МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

Н.А. Аксьонова, О.В. Оробінський

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Харків - 2015

Аксьонова Н.А., Оробінський О.В. Теоретична механіка: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – 152 с.

Конспект лекцій призначено для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс дисципліни та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 160, табл. 2 ,бібліогр.: 2 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 25 грудня 2013 р., протокол № 5.

Рецензент

доц. О.В. Братченко

Н.А. Аксьонова, О.В. Оробінський

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Відповідальний за випуск Аксьонова Н.А.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 18.08.14 р.
Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 6,0. Тираж 200. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Впровадження кредитно – модульної системи навчання вимагає нових підходів до викладання загальноінженерних дисциплін, і в тому числі дисципліни "Теоретична механіка".

Сучасна методика викладання цієї дисципліни базується на концепції "Положення про впровадження кредитно - модульної системи організації навчального процесу" від 22. 02. 2005 року.

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного, будівельного та АТЗ факультетів на I, II та III курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам. Вищесказане зумовило необхідність розробки і введення до навчального процесу конспекту лекцій, який висвітлює основні питання розділу "Статика". Конспект лекцій є складовою методичного забезпечення самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни "Теоретична механіка".

Теоретична механіка – це наука про найзагальніші закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.

Механічним рухом називається зміна положення одного тіла відносно іншого, яка відбувається в просторі з плином часу.

Механічною взаємодією називаються такі взаємодії матеріальних тіл, які змінюють або намагаються змінити характер їх механічного руху чи форми (створити деформацію).

Теоретична механіка належить до фундаментальних дисциплін та створює основу багатьох інженерних дисциплін.

В основі теоретичної механіки лежать закони, що називаються законами класичної механіки або законами Ньютона, які встановлені шляхом узагальнення результатів великої кількості експериментів і спостережень. Їхня справедливість перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини.

Для вивчення всієї різноманітності механічних явищ теоретична механіка узагальнена в три розділи, які розглядаються в сукупності: статика, кінематика і динаміка.

1 СТАТИКА

1.1 Основні поняття та аксіоми статики

Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають силу, методи перетворення еквівалентних систем сил та встановлюють умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла.

1.1.1 Основні поняття та визначення

Матеріальна точка – фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

Системою матеріальних точок називається така сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух кожної точки залежать від положення і руху інших точок цієї системи.

Тверде тіло є системою матеріальних точок.

Абсолютно тверде тіло – тіло, в якому відстані між двома довільними його точками залишаються незмінними. Вважаючи тіла абсолютно твердими, не враховують деформацій, які виникають у реальних тілах.

Кінематичний стан тіла – стан спокою або руху певного характеру, в якому тіло може знаходитись.

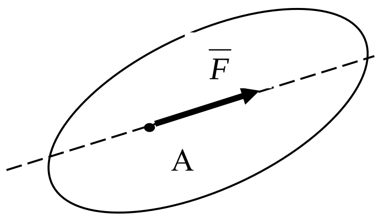


Рисунок 1

Сила – величина, яка є мірою механічної взаємодії двох тіл і визначає інтенсивність та напрямок цієї взаємодії (рисунок 1). Одиницею вимірювання сили в системі СІ є ньютон (1 Н).

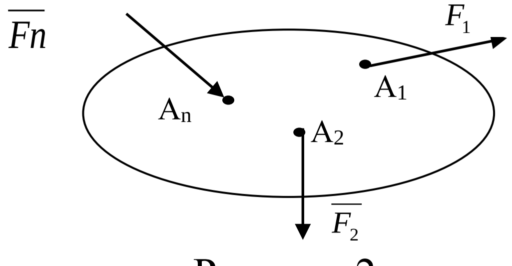


Рисунок 2

Системою сил називається сукупність сил, що діють на матеріальне тіло або точку $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\}$ або $\{\overline{Fn}\}$, де $n = 1,2,\ldots k$ (рисунок 2).

Еквівалентними системами сил називаються такі дві системи сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots.. \overline{Fn}\}$ і $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots.. \overline{Pk}\}$, кожну з яких можна замінити іншою, не порушуючи кінематичний стан твердого тіла:

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots.. \overline{Fn}\} \qquad \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots.. \overline{Pk}\}.$$

Рівнодійною системи сил називається сила $\overline{R}$, яка еквівалентна системі сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots.. \overline{Fn}\}$. $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots.. \overline{Fn}\} \qquad \overline{R}$.

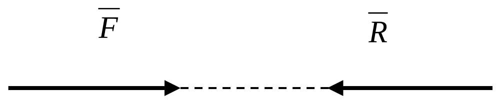


Рисунок 3

Зрівноважуючою силою називається сила $\overline{F}$, що дорівнює за модулем рівнодійній та спрямована вздовж лінії її дії протилежно (рисунок 3): $\overline{F} = - \overline{R}$.

Зрівноважена система сил – система сил, під дією якої тіло знаходиться у рівновазі. Зрівноважена система сил еквівалентна нулю.

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots.. \overline{Fn}\} \qquad \overline{R} \qquad 0.$$

Види сил

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між точками (тілами) даної системи.

Зовнішніми силами називаються сили, що діють на матеріальні точки (тіла) даної системи з боку матеріальних точок (тіл), що цій системі не належать.

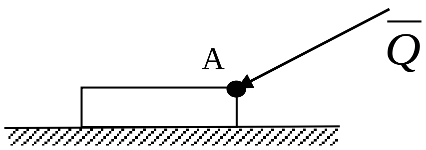
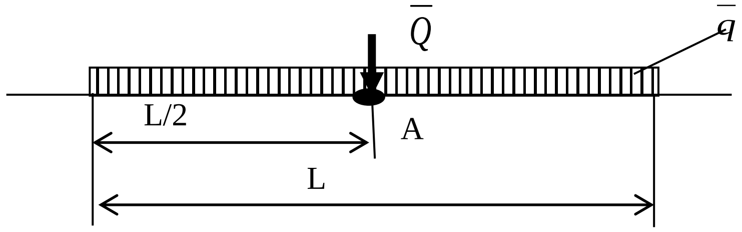


Рисунок 4

Зосередженою силою називається сила $\overline{Q}$, прикладена до тіла в будь-якій одній його точці (рисунок 4).

Розподіленими силами називаються сили, що діють на всі точки тіла (масові, об’ємні) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі) (рисунок 5).



$\overline{q} = const$,

$Q = L \cdot q$.

Рисунок 5

Основна задача статики

1 Приведення систем сил, що діють на тіло, до еквівалентних простішого вигляду.

2 Визначення умов рівноваги систем сил, що діють на тіло.

1.1.2 Аксіоми статики

Аксіоми відображають властивості сил, що діють на тіло.

1 Аксіома інерції (закон Галілея)

Під дією взаємозрівноважених сил матеріальна точка (тіло) знаходиться в стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно.

2 Аксіома рівноваги двох сил

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть зрівноважені тільки у випадку, коли вони рівні за модулем і спрямовані вздовж одної прямої протилежно (рисунок 6).

