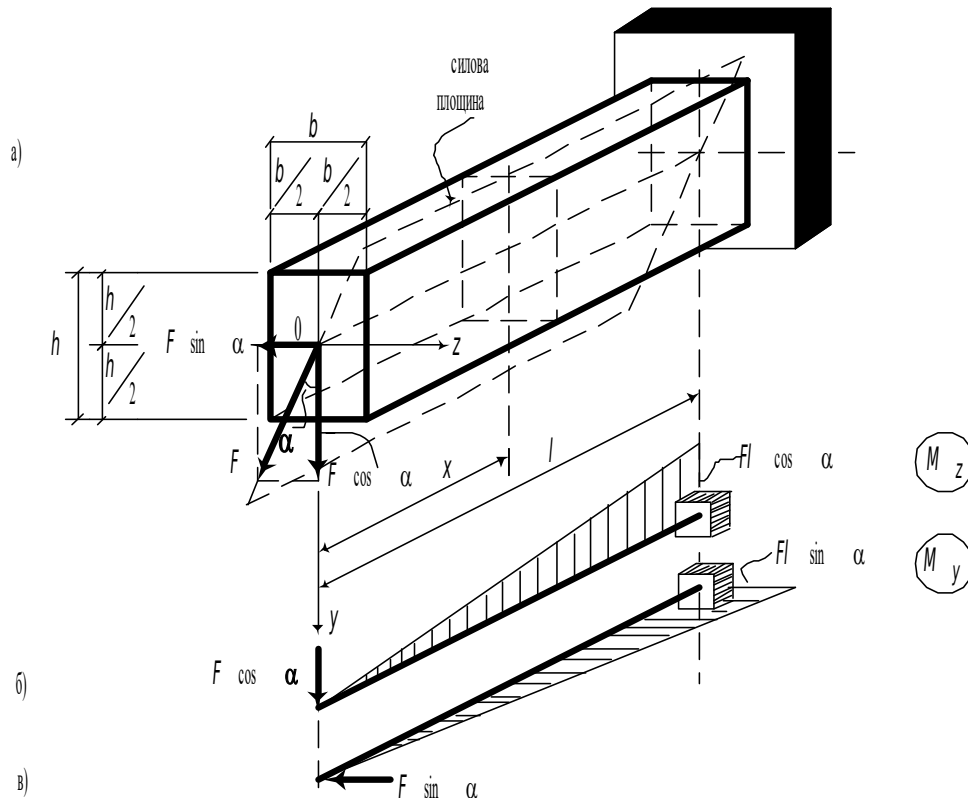


Рис. 9.1. Схема навантаження консольної балки та епюри M_z і M_y

Розглянемо консольну балку. Силу F , прикладену в центрі ваги перерізу, розкладемо на дві складові: вертикальну – $F \cos \alpha$ і горизонтальну – $F \sin \alpha$. Кут α між силовою лінією і віссю Y будемо відраховувати за годинниковою стрілкою. У довільному перерізі X балки знайдемо згинальні моменти у вертикальній OXY і горизонтальній OXZ площинах. При цьому будемо розглядати частину балки, розташовану зліва від перерізу. Тоді відповідно до правила знаків для згинальних моментів (див. рис. 1.17) і умови, що спостерігач розташований на початку координат із боку додатного напрямку осі Z , маємо

$$M_z = -Fx \cos \alpha = -M \cos \alpha ; \quad (9.1)$$

$$M_y = Fx \sin \alpha = M \sin \alpha , \quad (9.2)$$

де M – згинальний момент в аналізованому перерізі в силевій площині, нахилений під кутом α до осі Y .

Епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах показані відповідно на рис. 9.1, б, в.

Знайдемо нормальні напруження в поперечному перерізі балки від згинальних моментів M_z та M_y :

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{J_z} = -\frac{M \cdot y \cdot \cos \alpha}{J_z}; \quad (9.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y} = \frac{M \cdot z \cdot \sin \alpha}{J_y}. \quad (9.4)$$

Епюри напружень від кожного згинального моменту показані на рис. 9.2, а, б.

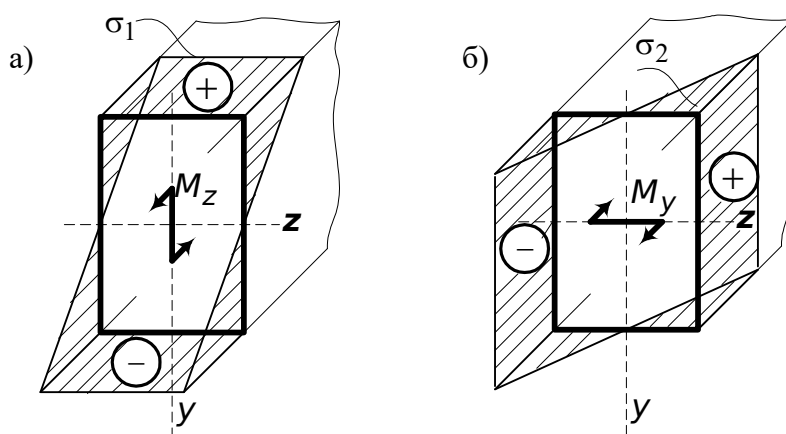


Рис. 9.2. Епюри нормальних напружень у перерізі балки

На підставі принципу суперпозиції нормальні напруження в перерізі балки від спільної дії моментів M_z і M_y дорівнюють

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M \left(-\frac{y}{J_z} \cos \alpha + \frac{z}{J_y} \sin \alpha \right). \quad (9.5)$$

Відповідну епюру напружень показано на рис. 9.3.

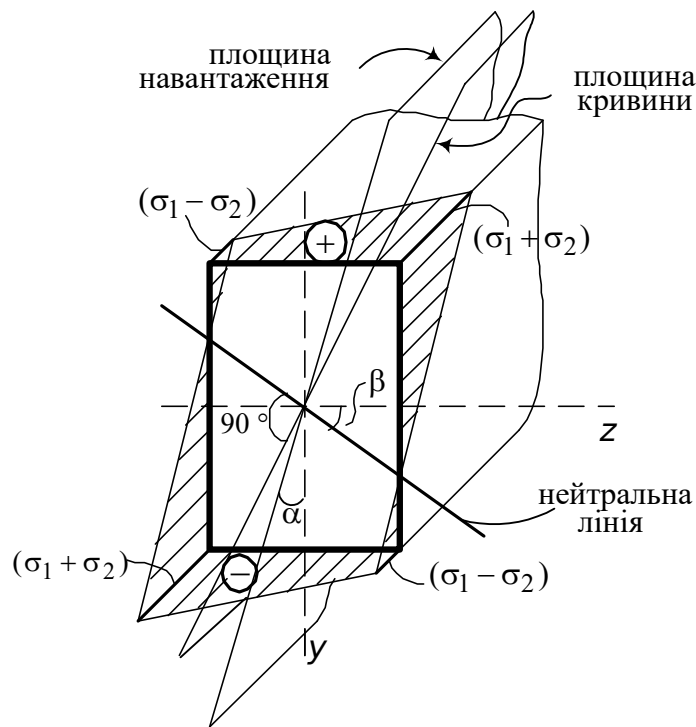


Рис. 9.3. Сумарна епюра напружень

Розташування нейтральної лінії знайдемо з рівняння (9.5), прирівнявши вирази в дужках нулю:

$$-\frac{y}{J_z} \cos \alpha + \frac{z}{J_y} \sin \alpha = 0. \quad (9.6)$$

Умова (9.6) – це математичний запис того факту, що нормальні напруження в точках, які лежать на нейтральній осі, дорівнюють нулю.

Позначивши $\frac{y}{z} = \operatorname{tg} \beta$, із (9.6) знайдемо

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}. \quad (9.7)$$

Як очевидно з отриманої залежності (9.7), нейтральна лінія в загальному випадку ($J_z \neq J_y$) не перпендикулярна до силової лінії. Площина кривини (рис. 9.3), будучи ортогональною до нейтральної лінії, не збігається із силовою площиною і розташована “косо” відносно цієї площини (під кутом $\beta - \alpha$).

Цікаво зазначити, що для перерізів, у яких $J_z = J_y$, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії і скривлення відбувається в силовій площині. Такими перерізами є коло, квадрат, рівнобічний трикутник, складені перерізи при $J_z = J_y$. У подібних випадках будь-яка центральна вісь є головною, і згинання від будь-якої похилої сили (при довільному куті α) перетворюється в головне плоске згинання.

Для розрахунку на міцність балки при косому згинанні необхідно для небезпечного перерізу (де M_z і M_y досягають одночасно своїх найбільших значень, наприклад, на рис. 9.1, б, в – у защемленні)

побудувати, користуючись формулою (9.5), епюру сумарних напружень (рис. 9.3). Далі знайти розташування нейтральної лінії (9.7), визначити максимальні розтягуючі і стискаючі напруження і скласти умови міцності

$$\sigma_{\max,p} \leq [\sigma]_p; \quad \sigma_{\max,c} \leq [\sigma]_c \quad (9.8)$$

або при розрахунку за методом граничних станів

$$\sigma_{\max,p} \leq R_p; \quad \sigma_{\max,c} \leq R_c.$$

Для балок із матеріалів з $[\sigma]_p = [\sigma]_c$ використовується лише та з умов (9.8), що відповідає більшому за абсолютною величиною напруженню. При $[\sigma]_p < [\sigma]_c$ (крихкі матеріали) першої з умов (9.8) достатньо, якщо $\sigma_{\max,p} \geq |\sigma_{\max,c}|$. У доповнення до сказаного підкреслимо, що при косому згинанні перерізи, у котрих M_z і M_y досягають своїх найбільших значень, можуть не збігатися, тому розрахунок на міцність варто виконати для декількох імовірно небезпечних перерізів.

Переміщення в балці при косому згинанні дорівнюють геометричній сумі її переміщень у напрямках головних центральних осей:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad (9.9)$$

де v – переміщення в напрямку осі Y ; w – переміщення в горизонтальній площині (у напрямку осі Z); f – переміщення в площині кривини (див. рис. 9.3).

Покажемо, що сумарне переміщення лежить у площині кривини. Як відомо, прогини на кінці консолі дорівнюють $F l^3 / 3EJ$ (див. розд. 6). Для аналізованої задачі

$$v = \frac{F \cos \alpha l^3}{3EJ_z}; \quad w = \frac{F \sin \alpha l^3}{3EJ_y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{v} = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}.$$

Отримана формула ідентична формулі (9.7). Це дозволяє зробити висновок, що $\varphi = \beta$.

Отже, напрямок прогинів перпендикулярний до нейтральної лінії, тобто збігається з площиною кривини. Зазначимо, що в перерізах балки при косому згинанні виникають також і дотичні напруження. Вони можуть бути визначені як геометрична сума дотичних напружень, спрямованих паралельно головним центральним осям:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2},$$

де τ_{xz} і τ_{xy} знаходяться за формулою Журавського (див. розд. 6). Нагадаємо, що перший індекс у позначенні дотичного напруження показує, до якої осі перпендикулярна площадка, на якій діє дотичне напруження, а другий індекс – якій осі паралельне дотичне напруження.

На закінчення цього підрозділу розглянемо приклад. Дерев'яна балка прямокутного перерізу (рис. 9.4, а) навантажена вертикальною силою

$F = 10 \text{ кН}$ в точці A і горизонтальною силою такої самої величини в точці B (обидві точки розташовані на осі балки). Потрібно підібрати розміри поперечного перерізу b і h при допустимому напруженні $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

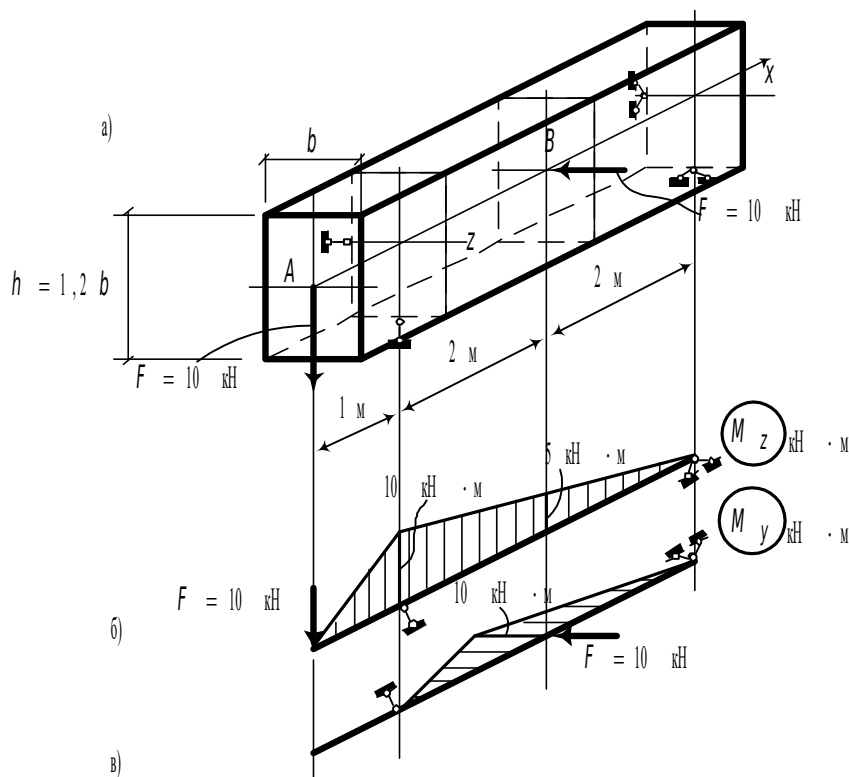


Рис. 9.4. Розрахункова схема балки (а), епюри моментів M_z у вертикальній (б) і M_y в горизонтальній (в) площинах

Відповідно до порядку розрахунку балок при косому згинанні, викладеного вище, побудуємо епюри моментів у вертикальній і горизонтальній площинах (рис. 9.4, б, в). небезпечним буде переріз із $M_z = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_y = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Визначимо геометричні характеристики перерізу балки (рис. 9.4, а).

Момент інерції відносно осі Z

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 0,144b^4.$$

Момент опору відносно тієї самої осі

$$W_z = \frac{0,144b^4}{0,6b} = 0,24b^3.$$

Аналогічно знайдемо геометричні характеристики перерізу відносно осі Y :

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = 0,1b^4; \quad W_y = \frac{0,1b^4}{0,5b} = 0,2b^3.$$

Знайдемо максимальні напруження в небезпечному перерізі балки від згинальних моментів M_z та M_y , МПа:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm \frac{5}{0,24b^3} = \pm \frac{20,833 \cdot 10^3}{b^3},$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{10}{0,2b^3} = \pm \frac{50 \cdot 10^3}{b^3}.$$

Опишемо тепер розмір поперечного перерізу b . За умовою задачі допустиме напруження $[\sigma]$ однакове при розтяганні і стисканні. Тому використовуємо одну з умов (9.8). Будемо оперувати з максимальними напруженнями, що розтягують. Запишемо умову міцності:

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leq [\sigma], \text{ або}$$

$$\frac{20,833 \cdot 10^3}{b^3} + \frac{50 \cdot 10^3}{b^3} = 10.$$

Звідси $b = 19,2 \text{ см} \approx 20 \text{ см}$, $h = 20 \times 1,2 = 24 \text{ см}$.

9.3. Згинання і кручення стержня кільцевого поперечного перерізу

Одночасна дія кручення зі згинанням частіше за все зустрічається в різноманітних деталях машин. Наприклад, колінчатий вал сприймає значні крутні моменти і, крім того, працює на згинання. На згинання із крученням працюють вали моторних вагонів електропоїзда, трамвайного вагона й інших машинобудівних конструкцій. Приклад такого роду в будівельних конструкціях наведений у п. 9.1.

Роздивимося стержень, закріплений на правому кінці. На вільному кінці стержня прикладені сила F і крутний момент M_K (рис. 9.5, а).

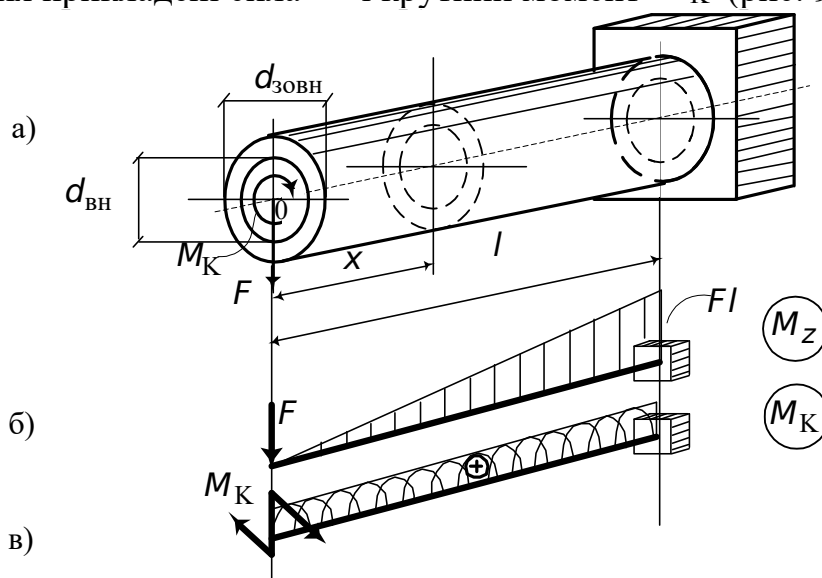


Рис. 9.5. Схема консольного стержня та епюри M_z і M_K

Аналізований стержень належить до категорії товстостінних циліндрів, тому до нього при крученні застосовні всі передумови і розв'язки, отримані в п. 8.1.

Побудуємо епюри згинальних моментів (рис. 9.5, б) і крутних моментів (рис. 9.5, в). Впливом поперечної сили будемо нехтувати, тому що дотичні напруження, що відповідають їй, невеликі в порівнянні з дотичними напруженнями від кручення і нормальними напруженнями від згинання. У будь-якому поперечному перерізі стержня виникають нормальні напруження σ від згинання і дотичні напруження τ від кручення. Нормальні напруження, як відомо (див. п. 6.1), визначаються за формулою

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{J_z},$$

де J_z – осьовий момент інерції кільцевого перерізу стержня (див. п.2.3.4),

$$J_z = \frac{\pi d_{\text{зовн}}^4}{64} \cdot \beta, \quad \beta = \left(1 - \frac{d_{\text{вн}}^4}{d_{\text{зовн}}^4} \right).$$

Епюра цих напружень показана на рис. 9.6.

Найбільші за абсолютною величиною нормальні напруження виникають у точках з $y = d_{\text{зовн}}/2$:

$$|\sigma| = \frac{M}{W_z} = \frac{32M}{\pi d^3 \beta}, \quad (9.10)$$

де W_z – осьовий момент опору поперечного перерізу бруса,

$$W_z = \frac{\pi d^3 \beta}{32}.$$

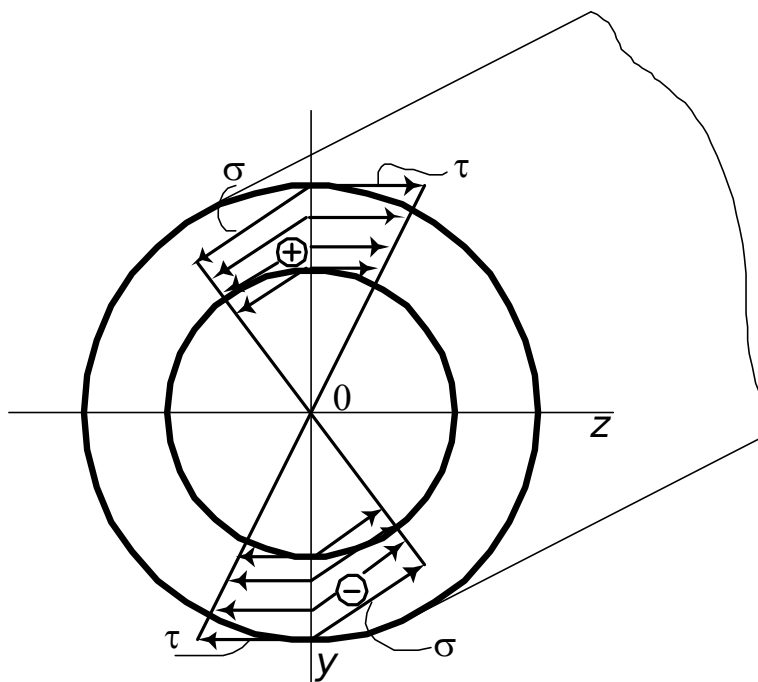


Рис. 9.6. Епюри нормальних і дотичних напружень у перерізі бруса

Дотичні напруження визначаються за формулою (8.5):

$$\tau_{\rho} = \frac{M_K \rho}{J_{\rho}},$$

де ρ – відстань від полюса (точка “0” на рис. 9.5, а, рис. 9.6) до тієї точки перерізу, у якому знаходяться дотичні напруження; J_{ρ} – полярний момент інерції поперечного перерізу бруса (див. п. 8.1),

$$J_{\rho} = \frac{\pi d_{\text{зовн}}^4}{32} \cdot \beta.$$

Епюра дотичних напружень показана на рис. 9.6 і рис. 8.6. У кожній точці поперечного перерізу дотичні напруження спрямовані по нормалі до радіуса, що з'єднує цю точку з центром перерізу.

Найбільші дотичні напруження виникають у точках, розташованих по зовнішньому контуру ($\rho = d_{\text{зовн}}/2$). Вони тут дорівнюють

$$\tau = \frac{M_K}{W_{\rho}} = \frac{16 M_K}{\pi d_{\text{зовн}}^3 \beta}, \quad (9.11)$$

де W_{ρ} – полярний момент опору бруса,

$$W_{\rho} = \frac{\pi d_{\text{зовн}}^3 \beta}{16}.$$

Вирізаємо з бруса поблизу його бічної поверхні елементарний паралелепіпед (рис. 9.7).

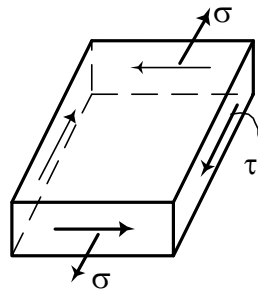


Рис. 9.7. Напружений стан елементарного паралелепіпеда

По гранях паралелепіпеда, паралельних поперечним перерізам бруса, діють нормальні σ і дотичні напруження τ . Інші грані вільні від нормальних напружень. Таким чином, у даному випадку має місце окремий випадок плоского напруженого стану.

Отже, для розрахунків на міцність необхідно оперувати з головними напруженнями. Останні, як відомо (див. п. 6.4), визначаються за формулою

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Знак “+” у цій формулі відповідає головним розтягуючим напруженням, а знак “-” – головним стискальним напруженням.

Розрахунок брусів на міцність при згинанні з крученням провадиться з застосуванням різноманітних теорій міцності. Як відомо (див. розд. 5), умови міцності за першою, другою, третьою і четвертою теоріями будуть відповідно такими:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq [\sigma] , \\ \sigma_1 - \nu\sigma_2 &\leq [\sigma] , \\ \sigma_1 - \sigma_2 &\leq [\sigma] , \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 &\leq [\sigma]^2 .\end{aligned}$$

Тепер, підставивши (9.10) і (9.11) у формулу для визначення головних напружень і використовуючи умови міцності, одержимо:

– за теорією максимальних нормальних напружень (перша теорія міцності)

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi[\sigma]\beta} \left(M_z + \sqrt{M_z^2 + M_K^2} \right)} ; \quad (9.12)$$

– за теорією максимальних відносних деформацій (друга теорія міцності) для сталевих брусів

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]\beta} \left(0,35M_z + 0,65\sqrt{M_z^2 + M_K^2} \right)} ; \quad (9.13)$$

– за теорією максимальних дотичних напружень (третья теорія міцності)

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]\beta} \sqrt{M_z^2 + M_K^2}} ; \quad (9.14)$$

– за енергетичною теорією міцності

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi[\sigma]\beta} \sqrt{4M_z^2 + 3M_K^2}} . \quad (9.15)$$

Розходження в діаметрах, обчислених за цими теоріями, залежить від співвідношення між M_z і M_K . У більшості випадків перша теорія міцності дає найбільший діаметр, третя – найменший. При малих значеннях згинального моменту порівняно з крутним це розходження доходить приблизно до 25%. Зі зростанням згинального моменту розходження зменшується і при $M_z = M_K$ складає не більше 5%.

Зазначимо, що якщо необхідно підібрати переріз суцільного круглого стержня, то у формулах (9.12) – (9.15) слід прийняти $\beta = 1$.

На закінчення підрозділу роздивимося приклад.

Потрібно визначити діаметр показаного на рис. 9.8, а консольного стержня рами, використовуючи всі чотири теорії міцності; $[\sigma] = 80$ МПа .

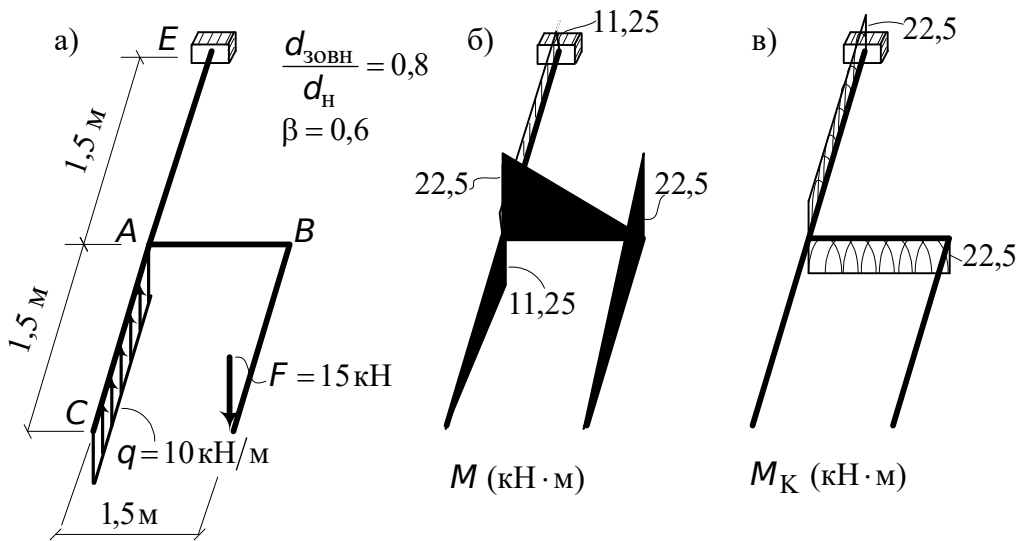


Рис. 9.8. Розрахункова схема, епюри згинальних і крутних моментів

Епюри згинальних і крутних моментів показані на рис. 9.8, б, в. Небезпечним буде переріз, де одночасно згинальний і крутний моменти досягають найбільших значень. Це переріз **A** (рис. 9.8, а). Тут $M = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_K = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Далі скористаємося формулами (9.12) - (9.15) і визначимо діаметр стержня.

За теорією максимальних нормальних напружень

$$d_{\text{зобн}} \approx 18 \text{ см}.$$

За теорією найбільших відносних деформацій

$$d_{\text{зобн}} \approx 18,3 \text{ см}.$$

За теорією максимальних дотичних напружень

$$d_{\text{зобн}} \approx 19 \text{ см}.$$

За енергетичною теорією міцності

$$d_{\text{зобн}} \approx 18,5 \text{ см}.$$

Різниця в діаметрах не перевищує 5 %. Це було зазначено раніше при $M_z = M_K$.