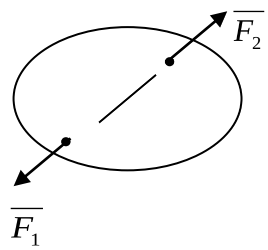


Рисунок 6 $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \quad 0, \quad \overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \quad |F_1| = |F_2|.$

Друга аксіома є умовою рівноваги тіла під дією двох сил.

3 Аксіома додавання та вилучення зрівноважених сил

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або вилучити будь-яку зрівноважену систему сил.

Наслідок. Не порушуючи стан абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку точку, зберігаючи незмінними її модуль та напрямок. Тобто сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є **ковзним вектором**.

4 Аксіома паралелограма сил

Рівнодійна двох сил, які перетинаються в одній точці, прикладена в точці їх перетину і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як сторонах (рисунок 7).

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}, \qquad \mathrm{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,.$$

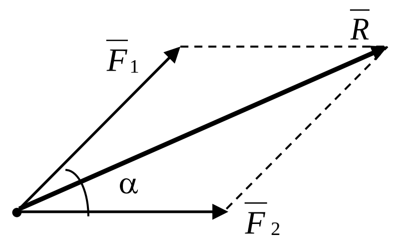


Рисунок 7

5 Аксіома дії та протидії

Кожній дії відповідає рівна за модулем та протилежна за напрямком протидія.

6 Аксіома рівноваги сил, прикладених до тіла, що деформується при його твердінні (принцип твердіння)

Рівновага сил, прикладених до тіла, що деформується, (змінної системи), зберігається, якщо тіло вважати затверділим (незмінним).

7 Аксіома звільнення тіла від зв’язків

Не змінюючи стан тіла, будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв’язки, а їх дію замінити реакціями.

1.1.3 Зв’язки та їх реакції

Вільним тілом називається таке тіло, яке може здійснювати довільні переміщення в просторі в будь-якому напрямку.

Зв’язками називаються тіла, які обмежують рух даного тіла в просторі.

Невільним тілом називається тіло, переміщення якого в просторі обмежено іншими тілами (зв’язками).

Реакцією зв’язку називається сила, з якою зв’язок діє на дане тіло.

Реакція зв’язку завжди спрямовується протилежно тому напрямку, в якому зв’язок протидіє можливому руху тіла.

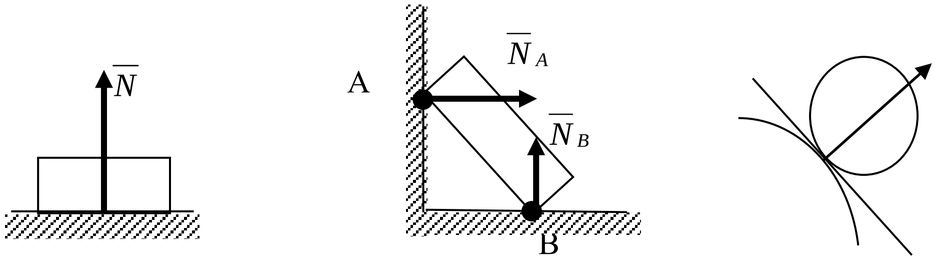
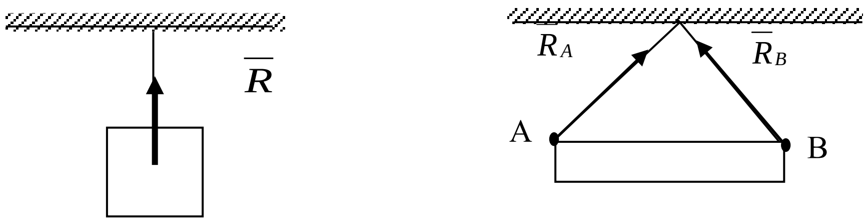
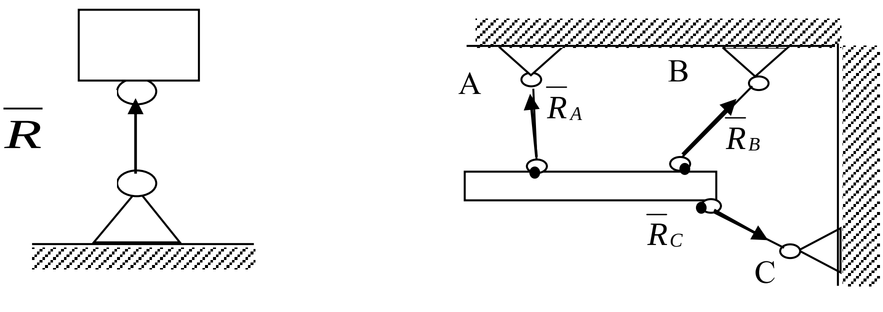
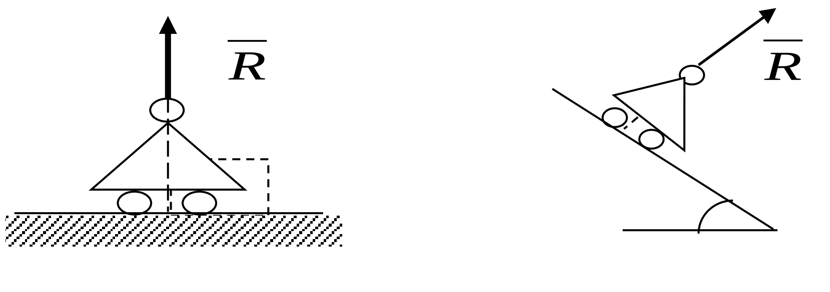
Активна сила - це сила, яка характеризує дію інших тіл на задане, що викликає або може викликати зміну його кінематичного стану.

Реактивна сила – це сила, яка характеризує дію зв’язків на дане тіло.

За аксіомою про звільнення тіла від зв’язків, будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, звільнивши його від зв’язків і замінивши їх дію реакціями. У цьому полягає **принцип звільнення від зв’язків**.

Основні види зв’язків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – **Основні види зв’язків**

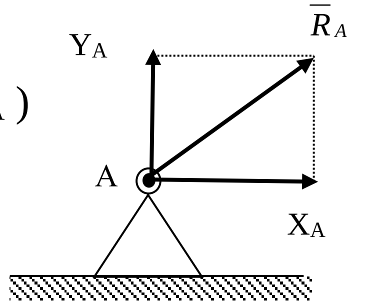
1	*Ідеальна (гладенька) поверхня або опора* (реакція перпендикулярна поверхні - $\overline{N}$ -нормальна реакція поверхні) 
2	*Ідеальна нитка* (реакція $\overline{R}$ спрямована вздовж нитки, троса) 
3	*Ідеальний стержень* (реакція $\overline{R}$ спрямована вздовж стержня) 
4	*Шарнірно – рухома опора* (опора на катках) (реакція $\overline{R}$ перпендикулярна поверхні) 

Продовження таблиці 1

<table>
<tr><td>5</td><td>

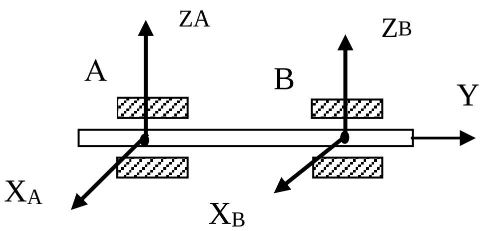
Шарнірно – нерухома опора
(реакція $\overline{R}_A$ складається з її проекцій на координатні осі X_A та Y_A)

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$



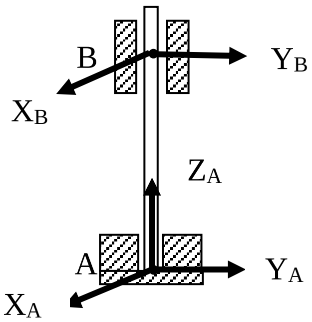
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

Циліндричний шарнір або підшипник
(реакція складається з проекцій, спрямованих вздовж осей, перпендикулярних осі циліндра)



</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

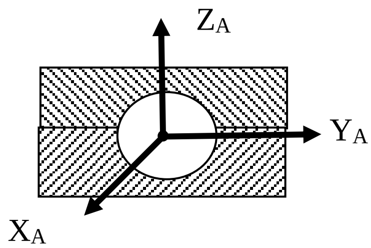
Упорний підшипник
(реакція точки А складається з проекцій вздовж координатних осей. В точці В – циліндричний шарнір)



</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

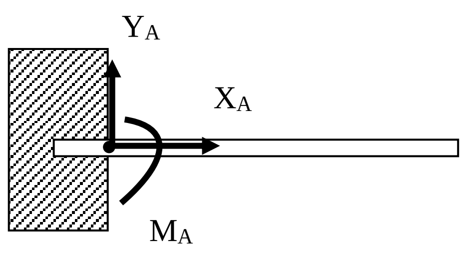
Сферичний підшипник
(реакція складається з проекцій на просторові осі координат)

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$$



</td></tr>
<tr><td>9</td><td>

Нерухоме закріплення
(жорстке закладання)
(реакція складається з проекцій X_A і Y_A, а також реактивного моменту M_A)



</td></tr>
</table>

1.1.4 Теорема про три сили

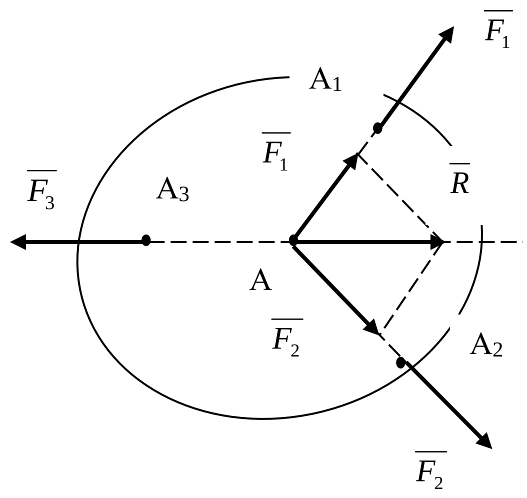


Рисунок 8

Теорема:
лінії дії трьох непаралельних взаємно зрівноважених сил, які лежать в одній площині, перетинаються в одній точці.

Якщо лінії дії трьох сил перетинаються в одній точці, то тіло під дією цих сил може і не бути в стані рівноваги, тобто обернена теорема не має місця (рисунок 8).

Для доведення теореми використовують аксіоми статики про паралелограм сил та про рівновагу двох сил.

Теорема про три непаралельні сили дається на підставах умов, що прикладена система сил зрівноважена.

1.2 Система збіжних сил

1.2.1 Визначення рівнодійної системи збіжних сил

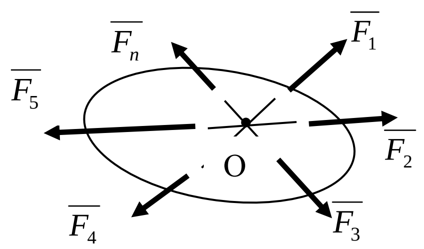


Рисунок 9

Система збіжних сил - це система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Така система сил $\{\overline{F_n}\}$ наведена на рисунку 9. Точка перетину ліній дії сил – точка О.

Система збіжних сил еквівалентна одній силі – **рівнодійній**, яка дорівнює векторній сумі сил і прикладена в точці перетину ліній їх дії

$$\overline{R} = \overline{F_1}, + \overline{F_2} + ... + \overline{F_k} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}. \qquad (1)$$

Методи визначення рівнодійної системи збіжних сил

1 Метод паралелограмів сил. На підставі аксіоми паралелограма сил кожні дві сили даної системи послідовно приводяться до одної сили – рівнодійної (рисунок 10).

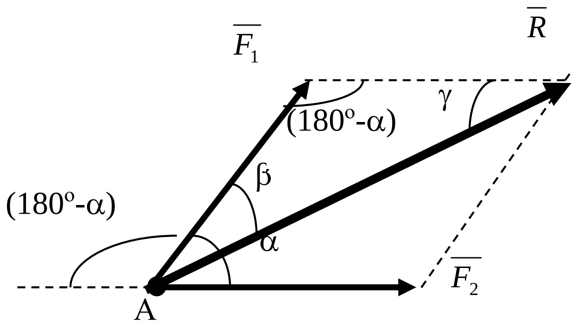


Рисунок 10

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Напрямок вектора рівнодійної

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

2 Побудова векторного силового багатокутника

Послідовно паралельним перенесенням кожного вектора сили в кінцеву точку попереднього вектора складається багатокутник, сторонами якого є вектори сил системи, а замикаючою стороною – вектор рівнодійної системи збіжних сил (рисунок 11).

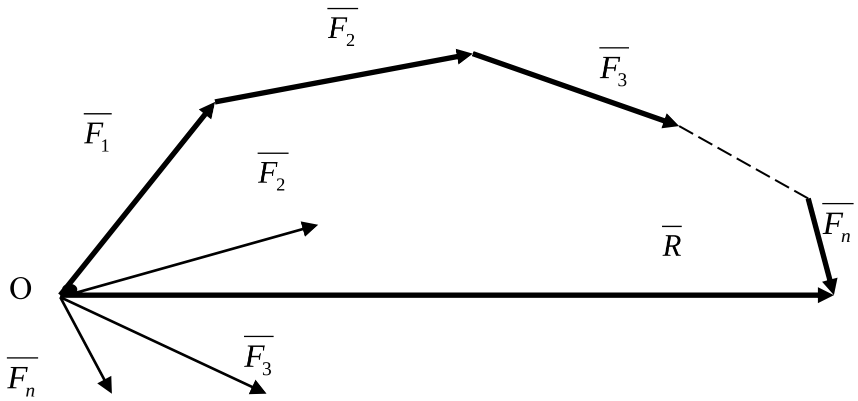


Рисунок 11

1.2.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Геометрична умова рівноваги збіжної системи сил:
для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб векторний силовий багатокутник, побудований на цих силах, був замкнутим.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F}_n = 0 . \qquad (4)$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил:
для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на координатні осі дорівнювали нулю.