9.4. Позацентрове розтягання і стискання

Нехай на брус діє сила F , що паралельна поздовжній осі бруса, але точка її прикладання не знаходиться на жодній із головних осей перерізу Z і Y (рис. 9.9, а).

а)

б)

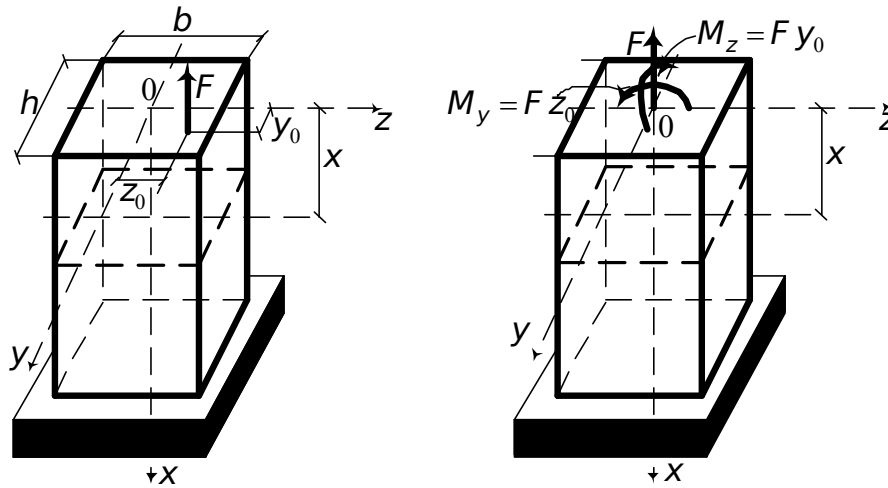


Рис. 9.9. Схеми впливів на брус

Приведемо цю силу до центра ваги перерізу O (рис. 9.9, б). Нормальні напруження в довільному перерізі X визначимо, користуючись принципом незалежності дії сил, окремо від кожного силового фактора: F , $M_y = F z_0$, $M_z = F y_0$.

Нормальні напруження від центрально прикладеної сили F дорівнюють (див. (3.1))

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}, \quad (9.16)$$

де A – площа поперечного перерізу бруса.

Епюра нормальних напружень для цього випадку показана на рис. 9.10, а.

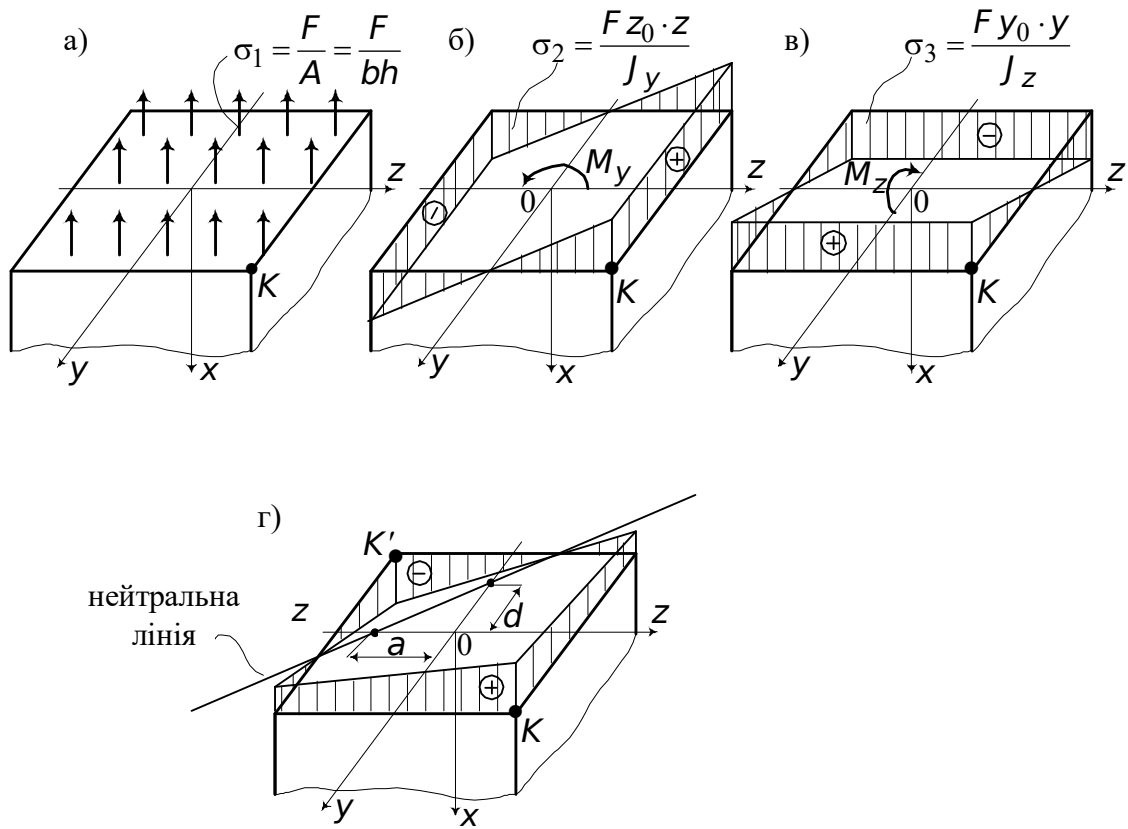


Рис. 9.10. Епюри σ_1 , σ_2 , σ_3 та епюра сумарних напружень

Напруження від згинання в площині Oxz визначаються в такий спосіб:

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y} = \frac{F z_0 \cdot z}{J_y}, \quad (9.17)$$

де Z – відстань по осі Z від початку координат до тієї точки, у якій визначається нормальне напруження; J_y – момент інерції поперечного перерізу відносно осі Y .

Аналогічно знаходимо напруження від згинання в площині Oyx :

$$\sigma_3 = \frac{M_z y}{J_z} = \frac{F y_0 \cdot y}{J_z}, \quad (9.18)$$

де Y – відстань по осі Y від початку координат до тієї точки, у якій визначається напруження; J_z – момент інерції поперечного перерізу відносно осі Z .

Епюри нормальних напружень, викликаних M_y і M_z , показані на рис. 9.10, б, в.

Сумарне напруження в перерізі бруса визначається як сума напружень, викликаних осьовим розтяганням (9.16) і згинанням (9.17) і (9.18).

Для точки K маємо

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_0 z}{J_y} A + \frac{y_0 y}{J_z} A \right). \quad (9.19)$$

З огляду на те, що $J_y/A = i_y^2$, $J_z/A = i_z^2$ (див. п. 2.3.3), де i_y і i_z – радіуси інерції перерізу, і вводячи позначення

$$i_y^2/z_0 = a; \quad i_z^2/y_0 = d,$$

одержимо

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{y}{d} \right). \quad (9.20)$$

Сумарна епюра напружень, що відповідає формулі (9.20), показана на рис. 9.10, г.

Щоб знайти положення нейтральної лінії, тобто геометричне місце точок із нормальним напруженням, що дорівнює нулю, необхідно праву частину рівняння (9.20) прирівняти до нуля.

Тоді

$$\frac{z}{-a} + \frac{y}{-d} = 1. \quad (9.21)$$

Це рівняння прямої, що відсікає відрізки a і d від головних центральних осей:

a – відрізок, який нульова лінія відсікає від осі Z (рис. 9.10, г),

$$a = -\frac{i_y^2}{z_0}; \quad (9.22)$$

d – відрізок, який нульова лінія відсікає від осі Y (рис. 9.10, г),

$$d = -\frac{i_z^2}{y_0}. \quad (9.23)$$

Оскільки величини i_y^2 і i_z^2 додатні (квадрати), то добутки dy_0 і az_0 повинні бути від'ємними (якщо a додатне, то z_0 від'ємне; якщо d додатне, то y_0 від'ємне). Положення нульової лінії залежить від розмірів і форми перерізу і від координати точки прикладення сили, але зовсім не залежить від величини сили. Якщо нульова лінія перетинає контур поперечного перерізу (рис. 9.10, г), то вона поділяє його на дві частини з різними знаками напружень. Якщо не перетинає, напруження у всіх точках поперечного перерізу будуть одного знака. Порушене питання має значення, наприклад, при розрахунку стиснутих цегельних і бетонних колон. Цегельна кладка і бетон погано опираються розтяганням. Тому бажано, щоб напруження при позацентровому стисканні були для всього перерізу стискальними, тобто щоб нульова лінія проходила за межами перерізу або торкалася його. Знайдемо обриси такого контуру, усередині якого повинна знаходитися стискальна сила, паралельна поздовжній осі. Область, розташована усередині такого контуру, називається ядром перерізу. Щоб визначити ядро перерізу, треба уявити собі, що нейтральна лінія “обкатується” навколо перерізу, не перетинаючи його.

Координати граничних точок ядра перерізу визначаються за формулами

$$\begin{aligned} z_{\text{я}} &= -\frac{i_y^2}{a}; \\ y_{\text{я}} &= -\frac{i_z^2}{d}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Якщо при “обкатуванні” нейтральної лінії навколо перерізу вона повертається навколо деякої точки, то межа ядра перерізу при цьому окреслюється прямою лінією.

Небезпечні напруження в перерізі виникають у точках, найбільш віддалених від нульової лінії (точки K і K' на рис. 9.10, г). Якщо допустимі напруження або розрахункові опори для матеріалу стержня різні при розтяганні і стисканні, то необхідно перевірити дві умови (9.8).

Розглянемо приклад. Бетонний короткий стержень, поперечний переріз якого зображено на рис. 9.11, стискується силою F , яка прикладена у точці A . Потрібно знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і розрахункових опорах бетону: на стискання $R_c = 30 \text{ МПа}$, на розтягання $R_p = 2 \text{ МПа}$. Потрібно також побудувати ядро перерізу.

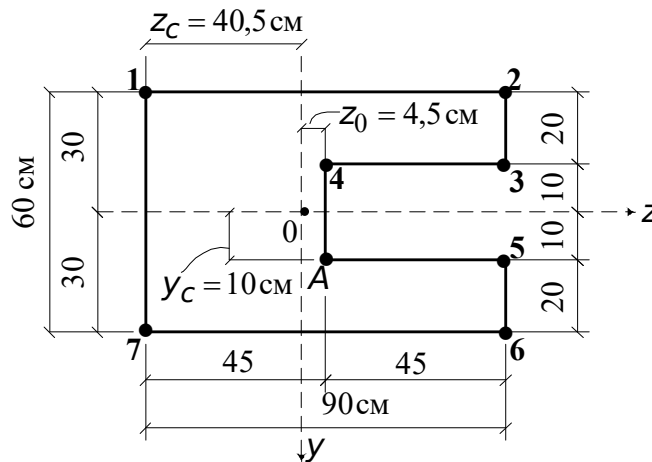


Рис. 9.11. Поперечний переріз бетонного стержня

Поперечний переріз має одну вісь симетрії Z . Отже, координата центра ваги Y_c відома (дорівнює нулю). Знайдемо Z_c (див. п. 2.2). Вона дорівнює $Z_c = 40,5 \text{ см}$ (рис. 9.11). Через точку “0” проведемо другу головну центральну вісь інерції.

Знайдемо геометричні характеристики перерізу:

$$A = 4500 \text{ см}^2;$$

$$J_z = 1590000 \text{ см}^4; W_z = 53000 \text{ см}^3;$$

$$J_y = 2946375 \text{ см}^4; W_y = 59522,73 \text{ см}^3;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = 353,33 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 654,75 \text{ см}^2.$$

Діючи на стержень позацентрову силу F переносимо в центр ваги перерізу. У результаті на стержень тепер діють три силових фактори (рис. 9.12).

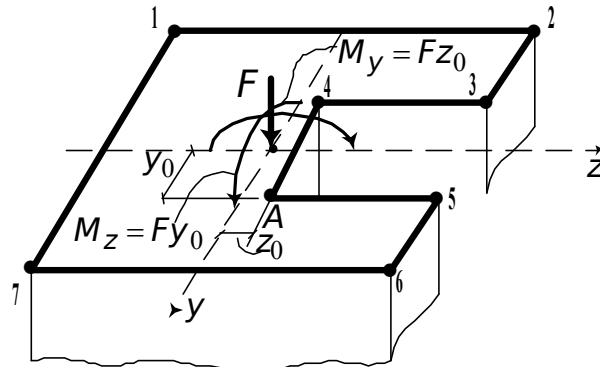


Рис. 9.12. Розрахункова схема бетонного стержня

Визначимо нормальні напруження від кожного силового фактора окремо:

$$\sigma_1 = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{4500} = -2,22 \cdot 10^{-4} F;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y} = -\frac{F z_0 \cdot z}{J_y} = -\frac{4,5 \cdot F z}{2946375} = -1,53 \cdot 10^{-6} F z;$$

$$\sigma_3 = \frac{M_z y}{J_z} = -\frac{F y_0 \cdot y}{J_z} = -\frac{10 \cdot F y}{1590000} = -6,29 \cdot 10^{-6} F y.$$

Аналіз отриманих формул показує, що в точці “6” перерізу (рис. 9.12) виникає максимальне стискальне напруження:

$$|\sigma_{\max, c}| = F \left(\frac{4,5 \cdot 49,5}{2946375} + \frac{1}{4500} + \frac{10 \cdot 30}{1590000} \right) = 4,865 \cdot 10^{-4} F.$$

За умовою задачі максимальне стискальне напруження не повинно бути більше від розрахункового опору бетону на стискання, тобто

$$|\sigma_{\max, c}| \leq R_c.$$

Звідси знаходимо допустиму силу F :

$$[F]_{c^*} = \frac{30}{4,865 \cdot 10^{-4}} = 6166,48 \text{ кН}.$$

Продовжуючи аналіз одержаних формул для визначення напруження, бачимо, що в точці “1” (рис. 9.12) виникає максимальне розтягуюче напруження

$$\sigma_{\max, \rho} = F \left(-\frac{1}{4500} + \frac{4,5 \cdot 40,5}{2946375} + \frac{10 \cdot 30}{1590000} \right) = 0,28316 \cdot 10^{-4} F.$$

Тепер визначимо допустиму силу F , виходячи з першої умови (9.8):

$$\sigma_{\max, \rho} \leq R_{\rho}.$$

Звідси

$$[F]_{\rho} = 7063,1 \text{ кН}.$$

Допустимим навантаженням на стержень буде менше з двох знайдених, тобто

$$[F]_c = 6166,48 \text{ кН}.$$

Побудуємо ядро перерізу. Відповідно до раніше викладеного в цьому підрозділі, щоб визначити цю область, необхідно задатися положенням нейтральної осі і за формулами (9.24) визначити координати граничних точок (рис. 9.13).

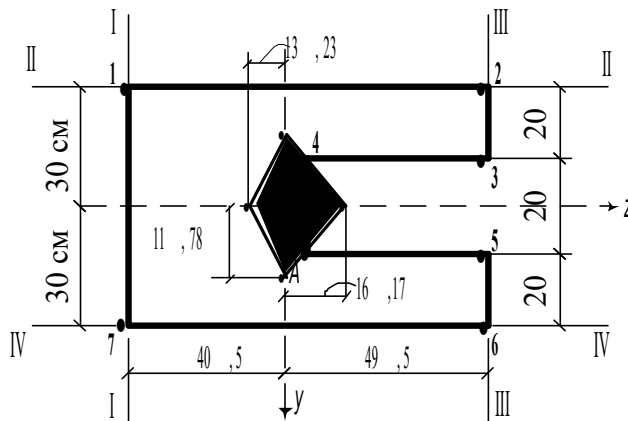


Рис. 9.13. До побудови ядра перерізу

I. Нейтральна лінія проходить по грані 1-7.

$$a = -40,5 \text{ см}, \quad d = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{654,75}{-40,5} = 16,17 \text{ см}; \quad y_{\text{я}} = 0.$$

II. Нейтральна лінія проходить по грані 1-2.

$$a = \infty, \quad d = -30 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = 0; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{d} = -\frac{353,33}{-30} = 11,78 \text{ см}.$$

III. Нейтральна лінія проходить по грані 2-3-5-6.

$$a = 49,5 \text{ см}, \quad d = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{654,75}{49,5} = -13,23 \text{ см}; \quad y_{\text{я}} = 0.$$

IV. Нейтральна лінія проходить по грані 6-7.

$$a = \infty, \quad d = 30 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = 0; \quad y_{\text{я}} = -\frac{353,33}{30} = -11,78 \text{ см}.$$

На рис. 9.13 показане ядро перерізу.

9.5. Стійкість стиснутих стержнів

9.5.1. Поняття про стійкість і критичну силу

Під стійкістю розуміється властивість системи зберігати свій стан при зовнішніх впливах. Наприклад (рис. 9.14, а), балка AB при дії заданого навантаження прогинається в цілком визначеному напрямку на строго встановлену величину, і її зігнута вісь приймає єдиний можливий (стійкий) стан. Якщо система такою властивістю не володіє, то вона називається нестійкою. Найбільш простим випадком є втрата стійкості центрально стиснутого стержня (рис. 9.14, б).

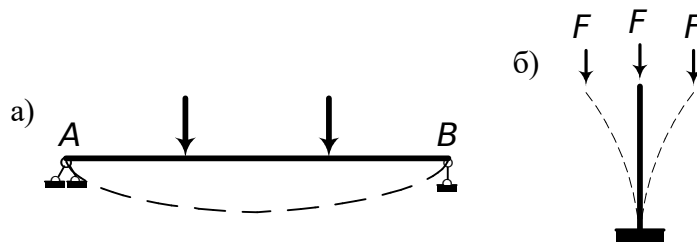


Рис. 9.14. До демонстрації стійкого і нестійкого станів

При невеликому навантаженні стовп залишається прямим і зазнає простого стискання. При постійному зростанні навантаження настає такий момент, коли прямолінійна форма рівноваги стає нестійкою і з'являється можливість скривлення стержня в будь-який з двох боків у площині найменшої жорсткості.

Найменше значення стискальної сили, при якій стиснутий стержень втрачає спроможність зберігати прямолінійну форму рівноваги, називається *критичним*.

Система при втраті стійкості може поводитися по-різному. Звичайно відбувається перехід до деякого нового стану рівноваги, що в переважній більшості випадків супроводжується великими переміщеннями, виникненням пластичних деформацій або повним руйнуванням.

Найбільш яскраво явище втрати стійкості виявляється в легких тонкостінних конструкціях. Тому при проектуванні подібних конструкцій одночасно з розрахунком на міцність ведеться і розрахунок на стійкість. Якщо не гарантована стійкість усієї споруди або її окремих елементів, то втрачає сенс і перевірка на міцність, тому що при втраті стійкості миттєво

змінюється форма рівноваги (пряма стійка скривлюється), і майже завжди нова форма рівноваги супроводжується швидким наростанням напружень, які в остаточному підсумку і призводять до руйнування. Необхідно підкреслити, що втрата стійкості може відбутися і при напруженнях, значно менших від тих, що припустимі з точки зору міцності конструкції.

Підтвердженням цьому є експеримент із тонкою лінійкою. При деякому стискальному зусиллі лінійка починає згинатися. Якщо зусилля зменшується, то вона повертається у вихідний стан.

З численних задач стійкості конструкцій у курсі опору матеріалів звичайно обмежуються розглядом тільки задачі про стійкість стиснутого стержня, залишаючи більш складні випадки для спеціального курсу “Стійкість і динаміка споруд”.

9.5.2. Формула Ейлера* для визначення величини критичної сили

Розглянемо стержень AB , шарнірно обіпертий по кінцях. Припустимо, що стержень під дією стискальної сили трохи зігнувся. Будемо розглядати нескінченно малі відхилення стояка від початкового положення, при яких опускання точки A мізерно мале, і ним можна знехтувати.

Згинальний момент у перерізі X (рис. 9.15)

$$M_x = Fy. \quad (9.25)$$

Диференціальне рівняння зігнутої осі стержня має вигляд (див. п. 6.6)

$$EJ y'' = -M_x = -Fy. \quad (9.26)$$

* Леонард Ейлер (1707-1783) – народився у Базелі, в Швейцарії. Геніальний математик і механік, який більше 30 років працював в Росії. Член Академій у Берліні і Санкт-Петербурзі. Останні 13 років працював у повній сліпоті, диктуючи свої роботи учням.

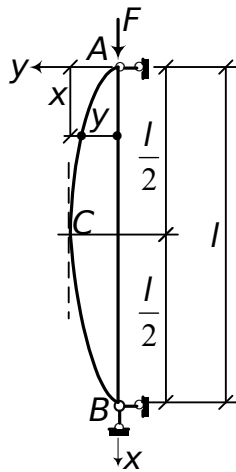


Рис. 9.15. До виведення формули Ейлера

Позначимо $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$, тоді рівняння (9.26) набуває вигляду

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \quad (9.27)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x. \quad (9.28)$$

Продиференціюємо (9.28) два рази по x :

$$y' = -\kappa C_1 \sin \kappa x + \kappa C_2 \cos \kappa x, \quad (9.29)$$

$$y'' = -\kappa^2 C_1 \cos \kappa x - \kappa^2 C_2 \sin \kappa x.$$

Якщо підставити (9.28) і друге рівняння (9.29) у рівняння (9.27), то можна переконатися, що (9.28) є розв'язком (9.27).

Постійні інтегрування C_1 і C_2 знайдемо з граничних умов.

При $x=0$ $y=0$. Звідси

$$C_1 = 0.$$

При $x=l$ $y=0$. Підставимо цю граничну умову в (9.28). У результаті одержимо

$$y = C_2 \sin \kappa l = 0. \quad (9.30)$$

Якщо $C_2 = 0$, то y завжди дорівнює нулю, це суперечить прийнятому припущенню, що стержень прогнувся, отже, $C_2 \neq 0$.

Тоді, щоб задовольнити умову (9.30), необхідно, щоб

$$\sin \kappa l = 0.$$

Це буде в тому випадку, якщо

$$\kappa l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Випадок $\kappa l = 0$ відкидаємо, тому що тут $l \neq 0$, а $\kappa = 0$. Але $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$. Щоб була справедлива рівність $\kappa^2 = \frac{F}{EJ} = 0$, необхідно, щоб $F = 0$, тому що $E \neq 0$ і $J \neq 0$. Рівність $F = 0$ означає, що аналізований стержень не має навантаження, а це суперечить умовам задачі. Тому цей випадок відкидаємо.

Візьмемо $\kappa l = \pi$. Піднесемо до квадрата і підставимо значення κ :

$$\frac{F}{EJ} l^2 = \pi^2.$$

Звідси

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (9.31)$$

Це найменше значення сили F , називане *критичною силою*. Формула (9.31) була отримана в 1744 р. великим математиком Леонардом Ейлером. Тому цю формулу називають формулою Ейлера, а визначену за її допомогою критичну силу – ейлеровою силою. Формула (9.31) показує, що критична сила пропорційна найменшій жорсткості EJ й обернено пропорційна квадрату довжини стержня.

При виведенні формули (9.31) довільна постійна C_2 залишилася невизначеною, тобто

$$y = C_2 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9.32)$$

Звідси випливає, що при втраті стійкості вісь стержня скривлюється по півхвилі синусоїди, чисельні значення ординат якої невідомі. Нас це не повинно хвилювати, тому що при розрахунку на стійкість (див. п. 9.5.5) необхідно знати тільки величину критичного навантаження.

Розглянемо інші випадки розв'язків рівняння (9.30), як-от $\kappa l = 2\pi$, $\kappa l = 3\pi$, \dots , $\kappa l = n\pi$.

Для цих випадків

$$F_2 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; \quad F_3 = \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; \quad \dots; \quad F_n = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \quad (9.33)$$

$$y_2 = C_2 \sin \frac{2\pi x}{l}; \quad y_3 = C_2 \sin \frac{3\pi x}{l}; \quad \dots; \quad y_n = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l},$$

тобто другій критичній силі відповідає форма втрати стійкості по двох півхвилях синусоїди, третій – по трьох півхвилях і т. д.

Таким чином, ми знайшли цілий ряд значень критичних сил і відповідні їм форми втрати стійкості. Але якщо стержень втрачає стійкість, згинаючись по одній півхвилі синусоїди (9.32) при найменшій критичній

силі (9.31), то який фізичний зміст мають всі інші значення (9.33)? Причина невідповідності полягає у використанні наближеного виразу кривини

$$\frac{1}{\rho} = y''.$$

Якщо скористатися точним її виразом (див. п. 6.6)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}},$$

то одержимо нелінійне диференційне рівняння

$$EJ \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = -Fy. \quad (9.34)$$

Розв'язок цього рівняння показує, що амплітуда скривлення осі стержня змінюється так, як показано на рис. 9.16.

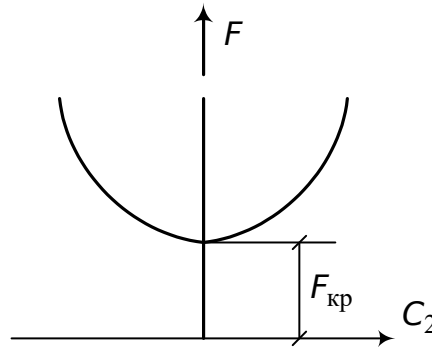


Рис. 9.16. Залежність між амплітудою прогину стержня і стискальною силою

При $F < F_{кр}$ стержень має тільки одну – прямолінійну – форму рівноваги, і ця форма рівноваги стійка.

При $F > F_{кр}$ поряд із прямолінійною має місце інша – криволінійна – форма рівноваги, і при цьому прогини стержня різко зростають, виникають дуже великі згинальні моменти, які в остаточному підсумку викликають його руйнування. Практичне значення має тільки сила, що визначається за (9.31), тобто при $n=1$, при якій можлива біфуркація рівноважного стану. Всі інші критичні сили відпадають, тому що вони є наслідком розв'язку наближеного лінійного рівняння стійкості. Наближене рівняння (9.27) годиться для визначення критичного вантажу (9.31). Визначати ж зігнуту вісь стержня і розміри прогинів при навантаженні вище критичного на підставі цього рівняння не можна.

9.5.3. Формула Ейлера при різноманітних умовах закріплення кінців стержня

Формула Ейлера отримана в припущенні шарнірного обпирання стержня по кінцях. На практиці зустрічаються й інші способи закріплення кінців (рис. 9.17).

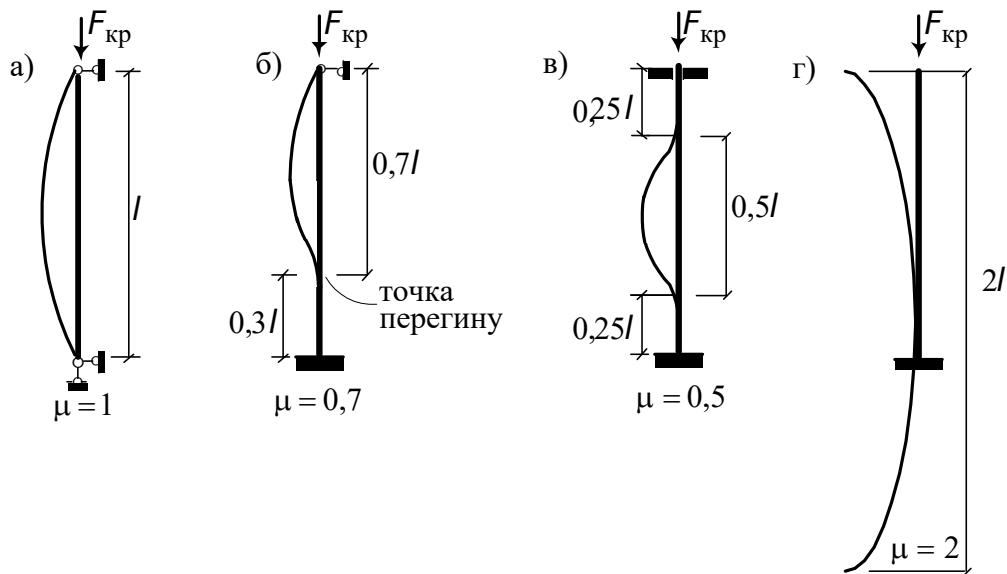


Рис. 9.17. Значення коефіцієнта приведеної довжини для стиснутих стержнів при різноманітних способах закріплення кінців

Критична сила для кожного з цих стержнів може бути отримана за узагальненою формулою

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{пр}^2}; \quad (9.35)$$

$$l_{пр} = l \cdot \mu, \quad (9.36)$$

де μ – коефіцієнт приведеної довжини;

$l_{пр}$ – приведена довжина стержня.