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0,\ \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0,\ \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0\ . \qquad (5)$$

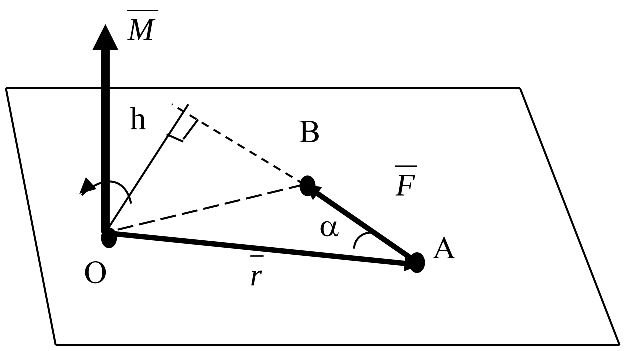
Рівняння (5) є умовою рівноваги системи збіжних сил, розташованих у просторі.

1.2.3 Момент сили відносно центра

Будь – який кінематичний стан тіл, які мають точку або вісь обертання, можна описати **моментом сили**, що характеризує обертальний ефект дії сили.

Момент сили відносно центру як вектор - це векторний добуток радіус – вектора $\overline{r}$ точки прикладання сили на вектор сили $\overline{F}$.

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\ . \qquad (6)$$



Сила $\overline{F}$ прикладена до точки А, радіус–вектор якої відносно довільного центра О визначається як $\overline{r} = \overline{OA}$ (рисунок 12).

Рисунок 12

Модуль моменту сили визначається за векторним добутком $\overline{r}$ і $\overline{F}$ та кутом α між радіус – вектором та вектором сили

$$|\overline{M_O}(\overline{F})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\overline{r} \wedge \overline{F}) = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\alpha) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h. \qquad (7)$$

Величина (r·sin α) = **h** – називається **плечем сили** – найкоротша відстань від центра (точки) до лінії дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили) (рисунок 12).

Вектор $\overline{M_O}(\overline{F})$ спрямовується за правилом векторного добутку: момент сили відносно центра (точки) як вектор спрямовується перпендикулярно площині, в якій розміщені сила і центр так, щоб з його кінця було видно намагання сили повертати тіло навколо центра проти ходу стрілки годинника.

Алгебраїчна величина моменту сили

Момент сили відносно центра в площині – алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили $\overline{F}$ на плече h відносно того ж центра з урахуванням знака.

$$M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h \,. \tag{8}$$

Знак моменту сили залежить від напрямку, в якому сила намагається обертати центр (рисунок 13):

1) проти ходу стрілки годинника – „+” (додатний);
2) за стрілкою годинника – „-” (від’ємний).

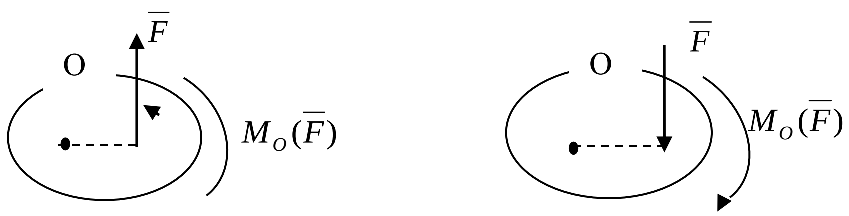


Рисунок 13

Одиницею вимірювання моменту сили є 1 ньютон на метр (Нм).

Властивості моменту сили відносно центра (точки)

1 Модуль моменту сили відносно точки дорівнює подвоєній площі трикутника, побудованого на векторах $\overline{r}$ і $\overline{F}$.

$$M_O(\overline{F}) = F \cdot h = \text{AB} \cdot h = 2\, S_{\Delta OAB}, \qquad (9)$$

де $S_{\Delta OAB} = \text{AB} \cdot h \,/ 2$ (рисунок 12).

2 Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили.

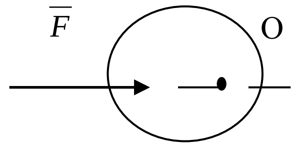


Рисунок 14

3 Момент сили відносно центра (точки) **дорівнює нулю** $M_O(\overline{F}) = 0$**,** коли:

- сила дорівнює нулю $F = 0$;
- плече сили $h = 0$, тобто лінія дії сили, проходить через центр (рисунок 14).

Теорема Varіньона (про момент рівнодійної)

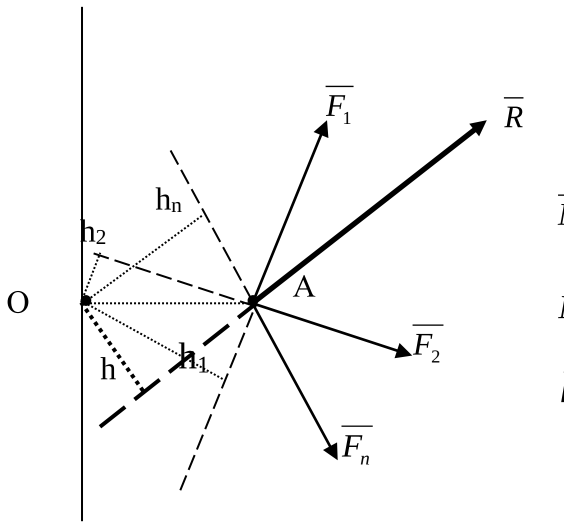


Рисунок 15

$$\overline{M_O(\overline{R})} = \overline{r} \times \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n} = \sum_{n=1}^{k} (\overline{r} \times \overline{F_n});$$

$$M_O(\overline{R}) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = \sum_{n=1}^{k} (F_n \cdot h_n), \qquad (10)$$

h_n - плечі сил системи відносно центра О.

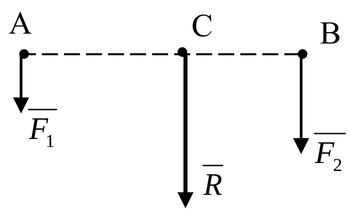
Теорема:

момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил відносно будь - якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил системи відносно того ж центра (рисунок 15)

$$M_O(\overline{R}) = M_O(\sum_{n=1}^{k}\overline{F_n}) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}). \qquad (11)$$

1.3 Теорія пар сил

1.3.1 Складання двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону



Сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ діють на абсолютно тверде тіло в точках А і В відповідно.

$F_1 \neq F_2$, $\overline{F_1} \parallel \overline{F_2}$ та спрямовані в одну сторону (рисунок 16)

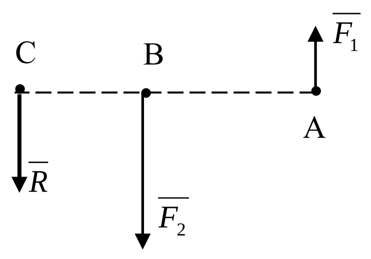
Рисунок 16

Рівнодійна системи двох паралельних, спрямованих в одну сторону, дорівнює за модулем сумі модулів складових сил $R = F_1 + F_2$, паралельна їм та спрямована в тому ж напрямку.

Лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстанях від цих точок, обернено пропорційних силам $\dfrac{AC}{F_2} = \dfrac{CB}{F_1} = \dfrac{AB}{R}$ (рисунок 16).

1.3.2 Складання двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони

Випадок сил різних за модулем



Сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ діють на абсолютно тверде тіло в точках А і В відповідно. $F_1 \neq F_2$,

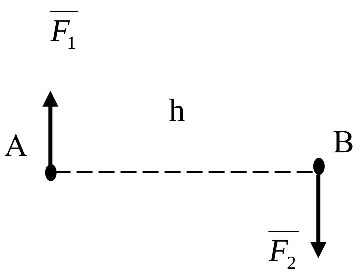
$\overline{F_1}$ II $\overline{F_2}$ та спрямовані в різні сторони (рисунок 17).

Рисунок 17

Рівнодійна двох паралельних, нерівних за модулем, протилежно спрямованих сил, паралельна їм і спрямована в напрямку більшої сили та за модулем дорівнює різниці складових сил $R = F_1 - F_2$.

Лінія дії рівнодійної проходить через точку, що розташована зовні відрізка АВ з боку більшої сили, і поділяє відстань між точками прикладання сил на відрізки, обернено пропорційні силам (рисунок 17) $\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}$.

1.3.3 Поняття про пару сил



Пара сил – система двох паралельних, рівних за модулем та протилежних за напрямком сил, прикладених до абсолютно твердого тіла (рисунок 18).

Рисунок 18

Поряд із силою пара сил є самостійним елементом статики.

Плече пари сил h – відстань між лініями дії сил пари, тобто довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки лінії дії однієї із сил пари на лінію дії другої сили.

Площина дії пари сил – це площина, в якій розташовані лінії дій сил пари.

Момент пари сил як вектор

Моментом пари називається вектор $\overline{M}$ (рисунок 19) з такими ознаками:

- перпендикулярний площині пари;

- спрямований в ту сторону, звідки обертання, що здійснює пара, видно таким, яке відбувається проти стрілки годинника;

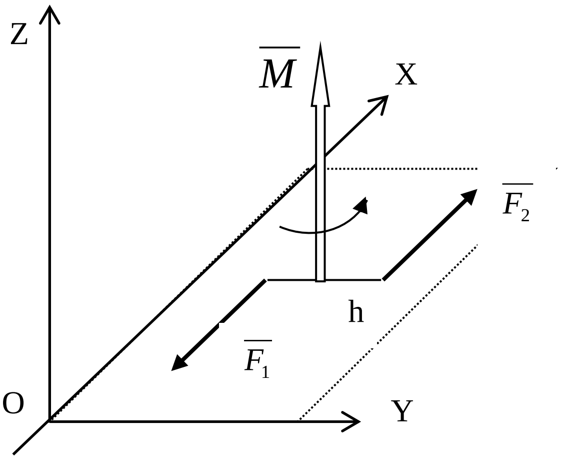
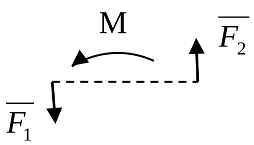


Рисунок 19

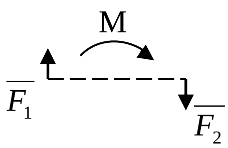
- модуль моменту дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече h пари з урахуванням знака

$$M = \pm F \cdot h\,. \qquad (12)$$

Знак моменту пари сил:



+" – обертання проти стрілки годинника,



„-„ – обертання за стрілкою годинника.

Момент пари сил дорівнює добутку модуля одної із сил пари на плече пари (12).

Момент пари – **вільний вектор** – для нього ні точка прикладання, ні лінія дії не означені, вони можуть бути довільними (рисунок 19).

Властивість моменту пари сил:
момент пари дорівнює моменту однієї із сил відносно точки прикладання другої сили (рисунок 18).

$$M_B(\overline{F_1}) = M_A(\overline{F_2}) = M(\overline{F_1}\,\overline{F_2})\,. \qquad (13)$$

Теореми про пару сил

Теорема 1. Пара сил не має рівнодійної, тобто пару сил не можна замінити одною силою.

Теорема 2. Пара сил не є системою зрівноважених сил.

Наслідком із перших двох теорем є вже наведене твердження:
пара сил, що діє на абсолютно тверде тіло, намагається обертати його.

Теорема 3. Сума моментів сил пари відносно довільного центра (точки) в просторі є величиною незмінною і являє собою вектор-момент цієї пари.

Теорема 4. Сума моментів сил, що складають пару, відносно довільного центра в площині дії пари не залежить від центра та дорівнює добутку сили на плече пари з урахуванням знака, тобто самому моменту пари.

$$M_O(\overline{F_1}) + M_O(\overline{F_2}) = \pm F_1 \cdot h. \qquad (14)$$

Теорема 5 (про еквівалентність пар)

Пари сил, моменти яких дорівнюють один одному чисельно та за знаком, є еквівалентними. Тобто пару сил можна замінити або зрівноважити тільки іншою еквівалентною парою сил.

Теорема 6 (про зрівноваженість пари сил)

Пара сил складає зрівноважену систему сил тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулю.

Теорема 7 (про можливості переміщення пари сил в площині її дії)

Пара сил, що отримана переміщенням пари в будь-яке положення в площині її дії, еквівалентна наданій парі.

Теорема 8 (про додавання пар сил у площині)

Момент пари, еквівалентної наданій системі пар у площині, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар. Тобто для складання пар сил необхідно скласти їх моменти.

$$M = \sum_{n=1}^{k} M_n \,. \tag{15}$$

Умови рівноваги системи пар сил

Пари сил у площині зрівноважуються в тому випадку, якщо алгебраїчна сума їх моментів дорівнює нулю.

$$\sum_{n=1}^{k} M_n = 0 \,. \tag{16}$$

1.4 Довільна плоска система сил

1.4.1 Приведення сили до даного центра. Теорема про паралельний перенос сили

Довільна плоска система сил – це система сил, лінії дії яких розташовані в площині незалежно.
A_1, A_2, A_n, - точки прикладання сил системи $\{\overline{F_1},\ \overline{F_2},..\overline{F_n}\}$ (рисунок 20).

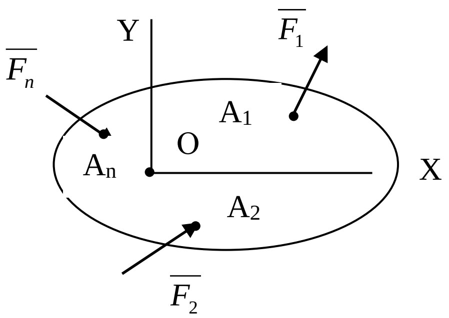


Рисунок 20

Точка О - **центр приведення системи**

Теорема про паралельний перенос сили (метод Пуансо)

Силу $\overline{F}$, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна перенести паралельно самій собі в будь-який центр О (рисунок 21), додавши при цьому пару сил з моментом, що дорівнює моменту цієї сили відносно центра приведення.

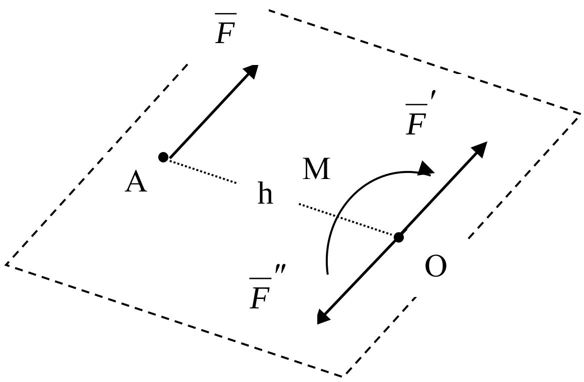


Рисунок 21

Сила $\overline{F}$, прикладена в точці А, перенесена паралельно самій собі до центра О (рисунок 21) таким чином, що в центрі отримано силу $\overline{F}' = \overline{F}$ та пару сил ($\overline{F}, \overline{F}''$), момент якої дорівнює моменту сили $\overline{F}$ відносно центра О:

$$M(\overline{F}, \overline{F}'') = M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h,$$

де h – плече пари (рисунок 21).