Довжину $l_{пр}$ можна інтерпретувати як деяку умовну довжину шарнірно обіпертого по кінцях стержня, для якого критична сила визначається за (9.31).

Для випадку, зображеного на рис. 9.17, б, зігнута вісь стержня має точку перегину, розташовану на відстані $l/3$ від нижнього затисненого кінця. Таким чином, щоб звести аналізований стержень до типу на рис. 9.17, а потрібно взяти довжину $0,7l$.

Для стержня, показаного на рис. 9.17, в, при втраті стійкості пружна лінія має дві точки перегину, розташовані у чвертях. Тому коефіцієнт приведеної довжини дорівнює $0,5$.

При втраті стійкості консольного стержня (рис. 9.17, г) верхній кінець відхиляється на деяку величину, нижній кінець при цьому залишається вертикальним. Для одержання повної відповідності з випадком на рис. 9.17, а продовжимо подумки зігнуту вісь стержня униз.

Тоді форма втрати стійкості буде збігатися з випадком на рис. 9.17, а, але $\mu = 2$.

9.5.4. Границі придатності формули Ейлера

Оскільки при дії критичного навантаження стержень усе ще зберігає початкову прямолінійну форму рівноваги, то критичні напруження в ньому можна знайти як при простому стисканні, тобто

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{пр}^2 A}.$$

Спростимо отриману формулу. Для цього замінімо

$$J = i^2 A,$$

де i^2 – квадрат радіуса інерції (див. п. 2.3.3).

Тоді

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Позначимо ще раз

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i} \tag{9.37}$$

λ назвемо цю величину гнучкістю стержня. Остаточно формула для критичних напружень буде мати вигляд

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{9.38}$$

Формула Ейлера (9.31) була виведена в припущенні, що деформування матеріалу підпорядковується закону Гука (див. п. 3.9), тобто напруження (9.38), що виникає при критичному навантаженні, не повинно перевищувати границю пропорційності, $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$.

Найменше значення гнучкості стержня, при котрій формули (9.31) або (9.35) і (9.38) ще застосовні, визначається в такий спосіб:

$$\lambda_{гран} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{9.39}$$

Гранична гнучкість, як очевидно з (9.39), залежить тільки від фізико-механічних властивостей матеріалів стержня – його модуля пружності і границі пропорційності. Значення граничних гнучкостей для стержнів, виконаних із деяких матеріалів, що найчастіше зустрічаються, наведені в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Значення σ_T , $\sigma_{пц}$, a , b , $\lambda_{гран}$, λ_0

Матеріал	σ_T	$\sigma_{пц}$	a	b	$\lambda_{гран}$	λ_0
	МПа					
Сталь Ст2	220	190	264	0,7	105	62

Сталь Ст3	240	200	310	1,14	100	61
Сталь 20, Ст4	260	220	328	1,11	96	60
Сталь 25, Ст5, 36Л	280	240	350	1,15	92	57
Сталь 35, 45Л	320	270	398	1,43	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,67	85	52
Сталь 50, 55Л	380	320	473	1,87	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	350	300	429	1,52	83	50
Сталь 30ХНА, 35ХМФА, 30ГСА	850	700	1000	5,57	55	28
Дюралюміній Д16Т	320	255	406	2,83	53	30
Дюралюміній Д6Т	280	220	300	1,43	57	15
Сосна, ялина	-	-	29,3	0,194	70	-
Чавун СЧ 12-28, СЧ 15-32 та ін.	-	-	-	-	80	10

Отже, формули (9.31), (9.35) для визначення критичної сили стисненого стержня застосовні за умови $\lambda \geq \lambda_{\text{гран}}$. Дійсні критичні сили і критичні напруження для стержнів, гнучкість яких нижче за граничну, значно менше від величин, які визначаються за формулою Ейлера (9.31). Для таких стержнів критичні напруження визначаються за емпіричними формулами. Так, критичні напруження для сталевих, дюралюмінієвих і дерев'яних стержнів визначаються за лінійною емпіричною залежністю

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (9.40)$$

яку називають формулою Ясинського*. Коефіцієнти a і b , що мають розмірність напруження, визначаються експериментально. Для деяких матеріалів їхні значення дані в табл. 9.1.

При розрахунках за формулою (9.40) приведені довжини стержнів без великої похибки можна приймати такими самими, як і при розрахунках за формулою Ейлера. Формула (9.40) застосовна при гнучкості аналізованого стержня, що лежить у межах $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гран}}$, де λ_0 – те значення гнучкості, при якому критичне напруження дорівнює граничному (небезпечному) напруженню при чистому стисканні (без поздовжнього згину). Для стержнів із пластичних і крихко-пластичних матеріалів показане напруження дорівнює границі текучості (фізичному $\sigma_{\text{т}}$, або умовному σ_{02} , див. розд. 3). Для крихких матеріалів граничне напруження дорівнює границі міцності при стисканні ($\sigma_{\text{в}}$, див. розд. 3). Значення $\lambda_{\text{гран}}$ і λ_0 дані в табл. 9.1.

* Фелікс Станіславович Ясинський (1856-1899) – російський інженер і механік.

У спеціальній літературі по стійкості є й інші формули для визначення критичної сили для стержнів, що працюють у пружно-пластичній стадії. Ці формули пов'язані з іменами Ф.С. Ясинського, Ф. Енгессера, Кармана, Ф. Шенлі.

9.5.5. Практичний розрахунок стиснутих стержнів

Як було показано раніше, стиснуті стержні за методикою їхнього розрахунку поділяють на три групи:

- 1) стержні великої гнучкості ($\lambda \geq \lambda_{\text{гран}}$), для яких критичне напруження визначають за формулою (9.38);
- 2) стержні середньої гнучкості ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гран}}$), для них критичне напруження визначають за емпіричною формулою (9.40);
- 3) стержні малої гнучкості ($\lambda < \lambda_0$), для яких критичні напруження приймають постійними, тобто стержні розраховують не на стійкість, а на міцність.

Як видно з табл. 9.1, для стиснутих стержнів великої гнучкості застосування сталі з високими механічними характеристиками не виправдано, тому що величина модуля пружності E майже однакова для сталей різних марок і, отже, застосування сталі більш високої якості не призводить до підвищення $\sigma_{\text{кр}}$.

Не можна припустити, щоб у стиснутих стояках виникли нормальні напруження, що дорівнюють критичним. Тому необхідно від критичних напружень, визначених при великій гнучкості за формулою (9.38), а при малій – за формулою Ясинського (9.40), перейти до допустимих напружень при поздовжньому згині. Для цього потрібно критичні напруження розділити на коефіцієнт запасу K . Останній приймають: для металів $K = 2 \dots 3$, для дерева $K = 3 \dots 4$. Цим коефіцієнтом запасу враховується, крім чистого поздовжнього згину, ще цілий ряд побічних факторів: невеликий можливий ексцентриситет прикладення навантаження, невелике початкове скривлення стержня, неоднорідність матеріалів стержнів та ін. Порівнюючи допустиме напруження при поздовжньому згині з допустимим напруженням при простому стисканні, зазначимо, що допустиме напруження при поздовжньому згині складає лише деяку частку від допустимого напруження при простому стисканні.

Позначивши $[\sigma]_{\text{стійк}} = \varphi[\sigma]_c$, будемо розрахунок стержнів на поздовжнє згинання провадити за тією самою формулою, як і на просте стискання:

$$\sigma = \frac{F}{A \cdot \varphi} \leq [\sigma]_c. \quad (9.41)$$

Тут σ – нормальне напруження, що виникає в поперечному перерізі стержня; F – сила, що стискує стержень; A – площа поперечного перерізу стержня без урахування місцевих ослаблень (брутто), тому що

місцеві ослаблення (отвори під заклепки або болти, канавки і т. п.) не впливають помітно на значення критичної сили; $[\sigma]_c$ – головне допустиме напруження на стискання, тобто установлене без небезпеки поздовжнього згину; Φ – коефіцієнт поздовжнього згину, величина якого залежить від матеріалу і гнучкості стержня (табл. 9.2). Він визначає ступінь зниження допустимого напруження при поздовжньому згині.

При розрахунку за методом граничних станів (див. розд. 3) умова міцності (9.41) набуває вигляду

$$\sigma_{\text{розр}} = \frac{F}{\Phi^* A_{\text{бр}}} \leq R, \quad (9.42)$$

де $\sigma_{\text{розр}} = \frac{\sigma}{\Phi^*}$ – розрахункове напруження; R – розрахунковий опір матеріалу; Φ^* – коефіцієнт поздовжнього згину при розрахунку за методом граничних станів, встановлюється нормами (див. табл. 9.2) залежно від розрахункового опору.

Головні допустимі напруження на стискання при розрахунку за формулою (9.41) наведені в табл. 9.3.

Таблиця 9.2

Значення коефіцієнтів поздовжнього згину

Гнучкість $\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i}$	Сталь марок			Чавун марок		Дюра-люміній Д16Т	Дерево (сосна, ялина)	Сталь із розрахунковим опором $R=240\text{МПа}$ СНІП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177

200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147
220	0,16	0,13	0,11					0,135

Таблиця 9.3

Значення допустимих напружень на стискання

Матеріал	$[\sigma]_c$, МПа
Сталь Ст3, Ст4	160
Сталь Ст5	175
Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2СД, 15ХСНД	210
Дюралюміній Д16Т	170
Чавун СЧ 12-28, СЧ 15-32	130
Чавун СЧ 18-36, СЧ 21-40	150
Чавун СЧ 24-44, СЧ 28-48	170
Сосна, ялина	100
Дуб	130

До формул (9.41) і (9.42) входять дві невідомі величини Φ і A . Вони пов'язані між собою, проте залежність між ними не виражається простою формулою, отже, виключити одну з цих величин і виразити її через другу неможливо. Тому якщо задана стискальна сила, а також усі геометричні характеристики стержня, то перевірка міцності на стискання з урахуванням поздовжнього згину якихось ускладнень не викликає. А якщо необхідно підібрати переріз, то доводиться застосовувати послідовні наближення. Сутність цього підходу пояснимо на прикладі.

Заданий сталевий стержень зі Ст3 довжиною l , котрий стискається силою F . Потрібно знайти розміри поперечного перерізу, форма якого також задана (рис. 9.18); $[\sigma]_c=160$ МПа.

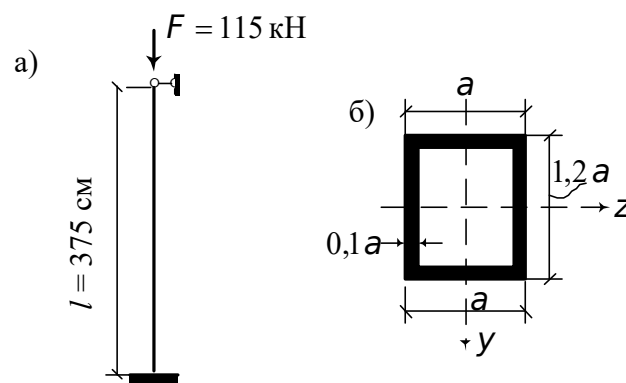


Рис. 9.18. Розрахункова схема стержня (а) і схема його поперечного перерізу (б)

Знайдемо геометричні характеристики перерізу:

площа $A = 0,4a^2$;

мінімальний момент інерції $J_{\min} = J_y = 0,0573a^4$;

мінімальний радіус інерції $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 0,379a$.

З формули (9.41) знайдемо

$$a = \sqrt{\frac{F}{0,4\varphi[\sigma]_c}}.$$

Тут, як і зазначалося раніше, невідомими є φ і a . Для розв'язку поставленої задачі застосовуємо метод послідовних наближень.

1 наближення. Задамо $\varphi = 0,19$ (див. табл. 9.2). Можна було взяти будь-яке інше значення φ з цієї таблиці. У багатьох випадках для першого наближення рекомендується приймати 0,5.

Обчислюємо $a = 9,72 \text{ см}$; $i_{\min} = 3,68 \text{ см}$; $\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 375}{3,68} = 71$.

За табл. 9.2 знаходимо коефіцієнт $\varphi = 0,81$.

Знайдене значення φ не дорівнює прийнятому в першому наближенні.

2 наближення. Приймаємо $\varphi_{\text{II}} = \frac{\varphi_{\text{I}} + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,81}{2} = 0,5$.

Повторюємо розрахунок: $a = 5,99 \text{ см}$; $i_{\min} = 2,27 \text{ см}$; $\lambda = 115,6$;
 $\varphi = 0,485$.

3 наближення. Приймаємо $\varphi_{\text{III}} = \frac{\varphi_{\text{II}} + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,485}{2} = 0,49$.

Повторюємо розрахунок: $a = 6,06 \text{ см}$; $i_{\min} = 2,297 \text{ см}$; $\lambda = 114$; $\varphi = 0,49$.

Оскільки прийняте значення φ у третьому наближенні ($\varphi_{\text{III}} = 0,49$) і знайдене за табл. 9.2, в результаті розрахунку ($\varphi = 0,49$) збігаються з наперед заданою точністю (звичайно 1%), то розрахунок вважається закінченим, і розмір a підібраним.

9.5.6. Урахування впливу зсувів при визначенні критичної сили

У будівельній практиці й особливо в мостобудуванні широко застосовують стержні, що складаються з окремих елементів, з'єднаних між собою решіткою або планками. Критична сила для таких складених

стержнів залежить як від геометричних розмірів гілок, так і від перерізу елементів штахету. При визначенні деформацій у стержнях поряд з урахуванням згинання іноді необхідно враховувати також вплив зсувів.

Розглянемо задачу про урахування зсувів у суцільному стержні.

Прогин стержня (рис. 9.15) у будь-якому перерізі X подамо як суму прогинів:

$$y = y_1 + y_2, \quad (9.43)$$

де y_1 – прогин, що утворився в результаті згину; y_2 – прогин, що утворився від зсувів.

Продиференціюємо рівняння (9.43) по X . У результаті одержимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}. \quad (9.44)$$

Відносний кут зсуву дорівнює (див. розд. 1)

$$\gamma = \frac{Q}{GA},$$

отже, з урахуванням того, що $\frac{dM}{dx} = Q$ (див. розд. 1), маємо

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{GA} \frac{dM}{dx}, \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{1}{GA} \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (9.45)$$

Згинальний момент у перерізі стержня (рис. 9.15, (9.25)) дорівнює

$$M_x = Fy.$$

Диференціюючи двічі по X , одержимо

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (9.46)$$

З урахуванням (9.46) рівняння (9.45) перетворюється до вигляду

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{F}{GA} \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (9.47)$$

Відомо (див. (9.26)), що

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Fy}{EJ}. \quad (9.48)$$

Підставимо (9.48) і (9.47) у (9.44), попередньо продиференціювавши цей вираз по X . Тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{Fy}{EJ} + \frac{F}{GA} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Звідси одержуємо таке диференціальне рівняння:

$$y'' + \kappa_1^2 y = 0, \quad (9.49)$$

де

$$\kappa_1^2 = \frac{F}{EJ \left(1 - \frac{F}{GA}\right)}. \quad (9.50)$$

Розв'язком цього рівняння буде (9.28). Далі, наслідуючи п. 9.5.2, одержимо

$$F = F_{кр} \frac{1}{1 + \frac{F_{кр}}{GA}}. \quad (9.51)$$

Позначивши

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{F_{кр}}{GA}},$$

перетворимо цю формулу до такого вигляду:

$$F = \alpha F_{кр}. \quad (9.52)$$

Оцінимо величину коефіцієнта α для суцільного перерізу. Відповідно до п. 9.5.4 $\frac{F_{кр}}{A}$ – критичне напруження. Прийmemo його таким, що дорівнює границі пропорційності для сталі, тобто $\sigma_{пл} = 200 \text{ МПа}$. Модуль зсуву прийmemo $8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Тоді знайдемо

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{400}}$$

і зробимо висновок, що для суцільного перерізу зсуви дуже мало впливають на величину критичної сили.

9.6. Розрахунок позацентрово стиснутого гнучкого стержня

Припустимо, що прямий стержень навантажений двома стискальними силами, прикладеними з ексцентриситетом e_0 (рис. 9.19).

Будемо вважати, що сили лежать в одній з головних площин інерції і викликають плоске згинання стержня.

Диференційне рівняння зігнутої осі стержня має вигляд

$$EJ y'' = -M_x = -F(e_0 + y). \quad (9.53)$$

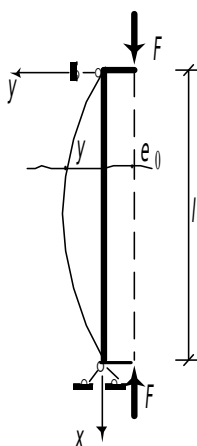


Рис. 9.19. Стержень, стиснутий ексцентрично прикладеними силами

Позначивши, як і раніше (див. п. 9.5.7),

$$\kappa^2 = \frac{F}{EJ},$$

одержимо замість (9.53) таке рівняння:

$$y'' + \kappa^2 y = -\kappa^2 e_0. \quad (9.54)$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд (див. також п. 9.5.2)

$$y_x = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x - e_0. \quad (9.55)$$

Постійні C_1 і C_2 знайдемо з граничних умов:

при $x=0$ $y_0=0$.

Звідси отримуємо

$$C_1 = e_0. \quad (9.56)$$

Друга гранична умова:

при $x=l$ $y_l=0$.

Звідси знаходимо

$$C_2 = \frac{e_0 (1 - \cos \kappa l)}{\sin \kappa l}. \quad (9.57)$$

Знайдені значення C_1 і C_2 підставляємо в (9.55). У результаті маємо

$$y_x = e_0 \left[\cos \kappa x + \frac{1 - \cos \kappa l}{\sin \kappa l} \sin \kappa x - 1 \right]. \quad (9.58)$$

Максимальний прогин буде посередині висоти стояка, тобто при $x = l/2$:

$$y_{l/2} = f = e_0 \left[\cos \kappa \frac{l}{2} + \frac{1 - \cos \kappa l}{\sin \kappa l} \sin \kappa \frac{l}{2} - 1 \right].$$

Залежність між прогином f і стискальною силою графічно подана на рис. 9.20. Звідси видно, що з наближенням сили F до критичного значення прогин стержня нескінченно збільшується незалежно від ексцентриситету e_0 .

Звичайно, прогин стержня не може бути нескінченно великим. Такий результат виявився можливим тільки завдяки тому, що при записі диференційного рівняння (9.53) був використаний наближений вираз для кривини осі стержня (див. (6.36)). Якщо ж скористатися точним виразом (9.34), то розв'язання задачі зведеться до розв'язання нелінійного диференційного рівняння, із якого випливає, що прогин стержня при будь-якому значенні стискальної сили має обмежене значення. Порівняння розв'язків точного і наближеного рівнянь показує, що при значеннях стискальної сили, менших $0,8F_{кр}$, показані розв'язки практично збігаються, і тому для таких випадків цілком виправданим є застосування розв'язку (9.58).

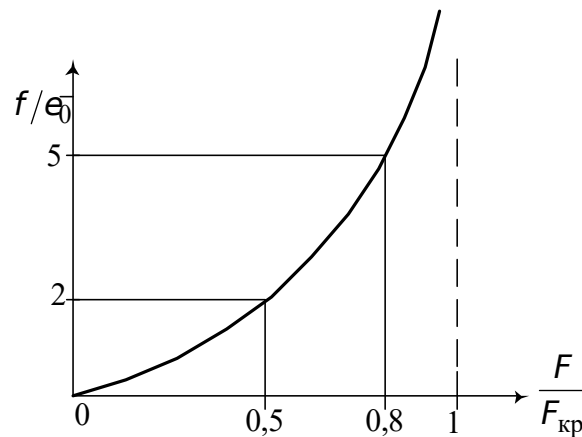


Рис. 9.20. Залежність між безрозмірною стискальною силою і безрозмірним максимальним прогином ексцентрично стиснутого стержня

При розрахунку на міцність стержнів, що стискаються позацентрово прикладеними силами, спочатку підбирається переріз, виходячи з умов стійкості (9.41):

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]_c \varphi}.$$

Потім при заданій величині стискальної сили F за допомогою рівняння (9.58) визначаються найбільший прогин і момент

$$M = F(f + e_0).$$

Перевірку міцності здійснюють за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{F(f + e_0)}{W} \leq [\sigma].$$

9.7. Поздовжньо-поперечне згинання

Розглянемо шарнірно обіперту балку, навантажену поперечним навантаженням і поздовжніми силами P (рис. 9.21). Початок координат приймемо в точці A . Вісь Y направимо униз, а вісь X – управо.

Згинальний момент у будь-якому перерізі балки дорівнює

$$M_x = M_x^0 + Py, \quad (9.59)$$

де M_x^0 – згинальний момент від поперечного навантаження.

Продиференціюємо рівняння (9.59) двічі по X :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{d^2 M_x^0}{dx^2} + P \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (9.60)$$

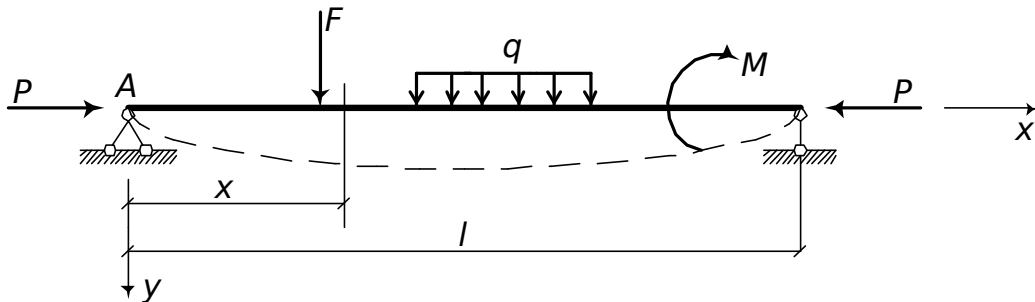


Рис. 9.21. Розрахункова схема балки, що знаходиться під дією поперечних і поздовжніх навантажень

Будемо припускати, що поперечне навантаження подане зосередженими силами, рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q і зосередженим моментом. Тоді

$$\frac{d^2 M_x^0}{dx^2} = -q. \quad (9.61)$$

До цього результату ми прийшли, записавши рівняння для моменту M_x^0 від перерахованих силових факторів і узявши другу похідну від отриманих функцій. Формула (9.61) була отримана нами раніше (див. п. 1.6).

З урахуванням (9.61) рівняння (9.60) перетвориться до такого вигляду:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = P \frac{d^2 y}{dx^2} - q.$$

З огляду на те, що $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ}$, знайдемо

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -P \frac{M_x}{EJ} - q.$$

Уведемо позначення

$$\kappa^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Тоді прийдемо до такого неоднорідного диференційного рівняння:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \kappa^2 M = -q. \quad (9.62)$$

Загальним розв'язком цього диференційного рівняння буде функція

$$M_x = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x - \frac{q}{\kappa^2}. \quad (9.63)$$

У тому, що ця функція є розв'язком (9.62), можна переконатися, якщо взяти другу похідну від (9.63) і разом із (9.63) підставити в (9.62).

Постійні інтегрування виразимо через початкові параметри M_0 і Q_0 - згинальний момент і поперечну силу на початку координат.

Спочатку запишемо рівняння для поперечної сили:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -\kappa C_1 \sin \kappa x + \kappa C_2 \cos \kappa x. \quad (9.64)$$

Граничні умови:

$$\text{при } x=0 \quad M_x = M_0;$$

$$\text{при } x=0 \quad Q_x = Q_0.$$

Звідси знайдемо

$$\begin{aligned} C_1 &= M_0 + \frac{q}{\kappa^2}; \\ C_2 &= \frac{Q_0}{\kappa}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Підставимо знайдені постійні інтегрування (9.65) у (9.63) і (9.64). У результаті одержимо

$$M_x = M_0 \cos \kappa x + \frac{Q_0}{\kappa} \sin \kappa x - \frac{q}{\kappa^2} (1 - \cos \kappa x); \quad (9.66)$$

$$Q_x = -\kappa M_0 \sin \kappa x + Q_0 \cos \kappa x - \frac{q}{\kappa} \sin \kappa x. \quad (9.67)$$

Запишемо рівняння (9.66) і (9.67) для загального випадку навантаження балки (рис. 9.22) поперечним навантаженням:

$$M_x = M_0 \cos kx + \frac{Q_0}{k} \sin kx \Big|_1 - \frac{q}{k^2} [1 - \cos k(x-a)] \Big|_2 + \frac{q}{k^2} [1 - \cos k(x-b)] \Big|_3 - \frac{F}{k} \sin k(x-c) \Big|_4 + m \cos k(x-d) \Big|_5; \quad (9.68)$$

$$Q_x = -k M_0 \sin kx + Q_0 \cos kx \Big|_1 - \frac{q}{k} \sin k(x-a) \Big|_2 + \frac{q}{k} \sin k(x-b) \Big|_3 - F \cos k(x-c) \Big|_4 - k m \sin k(x-d) \Big|_5. \quad (9.69)$$

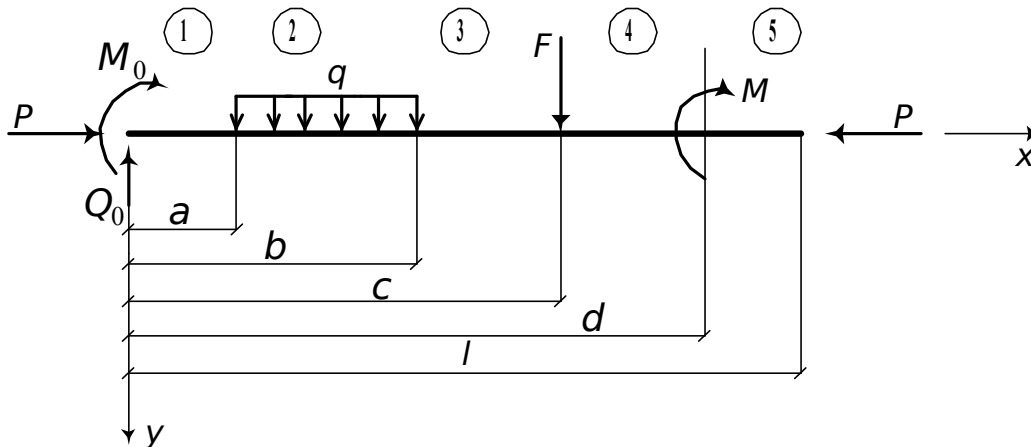


Рис. 9.22. Схема навантаження балки поперечним навантаженням

Після розв'язання рівнянь (9.66), (9.67) знаходимо згинальний момент і поперечну силу в будь-якому перерізі балки. При цьому поперечні навантаження і поздовжні сили, як і початкові параметри, передбачаються заданими.