$\overline{F}_A$ замінюється $\overline{F}_O$ та $M_O(\overline{F})$.

Приведення довільної системи сил до даного центра. Головний вектор та головний момент системи сил

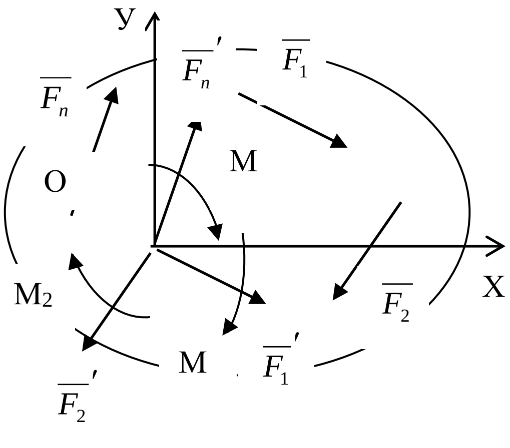


Рисунок 22

Методом Пуансо в центрі приведення О буде отримано систему сил і систему пар, моменти кожної з яких дорівнюють моментам відповідної сили відносно центра приведення (рисунок 22).

Головним вектором системи $\overline{R}$ називається вектор, що дорівнює геометричній сумі всіх сил системи.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n} \ . \qquad (17)$$

Модуль $\overline{R}$:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} \ , \ R_X = \sum_{n=1}^{k} F_{nX} \ , \ R_Y = \sum_{n=1}^{k} F_{nY} \ .$$

Напрямок вектора $\overline{R}$:

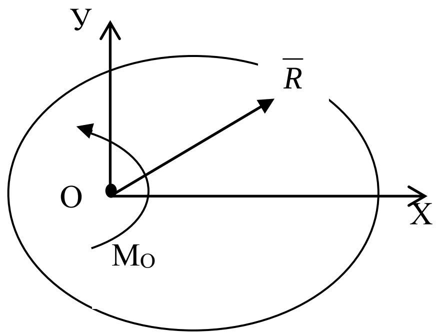
$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_X}{R} \ , \ \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_Y}{R} \ .$$

Головним моментом системи M_O відносно центра О в площині називається алгебраїчна сума моментів сил системи відносно центра приведення О.

$$M_O = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) . \qquad (18)$$

Головний вектор $\overline{R}$ не залежить від обирання центра приведення О.

Головний момент сил M_O залежить від центра приведення.



Головний вектор $\overline{R}$ і головний момент M_O називають **елементами приведення системи**.

Для задання системи сил достатньо задати її головний вектор

$\overline{R}$ і головний момент відносно центра приведення M_O (рисунок 23).

Рисунок 23

Основна теорема статики про приведення системи сил до даного центра:

будь – яка плоска довільна система сил, що діють на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центра О може бути замінена одною силою $\overline{R}$, що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі приведення О, та одною парою з моментом M_O, що дорівнює головному моменту системи відносно центра О.

Випадки приведення плоскої системи сил до простішого вигляду

1 $\overline{R}$ = 0 і M_O = 0 - система знаходиться в стані **рівноваги**.

2 $\overline{R}$ = 0 і M_O ≠ 0 – система приводиться **до пари** з моментом, який дорівнює головному моменту системи M_O. Система може викликати обертальний рух тіла, до якого прикладена.

3 $\overline{R}$ ≠ 0 і M_O = 0 – система приводиться **до рівнодійної** $\overline{R}$, яка проходить через центр О. Під дією такої сили тіло, на яке вона діє, може рухатись поступально в напрямку вектора сили $\overline{R}$.

4 $\overline{R}$ ≠ 0, M_O ≠ 0 – система приводиться **до рівнодійної** $\overline{R}$, яка прикладається в іншій точці, що не проходить через центр О.

1.4.2 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

1 Геометричні умови рівноваги:

для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб водночас головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю

$$\overline{R} = 0, \quad M_O = 0. \tag{19}$$

2 Аналітичні умови рівноваги

Основна форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0. \tag{20}$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на координатні осі та сума їх моментів відносно будь – якого центра, який лежить у площині дії сил, дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0. \tag{21}$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких двох центрів А і В та сума їх проекцій на вісь ОХ, не перпендикулярну до прямої АВ $(AB \not\perp OX)$, дорівнювали нулю.

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів)

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_C(\overline{F_n}) = 0. \tag{22}$$

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких трьох центрів А, В і С, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.

Рівновага плоскої системи паралельних сил

Система сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..\overline{F_n}\}$ (рисунок 24) паралельних осі ОУ

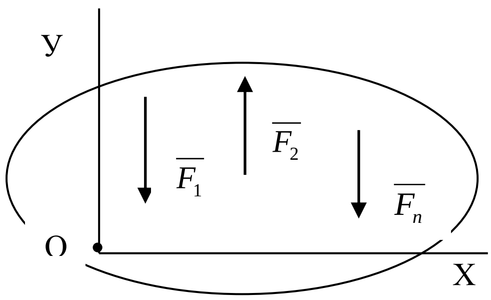


Рисунок 24

1 форма:

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \ \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0; \qquad (23)$$

2 форма:

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \ \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \qquad (24)$$

точки А і В не повинні належати прямій, паралельній силам.

1.5 Розрахунок плоских ферм

1.5.1 Основні поняття та визначення

Фермою називається геометрично незмінна шарнірно-стержнева конструкція (рисунок 25).

Ферма називається **плоскою**, якщо всі стержні ферми лежать в одній площині (рисунок 25).

Визначеність або **стійкість ферми** відображає залежність кількості вузлів N і стержнів K ферми:

- $K = 2N - 3$ - ферма визначена, стійка;
- $K > 2N - 3$ - ферма має зайві стержні та є невизначеною;
- $K < 2N - 3$ - ферма нестійка, ферма є механізмом.

При розрахунку ферми тертям у вузлах та вагою стержнів нехтують або розподіляють вагу стержнів по вузлах. Усі зовнішні навантаження (сили) до ферми прикладають тільки у вузлах, тому всі стержні ферми зазнають або стиснення, або розтягнення.

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій та зусиль у її стержнях.

Для **визначення опорних реакцій** складають та розв'язують три рівняння рівноваги, вважаючи ферму абсолютно твердим тілом під дією відомих зовнішніх навантажень (активних сил) та невідомих реакцій опор (реактивних сил).

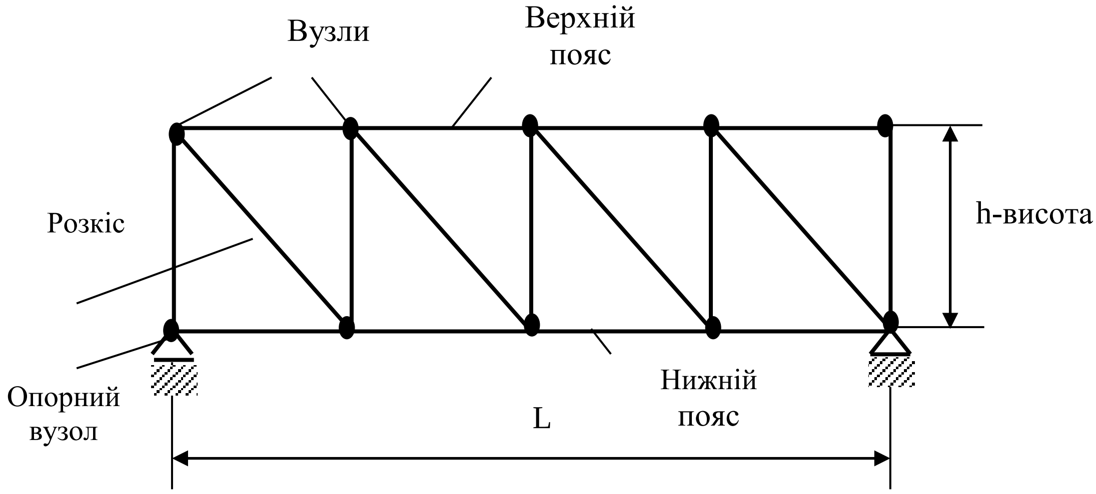


Рисунок 25

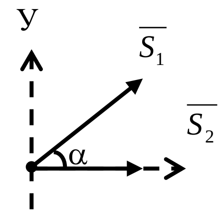
Для **визначення зусиль у стержнях ферм** існує два методи.

1.5.2 Метод вирізання вузлів

Метод вирізання вузлів полягає в тому, що уявно вирізають вузли ферми, прикладаючи до них відповідні зовнішні сили, реакції опор та реакції стержнів, і складають рівняння рівноваги сил, прикладених до кожного вузла. Вирізається вузол з **двома невідомими зусиллями**, тому що в кожному вузлі складається збіжна система сил, відповідно складають два рівняння рівноваги у вигляді рівнянь (5) $\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \; \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0.$

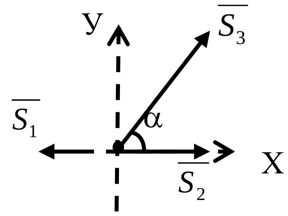
Умовно припускають, що всі стержні розтягнуті (реакції стержнів спрямовані від вузлів).

Леми про нульові стержні



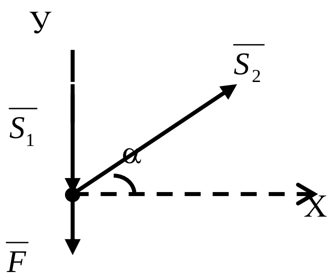
Лема 1. Якщо у ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються два стержні, то зусилля у цих стержнях дорівнюють нулю (рисунок 26) $\overline{S_1}=0$, $\overline{S_2}=0$.

Рисунок 26



Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми збігаються три стержні, два з яких спрямовані вздовж одної прямої, то зусилля у третьому стержні дорівнюють нулю, а зусилля двох перших рівні між собою (рисунок 27) $\overline{S_1} = -\overline{S_2}$, $\overline{S_3}=0$.

Рисунок 27



Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми збігаються два стержні і до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного зі стержнів, то зусилля у цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля у другому стержні дорівнює нулю (рисунок 28) $\overline{S_1}=\overline{F}$, $\overline{S_2}=0$.

Рисунок 28

1.5.3 Метод Ріттера (метод перерізу)

Метод Ріттера полягає в тому, що ферму поділяють на дві частини перерізом, який проходить через **три** стержні, в яких потрібно визначити зусилля, і розглядають рівновагу однієї з частин. Дію відкинутої частини замінюють відповідними силами, які спрямовують вздовж розрізаних стержнів від вузлів.

Потім складають рівняння рівноваги у вигляді рівнянь (20), (21) або (22), обираючи центри моментів (або вісь проекцій) так, щоб у кожному рівнянні було тільки одне невідоме зусилля. Центром моментів (точкою Ріттера) обирають точку для кожного з трьох перерізаних стержнів, окремо таку, щоб вона була точкою перетину двох інших стержнів даного перерізу (відносно неї складають рівняння суми моментів обраної частини ферми). У випадку, коли стержні не мають точки перетину (є паралельними), складається рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій всіх сил обраної частини ферми на вісь, перпендикулярну цим стержням.

1.6 Рівновага системи тіл

1.6.1 Статично визначені та статично невизначені системи

Статичні розрахунки конструкцій, складених із системи тіл, поєднаних зв'язками, потребують визначення умов рівноваги кожного тіла конструкції та складеної конструкції в цілому.

Сили взаємодії між тілами даної конструкції називають **внутрішніми реакціями**.

Зовнішніми зв'язками називаються зв'язки, що з'єднують дану конструкцію з тілами, які до неї не входять (наприклад, з опорами).

На основі принципу твердіння система сил, що діють на конструкцію, повинна при рівновазі відповідати умовам рівноваги твердого тіла. Для розв'язання такої задачі необхідно додатково розглянути рівновагу часток конструкції, розглядаючи їх як вільні тіла. Розділення (перерізи) виконують за аксіомою про рівновагу двох сил: реакції внутрішніх зв'язків будуть дорівнювати один одному за модулем та протилежними за напрямком вздовж одної лінії.

Умови рівноваги складеної конструкції визначають рівняннями рівноваги. Якщо конструкція складається із n тіл, на кожне з яких діє довільна плоска система сил, то можна скласти 3n рівнянь рівноваги.

Рівняння рівноваги – це умови рівноваги, в які входять відомі активні сили і невідомі реакції зв'язків, тобто аналітичні умови рівноваги даної системи сил.

Застосовуючи метод перерізу, розглядають рівновагу окремих тіл або груп системи і при цьому дію відкинутих сил замінюють відповідними реакціями зв'язку, які стають зовнішніми силами і входять до рівнянь рівноваги.

Задача називається **статично визначеною**, якщо число невідомих реакцій зв'язків дорівнює числу незалежних рівнянь рівноваги.

Якщо для даної конструкції число всіх реакцій (невідомих) буде більшим за кількість рівнянь, в які входять реакції, то конструкція буде **статично невизначеною.**

1.7 Рівновага при наявності сил тертя

У залежності від взаємних рухів тіл тертя між твердими тілами буває трьох видів:

1) якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, не дорівнює нулю, то виникає **тертя ковзання**;
2) якщо відносна швидкість точок дотику тіл, що контактують, дорівнює нулю і має місце кочення без ковзання, то виникає **тертя кочення**;
3) існує ще **тертя вертіння**.

1.7.1 Закони тертя ковзання

Силою тертя ковзання $\overline{F_{TP}}$ називається сила, що виникає в точках співдотику, лежить у спільній дотичній площині до поверхонь тіл, що, контактують, і чинить опір ковзанню одного тіла відносно іншого.