Тепер можна з формули (9.59) знайти прогин у будь-якому перерізі:

$$y_x = \frac{M_x - M_x^0}{P}.$$

Згинальний момент від поперечного навантаження, що входить до цієї формули, необхідно попередньо визначити. Це не важко. Перевірку міцності балки слід робити за формулою позацентрового стискування (див. п. 9.4), тобто

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{W} \leq [\sigma].$$

При малих значеннях стискаючої сили P (при малих k) отримане рішення збігається з тим, яке дає поперечне навантаження. Зі зростанням сили P згинальний момент (9.68) різко зростає.

При складних видах поперечного навантаження (рис. 9.22) визначення згинальних моментів стає трудомістким. У таких випадках зручним виявляється застосувати наближені, менш точні, але більш прості методи розрахунку.

Подамо прогин у вигляді суми:

$$y = y_0 + \Delta y. \quad (9.70)$$

Тут y_0 – прогин, викликаний тільки поперечним навантаженням (без урахування сили P); Δy – додатковий прогин, що з'явився в результаті дії стискаючої сили P .

Звернемося до рівняння, яке ми раніше неодноразово використовували:

$$EJ \Delta y'' = -P y. \quad (9.71)$$

Припустимо, що прогин Δy описується синусоїдою (синусоїда є формою втрати стійкості шарнірно обіпертого по кінцях центрально стиснутого стержня):

$$\Delta y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тоді

$$\Delta y'' = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

З рівняння (9.71) маємо

$$\frac{\pi^2}{l^2} \Delta y = \frac{P}{EJ} y.$$

З урахуванням (9.70) знайдемо

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}, \quad \text{де } P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Припускаючи, що згинальні моменти пропорційні прогинам, можна записати

$$M_x = \frac{M_x^0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (9.72).$$

Перевіримо отриману формулу (9.72) на прикладі шарнірно обіпертої балки з рівномірно розподіленим навантаженням q . Нехай поздовжня сила $P = 0,5P_{кр}$. Тоді

$$M_{\max} = 0,25ql^2.$$

Тепер подивимося, що дає точна формула (9.66):

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \sqrt{\frac{P_{кр}}{2EJ}} = \frac{\pi}{l\sqrt{2}}, \quad M_{\max} = 0,252ql^2.$$

Порівнюючи отримані значення, бачимо, що вони практично збігаються.

Розділ 10

РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЯКІ ЗАЗНАЮТЬ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Всі тіла мають протяжність у трьох вимірах, тому, здавалося б, плоска задача на практиці не може зустрічатися. Проте це не так. Як показано в розд. 4, цілий клас задач удається звести до плоских, які характеризуються тим, що одну з осей координат можна відкинути і припускати, що все явище відбувається ніби в одній площині. Нижче будуть розглянуті такого роду задачі, що мають важливе практичне значення.

10.1. Диференціальні рівняння рівноваги

Як було показано в розд. 4, при плоскому напруженому стані складові напружень $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ дорівнюють нулю, інші три складові напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не залежать від координати Z , тобто залишаються постійними за всією товщиною елемента. Роздивимося зміну складових цих напружень із зміною положення точки. З цією метою виведемо рівняння рівноваги для малого прямокутного паралелепіпеда зі сторонами dx, dy і 1 (рис. 10.1).

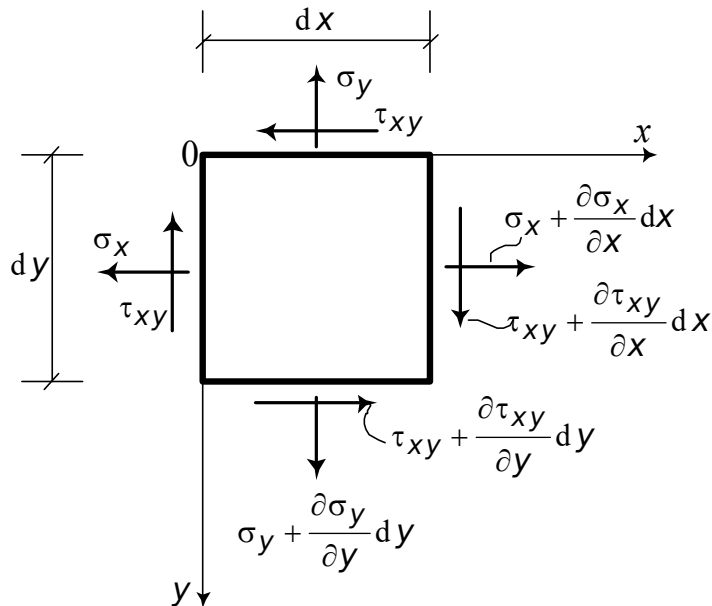


Рис. 10.1. Схема напружень, що діють на малий прямокутний паралелепіпед

На лівій і верхній гранях виділеного паралелепіпеда нормальні і дотичні напруження є в загальному випадку функціями трьох координат X, Y, Z . При переході, наприклад, до правої грані координата X одержує збільшення dx . Тоді нормальні напруження виражаться в такий спосіб:

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z).$$

Останній вираз розкладемо у ряд:

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \dots$$

Всі члени з малими величинами вищих ступенів, крім першого, відкидаємо. У результаті одержуємо

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Міркуючи так само, знайдемо нормальні і дотичні напруження на інших гранях (рис. 10.1). Слід зазначити, що об'ємна сила, що діє на елемент, якою ми знехтували при розгляді рівноваги трикутної призми (див. п. 4.2), повинна бути тепер прийнята до уваги, тому що вона буде тут величиною такого самого порядку, що і члени, які залежать від аналізованих змін складових напружень. Позначимо X і Y складові цієї сили, віднесені до одиниці об'єму. Тоді проекції об'ємної сили, що припадає на весь об'єм, дорівнюють $X dx dy$ і $Y dx dy$. Якщо об'ємною силою є лише сила ваги (саме цей випадок ми будемо розглядати при практичних розрахунках) і вісь Y спрямована униз (див. рис. 10.1), то

$$\begin{aligned} X &= 0; \\ Y &= \rho g, \end{aligned} \tag{10.1}$$

де ρ – щільність матеріалу (кількість маси, укладеної в одиниці об'єму);
 g – прискорення сили ваги.

Спроєктуємо всі сили, що діють на виділений елемент, спочатку на вісь X , а потім на вісь Y і врахуємо (10.1). У результаті одержимо диференціальні рівняння рівноваги для плоскої задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

10.2. Умови на контурі

Рівняння (10.2) повинні бути задоволені у всіх точках усередині об'єму тіла. Складові напружень змінюються за об'ємом тіла, і коли ми підходимо до контуру, то вони повинні бути такими, щоб знаходитися в рівновазі з зовнішніми силами, прикладеними до контуру плоского тіла. Таким чином, зовнішні сили можна розглядати як продовження внутрішнього розподілу напружень.

З (4.21), (4.22) одержуємо умови на поверхні тіла:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m; \\ \bar{Y} &= \sigma_y \cdot m + \tau_{xy} \cdot l, \end{aligned} \tag{10.3}$$

де \bar{X} і \bar{Y} – складові поверхневих сил, віднесені до одиниці площі; $l = \cos(Nx)$, $m = \cos(Ny)$ – косинуси кутів між нормаллю N до аналізованої площадки і відповідно осями X і Y .

У випадку прямокутної пластинки (рис. 10.2) умови (10.3) спрощуються.

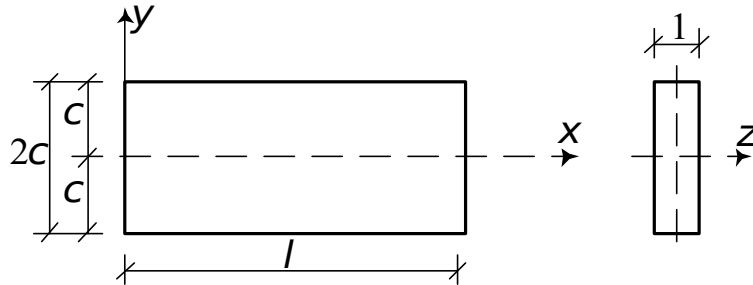


Рис. 10.2. Схема прямокутної пластинки

Для горизонтальних сторін пластинки $l = 0$, $m = \pm 1$ і

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}; \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y.$$

Для вертикальних сторін $l = \pm 1$, $m = 0$ і

$$\bar{X} = \pm \sigma_x; \quad \bar{Y} = \pm \tau_{xy}.$$

Додатний знак слід брати тоді, коли нормаль має напрямок додатного напрямку осі, і від'ємний знак – при протилежному напрямку. Таким чином, на контурі складові напружень дорівнюють складовим поверхневих сил, віднесеним до одиниці площі контуру.

10.3. Умови сумісності

Задачею теорії пружності звичайно є визначення напруженого стану в тілі, що зазнає впливу даних сил. У випадку плоскої задачі необхідно розв'язати диференційні рівняння (10.2), і розв'язок повинен бути таким, щоб були задоволені умови на контурі (10.3). Вказаних рівнянь, що містять три складові напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} , недостатньо для визначення цих складових. Задача є статично невизначеною. Для того щоб одержати розв'язок, слід розглянути, крім того, і пружну деформацію. Математичний вираз умови сумісності напруженого стану з існуванням безперервних функцій U і V , що визначають деформацію, отримується на підставі виразів (1.20), (1.21), (1.23):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ці три складові деформації виражаються за допомогою двох функцій U і V . Отже, останні не можуть бути узяті довільно, і є певна залежність між складовими деформації, яку ми й одержимо.

Диференціюючи перше з цих виразів двічі по Y , друге – двічі по X , третє – один раз по Y й один раз по X , одержимо

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (10.4)$$

Отримана диференційна залежність (10.4) називається умовою спільності.

Виразимо умову спільності через складові напружень. Для цього підставимо залежності закону Гуку при плоскому напруженому стані (4.6), (4.7), (4.5) у (10.4). У результаті знайдемо

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} [2(1 + \nu)]. \quad (10.5)$$

Виразимо праву частину рівняння (10.5) через функції від нормальних напружень. Для цього диференціюємо перше з рівнянь рівноваги (10.2) по X , друге – по Y і складаємо:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (10.6)$$

Підставляємо (10.6) у (10.5) і після найпростіших перетворень отримаємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0. \quad (10.7)$$

Отримане рівняння можна записати і так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (10.8)$$

де $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ – оператор Лапласа другого порядку, який показує, що потрібно взяти другі похідні від $(\sigma_x + \sigma_y)$ окремо по X і Y та скласти їх.

Зазначимо, що рівняння сумісності (10.8) справедливе і для плоскої деформації. У цьому можна переконатися, якщо підставити вирази для закону Гука при плоскій деформації (4.2), (4.3), (4.4) у (10.4) і зробити ті самі перетворення. Проте це буде спостерігатися тільки для аналізованої постановки плоскої задачі, коли єдиною об'ємною силою є маса тіла.

10.4. Функція напружень

Розв'язання плоских задач у двох вимірах зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги (10.2) разом із рівнянням сумісності (10.8) і умовами на контурі (10.3). Цієї системи рівнянь звичайно достатньо для повного з'ясування розподілу напружень у плоскій задачі.

Звичайним прикладом розв'язання цих рівнянь є введення нової функції, що називається функцією напружень:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho g x. \quad (10.9)$$

Неважко переконатися, що рівняння рівноваги будуть задоволені тотожно. Таким чином, ми одержали цілий ряд розв'язків рівнянь рівноваги (10.2). Дійсним розв'язком буде те, що задовольняє також рівнянню сумісності (10.8). Підставимо функцію напружень (10.9) у рівняння (10.8). У результаті одержимо

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (10.10)$$

Рівняння (10.10) може бути записане в скороченому вигляді з застосуванням оператора Лапласа (див. (10.8)):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{або} \quad (10.11)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0.$$

Отже, у нас було спочатку вісім спільно розв'язуваних рівнянь: два рівняння рівноваги (10.2); три рівняння, що зв'язують деформації і переміщення (1.20), (1.21) і (1.23), і три фізичні рівняння (1.27). Далі, виключивши переміщення, перейшли до шести рівнянь (10.4), (10.8) і (1.27). Тепер же залишилося тільки одне рівняння (10.10) або (10.11). Розв'язуючи яку-небудь задачу, ми повинні підібрати функцію φ так, щоб вона задовольняла рівнянню (10.10) і умовам на контурі (10.3). Підбравши функцію φ , ми можемо одержати відповідні формули для напружень і знайти напруження в будь-якій точці пружного тіла.

Зазначимо також, що рівняння (10.10) носить назву бігармонічного рівняння.

10.5. Розв'язання диференціального рівняння плоскої задачі за допомогою поліномів

Як було показано в попередньому підрозділі, необхідно підібрати функцію φ , що задовольняла б диференціальному рівнянню (10.10) і умові на контурі. Звичайно це буває важко, а іноді і взагалі не вдається зробити. Тому спробуємо спочатку розв'язати обернену задачу. Будемо задаватися видом функції φ і досліджувати, якому випадку напруженого стану вона відповідає.

Задамося функцією напружень у вигляді такого виразу:

$$\varphi = 2xy + \frac{4}{3}y^3 + 6x^3y - 3y^2. \quad (10.12)$$

Диференціальне рівняння (10.10) тотожно задовольняється. Одержимо формули для визначення нормальних і дотичних напружень у будь-якій точці пластинки без урахування її власної ваги (рис. 10.3):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 36xy; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 8y - 6; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2(1 + 9x^2).$$

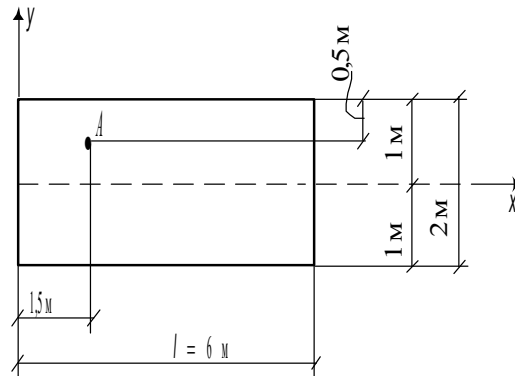


Рис. 10.3. Схема заданої пластинки

Визначимо зовнішні сили, прикладені до граней пластинки. При цьому використовуємо умови на поверхні тіла (10.3). Приймаючи до уваги сказане в п. 10.2, знайдемо зовнішні сили.

Ліва грань: $x = 0$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\sigma_y = 0$;

нормаль до площадки не збігається з додатним напрямком осі X , отже, $\tau_{xy} = -2$;

$$\bar{X} = -(8y - 6), \quad \bar{Y} = 2.$$

Верхня грань: $y = 1$ м; $\sigma_y = 36x$; $\sigma_x = 2$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$;

нормаль до площадки збігається з додатним напрямком осі Y , отже, зовнішні сили

$$\bar{X} = -2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Права грань: $x = 6$ м; $\sigma_y = 216y$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\tau_{xy} = -650$;

нормаль до площадки збігається з додатним напрямком осі X , отже, зовнішні сили дорівнюють

$$\bar{X} = 8y - 6, \quad \bar{Y} = -650.$$

Нижня грань: $y = -1$ м; $\sigma_y = -36x$; $\sigma_x = -14$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$;

зовнішні сили:

$$\bar{X} = 2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Епюри зовнішніх сил, що діють на грані пластинки, показані на рис. 10.4.

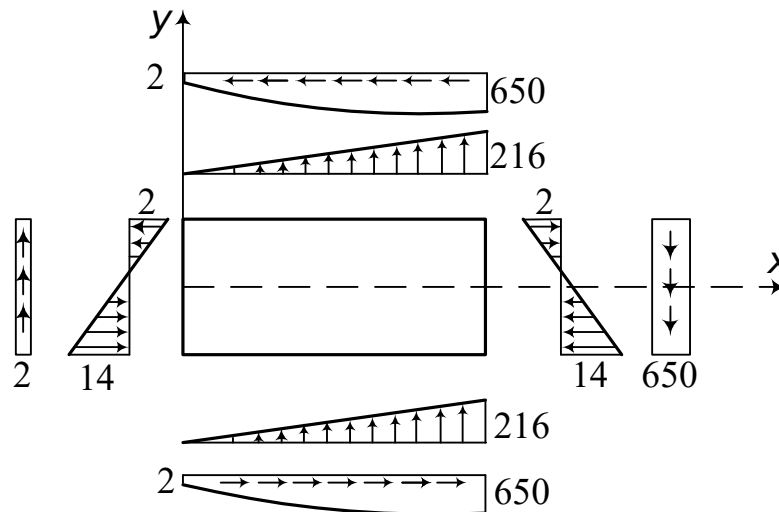


Рис. 10.4. Схема зусиль, що діють на грані пластинки (МПа)

Перевіримо умови рівноваги пластинки. Як видно з рис. 10.4, умова рівноваги на горизонталі виконується, тому що епюри \bar{X} на лівій і правій гранях мають однакові значення ординат, але різні знаки. Те саме можна сказати про епюри \bar{X} на верхній і нижній гранях. Складемо суму проєкцій усіх сил, що діють на пластинку, на вертикальну вісь:

$$\sum y = 0: 2 \frac{1}{2} \cdot 216 \cdot 6 - 650 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Таким чином, задана пластинка під дією зовнішніх сил знаходиться в рівновазі.

Перед тим, як перейти до дослідження напруженого стану в точці **A** (рис. 10.3), зазначимо, що рівняння (10.10) є лінійним. Тому сума декількох розв'язків цього рівняння також є його розв'язком.

Ми можемо накласти один на інший елементарні розв'язки, отримані тут, і в такий спосіб отримати нові розв'язки, що мають практичне значення. Нижче буде розв'язана одна така задача.

А зараз визначимо напружений стан у точці **A** (рис. 10.3).

Отже, точка **A** має координати $x = 1,5 \text{ м}$; $y = 0,5 \text{ м}$.

Тут

$$\sigma_y = 36 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 27;$$

$$\sigma_x = 8 \cdot 0,5 - 6 = -2;$$

$$\tau_{xy} = -2(1 + 9 \cdot 2,25) = -42,5.$$

Схема напружень, що діють у точці **A**, показана на рис. 10.5.

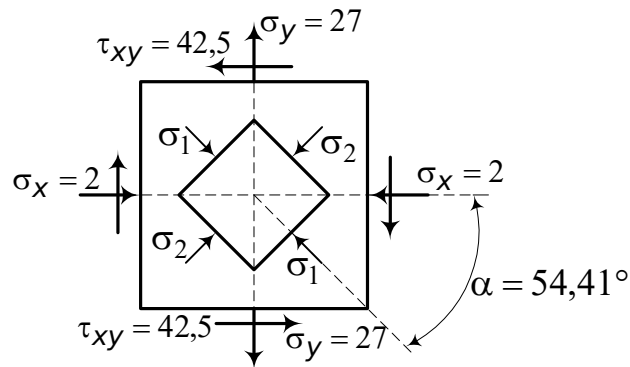


Рис. 10.5. Напружений стан у точці **A**

Визначимо головні напруження за формулою (4.14):

$$\sigma_{1,2} = \frac{-2 + 27}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2 - 27)^2 + 4(42,5)^2} = 12,5 \pm 44,91;$$

$$\sigma_1 = 57,41; \quad \sigma_2 = -32,41.$$

Кут нахилу головних площадок знайдемо за (4.13):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-42,5}{57,41 - 27} = -1,397, \quad \alpha = -54,41^\circ.$$

10.5.1. Згинання консольної балки

Розглянемо консоль, що має вузький прямокутний переріз шириною, що дорівнює одиниці. Консоль згинається силою F , прикладеною на кінці. Верхній і нижній краї вільні від навантаження. Дотичні зусилля, рівнодіючою для яких є сила F , розподілені по кінцю консолі (рис. 10.6).

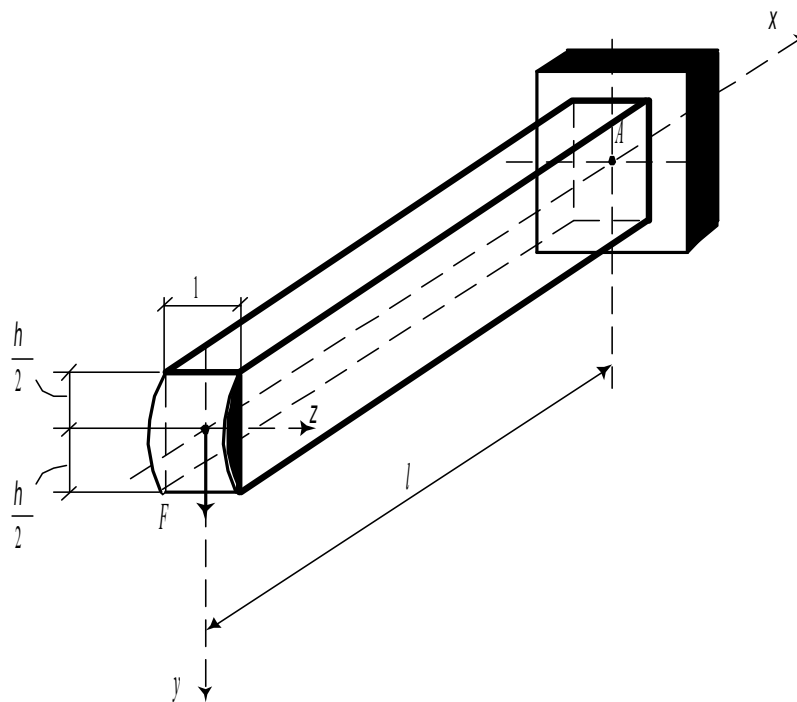


Рис. 10.6. Розрахункова схема консольної балки

Зазначені вище умови навантаження можуть бути задоволені, якщо функцію напружень подати в такому вигляді:

$$\varphi = \frac{A}{6}xy^3 + Bxy. \quad (10.13)$$

Знайдемо напруження за (10.9). При цьому будемо нехтувати власною вагою балки. Тоді

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Axy; \quad (10.14)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (10.15)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{A}{2}y^2 - B. \quad (10.16)$$

Для того щоб поздовжні сторони $y = \pm \frac{h}{2}$ були вільні від зусиль, повинна виконуватися така умова:

$$\tau_{xy}|_{y=\pm \frac{h}{2}} = -\frac{A}{2} \frac{h^2}{4} - B = 0.$$

Звідси

$$A = -\frac{8B}{h^2}. \quad (10.17)$$

Тепер для того, щоб умова навантаження на торці балки була задоволена, необхідно, щоб мала місце рівність суми дотичних напружень силі F , тобто

$$-\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{4B}{h^2} y^2 - B \right) dy = F.$$

Тут мінус перед інтегралом пов'язаний із правилом знаків для дотичних напружень (див. п. 1.8). Звідси знайдемо

$$B = \frac{3F}{2h}. \quad (10.18)$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів A і B у вирази (10.14) і (10.16), одержимо

$$\sigma_x = -\frac{12F}{h^3} xy = -\frac{Fx}{J_z} y, \quad (10.19)$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{8J} (h^2 - 4y^2). \quad (10.20)$$

Отримані розв'язки збігаються з елементарними розв'язками (див. (6.9) і (6.13)). Варто зауважити, що цей розв'язок є точним тільки тоді, коли зусилля по кінцях стержня розподілені за законами (10.14) і (10.16). Якщо ж зусилля по кінцях розподілені яким-небудь іншим чином, то отриманий розподіл напружень (10.19) і (10.20) можна вважати задовільним для поперечних перерізів, що знаходяться на деякій відстані від кінців стержня ($\sim h$, див. розд. 3).

10.6. Плоска задача в полярних координатах

10.6.1. Загальні рівняння в полярних координатах

При дослідженні напружень у круглих кільцях і дисках, у кривих брусах і т. п. вигідно користуватися полярними координатами.

Положення точки на серединній площині пластинки визначається відстанню r від початку координат O і кутом θ між напрямком r і деякою віссю Ox , що займає певне положення на площині.

Розглянемо рівновагу малого елемента $abcd$, вирізаного з пластинки радіальними перерізами OC і ob , перпендикулярними до пластинки, і двома нормальними до пластинки циліндричними поверхнями ad і bc , радіуси яких дорівнюють r і $r + dr$ (рис. 10.7).

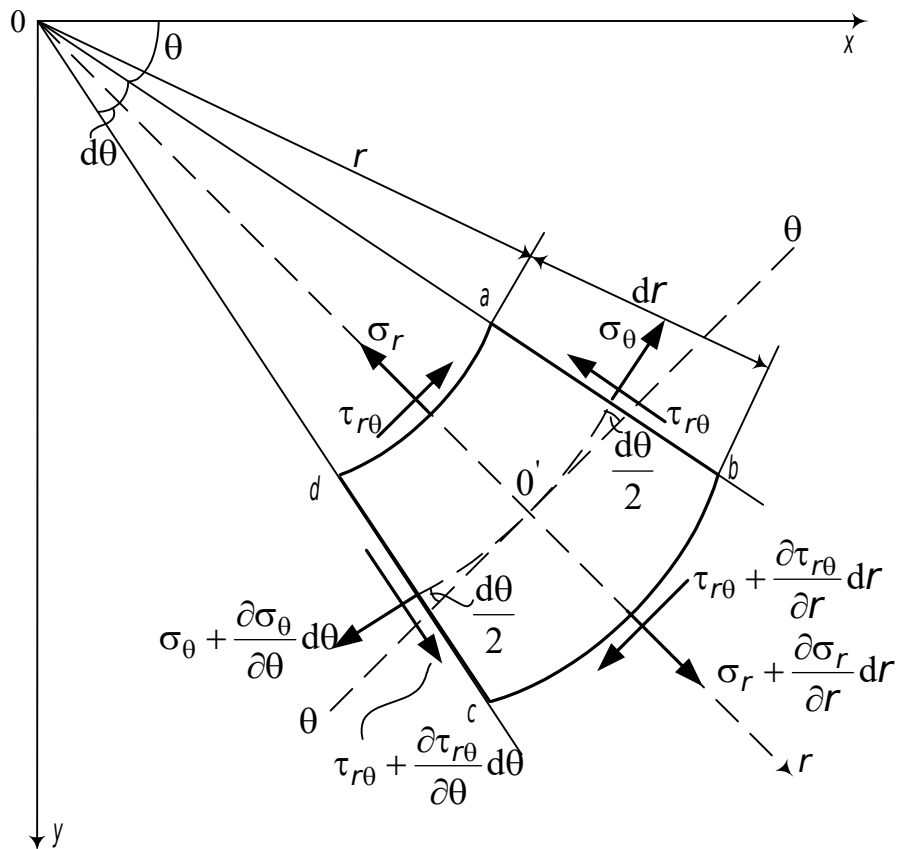


Рис. 10.7. Схема напружень, що діють на малий елемент, вирізаний із пластинки

Складові нормальних напружень у радіальному напрямку будемо позначати σ_r , а складові нормальних напружень у тангенціальному напрямку – σ_θ . Для складової дотичного напруження будемо користуватися позначенням $\tau_{r\theta}$. Dodatні напрямки складових напружень показані на рис. 10.7.

Припускаючи, що напруження рівномірно розподіляються по сторонах аналізованого елемента, знайдемо нормальне зусилля в радіальному напрямку (товщину пластинки приймаємо такою, що дорівнює одиниці):

$$\sigma_r r d\theta.$$

Нормальне зусилля на стороні bc елемента з урахуванням зміни складової напруження σ_r буде дорівнювати

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

Нормальні зусилля, що діють на сторони ab і cd , будуть відповідно такими:

$$\sigma_{\theta} dr \text{ і } \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr.$$

Аналогічно запишемо вирази для дотичних зусиль, що діють на сторони *ad* і *bc*:

$$\tau_{r\theta} \cdot r d\theta, \quad \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta$$

і дотичних зусиль на сторонах *ab* і *cd*:

$$\tau_{r\theta} dr \text{ і } \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr.$$

Вважаємо також, що об'ємна сила відсутня; крім того, через малість кута θ приймаємо, що $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$; $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$.

Запишемо рівняння рівноваги елемента. Спроектуємо зусилля на осі r (радіальний напрям) і θ (тангенціальний напрям):

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot 1 - \tau_{r\theta} dr = 0; \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_{\theta} dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{r\theta} r d\theta = 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Відкидаючи величини вищих порядків малості і ділячи всі члени на r , одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0; \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Ці два рівняння заміняють собою рівняння рівноваги для плоскої задачі в декартових координатах (10.2).

Рівняння (10.23) будуть задоволені, якщо прийняти

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad (10.24)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad (10.25)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (10.26)$$

Для того щоб одержати розподіл напружень, що може мати місце в пружному тілі, повинна бути також задоволена умова сумісності. При декартових координатах ця умова потребує, щоб функція напружень задовольняла рівнянню (10.10):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

В аналізованому випадку нам необхідно це рівняння подати в полярних координатах. Залежності між полярними і декартовими координатами визначаються такими формулами (рис. 10.8):

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad (10.27)$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta; \quad (10.28)$$

$$x = r \cos \theta; \quad (10.29)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (10.30)$$

Диференціюємо залежність (10.27) по X :

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x,$$

звідси з урахуванням (10.29)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta. \quad (10.31)$$

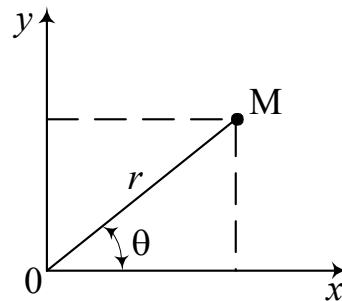


Рис. 10.8. До визначення залежностей між полярними і декартовими координатами

Аналогічно, диференціюючи (10.27) по Y , знайдемо

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta. \quad (10.32)$$

Тепер диференціюємо (10.28) по X :

$$-\frac{y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

звідси

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\cos^2 \theta \frac{y}{x^2} = -\frac{x^2}{r^2} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (10.33)$$

Так само, продиференціювавши (10.28) по \mathcal{Y} , знайдемо

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (10.34)$$

Користуючись отриманими виразами (10.31)-(10.34) і розглядаючи Φ як функцію від r і θ , одержимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right). \quad (10.35)$$

Щоб одержати другу похідну по X , необхідно лише повторити попередні дії:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Таким же чином знайдемо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right); \quad (10.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Складаючи вирази (10.37) і (10.38), одержимо

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}. \quad (10.39)$$

Користуючись тотожністю

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

і виразом (10.39), знайдемо

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (10.40)$$

Як і у випадку розв'язання плоскої задачі в декартових координатах (10.10), (10.11), тут також підбирається функція Φ , що задовольняє

рівнянню (10.40) і умовам на контурі, і знаходяться напруження за (10.24), (10.25), (10.26).

10.6.2. Складові деформації в полярних координатах

При розгляді переміщень у полярних координатах позначимо через U і V складові переміщення відповідно в радіальному і тангенціальному напрямках (рис. 10.9).

Якщо U – радіальне переміщення сторони ad елемента $abcd$, то радіальне переміщення сторони bc (рис. 10.9) дорівнює

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Тоді відносне подовження елемента $abcd$ в радіальному напрямку дорівнює

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (10.41)$$

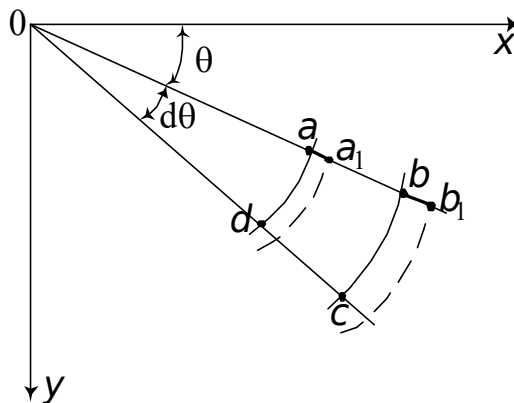


Рис. 10.9. До визначення деформації ε_r

Що стосується деформації в тангенціальному напрямку, то слід зауважити, що вона залежить не тільки від переміщення V , але також і від радіального переміщення U (рис. 10.10).

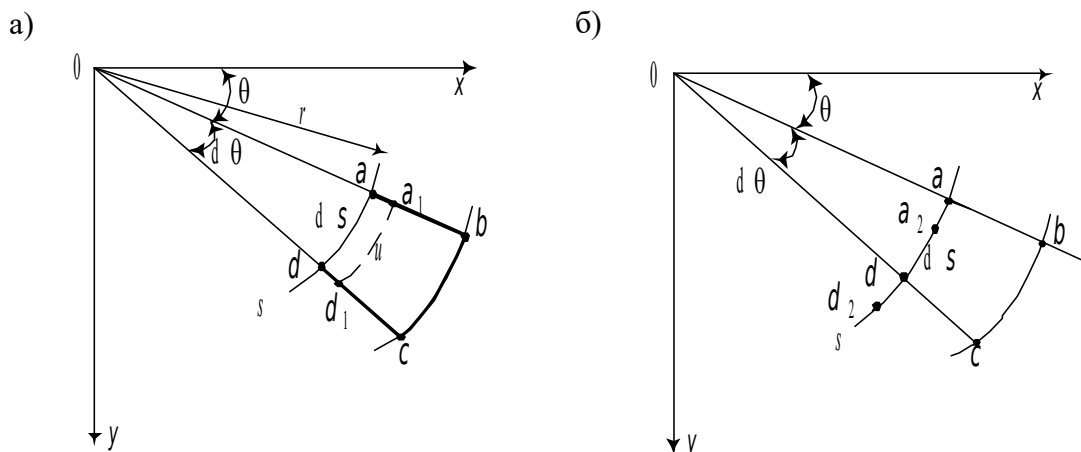


Рис. 10.10. До визначення деформації ε_θ

Внаслідок радіальних переміщень U елемент ad переходить на нове колоочаткова його довжина

$$ad = r d\theta$$

дорівнює (рис. 10.10, а)

$$a_1 d_1 = (r + u) d\theta.$$

Звідси

$$\varepsilon'_\theta = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Внаслідок різниці в переміщеннях точок a і d в напрямку дуги S (рис. 10.10, б)

$$\varepsilon''_\theta = \frac{a_2 d_2 - ad}{ad} = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds) - v}{ds} = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Таким чином, тангенціальна деформація дорівнює

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + \varepsilon''_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (10.42)$$

Розглянемо тепер деформацію зсуву (рис. 10.11).

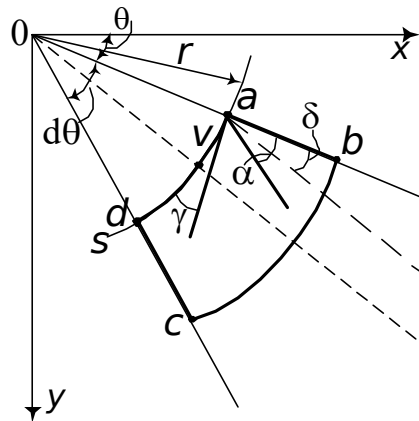


Рис. 10.11. До визначення деформації зсуву

Якби точка a (рис. 10.11) не переміщлася, то деформування кута bad обумовлювалося б поворотом сторін ab і ad і деформація дорівнювала б

$$\gamma'_{r\theta} = \alpha + \gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Внаслідок переміщення точки a по дузі S на величину V нахил грані ab зміниться на кут $\delta = \frac{V}{r}$, який потрібно відняти від знайденого вище змінення кута.

Отже, повна зміна кута baa , що є деформацією зсуву, дорівнює

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (10.43)$$

Підставивши тепер вирази для складових деформацій (10.41), (10.42) і (10.43) у формули закону Гука, одержимо такі рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r); \end{aligned} \quad (10.44)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta},$$

які характеризують зв'язок між переміщеннями і напруженнями в полярних координатах.

10.7. Товста труба під дією рівномірного тиску

Роздивимося товстостінний циліндр, який зазнає рівномірного тиску по внутрішній і зовнішній поверхнях (рис. 10.12).

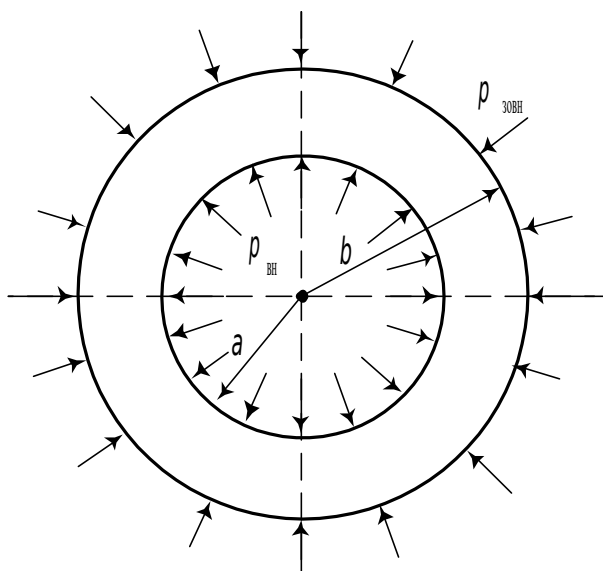


Рис. 10.12. До розрахунку труби на дію зовнішнього і внутрішнього тиску

Через a і b позначимо радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра, а через $p_{\text{зовн}}$ і $p_{\text{вн}}$ – зовнішній і внутрішній тиски.

Граничні умови будуть мати такий вигляд:

$$\sigma_r = -p_{\text{вн}} \quad \text{при } r = a;$$

$$\sigma_r = -p_{\text{зовн}} \quad \text{при } r = b.$$

Судячи з граничних умов, напруження в цьому випадку повинні розподілятися симетрично відносно центральної осі циліндра, перпендикулярної до площини перерізу. Тоді складові напружень не залежать від кута θ і є функціями одного лише r . З умов симетрії випливає також, що дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ повинні дорівнювати нулю.

Таким чином, із двох рівнянь рівноваги (10.23) залишається лише одне

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (10.45)$$

З цієї самої причини рівняння (10.40) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Рівняння (10.46) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням, розв'язком його буде функція

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (10.47)$$

Складові напружень (10.24) – (10.26) будуть мати вигляд

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C; \quad (10.48)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C; \quad (10.49)$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

У виразах для напружень (10.48), (10.49) є три постійних інтегрування A, B, C . Граничні умови визначають тільки дві постійні. Для того щоб однозначно знайти ці постійні, розглянемо переміщення. Для аналізованої задачі рівняння (10.44) мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta); \quad (10.50)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r). \quad (10.51)$$

Інтегруючи перше рівняння, знаходимо

$$Eu = -\frac{A}{r}(1+\nu) + 2C(1-\nu)r + B[(1-3\nu)r + 2(1-\nu)(r \ln r - r)] + D_1. \quad (10.52)$$

Друге рівняння (10.51) дає

$$Eu = -\frac{A}{r}(1+\nu) + 2C(1-\nu)r + Br[(3-\nu) + 2 \ln r(1-\nu)]. \quad (10.53)$$

Для того щоб обидва вирази (10.52) і (10.53) для U збігалися, повинні бути виконані умови

$$B = 0 \quad \text{і} \quad D_1 = 0. \quad (10.54)$$

З урахуванням (10.54)

$$\varphi = A \ln r + Cr^2; \quad (10.55)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C; \quad (10.56)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (10.57)$$

Визначимо постійні A і C . Граничні умови набувають вигляду

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_{\text{вн}};$$

$$\frac{A}{b^2} + 2C = -p_{\text{зовн}}.$$

Розв'язання цих рівнянь дає

$$2C = \frac{p_{\text{вн}}a^2 - p_{\text{зовн}}b^2}{b^2 - a^2}; \quad A = \frac{(p_{\text{зовн}} - p_{\text{вн}})a^2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (10.58)$$

Компоненти напружень виявляються рівними

$$\sigma_r = \frac{(p_{\text{зовн}} - p_{\text{вн}})a^2b^2}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_{\text{вн}}a^2 - p_{\text{зовн}}b^2}{b^2 - a^2}; \quad (10.59)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(p_{\text{зовн}} - p_{\text{вн}})a^2b^2}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_{\text{вн}}a^2 - p_{\text{зовн}}b^2}{b^2 - a^2}. \quad (10.60)$$

Цікаво зазначити, що сума $\sigma_r + \sigma_\theta$ постійна за всією товщиною стінок циліндра. Тому напруження σ_r і ε_1 викликають рівномірне розширення або укорочення в напрямку осі труби. Деформація в елементі труби, вирізаному двома суміжними поперечними перерізами, не перешкоджає деформації суміжних елементів. Внаслідок цього елемент знаходиться в плоскому напруженому стані (див. п. 4.1).

В окремому випадку, коли $p_{\text{вн}} = 0$,

$$\sigma_r = \frac{p_{\text{зовн}}b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right); \quad (10.61)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{p_{\text{зовн}} b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right). \quad (10.62)$$

Ці вирази показують, що напруження σ_r і σ_{θ} завжди стискальні. Напруження σ_r досягає найбільшого значення на зовнішній поверхні, де воно дорівнює зовнішньому тиску. Напруження $\sigma_{\theta, \text{max}}$ більше, ніж зовнішній тиск. Воно наближається до величини останнього зі збільшенням радіуса b , але ніколи не може виявитися нижче $p_{\text{зовн}}$, як би ми не збільшували кількість матеріалу стержня (рис. 10.13).

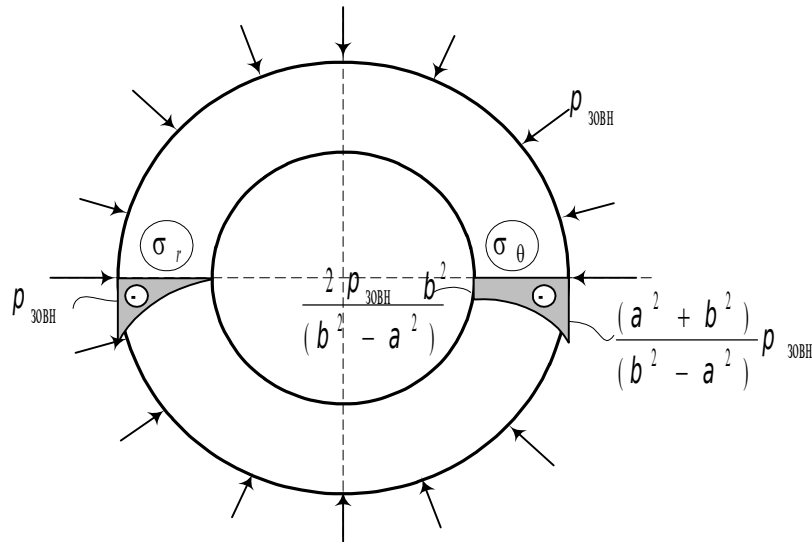


Рис. 10.13. Епюри σ_r і σ_{θ} у товстостінній трубі при аналізованому впливі

10.8. Розтягання пластинки з малим круглим отвором

Якщо суцільна пластинка зазнає рівномірного розтягання по напрямку осі X (рис. 10.14), то

$$\sigma_x = p; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

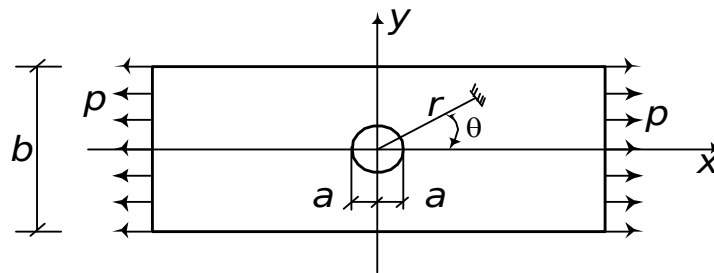


Рис. 10.14. До розрахунку пластинки з малим круглим отвором

Розглянемо, як змінюється напружений стан пластинки, якщо зробити в ній круглий отвір, діаметр якого $2a$ малий у порівнянні із шириною пластинки b .

Очевидно, що напруження, викликані наявністю отвору, мають характер місцевих напружень: на достатньо великій відстані від отвору вони залишаються майже такими, як і в суцільній пластинці.

Напруженням у суцільній пластинці відповідає функція напружень (див. п. 10.5)

$$\varphi_{\theta} = \frac{1}{2} \rho y^2,$$

яка у полярних координатах має вигляд

$$\varphi_{\theta} = \frac{1}{2} \rho r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \rho r^2 - \frac{1}{4} \rho r^2 \cos 2\theta = \frac{\rho}{4} (r^2 - r^2 \cos 2\theta). \quad (10.63)$$

Шукана функція напружень Φ для пластинки з отвором повинна давати при достатньо великих значеннях r ті самі напруження, що і функція φ_{θ} (10.63). Цій вимозі відповідає така функція:

$$\varphi = \frac{\rho}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (10.64)$$

Дійсно, якщо a спрямувати до нуля, то (10.64) зводиться до (10.63).

Визначимо напруження за (10.25), тому що найбільший інтерес являють напруження біля краю отвору ($r = a$) і в ослабленому поперечному перерізі ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$). Отже,

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\rho}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (10.65)$$

Зобразимо епюру σ_{θ} біля краю отвору (рис. 10.15).

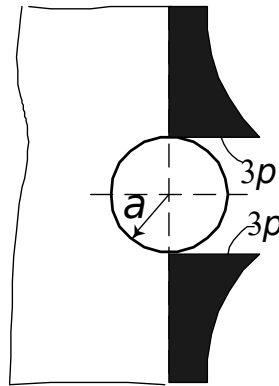


Рис. 10.15. Епюра σ_{θ} біля краю отвору

При $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ $\cos 2\theta = -1$. Тоді

$$\sigma_{\theta} = \rho \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right). \quad (10.66)$$

При

$$\begin{aligned} r = a & \quad \sigma_{\theta} = 3\rho ; \\ r = 2a & \quad \sigma_{\theta} = 1,22\rho ; \\ r = 3a & \quad \sigma_{\theta} = 1,07\rho ; \\ r = 4a & \quad \sigma_{\theta} = 1,04\rho ; \end{aligned}$$

$$r = \infty \quad \sigma_{\theta} = \rho .$$

Отримані формули (10.65), (10.66) є правильними у випадку, якщо ширина пластинки b велика порівняно з отвором $2a$. Якщо ж ширина не дуже велика, але усе рівно більше, ніж $4a$, то для визначення найбільшого напруження, що розтягує, можна користуватися наближеною формулою

$$\sigma_{\theta, \max} = 3\rho \frac{b}{b-a} . \quad (10.67)$$

З наведеного розв'язку можна зробити висновок, що навколо отворів, виточок і т. п. спостерігається різке збільшення напружень, називане концентрацією напружень (рис. 10.15). У випадку крихких матеріалів при розтяганні в ослабленому перерізі найбільшого напруження, яке дорівнює межі міцності, утвориться тріщина, що, швидко розвиваючись, призводить до руйнування конструкції.

Особливо небезпечна концентрація напружень при дії навантажень, що періодично змінюються за часом (див. розд. 11). Виникає питання про те, яким чином можна знизити концентрацію напружень. Для цього в різного роду тріщинах, виточках, у місцях різкої зміни площі поперечного перерізу елемента конструкції слід замінити гострі виточки плавними кривими, тобто збільшити радіус кривизни кінця тріщини або отвору. Це незмінно призводить до зниження концентрації напружень. Так, наприклад, для припинення розвитку тріщини в пластинках іноді на кінці тріщини висвердлюється круглий отвір.

10.9. Дія зосередженої сили, прикладеної до прямолінійного краю нескінченно великої пластинки

Розглянемо зосереджену вертикальну силу F , що діє на горизонтальний прямолінійний край AB нескінченно великої пластинки (рис. 10.16, а).

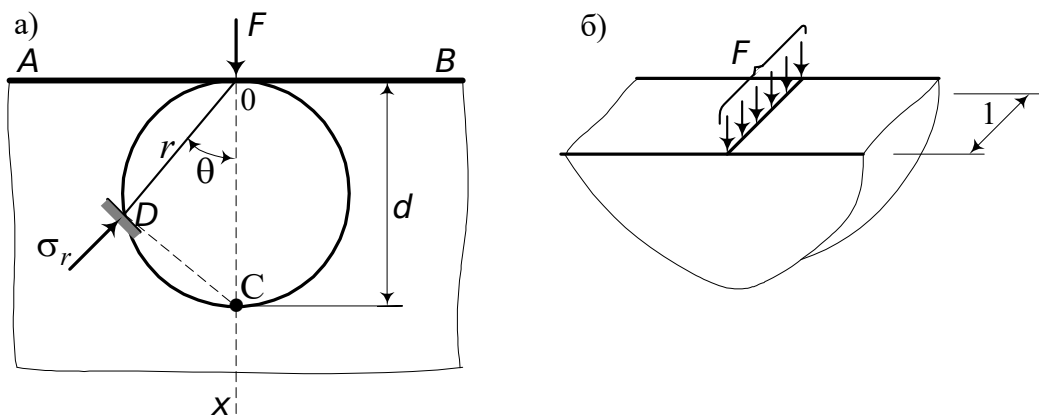


Рис. 10.16. Дія зосередженої сили на прямолінійний край нескінченно великої пластинки

Розподіл вантажу по товщині пластинки – рівномірний (рис. 10.16, б). Товщина пластинки прийнята рівною одиниці, так що F є силою, що припадає на одиницю товщини пластинки. Розв'язок аналізованої задачі було отримано Фламаном із використанням розв'язку Я. Бусинеска в трьох вимірах. Розподіл напружень можна встановити з елементарних міркувань. З віддаленням від точки прикладення сили напруження будуть убувати. Тому припустимо, що σ_r змінюється обернено пропорційно радіусу r . Крім того, припустимо, що найбільші напруження σ_r будуть виникати в напрямку дії сили F . По мірі відхилення вліво або управо від осі X вони також будуть убувати. Це відповідає тому, що σ_r змінюється прямо пропорційно $\cos\theta$. Таким чином, приймаємо

$$\sigma_r = -K \frac{\cos\theta}{r}. \quad (10.68)$$

Вважаємо також, що

$$\sigma_\theta = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

У (10.68) K – коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Щоб підтвердити слушність зроблених припущень, знайдемо функцію напружень. Для цього запишемо вирази для напружень (10.24), (10.25), (10.26):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -K \frac{\cos\theta}{r},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Це система диференціальних рівнянь із частинними похідними, у яких шуканою функцією є функція φ . Розв'язуючи систему, знайдемо

$$\varphi = -\frac{K}{2} r \theta \sin \theta. \quad (10.69)$$

Легко перевірити підстановкою, що тепер диференціальні рівняння рівноваги (10.23) і рівняння спільності (10.40) задовольняються.

Залишається визначити коефіцієнт K із граничних умов. Верхній край пластинки (рис. 10.16) вільний від напружень за винятком точки прикладення сили. Тут виникають дуже великі напруження, що перевищують границю пружності матеріалу, і в результаті сила F виявляється розподіленою по площадці скінченної величини. Уявимо собі

частину матеріалу, що зазнає пластичної деформації, вирізану з пластинки по круглій циліндричній поверхні малого радіуса (рис. 10.17). Тоді до частини пластинки, що залишилася, можна застосувати рівняння пружності.

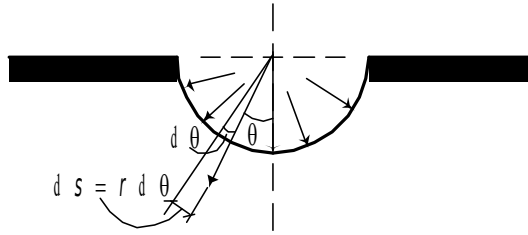


Рис. 10.17. Схема передачі зосередженої сили на прямолінійний край пластинки

Рівнодіюча зусиль, що діють по циліндричній поверхні, повинна врівноважувати силу F :

$$\int_0^{\pi} \sigma_r \cdot r \cos \theta d\theta = F . \quad (10.70)$$

Підставимо сюди σ_r за (10.68). Знак мінус при підстановці виразу σ_r не вводимо, тому що він вже врахований при виборі напрямку зусиль. У результаті одержимо

$$K \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = F \quad \text{і}$$

$$K = \frac{2F}{\pi} .$$

Формула для напружень набуває остаточного вигляду:

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r} . \quad (10.71)$$

Щоб наочно уявити картину розподілу напружень, зробимо таку побудову. Візьмемо довільну точку D , покажемо для неї нормальну до радіуса площадку і радіальне напруження σ_r , що діє на неї (рис. 10.16). Продовжимо напрямок площадки до перетину з віссю X в точці C . Відрізок OC приймемо за діаметр d , на якому побудуємо кола. З трикутника OCD знайдемо

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d} .$$

Це співвідношення справедливе для будь-якої точки кола, тому у всіх його точках по площадках, нормальних до радіуса, будуть діяти однакові нормальні напруження

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}. \quad (10.72)$$

Можна побудувати цілий ряд таких кіл. Вони називаються колами рівних напружень, або колами Бусинеска. Кожне з таких кіл є геометричним місцем точок із рівними головними напруженнями (рис. 10.18).

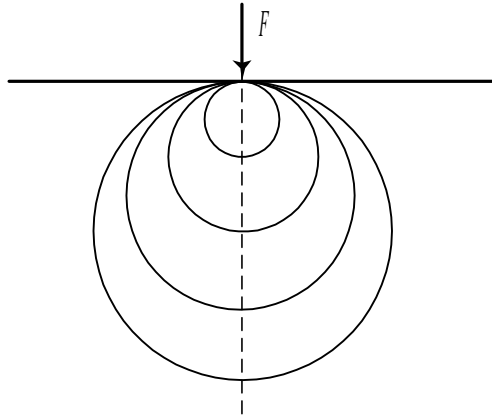


Рис. 10.18. Кола рівних напружень (кола Бусинеска)

Отримане уявлення про розподіл напружень надзвичайно наочне, але не цілком зручне для практичного застосування.

Щоб судити про надійність споруди, необхідно знати, як розподіляються на заданій глибині нормальні і дотичні напруження по горизонталі і вертикалі.

Визначимо напруження в горизонтальному і вертикальному перерізах (рис. 10.19).

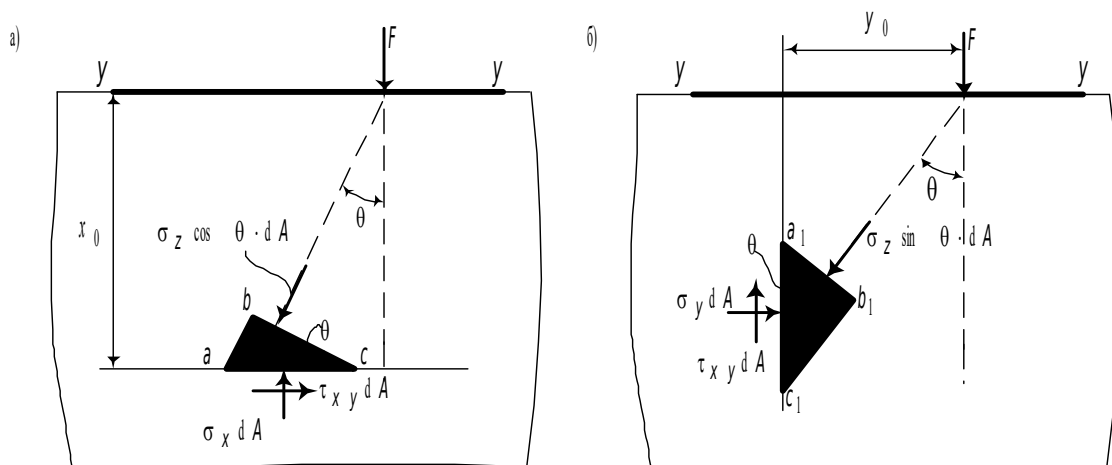


Рис. 10.19. Зусилля в горизонтальних і вертикальних перерізах

Виділимо із тіла пластинки елементарні призми abc і $a_1b_1c_1$. Використовуючи умови (10.27), (10.29), (10.30), із проєкцій рівнянь рівноваги на осі X і Y знайдемо

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (10.73)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (10.74)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (10.75)$$

Для заданої постійної глибини $x = x_0$ напруження σ_x досягають максимального значення по лінії дії сили F , тобто при $y = 0$ (рис. 10.20, а). З віддаленням від місця прикладення вантажу напруження убувають по величині і розподіляються на усю велику площу (рис. 10.20, а). Напруження σ_y біля верхнього краю пластинки дорівнюють нулю, із збільшенням X зростають, на деякій глибині досягають найбільших значень і потім убувають. З віддаленням перерізу від лінії дії сили чисельні значення напружень убувають, а максимум зміщається униз (рис. 10.20, в). Різні знаки епюри τ_{xy} (рис. 10.20, б) справа і зліва від осі X показують на розходження в напрямку напружень.

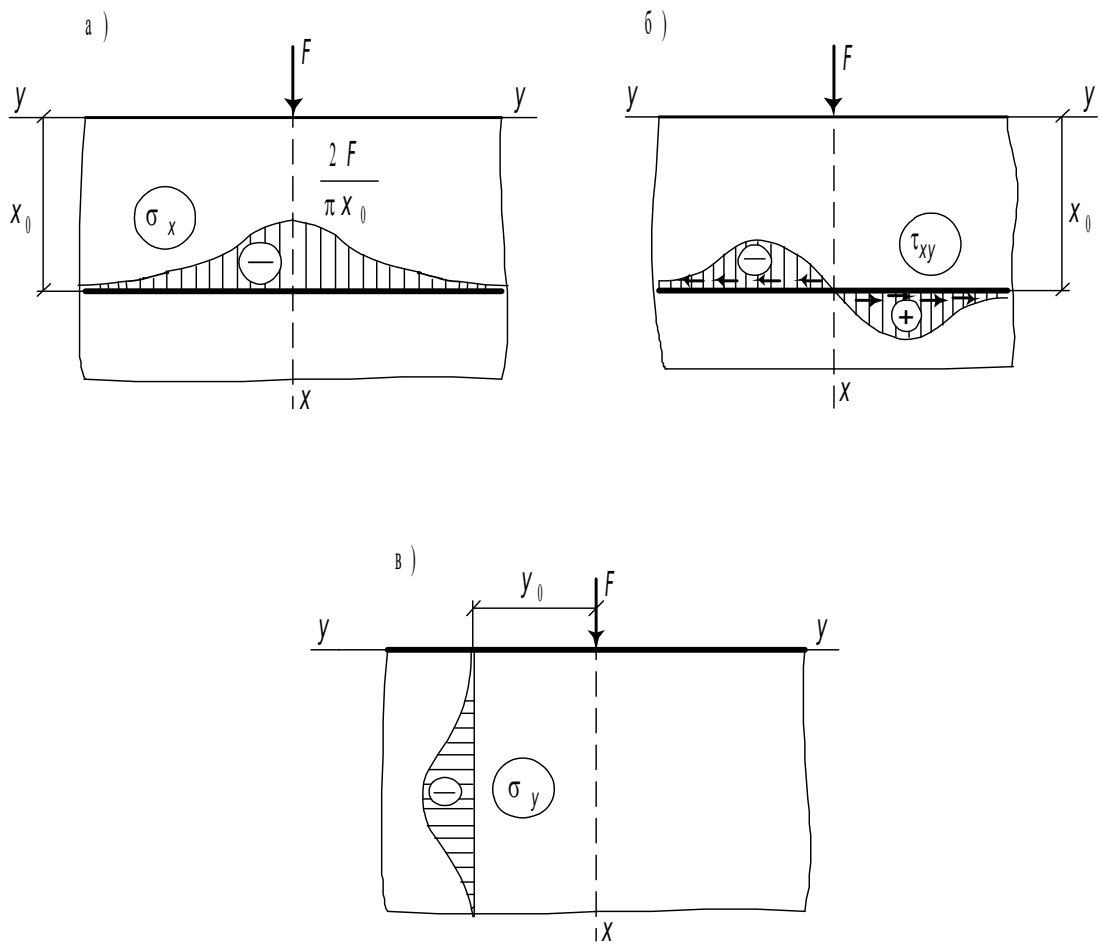


Рис. 10.20. Епюри σ_x , σ_y , τ_{xy}

Розділ 11

ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕННЯ

11.1. Загальні положення і поняття

Динамічними навантаженнями називають такі, що під час дії передають масам споруди прискорення, викликаючи появу інерційних сил. Динамічні навантаження викликають у споруді напруження, деформації і переміщення, змінні за часом. За своєю природою вони різноманітні й у основному можуть бути зведені до таких видів.

Нерухоме періодичне навантаження (розташоване на споруді у визначеному місці) характерне тим, що діаграма залежності його від часу багаторазово повторюється через певні проміжки часу (періоди). Періодичне навантаження може бути як безперервним, так і розривним. Якщо періодичне навантаження безупинно змінюється за законом синуса або косинуса, то таке навантаження називається вібраційним або гармонійним.

Короткочасне навантаження (імпульс) характерне швидким розвитком і швидким зникненням, тобто майже миттєвою дією. Такі навантаження створюються, наприклад, різноманітними вибухами.

Ударне навантаження у вигляді ударів у певному місці споруди характерне різкою зміною швидкості тіла, яке ударяють, в короткий проміжок часу. Ударне навантаження створюють тіла, що падають: копри, молоти й ін.

Рухоме навантаження – це навантаження постійного або змінного значення, що змінює на споруді своє положення. Прикладами такого навантаження можуть служити електровози, автомобілі, тролейбуси.

Сейсмічне навантаження – це безладне рухання ґрунту, поштовхи, удари і коливання при землетрусі.

Динамічний розрахунок споруд полягає у визначенні внутрішніх сил і переміщень від динамічних навантажень, величина і характер дії яких відомі, або в перевірці системи на резонанс при періодично повторюваному навантаженні певної частоти. Якщо дія статичних навантажень визначається їх величиною, то при розрахунках на динамічні навантаження, разом із величиною, істотну роль відіграє характер навантаження. Особливо в цьому відношенні підступним є будь-яке періодичне навантаження. Іноді мале за величиною періодичне навантаження може створити великий динамічний ефект, тобто викликати великі напруження і переміщення. Це пояснюється тим, що споруда “чутлива” до періодичної дії навантаження деякої певної для нього частоти.

Загальні методи динамічних розрахунків вивчаються в спеціальному розділі будівельної механіки “Динаміка споруд”. Нижче для ілюстрації динамічних розрахунків будуть розглянуті найпростіші системи – системи

з одним ступенем свободи. До цих систем входить невагома балка з зосередженою масою m , горизонтальним переміщенням і поворотом якої нехтують. Якщо цю балку яким-небудь чином, наприклад, імпульсом, вивести зі стану стійкої рівноваги, а потім причину, яка виводить її з цього стану, прибрати, то балка буде здійснювати *вільні* коливання. Неминучі різноманітного роду зовнішні і внутрішні опори руху системи безперервно поглинають частину енергії, тому самий процес вільних коливань є згасальним.

Вільні періодичні коливання, що здійснюються за гармонічним законом з однією частотою, коли відношення переміщень двох будь-яких точок у будь-який момент часу не змінюються, називаються власними.

Якщо ж на балку діє безперервно яке-небудь динамічне навантаження $F(t)$, то балка здійснює *вимушені* коливання. Предметом наших подальших досліджень і є вільні і вимушені коливання невагомої балки з зосередженою масою.

11.2. Диференціальне рівняння руху системи з одним ступенем свободи

Роздивимося систему у вигляді невагомої балки з зосередженою масою m . На рис. 11.1, а показане переміщення маси з її вихідного стану рівноваги. Прогин маси $y_{ст}$, як і надалі аналізований $y(t)$, є величиною малою порівняно з прольотом балки (див. п. 1.6).

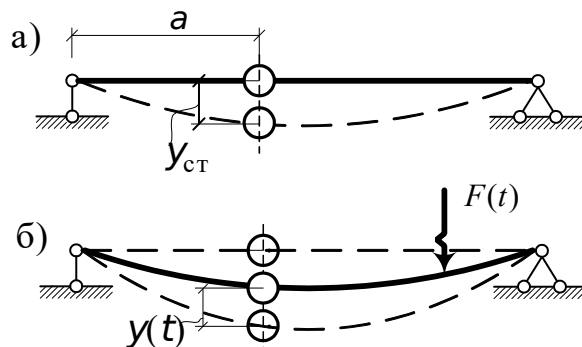


Рис. 11.1. До виведення диференційного рівняння руху маси

Нехай на балку діє динамічне навантаження $F(t)$ (унаслідок малості прогину надалі не будемо робити різниці між початковим (рис. 11.1, а) і деформованим (рис. 11.1, б) станами балки), що призводить балку і розташовану на ній масу до руху (рис. 11.1, б). Відмітимо той момент руху маси m , коли вона переміщається униз. Відокремимо масу m від балки, додамо до маси силу R , із якою балка діє на масу; силу P , що характеризує опір руху; силу інерції маси $m \frac{d^2 y}{dt^2}$ (рис. 11.2). Тут необхідно зазначити, що в основу динаміки покладений принцип Даламбера – загальна теорема, що вказує, як повинні бути складені рівняння руху для будь-якої механічної системи: рівняння руху матеріальної точки

утворюється з рівнянь рівноваги додатком сил інерції до реальних сил. Сила інерції спрямована завжди протилежно прискоренню руху.

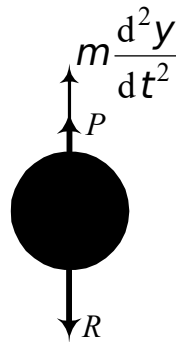


Рис. 11.2. Схема сил, що діють на масу

Спроектуємо всі сили, що діють на масу, на вертикальну вісь і знайдемо

$$R = m \frac{d^2 y}{dt^2} + P. \quad (11.1)$$

Переміщення маси запишемо через переміщення балки (рис.11.3, а, б). Для цього прикладаємо до балки спочатку силу $F = 1$ і відмічаємо δ_{11} (рис. 11.3, а), а потім – силу $F(t)$ і знову знаходимо переміщення балки в місці прикладення маси $\Delta_{1F}(t)$ (рис. 11.3, б). Нагадаємо, що перший індекс у позначенні переміщень δ_{11} і $\Delta_{1F}(t)$ позначає місце і напрямок переміщень, а другий індекс – причину, що викликала переміщення.

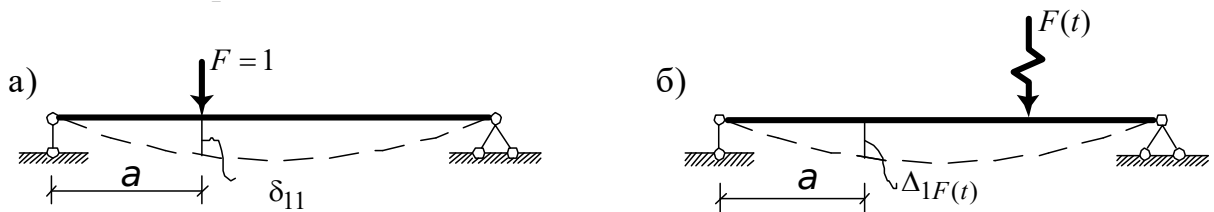


Рис. 11.3. До визначення переміщень маси через переміщення балки

У результаті

$$y = \Delta_{1F}(t) - R \delta_{11}. \quad (11.2)$$

З (11.2) знайдемо

$$R = \frac{\Delta_{1F}(t)}{\delta_{11}} - \frac{y}{\delta_{11}}. \quad (11.3)$$

Прирівняємо праві частини (11.1) і (11.3) і одержимо

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t), \quad (11.4)$$

де

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}. \quad (11.5)$$

Рівняння (11.4) є диференціальне рівняння вимушеного руху маси.

Поклавши, що $\Delta_{1F}(t)$ дорівнює нулю, одержимо диференціальне рівняння вільних коливань:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0. \quad (11.6)$$

11.3. Вільні коливання без урахування сил опору

Диференціальне рівняння вільних коливань без урахування сил опору визначається виразом (11.6) при $P = 0$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (11.7)$$

Розв'язок цього рівняння

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (11.8)$$

де A і B – дійсні постійні, які визначаються з початкових умов:

$$\text{при } t=0 \quad y=y_0; \quad v=v_0. \quad (11.9)$$

Знайдемо швидкість переміщення маси

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t. \quad (11.10)$$

З початкових умов (11.9) визначимо

$$y_0 = B; \quad A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Підставляючи знайдені значення постійних A і B в рівняння (11.8), одержимо

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (11.11)$$

Або, використавши формулу синуса суми двох кутів, замість (11.11) можна написати

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (11.12)$$

де

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega}{v_0}, \quad \varphi_0 = \text{arctg} \frac{y_0 \omega}{v_0}.$$

На графіку рис. 11.4 бачимо головні елементи гармонійних вільних коливань, що описуються рівністю (11.12), де C – амплітуда коливань; φ_0 – початкова кутова фаза коливань; T – період коливань, тобто тривалість

одного циклу коливань; Ω – кругова (кутова) частота коливань, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, рад/с.

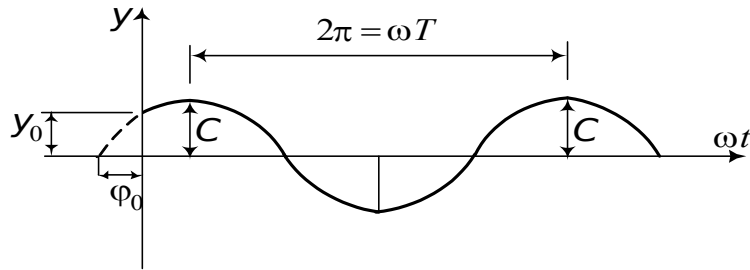


Рис. 11.4. Графік гармонійних вільних коливань системи з одним ступенем свободи

Величина $n = \frac{1}{T}$, що виражає число коливань за 1 с (вимірюється в герцах), іноді називається технічною частотою.

Кругова частота Ω , очевидно, являє собою число циклів коливань, що відбуваються за 2π с.

З огляду на значення Ω (11.5), для періоду коливань можемо написати формули

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\delta_{11}}. \quad (11.13)$$

Обчислимо силу інерції маси в довільний момент часу:

$$J(t) = -m\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 C m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 m y(t). \quad (11.14)$$

Вираз (11.14) показує, що при гармонійних коливаннях із частотою Ω сила інерції пропорційна відхиленню маси $y(t)$. Для вільних коливань без урахування сил опору ця сила є єдиною зовнішньою силою, що врівноважує реакцію R балки в будь-який момент часу.

З енергетичної точки зору, вільні незгасальні коливання характеризуються безперервним переходом кінетичної енергії руху маси в потенційну енергію деформації системи, і навпаки.

11.4. Вільні коливання з урахуванням сил опору

Диференціальне рівняння вільних коливань з урахуванням сил опору має вигляд (11.6)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0.$$

Різноманітні види опорів коливанням умовно можна розділити на дві категорії – внутрішній опір (тертя), пов'язаний з властивостями матеріалу і конструкції (тертя в збірних закріпленнях, тертя в з'єднаннях і т. п.), і зовнішній опір (взаємодія коливної системи з зовнішнім середовищем;

відступи від ідеальних умов деформування конструкції та її основи, викликані пружними недосконаlostями реальних матеріалів). Через складність і різноманіття факторів, що впливають на опір коливанням, не існує єдиної теорії, однаково придатної для урахування усіх видів внутрішнього опору. Є численна література з цих питань. Тут ми роздивимося насамперед важливі для будівельних конструкцій питання урахування внутрішнього опору коливанням, обумовленого властивостями матеріалу.

Скористаємося гіпотезою Фойгта*, відповідно до котрої сили опору пропорційні швидкості:

$$P = 2\alpha m \frac{dy}{dt}, \quad (11.15)$$

де α – коефіцієнт загасання, що має розмірність $1/c$; m – точкова маса.

Незважаючи на хиби, на які звернемо увагу пізніше, модель Фойгта (так називаний в'язкий опір) дотепер широко застосовується через простоту і можливість одержати якісну картину явища.

Підставивши (11.15) у рівняння (11.6), одержимо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (11.16)$$

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \quad (11.17)$$

має два корені:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2},$$

чисельне значення яких залежить від співвідношення α і ω . Роздивимося основний випадок, що має місце в реальних конструкціях: $\omega > \alpha$. Тоді

$$r_1 = -\alpha + i\omega_1; \quad r_2 = -\alpha - i\omega_1;$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Вид коренів визначає загальне розв'язання однорідного рівняння (11.16):

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t). \quad (11.18)$$

Використовуючи початкові умови: при $t=0$ $y=y_0$, $v=v_0$, знайде-мо

$$A = \frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}; \quad B = y_0.$$

Запишемо, як і раніше (11.12), рівняння (11.18) із використанням формули синуса суми двох кутів у такому вигляді:

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (11.19)$$

де

* Вольдемар Фойгт – німецький вчений, який працював в області фізики і теорії пружності.

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}.$$

На рис. 11.5 зображений графік згасальних коливань, що описуються рівнянням (11.19).

Обвідна коливань (пунктирна лінія на рис. 11.5) визначена рівнянням

$$y = \pm C e^{-\alpha t}. \quad (11.20)$$

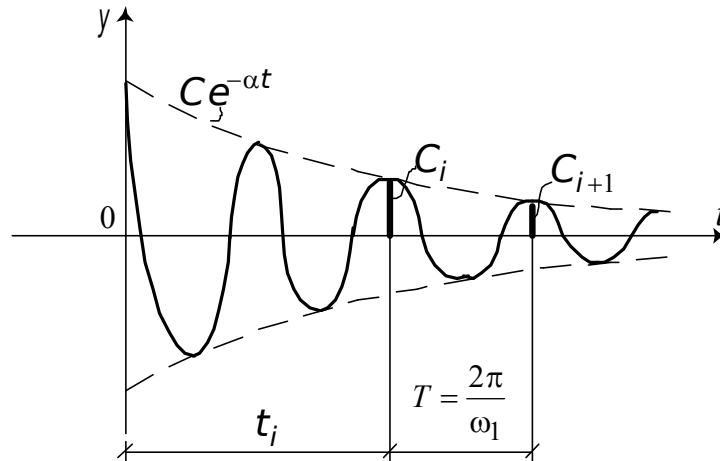


Рис. 11.5. Графік згасальних коливань системи з одним ступенем свободи

Крива (11.20) торкається кривої коливань (11.19) у тих точках, де $\sin(\omega_1 t + \varphi) = \pm 1$. Значення відношення сусідніх амплітуд C_i/C_{i+1} звичайно дуже близьке до одиниці, тому в якості кількісної характеристики загасання приймають натуральний логарифм відношення:

$$\delta = \ln(C_i/C_{i+1}). \quad (11.21)$$

Чисельні експерименти показують, що для даного матеріалу і максимального рівня напружень (при якому відбуваються коливання) значення δ (декремент загасання) залишається практично постійним, тобто внутрішнє тертя в матеріалі виявляє себе як частотно незалежний чинник. Гіпотеза ж Фойгта призводить до того, що декремент загасання залежить від частоти ω , що є її недоліком. Зауважимо, що пропорційна залежність загасання від частоти є очевидною. Дійсно, чим вище частота коливань, тим більше швидкість руху $\frac{dy}{dt}$. Але саме швидкості $\frac{dy}{dt}$ пропорційні сили опору P (11.15).

11.5. Вимушені коливання під дією вібраційного навантаження

Роздивимося дію вібраційної (гармонійної) сили $F(t) = F \sin \theta t$ на невагому балку з зосередженою масою (рис. 11.6). Тут θ — частота вимушених коливань.

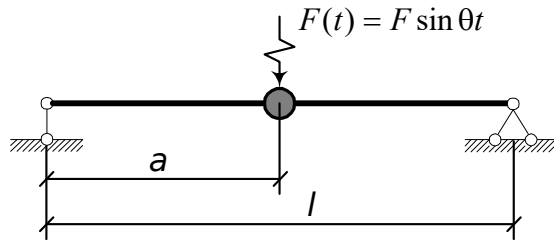


Рис. 11.6. Дія вібраційної сили на невагому балку з зосередженою масою

Диференціальне рівняння руху має такий вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t). \quad (11.22)$$

Це рівняння отримане з (11.4) з урахуванням (11.15). Виразимо праву частину рівняння (11.22) з урахуванням (11.5) у такий спосіб:

$$\omega^2 \Delta_{1F}(t) = \frac{F(t) \cdot \delta_{11}}{m \delta_{11}} = \frac{F(t)}{m} = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (11.23)$$

Тоді диференціальне рівняння руху аналізованої балки набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (11.24)$$

Частинний розв'язок рівняння (11.24) будемо шукати у вигляді

$$y(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t. \quad (11.25)$$

Продиференціюємо цей вираз двічі по t :

$$\frac{dy}{dt} = -A \theta \sin \theta t + B \theta \cos \theta t; \quad (11.26)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \theta^2 \cos \theta t - B \theta^2 \sin \theta t. \quad (11.27)$$

Підставимо (11.26), (11.27) і (11.25) у рівняння (11.24) і згрупуємо члени з однаковими $\cos \theta t$ і $\sin \theta t$:

$$\left[(\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha \theta B \right] \cos \theta t + \left[(\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha \theta A - \frac{F}{m} \right] \sin \theta t = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при косинусі і синусі нулю, прийдемо до системи рівнянь щодо A і B :

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha \theta B &= 0; \\ (\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha \theta A - \frac{F}{m} &= 0. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (11.28), знайдемо

$$A = -\frac{2\alpha\theta F}{m\psi^2}, \quad B = \frac{F(\omega^2 - \theta^2)}{m\psi^2}, \quad (11.29)$$

де

$$\psi^2 = 4\alpha^2\theta^2 + (\omega^2 - \theta^2)^2. \quad (11.30)$$

Підставляємо отриманий розв'язок в рівняння (11.25) і, з огляду на розв'язок однорідного рівняння (11.19), одержуємо

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F}{m\psi^2} [-2\alpha\theta \cos\theta t + (\omega^2 - \theta^2) \sin\theta t]. \quad (11.31)$$

На рис. 11.7 показаний графік розв'язку (11.31).

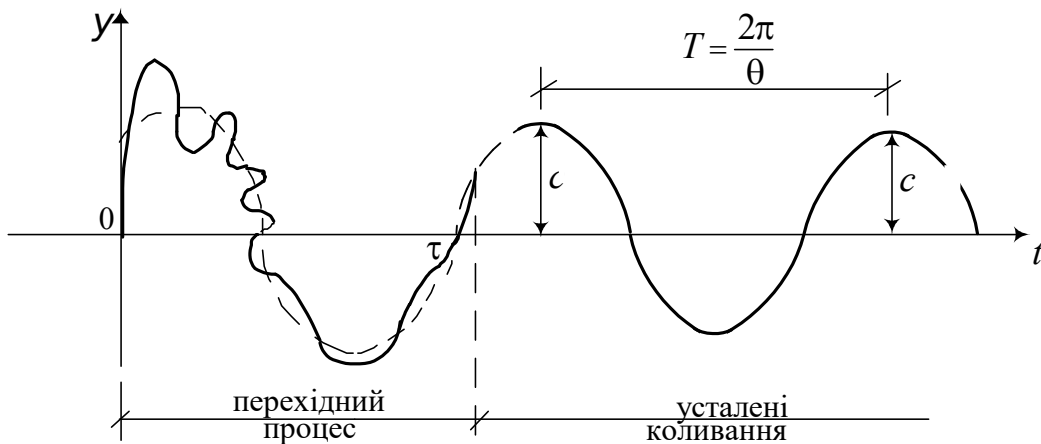


Рис. 11.7. Графік руху системи під дією вібраційного навантаження

На початку руху має місце перехідний процес (коливання, що не усталилися). Після закінчення деякого часу τ власні коливання (11.19) практично загасають, і система здійснює усталені гармонійні коливання з частотою і періодом зміни сили, що збуджує.

Роздивимось усталені коливання. Вважаючи перший член правої частини рівняння (11.31) таким, дорівнює нулю, запишемо рівняння сталих коливань:

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \left[\frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} \sin\theta t - \frac{2\alpha\theta}{\psi} \cos\theta t \right]. \quad (11.32)$$

Введемо позначення:

$$\frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} = \cos\rho; \quad -\frac{2\alpha\theta}{\psi} = \sin\rho. \quad (11.33)$$

З огляду на формулу синуса суми двох кутів

$$\sin(\theta t + \rho) = \sin\theta t \cdot \cos\rho + \cos\theta t \cdot \sin\rho,$$

знайдемо

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \sin(\theta t + \rho). \quad (11.34)$$

Підставимо в (11.34) значення Ψ (11.30):

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} \frac{\sin(\theta t + \rho)}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (11.35)$$

де

$$\delta = \frac{\theta}{\omega}; \quad \gamma^2 = \frac{4\alpha^2}{\omega^2}.$$

Як показує формула (11.35), вимушені коливання за наявності сил опору відбуваються з частотою θ сили F , що збуджує.

Амплітуда вимушених коливань ($\sin(\theta t + \rho) = \pm 1$)

$$y_{\max} = \frac{F}{m\omega^2} \mu, \quad (11.36)$$

де μ – динамічний коефіцієнт,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (11.37)$$

від початкових умов і часу не залежить. З часом вона не змінюється і, отже, вимушені коливання, на відміну від вільних, від опору не загасають.

При резонансі, коли $\omega = \theta$ (рис. 11.8), амплітуда вимушених коливань (11.36) залишається скінченною і притому не найбільшою із можливих її значень для даної системи.

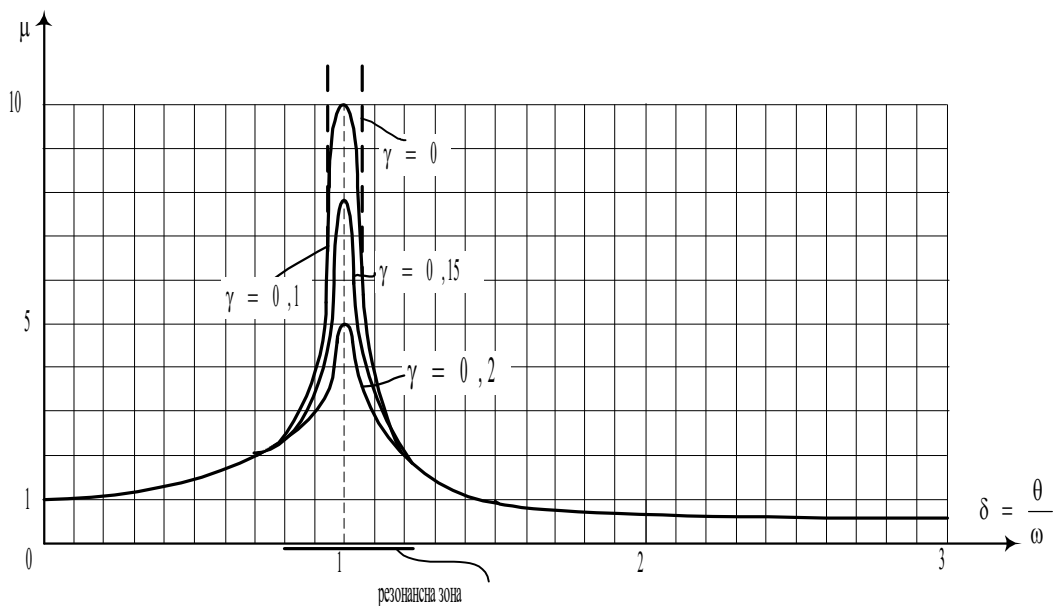


Рис. 11.8. Графіки залежності коефіцієнта μ від коефіцієнта непружного опору γ

Справді, розшукуючи значення θ , при якому амплітуда досягає максимуму, бачимо, це трапиться тоді, коли

$$\theta^2 = \omega^2 - 2\alpha^2,$$

тобто до настання резонансу.

У вимушених коливаннях з опором завжди є зсув фази коливань порівняно з фазою сили, що збуджує, на величину

$$\operatorname{tg} \rho = -\frac{2\alpha\theta \cdot \psi}{\psi(\omega^2 - \theta^2)} = -\frac{2\alpha\theta}{(\omega^2 - \theta^2)}.$$

Викладене показує, що за відсутності сил опору ($\gamma = 0$) і при збігу частот вимушених і вільних коливань динамічний коефіцієнт $\mu = \infty$. Як показує точний розв'язок диференційного рівняння (11.24), при резонансі має місце нескінченне зростання амплітуди коливання. Слід також зазначити, що при великих амплітудах теорія малих коливань, що ми тут викладаємо, незастосовна. Тому поведіння споруди при резонансі є більш складним. У будь-якому разі залишається правильним той висновок, що деформації можуть досягати значення, яке у багато разів перевищує їхній статичний розмір.

За наявності сил опору $\gamma \neq 0$ останні відіграють істотну роль при резонансних або близьких до них коливань (резонансна зона: $0,7 \leq \delta \leq 1,3$). Система ніби “вмикає” сили внутрішнього тертя як резерв, за допомогою якого вона тільки і може врівноважити зовнішнє навантаження при $\theta = \omega$.

11.6. Розрахунок на раптове навантаження

Нехай сила $F(t) = F \cdot \varphi(t)$ змінюється, як це показано на рис. 11.9.

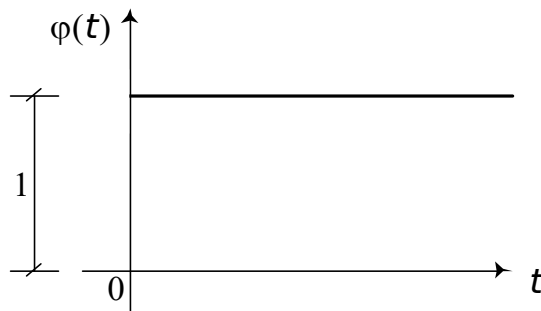


Рис. 11.9. Дія раптово прикладеної сили $F(t) = F \cdot \varphi(t)$

Тоді для $t > 0$ і при $\alpha = 0$ рівняння (11.22) з урахуванням (11.23) набуває вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F(t)}{m}. \quad (11.38)$$

Будемо досліджувати сталий процес коливань, тобто візьмемо до уваги частинний розв'язок диференціального рівняння (11.38). Воно має такий вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{\omega m} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (11.39)$$

Тут τ – нова перемінна – час, що змінюється в межах від 0 до t .

Раптове навантаження характеризується тим, що (див. рис. 11.9) при $t < 0$ $\varphi(t) = 0$;

при $t > 0$ $\varphi(t) = 1$.

З урахуванням цього

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (11.40)$$

З огляду на те, що

$$\sin \omega(t - \tau) = \sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau,$$

одержимо

$$\int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t). \quad (11.41)$$

Тепер

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (11.42)$$

Якщо замість ω^2 у вираз $\frac{F}{m\omega^2}$ підставити значення (11.5), то цей вираз одержить зміст статичного переміщення точки прикладення сили F . Позначимо його

$$\frac{F}{m\omega^2} = F \delta_{11} = y_{ст}. \quad (11.43)$$

Тоді остаточний розв'язок (11.42) запишеться так:

$$y(t) = y_{ст} (1 - \cos \omega t). \quad (11.44)$$

Графічно він поданий на рис. 11.10.

Він (рух) являє собою незгасальні коливання з частотою вільних коливань ω біля статичного стану рівноваги з амплітудою $y_{ст}$.

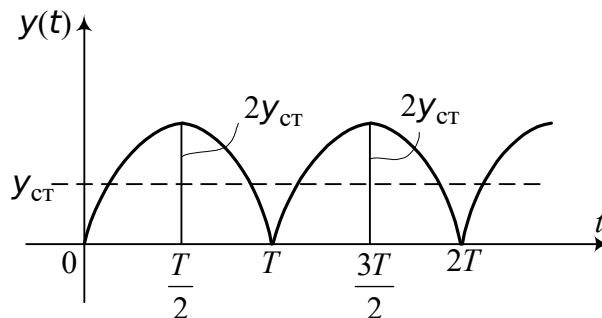


Рис. 11.10. Графік руху балки при раптовому навантаженні

Максимальне відхилення $y_{\max} = 2y_{ст}$, а динамічний коефіцієнт $\mu = y_{\max}/y_{ст} = 2$, тобто найбільший прогин дорівнює подвоєному статичному прогину. При $t < \frac{\pi}{2}$ переміщення продовжують наростати під час дії сили F , і максимуму досягнуть уже після її зникнення. При $t > \frac{\pi}{2}$ переміщення

досягають максимуму, а потім починають убувати. Отже, у тих випадках, коли тривалість t дії сили F менше $\frac{T}{2}$, максимальне переміщення варто шукати в тому процесі вільних коливань, що відбувається після припинення дії сили F .

11.7. Розрахунок на дію короткочасного навантаження

Графік короткочасного навантаження $F(t) = F \cdot \varphi(t)$ показаний на рис. 11.11.

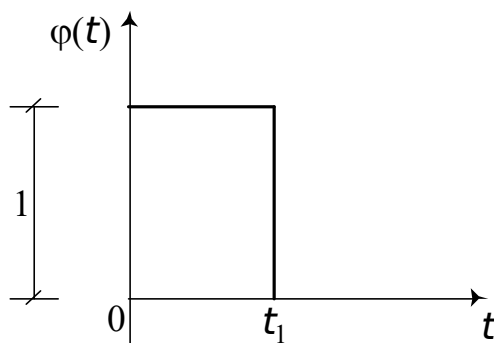


Рис. 11.11. Графік короткочасного навантаження

Як видно з цього графіка, при $t=0$ на балці раптово з'явилося навантаження, потім залишалось без зміни до моменту $t=t_1$, після цього раптово зникло.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (11.38) набуває для цього випадку навантаження такого вигляду:

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \left[\int_0^{t_1} 1 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t 0 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \right]. \quad (11.45)$$

Використовуючи ті самі тригонометричні залежності, що й при розв'язанні (11.42), знайдемо

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} [\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t]. \quad (11.46)$$

З огляду на те, що

$$\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t = -2 \sin \omega \frac{t - t_1 + t}{2} \sin \omega \frac{t - t_1 - t}{2}, \quad (11.47)$$

одержимо

$$y(t) = 2y_{\text{ст}} \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin \omega \left(t - \frac{t_1}{2} \right). \quad (11.48)$$

Отриманий розв'язок показує, що система здійснює вільні гармонійні коливання біля ненавантаженого стану з частотою ω й амплітудою (рис. 11.12)

$$2y_{\text{ст}} \sin \frac{\omega t_1}{2}. \quad (11.49)$$

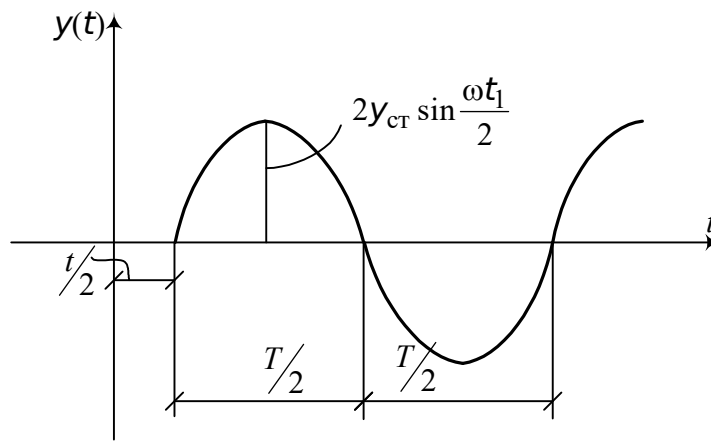


Рис. 11.12. Графік руху балки при короткочасному навантаженні

Значення динамічного коефіцієнта наведені в табл. 11.1.
Максимальне відхилення

$$y_{\max} = 2y_{\text{ст}} \sin \frac{\pi t_1}{T}. \quad (11.50)$$

Цікаво, що при $t_1/T = k$, де k – ціле число, $y_{\max} = 0$, тобто в цьому випадку після припинення дії сили F система залишається в спокої. Причину цього неважко зрозуміти: у момент часу $t_1/T = k$ коливна система буде проходити через стан $y = 0$, і в цей момент часу унаслідок зникнення навантаження одержить додаткову швидкість, що знищить наявну швидкість, отже, у цей момент часу виявиться $y = 0$ і $\frac{dy}{dt} = 0$.

Таблиця 11.1

Значення динамічного коефіцієнта $\mu = y_{\max}/y_{\text{ст}}$
при короткочасному навантаженні

$\frac{t_1}{T}$	0	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	0,15	0,167	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}}$	0	0,126	0,188	0,251	0,313	0,618	0,908	1,0	1,05	1,413	1,617	1,782	1,902	1,974	2

Як видно з табл. 11.1, ефект сили F залежить від тривалості її дії. Навіть величезна сила дасть незначний ефект, якщо її тривалість невелика.

11.8. Ударне навантаження

Задача про розрахунок конструкцій на ударне навантаження містить у собі багато труднощів, що далеко не завжди можуть бути переборені найпростішими засобами. До них належить, у першу чергу, аналіз напруженого стану в зоні контакту тіл, що співударяються, і процесу зміни контактних сил у часі. Обмежимося найпростішими прийомами, що не дають високої точності, але в той же час дозволяють правильно оцінити

порядок переміщень, напружень і деформацій при ударі. Роздивимося, як і у всіх задачах цього розділу, систему з одним ступенем свободи у вигляді невагомої балки з точковою масою (рис. 11.13, а)

$$m = \frac{G_0}{g},$$

де G_0 – вага балки; g – прискорення вільного падіння.

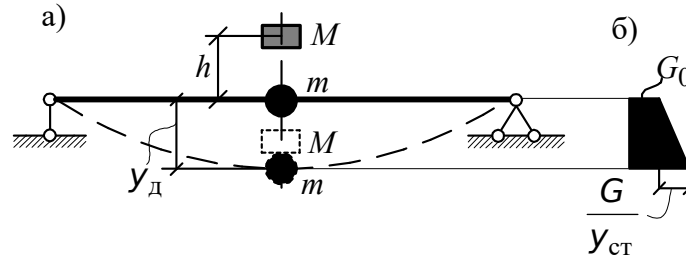


Рис. 11.13. До розрахунку невагомої балки з зосередженою масою на ударні впливи

Масу вантажу, що падає з висоти h , позначимо

$$M = \frac{G}{g}.$$

Після того як вантаж G торкнувся балки, вони рухаються разом із швидкістю $v_0 < v$, яку знайдемо з умови рівності кількості руху системи до співудару і після співудару:

$$Mv = (M + m)v_0, \quad (11.51)$$

де $v = \sqrt{2gh}$.

Коли вся кінетична енергія вантажу перейде в потенційну енергію балки, що згинається, вантаж зупиниться, а сила, що згинає балку, досягне максимуму.

Кінетична енергія системи дорівнює

$$T_0 = \frac{(M + m)v_0^2}{2} = \frac{M^2}{2(M + m)}v^2. \quad (11.52)$$

Далі почнеться рух в оберненому напрямку. Сила взаємодії між балкою і вантажем буде зменшуватися. Коли балка цілком розпрямиться, вантаж за відсутності сил тертя одержить середню швидкість в оберненому напрямку.

Процес спільного руху вантажу G і балки може бути описаний рівнянням (11.8)

$$y(t) = A \sin \omega^* t + B \cos \omega^* t$$

при початкових умовах:

$$\text{при } t = 0 \quad y(t) = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 = \frac{M}{M+m} v.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо (див. (11.11))

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega^*} \sin \omega^* t. \quad (11.53)$$

Максимальне переміщення (при $\sin \omega^* t = \pm 1$)

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\omega^*}, \quad (11.54)$$

а максимальна сила

$$F_{\max} = \frac{y_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{v_0}{\omega^* \delta_{11}}. \quad (11.55)$$

Для визначення динамічного коефіцієнта $\mu = \frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}}$ використовуємо відому з теоретичної механіки теорему про те, що збільшення кінетичної енергії системи дорівнює роботі зовнішніх сил. Тоді можна написати

$$T_1 - T_0 = A, \quad (11.56)$$

де $T_1 = 0$ – кінетична енергія системи при $y = y_{\text{д}}$; A – робота сил ваги G й G_0 і сили R , що діє на маси з боку балки:

$$A = (G + G_0) y_{\text{д}} - R y_{\text{д}}. \quad (11.57)$$

Сила R виражається площею трапеції, що відбиває зміну сили R на шляху $y_{\text{д}}$ (рис. 11.13, б):

$$R = G_0 + \frac{1}{2} \frac{G y_{\text{д}}}{y_{\text{ст}}}.$$

Враховуючи T_0 (11.52), одержимо квадратне рівняння щодо $y_{\text{д}}$:

$$y_{\text{д}}^2 - 2y_{\text{д}} y_{\text{ст}} - 2h \frac{M}{M+m} y_{\text{ст}} = 0. \quad (11.58)$$

Два корені цього рівняння будуть

$$y_{\text{д}} = y_{\text{ст}} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{ст}}} \left(\frac{M}{M+m} \right)} \right). \quad (11.59)$$

У цій формулі знак плюс відповідає нижньому амплітудному положенню мас, а знак мінус – верхньому положенню.

Прийнявши знак плюс, остаточно одержимо формулу динамічного коефіцієнта:

$$\mu = \frac{y_{\text{д}}}{y_{\text{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{ст}}} \left(\frac{M}{M+m} \right)}. \quad (11.60)$$

При $h=0$ формула (11.60) дає $\mu=2$, що відповідає так званому раптовому завантаженню (див. п. 11.6).

На рис. 11.14 подана залежність μ від параметрів удару $\frac{h}{y_{ст}}$ і $\frac{m}{M}$.

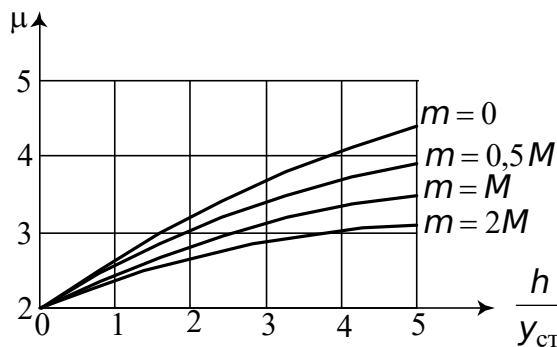


Рис. 11.14. Залежність динамічного коефіцієнта від відносної висоти падіння $\frac{h}{y_{ст}}$ і співвідношення мас

З рис. 11.14 очевидно, що чим більше ударна маса, тим менше динамічний коефіцієнт. Пов'язано це з утратами кінетичної енергії тіла, що вдаряє, при непружному ударі. Щоб це підтвердити, достатньо порівняти енергію перед ударом

$$T = \frac{Mv^2}{2}$$

і енергію T_0 (див. (11.52)) після удару. Їхнє відношення дорівнює

$$\frac{T_0}{T} = \frac{M}{M+m} \leq 1. \quad (11.61)$$

Як бачимо, це відношення тим менше, чим більше відношення m/M .

11.9. Динамічні характеристики будівельних матеріалів і конструкцій

Тут ми роздивимося основні динамічні характеристики будівельних матеріалів: *динамічну жорсткість* і *динамічну міцність* (витривалість) при циклічному процесі деформування.

11.9.1. Динамічна жорсткість

Звернемо увагу на поняття “статичної” і “динамічної” жорсткості елементів будівельних конструкцій. Під “статичною” розуміється жорсткість, визначувана при повільних процесах деформування конструкцій, що вводиться в розрахунок споруд на статичні навантаження. Під “динамічною” будемо розуміти жорсткість, визначувану при достатньо швидких циклічних процесах деформування конструкцій, що вводиться в розрахунок споруд на динамічні навантаження.

Динамічну жорсткість елементів будівельних конструкцій при розрахунку на помірні динамічні навантаження (періодичні й імпульсивні)

визначають виходячи з пружної стадії роботи матеріалу і вважають такою, що дорівнює добутку динамічного модуля пружності на відповідну геометричну характеристику поперечного перерізу елемента. Виняток складають випадки потужних динамічних навантажень, що викликають появу макропластичних деформацій, які тут не розглядаються.

При динамічному розрахунку сталевих і дерев'яних конструкцій динамічні модулі пружності можна приймати такими, що дорівнюють статичним, визначеним при короткочасних випробуваннях. При розрахунку цегельних будинків на горизонтальні коливання для модуля зсуву приймається значення $0.3E$, де E – модуль пружності цегельної кладки на стискання.

11.9.2. Явище втомленості

Тіла, що зазнаються навантаження, які періодично змінюються, після закінчення певного числа циклів руйнуються. Таке явище називається *втомленістю* матеріалу. Спроможність матеріалу опиратися достатньо великому числу циклів періодично повторюваного навантаження називається *витривалістю*. Навантаження, що періодично змінюються, викликають напруження, які також змінюють свої значення періодично. Наприклад, періодичний характер зміни розтягуючих та стискальних напружень при одноосьовому розтяганні-стисканні може бути зображений графіком, як на рис. 11.15.

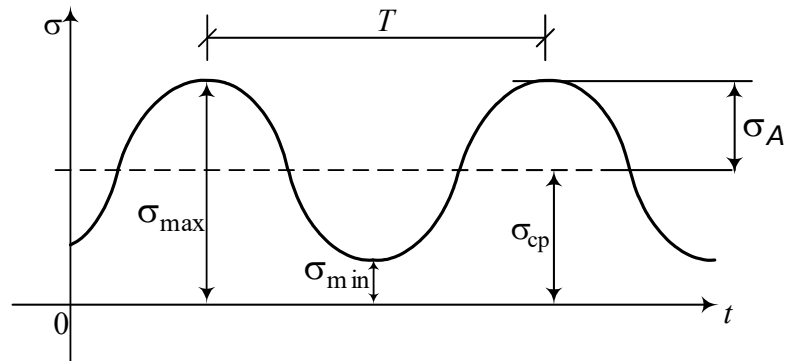


Рис. 11.15. Періодичний характер зміни розтягуючих і стискальних напружень при одноосьовому розтяганні-стисканні

Цикл змінних напружень характеризується такими величинами: σ_{\max} – максимальне напруження; σ_{\min} – мінімальне напруження; $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ – амплітуда циклу; $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ – середнє напруження; $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ – коефіцієнт асиметрії циклу; T – період циклу ($\nu = \frac{1}{T}$ – частота циклу).

Для знакозмінного циклу $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ і $r = -1$ (симетричний цикл напружень), рис. 11.16; $\sigma_{\text{сеп}} = 0$; $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\max}}{2} = \sigma_{\max}$.

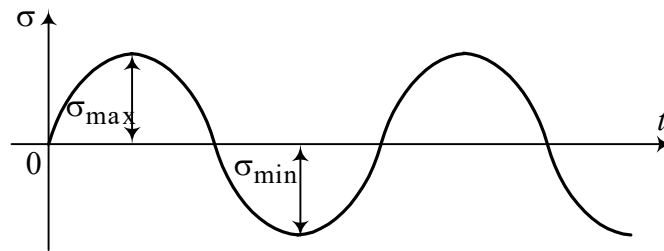


Рис. 11.16. Симетричний цикл напружень

Для статичного навантаження (рис. 11.17) $\sigma_{\max} = \sigma$; $\sigma_{\min} = \sigma$; $\sigma_{\text{сеп}} = \sigma$; $\sigma_A = 0$; $r = 1$.

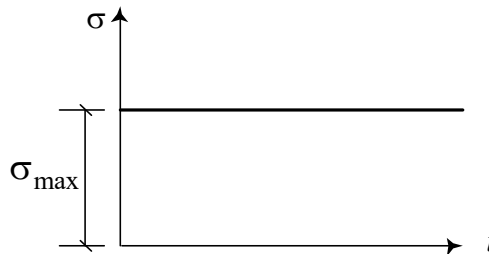


Рис. 11.17. Графік статичного навантаження

Для розрахунків на міцність при дії повторно-змінних напружень необхідно знати механічні характеристики матеріалу. Вони визначаються шляхом випробувань на втомленість зразків на спеціальних машинах. Найбільш простим і поширеним є випробування зразків при симетричному циклі напружень. Однакові зразки при однакових умовах піддаються періодичному знакозмінному симетричному розтягання-стисканню таким чином, що амплітуда напружень $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$, залишаючись постійною для кожного зразка, змінюється від одного зразка до другого. Кожний зразок до руйнування витримує N циклів при деякому найбільшому напруженні σ . Відкладаючи число N по горизонталі, одержимо криву Вьолера* (рис. 11.18).

Отже, при симетричному циклі навантаження зразка з найбільшим напруженням $\sigma < \sigma_0$ він може витримати без руйнування необмежене число циклів. Якщо ж найбільше напруження в зразку $\sigma > \sigma_0$, то він зруйнується при обмеженому числі циклів N . Напруження σ_0 називається *границею втомленості*.

* Вьолер (Велер) (1819 – 1914) – німецький інженер.

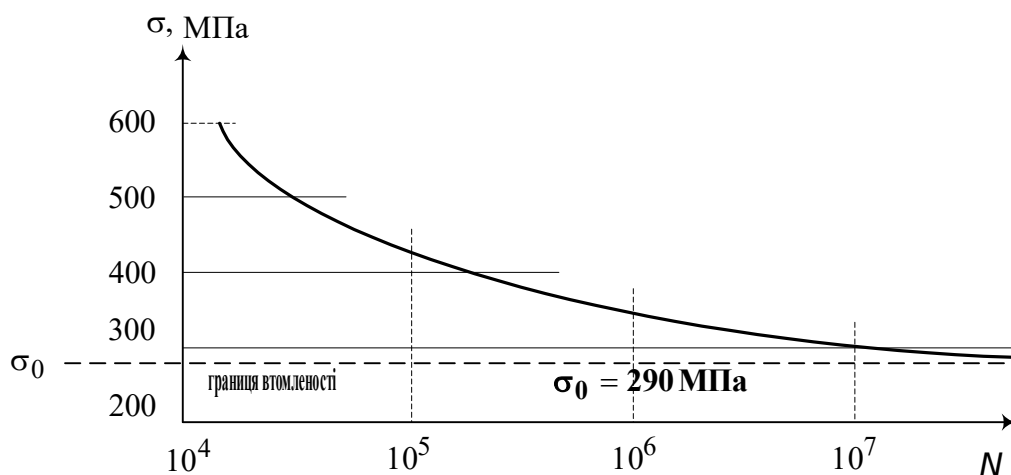


Рис. 11.18. Крива втомленості

Для сталей границя втомленості при симетричному циклі розтягання-стискання складає (30-50) % тимчасового опору (див. табл. 11.2).

Таблиця 11.2

Границі витривалості при різних видах деформації

Матеріал	σ_B , МПа	Значення σ_0/σ_B		
		Згинання	Розтягання-стискання	Кручення
Сталь марки:				
10	340-420	0,51	0,37	0,27
20	450-500	0,43	0,31	0,255
30	480-600	0,435	0,35	0,215
45	600-750	0,435	0,325	0,26
40ХН	900	0,44	0,32	0,28
12ХНЗА	950	0,455	0,31	0,25
ГУТАП 5140	900-1000	0,435	0,30	0,25
25ХНВА	1100	0,455	0,305	0,265
18ХНВА	1150	0,49	0,33	0,30

Оскільки нескінченну кількість циклів здійснити неможливо, то для встановлення значення границі втомленості задаються певним достатньо великим числом циклів і визначають найбільше напруження, при якому зразок, проходячи через усе число циклів, не руйнується.

Для сталей таке число циклів, або базу випробувань, приймають у межах $10^6 - 10^7$ циклів (рис. 11.18). Для кольорових металів – $(5 - 10) \cdot 10^7$ циклів.

У табл. 11.2 для деяких сталей дано границі витривалості в частках від σ_B при симетричних циклах напружень згинання, розтягання-стискання (рис. 11.16) і кручення.

Як видно з табл. 11.2, для металів мінімум σ_0/σ_B відповідає крученню, максимум – згинанню. Границі втомленості сталей при згинанні, стисканні-розтяганні і крученні відносяться приблизно як числа 1, 8:1, 3:1.

11.9.3. Діаграма граничних амплітуд

Для одержання характеристик опору утоми при асиметричних циклах роблять випробування зразків при різному ступені асиметрії й за результатами випробувань будують діаграму граничних напружень, що характеризує залежність між амплітудами циклів σ_A і середніми значеннями напружень циклів $\sigma_{сер}$ (рис. 11.19).

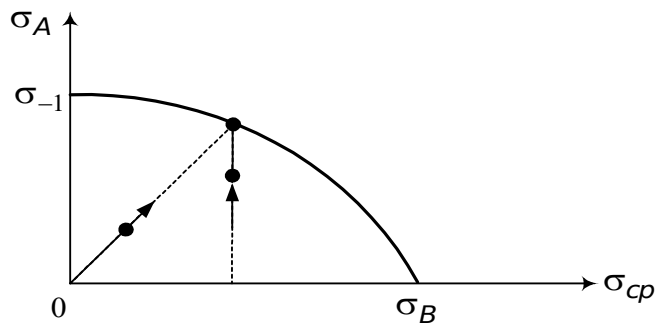


Рис. 11.19. Діаграма граничних амплітуд

Уведення нового параметра (параметра асиметрії циклу) вимагає випробування вже не десятка, а декількох десятків зразків. Побудова діаграми $\sigma_A - \sigma_B$ може бути здійснена в такий спосіб.

Усю партію зразків, призначену для випробувань, розбивають на кілька серій. Для кожної серії встановлюють середнє значення напруження $\sigma_{сер}$. У результаті випробувань визначають максимальнє значення σ_A , під яким розуміється найбільше значення амплітуди, що не викликає руйнування зразка до базового числа випробувань N при заданому середньому напруженні $\sigma_{сер}$. Отримані в такий спосіб напруження σ_A та $\sigma_{сер}$ визначають на діаграмі амплітуд одну точку (рис. 11.19). За результатами випробувань усіх серій зразків знаходять кілька точок зазначеної діаграми.

Призначення діаграми граничних амплітуд стає зрозумілим з таких міркувань. Припустимо, що цикл навантаження зразка характеризується параметрами σ_A , $\sigma_{сер}$. Якщо точка, що відповідає цим значенням σ_A і $\sigma_{сер}$, виявляється нижче кривої $\sigma_{сер} \sim \sigma_A$ на рис. 11.19, то розглянутий зразок здатний витримати необмежене число циклів або, принаймні, не зруйнується до базового числа циклу N . Якщо ж точка виявилася вище зазначеної кривої, то зразок зруйнується при деякому обмеженому числі циклів або при числі циклів, меншому від базового числа.

11.9.4. Фактори, що впливають на утомленісну міцність

матеріалів

На границю витривалості матеріалу впливають концентрація напружень, масштабний фактор, якість обробки поверхні, зовнішнє середовище та ін.

11.9.4.1. Концентрація напружень

Концентрація напружень при циклічній зміні навантаження викликає в зоні осередку концентрації зародження й наступне збільшення тріщини, який завершується утомленісним руйнуванням. Для урахування впливу концентрації напружень на границю витривалості вводиться ефективний коефіцієнт концентрації напружень K_{σ} , який дорівнює відношенню границь витривалості «гладкого» зразка σ_{ρ} й зразка з концентрацією напружень $\sigma_{\rho k}$, тобто

$$\beta = \frac{\sigma_{\rho}}{\sigma_{\rho k}}. \quad (11.62)$$

Експериментально встановлено, що коефіцієнт β зменшується зі збільшенням коефіцієнта асиметрії циклу, тобто з наближенням навантаження до статичного.

Хоча коефіцієнт β повинен визначатися для кожного значення коефіцієнта асиметрії циклу, внаслідок недостатності експериментальних даних у розрахунках звичайно використовуються числові значення ефективного коефіцієнта концентрації напружень для симетричного циклу:

$$\beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}. \quad (11.63)$$

Вплив концентрації напружень на границю витривалості іноді враховується коефіцієнтом чутливості матеріалу до місцевих напружень:

$$q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}, \quad (11.64)$$

де $\alpha = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{ном}}$ – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень (див. п. 10.8).

Коефіцієнт q залежить головним чином від властивостей матеріалу. Для конструкційних сталей коефіцієнт $q \approx 0.6 \dots 0.8$, причому більш міцним сталям відповідають більші значення q . Тому застосування високоміцних матеріалів при змінних навантаженнях не завжди доцільно.

Замічено, що утомленісне руйнування значною мірою залежить від інтенсивності зменшення напружень в області осередку концентрації напружень. Якщо місцеві напруження убувають досить різко, то число зерен матеріалу в зоні високих напружень відносно невелике, і ймовірність утомленісної тріщини також відносно невелика. Швидкість убування місцевих напружень визначається градієнтом G , тобто похідною від напруження за якою-небудь координатою (рис. 10.15):

$$G = \frac{d\sigma}{dx} \Big|_{x=\frac{a}{2}}. \quad (11.65)$$

Відносним градієнтом ϵ

$$\bar{G} = \frac{G}{\sigma_{\max}}, \quad (11.66)$$

збільшення якого знижує чутливість матеріалу до місцевих напружень.

11.9.4.2. Масштабний фактор

Численними випробуваннями встановлено, що утомленісна міцність зразків при всіх інших рівних умовах знижується зі збільшенням їх площі поперечного перерізу. Як правило, залежність між границею витривалості матеріалу й розмірами поперечного перерізу має асиметричний характер, із чого випливає, що для дуже великих зразків границя витривалості виявляється незмінною. На опір утоми впливає також довжина зразка, хоча вона менш яскраво проявляється порівняно із впливом розмірів поперечного перерізу.

Зниження утомленісної міцності зі збільшенням розмірів деталі одержало назву масштабного фактора. У якості причин появи масштабного фактора можна назвати такі:

а) статистичний фактор – велика ймовірність появи дефектів і перенапружених зерен матеріалу, що призводить до збільшення ймовірності руйнування;

б) технологічний фактор – вплив способу обробки деталі в процесі її виготовлення;

в) виробничий фактор – погіршення якості матеріалу зі збільшенням об'єму деталі, кування й т. п.

Для неоднорідних матеріалів, що мають велику кількість дефектів, вплив масштабного фактора на границю витривалості виражений сильніше, ніж для однорідних матеріалів із суттєво меншим числом дефектів. Вплив абсолютних розмірів деталі на границю витривалості матеріалу враховується за допомогою коефіцієнта масштабного фактора.

11.9.4.3. Якість поверхні

Результати випробувань зразків, поверхня яких має різний ступінь чистоти обробки, свідчать про те, що границя витривалості, отримана для зразків з полірованою поверхнею, вище, ніж для зразків зі шліфованою поверхнею, а σ_D останніх вище, ніж у зразків з поверхнею, обробленою різцем, і т. д. Ця обставина пояснюється тим, що після обробки різцем на поверхні зразка залишаються надрізи, подряпини й т. п., які при дії змінних у часі навантажень провокують зародження й наступний розвиток тріщин.

Для підвищення утомленісної міцності деталей використовуються технологічні методи зміцнення їх поверхні, такі як наклеп поверхневого

шару шляхом обдування дробом або ультразвуком, загартування струмами високої частоти й ін.

Позитивний вплив зазначених способів на утомленісну міцність деталі пояснюється тим, що в поверхневому шарі матеріалу створюються стискаючі напруження, які ускладнюють розвиток утомленісних тріщин. Крім того, внаслідок наклепу підвищується міцність матеріалу в поверхневому шарі.

Вплив технологічних факторів на утомленісну міцність здійснюється коефіцієнтом поверхневого зміцнення.

11.9.4.4. Зовнішнє середовище

Різне зниження границі витривалості викликає корозія металів. При цьому в поверхневих шарах виникають тріщини корозійної утоми, в основному внутрішньокристалічні. Близько невеликих місцевих корозійних ушкоджень виникає концентрація напружень, причому на дні корозійної порожнини з'являються максимальні напруження. Це призводить до більш інтенсивного розвитку корозії й до поступового поглиблення тріщини утоми. Зниження границі витривалості внаслідок корозії є більш суттєвим для високоміцних сталей. З метою захисту конструкцій від корозії застосовують різні захисти (антикорозійні) покриття поверхонь, наприклад, їхнє фарбування.

11.9.5. Утомленісна міцність при нестационарних навантаженнях

Дотепер передбачалося, що значення амплітуди напружень σ_A змінюється в часі. Часто ця зміна носить циклічний характер. Тривалість такого циклу, називаного блоком навантаження, позначимо t_σ . Для оцінки утомленісної міцності елемента конструкції необхідно мати дані про значення σ_A й кількість циклів її повторення протягом одного блока навантаження.

Для цього розіб'ємо весь інтервал зміни напруження σ на k відрізків, у межах кожного з яких амплітуда напружень σ_{A_i} ($i=1, \dots, k$) вважається постійною, і визначається n_i – число циклів повторення величини σ_{A_i} (рис. 11.20).

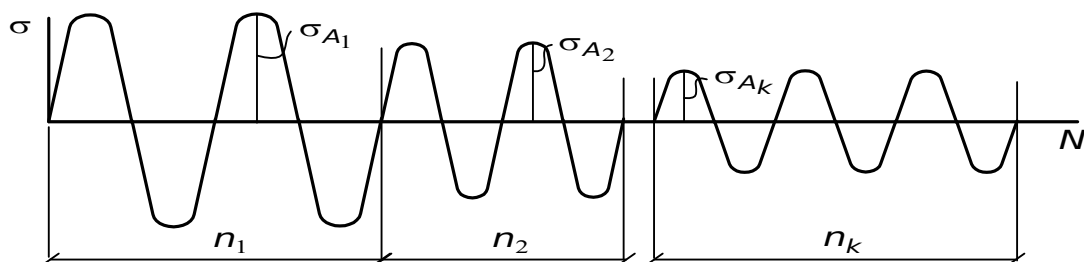


Рис. 11.20. Розбиття інтервалу зміни напружень на відрізки, у межах яких амплітуда напружень постійна

За результатами таких обчислень можна побудувати графік залежності σ_{A_i} від n_i , показаний на рис. 11.21. Тут σ_{A_i} убуває із зростанням порядкового номера i , у результаті чого $\sigma_A = \sigma_{\max}$, $\sigma_{A_k} = \sigma_{\min}$. При необмеженому збільшенні числа k східчаста функція розподілу параметра σ_A переходить у безперервну функцію.

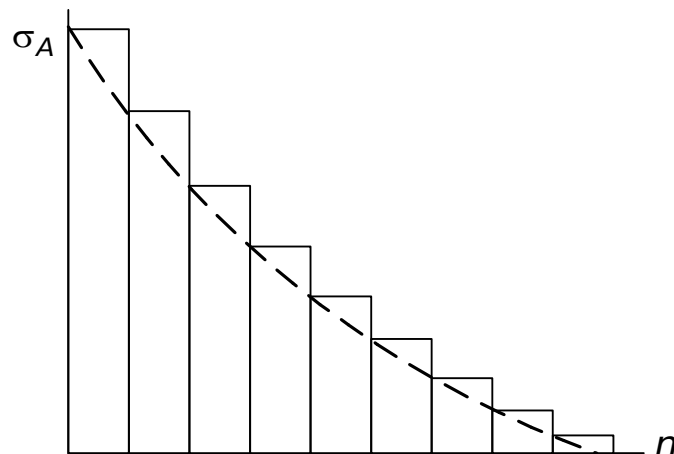


Рис. 11.21. Розподіл амплітуд напружень у блоці навантаження

Число

$$n_{\sigma} = \sum_{i=1}^{k_i} n_i$$

визначає загальне число циклів в одному блоці навантаження.

Якщо загальний термін служби конструкції дорівнює T , то число блоків навантаження, що укладаються в термін служби, дорівнює

$$\lambda = \frac{T}{t_{\sigma}},$$

а загальне сумарне число циклів усіх амплітуд напружень

$$N_{\Sigma} = \lambda n_{\sigma}.$$

Тепер природно виникає питання про визначення числа циклів зміни напружень при нестационарному навантаженні, після якого відбудеться утомленісне руйнування конструкції.

Відповідь на це питання може бути отримана за допомогою гіпотези про лінійне підсумовування утомленісних ушкоджень, запропонованої вперше в 1924 р. Пальмгреном. Зміст гіпотези полягає в наступному.

Припустимо, що N_i – число циклів до настання утомленісного руйнування при незмінній амплітуді σ_{A_i} . Число N_i може бути знайдене за допомогою кривої Велера (див. рис. 11.18). Відношення n_i^*/N_i , де $n_i^* = \lambda n_i$, визначає відносне утомленісне ушкодження, що відповідає напруженню σ_{A_i} .

Очевидно, що утомленісному руйнуванню відповідає рівність

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i^*}{N_i} = 1.$$

Якщо $\sigma_{A_i} < \sigma_{-1}$ при кожному $1 \leq i \leq k$, то руйнування елемента конструкції не відбувається. Гіпотеза лінійного підсумовування ушкоджень неодноразово зазнавала перевірки. Досвід її застосування показує, що вона дає достовірні результати, якщо всі значення амплітуди σ_{A_i} перевищують границю витривалості й монотонно змінюються в часі без різких сплесків.

11.9.6. Розрахунок на міцність при змінних напруженнях

Розрахунок елементів будівельних конструкцій на витривалість зводиться до перевірки нерівності вигляду

$$\sigma_{\max} \leq \alpha \gamma_v R_v, \quad (11.67)$$

де σ_{\max} – максимальне нормальне напруження; R_v – розрахунковий опір втоми, що залежить від тимчасового опору матеріалу; α – коефіцієнт, що враховує число циклів навантаження; γ_v – коефіцієнт, що залежить від виду напруженого стану й коефіцієнта асиметрії циклу.

Наприклад, для сталевих конструкцій коефіцієнт γ_v визначається за табл. 11.3.

Таблиця 11.3

Значення коефіцієнта γ_v для сталевих конструкцій

σ_{\max}	r	γ_v
Розтягання	$-1 \leq r < 0$	$2,5/(1,5 - r)$
	$0 < r \leq 0,8$	$2,0/(1,2 - r)$
	$0,8 < r < 1$	$1,0/(1 - r)$
Стискання	$-1 \leq r < 1$	$2,0/(1 - r)$

Розрахунковий опір втоми, а також коефіцієнт α ураховують якість обробки поверхні елемента, що розраховується, його конструктивне виконання, наявність концентрації напружень.

Для окремих видів конструкцій співвідношення (11.67) може приймати трохи відмінну форму. Так, при розрахунку сталевих конструкцій мостів використовується така нерівність:

$$\sigma_{\max} \leq \gamma_v m R, \quad (11.68)$$

де R – розрахунковий опір при розтяганні, стисканні та згинанні по границі текучості матеріалу; m – коефіцієнт умов роботи;

$$\gamma_v = \frac{1}{(\alpha\beta + \delta) - (\alpha\beta - \delta)r}, \quad (11.69)$$

де α, δ – коефіцієнти, що враховують марку сталі й нестационарність навантаження; r – коефіцієнт асиметрії циклу змінних напружень; β – ефективний коефіцієнт концентрації напружень.

Коефіцієнт γ_v , обумовлений виразом (11.69), описує вид діаграми граничних амплітуд з урахуванням концентрації напружень, якості матеріалу й обробки його поверхні, режиму навантаження й інших факторів.

Роздивимося приклад розрахунку на міцність. Нехай розкіс сталевий прогоновий будівлі залізничного моста при проходженні поїзда зазнає впливу змінного осевого зусилля. Найбільше зусилля, що розтягує, дорівнює $N_{\max} = 1200 \text{ кН}$. Найменше (стискальне) зусилля $N_{\min} = 200 \text{ кН}$. Розрахунковий опір R низьколегованої сталі марки 15ХСНД дорівнює 295 МПа. Коефіцієнт умов роботи $m = 0,9$. Поперечний переріз – складовий (рис. 11.22), і його площа дорівнює $A = 75 \text{ см}^2$.

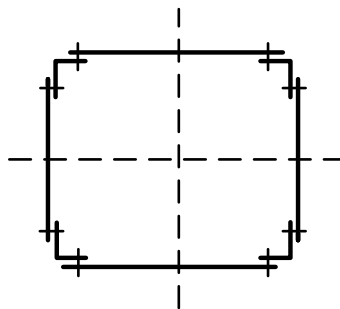


Рис. 11.22. Конструкція поперечного перерізу розкосу сталевий прогоновий будівлі залізничного моста

Коефіцієнт асиметрії циклу визначається так:

$$r = -\frac{|N_{\min}|}{N_{\max}} = -\frac{1}{6}.$$

У відповідності зі СНиП 2.05.03-84 коефіцієнт β приймається 1.5;
параметри $\alpha = 0,72$, $\delta = 0,24$.

Тоді за (11.64)

$$\gamma_v = 0,85.$$

Максимальне напруження

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1200 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}.$$

Права частина нерівності (11.63) набуває значення

$$\gamma_v m R = 0,85 \cdot 0,9 \cdot 295 = 226,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Отже, умова утомленісної міцності виконується.

ВИСНОВОК

Зупинимось на деяких наукових проблемах опору матеріалів, що не знайшли відбитку (або частково викладені) у цьому виданні, але характеризують сучасний рівень розвитку науки про міцність.

При теоретичному визначенні напружень у стержнях використовуються певні гіпотези, що спрощують розв'язання задач. Експериментальні результати в загальному випадку не цілком укладаються в рамки цих гіпотез. Для правильного їхнього пояснення і застосування, як правило, потрібен більш широкий погляд на деформування елемента конструкції. Таку можливість дає застосування головних понять і рівнянь теорії пружності.

Останнім часом у різноманітних областях техніки, у тому числі і будівництві, усе більшого поширення одержують нові, так названі композитні матеріали (композити). Композит являє собою полімерну або металеву матрицю, армовану високоміцними волокнами. Відмітними ознаками цих матеріалів є їхня неоднорідність і, як правило, яскраво виражена анізотропія властивостей.

Головним методом експериментальних досліджень є метод тензометрії. Проте його хиба полягає в тому, що в ньому дані про деформування елемента одержуються на основі "точкових" вимірювань деформації. В даний час існують і успішно застосовуються методи фотопружності, метод муарових смуг і метод голографічної інтерферометрії, що дозволяють у наочній формі одержати з експерименту загальну картину деформування елемента.

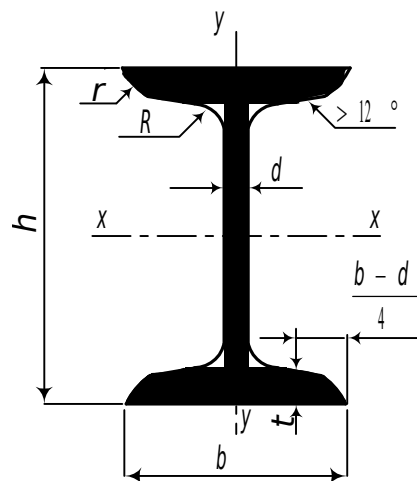
Елементи сучасних конструкцій при роботі можуть знаходитися не тільки в умовах високих і низьких температур, вакууму, але й в умовах нейтронного опромінення. Радіаційне опромінення твердих тіл супроводжується численними ефектами, у результаті яких у тілі виникає об'ємна деформація, змінюються пружні й особливо пластичні характеристики матеріалу.

Зниження вартості, матеріалоємності при забезпеченні високого рівня надійності здійснюється в процесі оптимального проектування. Тут спочатку задають вимоги до поведження конструкції разом із розрахунковими навантаженнями і геометричними обмеженнями, а потім визначають цільову функцію або функцію вартості. Мета наступного розрахунку полягає в такому виборі геометрії і матеріалу (або матеріалів) конструкції, при яких досягається необхідне поведження конструкції, і її вартість виявляється мінімальною.

В останні 25-30 років сформувався новий напрямок у питаннях міцності, що одержав назву "механіка руйнування". У ній вивчаються питання зростання й усталеності тріщин в елементах конструкції залежно від рівня навантаження й інших умов у процесі експлуатації.

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Балки двотаврові (за ГОСТом 8239-89)



351

Позначення

 h - висота балки; b - ширина полиці; d - товщина стінки; t - середня товщина полиці; J - момент інерції; W - момент опору; i - радіус інерції; S - статичний момент
півперерізу

Таблиця Д.1.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

352

Швелери (за ГОСТом 8240-89)

Позначення

h - висота швелера;

b - ширина полиці;

d - товщина стінки;

t - середня товщина полиці;

z_0 - відстань від осі y до зовнішньої грані стінки

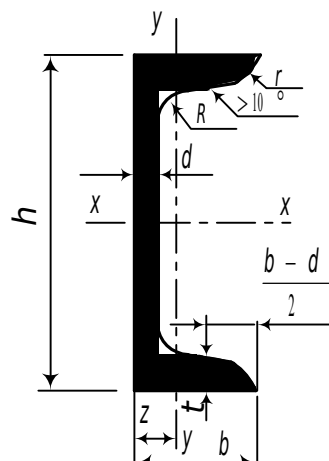
J - момент інерції;

W - момент опору;

i - радіус інерції;

S - статичний момент півперерізу;

353



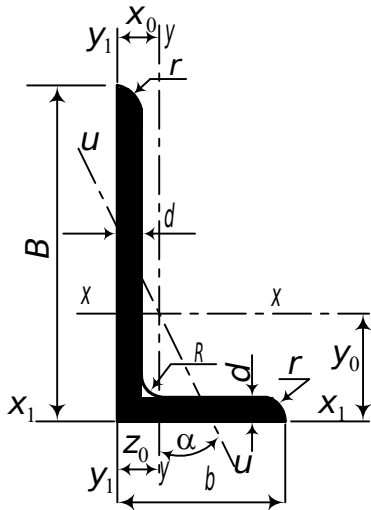
Таблиця Д.1.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2
16a	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3

Продовження табл. Д.1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

Кутники нерівнополичні (за ГОСТом 8510-86*)



Позначення

- B - ширина більшої полиці;
- b - ширина меншої полиці;
- d - товщина стінки;
- J - момент інерції;
- i - радіус інерції;
- x_0, y_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

Таблиця Д.1.3

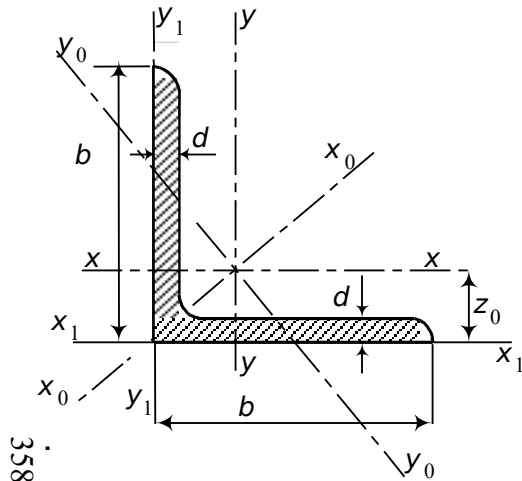
Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу, см^2	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{u \min}, \text{см}^4$	$i_{u \min}, \text{см}^4$	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$	$J_{x1}, \text{см}^4$	$J_{y1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

Продовження табл. Д.1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3

Продовження табл. Д.1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1



Кутники рівнополічні (за ГОСТом 8509-93)

Позначення

b - ширина полиці;

d - товщина стінки;

J - момент інерції;

i - радіус інерції;

z_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

358

Таблиця Д.1.4

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу, см^2	Довідкові величини для осей							z_0 , см	Маса 1м довжини профілю кг
				X-X		X_0-X_0		Y_0-Y_0		X_1-X_1		
	b	d		J_x , см^4	i_x , см	$J_{x0 \max}$, см^4	$i_{x0 \max}$, см	$J_{y0 \min}$, см^4	$i_{y0 \min}$, см	J_{x1} , см^4		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продовження табл. Д.1.4

359

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

Продовження табл. Д.1.4

360

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50

Продовження табл. Д.1.4

361

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0

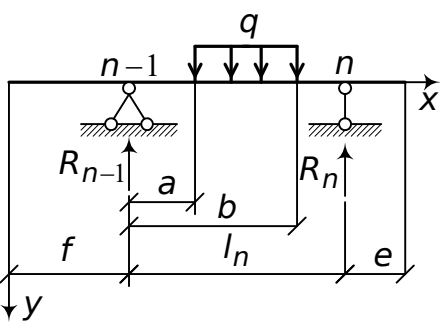
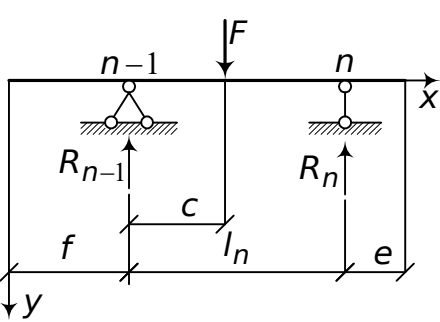
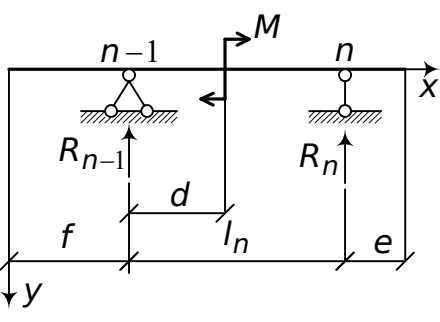
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
--	--	----	-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Продовження табл. Д.1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

**ЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ
У СТАТИЧНО ВИЗНАЧНИХ БАЛКАХ**

Таблиця Д.2.1

Номер схеми	Розрахункова схема балки	Формули для визначення опорних реакцій, початкових параметрів
1	2	3
1		$R_{n-1} = \frac{q(b-a)}{2l_n} [2l_n - (a+b)];$ $R_n = \frac{q(b-a)}{2l_n} (a+b);$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n-b)^4 + (l_n-a)^4] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n-b)^4 + (l_n-a)^4] \right\}$
2		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n} (l_n - c);$ $R_n = \frac{Fc}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right];$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$
3		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n};$ $R_n = \frac{M}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right];$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$

Продовження табл. Д.2.1

1	2	3
4		$R_{n-1} = \frac{qf}{2l_n}(2l_n + f); \quad R_n = -\frac{qf^2}{2l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] + qf^3 \right\}$
5		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n}(l_n + f); \quad R_n = \frac{Ff}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] + Ff^2 \right\}$
6		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] - 3Mf \right\}$
7		$R_{n-1} = -\frac{qe^2}{2l_n}; \quad R_n = \frac{qe}{2l_n}(2l_n + e);$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$

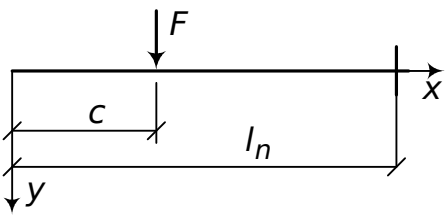
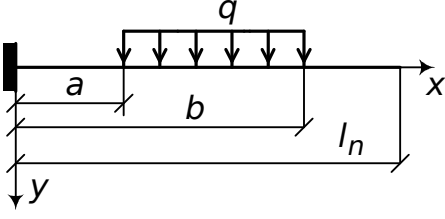
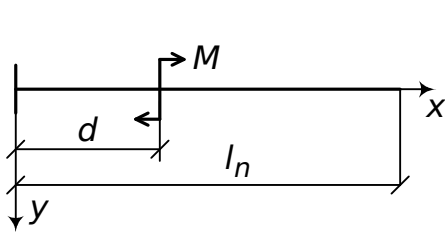
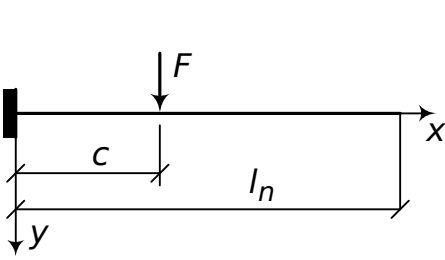
Продовження табл. Д.2.1

1	2	3
---	---	---

8		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
9		$R_{n-1} = -\frac{Fl}{l_n}; \quad R_n = \frac{F(l_n+e)}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
10		$\varphi_0 = -\frac{q}{6EJ} [(l_n-a)^3 - (l_n-b)^3];$ $y_0 = \frac{q}{24EJ} \left\{ 4l_n [(l_n-a)^3 - (l_n-b)^3] - \right.$ $\left. - [(l_n-a)^4 - (l_n-b)^4] \right\};$
11		$\varphi_0 = \frac{M(l_n-d)}{EJ};$ $y_0 = -\frac{M(l_n^2-d^2)}{2EJ}$

Продовження табл. Д.2.1

1	2	3

12		$\varphi_0 = -\frac{F(l_n - c)^2}{2EJ};$ $y_0 = \frac{F(l_n - c)^2(2l_n + c)}{6EJ}$
13		$M_0 = \frac{q}{2}(b^2 - a^2);$ $Q_0 = q(b - a)$
14		$M_0 = -M;$ $Q_0 = 0$
15		$M_0 = -F c;$ $Q_0 = F$