Сила тертя, що розвивається при відсутності взаємних рухів, називається **силою тертя спокою**.

Рівновага при наявності сил тертя для тіл, що могли б рухатись під дією сили $\overline{S}$ по шорсткій (неідеальній) поверхні, зумовлена силою **тертя зчеплення** $\overline{F_{ЗЧ}}$ ($\overline{F_{ТР}}$), яка чинить опір цьому руху (рисунок 29).

Закони тертя ковзання (закони Амонтона – Кулона) відображають практично всі основні особливості явища тертя ковзання.

1 При намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого в площині дотику тіл виникає сила тертя, величина якої може набувати будь – яких значень від нуля до значення $\overline{F_{ТР}^{MAX}}$ ($\overline{F_{ЗЧ}^{MAX}}$) – **максимальна (гранична) сила тертя.**

$$\overline{F_{ТР}} \leq \overline{F_{ТР}^{MAX}}. \tag{25}$$

Сила тертя **спрямована** в бік, протилежний тому, в якому діють сили, що намагаються зсунути тіло. При рівновазі сила тертя спокою спрямована протилежно можливому напрямку руху.

2 **Величина граничної сили тертя** дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску (нормальну реакцію)

$$F_{ТР}^{MAX} = f \cdot N. \tag{26}$$

Статичний коефіцієнт тертя f - число безрозмірне, визначається експериментальним шляхом і залежить від матеріалу тіл, що взаємодіють, та стану поверхні (характер обробки, температура, вологість, змащення і т.п.).

Для абсолютно гладеньких поверхонь $f = 0$, для реальних $f > 0$. При сухому терті ”дерево – дерево” $f \in [0,4;\ 0,7]$; „метал – метал” $f \in [0,15;\ 0,25]$; „сталь – лід” $f = 0,025$.

3 Величина граничної сили тертя в широких межах **не залежить** від розмірів площі контакту поверхонь тіл, що стикаються.

При **рівновазі сила тертя спокою (тертя зчеплення)** визначається за визначенням

$$F_{TP} \leq f \cdot N . \quad (27)$$

Для тіл, які рухаються, сила тертя спрямована протилежно руху і дорівнює добутку динамічного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску

$$F_{TP} = f \cdot N . \quad (28)$$

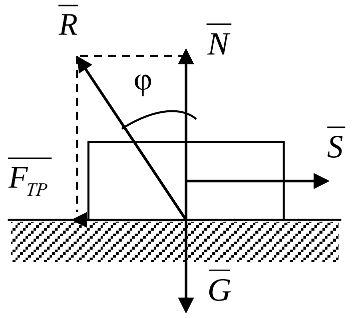


Рисунок 29

Повна **реакція шорсткої поверхні** $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F_{TP}}$ складається з нормальної реакції $\overline{N}$ та перпендикулярної їй сили тертя $\overline{F_{TP}}$, тобто $\overline{R}$ буде відхилена від нормалі до поверхні на кут φ (рисунок 29).

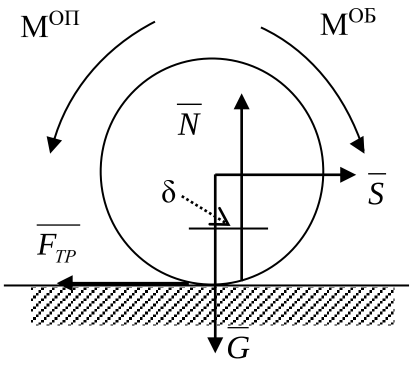
Максимальне значення кута φ^{max}, який складає повна реакція шорсткої поверхні з нормаллю до поверхні, називається **кутом тертя**.

$$tg\varphi^{max} = \frac{F_{TP}^{max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f . \quad (29)$$

При дії на тіло будь–якою силою, прикладеною під кутом до нормалі, меншим за кут тертя ($\varphi < \varphi^{max}$), зсунути тіло неможливо.

1.7.2 Тертя кочення

Тертям кочення називають опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого тіла.



В реальних умовах поверхня тіла, що котиться, і площина, по якій тіло котиться, **не абсолютно тверді,** а дещо **деформуються** внаслідок тиску тіла на площину.

Кочення викликано деформацією тіл і рух відбувається під дією двох пар сил ($\overline{S}, \overline{F_{ТР}}$) і ($\overline{N}$, $\overline{G}$), які показано на рисунку 30.

Рисунок 30

Момент пари ($\overline{S}, \overline{F_{ТР}}$) - $M(\overline{S}, \overline{F_{ТР}}) = S \cdot R$ викликає кочення тіла і називається **моментом кочення (обертання)** $M^{ОБ}$**.** Його плечем є радіус котка (рисунок 30).

Момент пари ($\overline{N}$, $\overline{G}$) - $M(\overline{N}, \overline{G}) = N \cdot \delta$ чинить опір повороту тіла і називається **моментом опору кочення** $M^{ОП}$ (рисунок 30). У момент початку руху

$$M^{ОП} = M^{\max} = N \cdot \delta, \qquad (30)$$

де δ (плече пари) – **коефіцієнт тертя кочення**.

Одиниці вимірювання δ - це одиниці довжини, найчастіше сантиметри (см),

$S \le \dfrac{\delta}{R} N$ **- умова кочення котка**.

Умова кочення без ковзання $S \le F_{ТР}^{\max} \le f \cdot N$.

1.7.3 Тертя вертіння

Опір вертіння виникає внаслідок тертя кулі по площині. (Приклад – упорний підшипник подп'яток).

$$M = \lambda \cdot N, \qquad (31)$$

де N - сила нормального тиску кулі на площину, яка в даному випадку дорівнює значенню ваги тіла;

λ - **коефіцієнт тертя вертіння**, має розмірність довжини (метр, сантиметр), малий за величиною (у 5 – 10 разів менший за коефіцієнт тертя кочення $\lambda < \delta$).

1.8 Довільна просторова система сил

1.8.1 Момент сили відносно осі

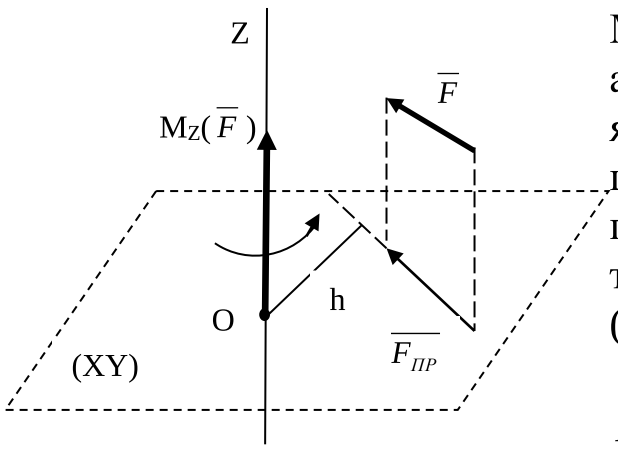


Рисунок 31

Момент сили відносно осі – це алгебраїчна величина (число), яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною (рисунок 31).

$$M_Z(\overline{F}) = M_O(\overline{F}_{ПР}) = \pm F_{ПР} \cdot h. \qquad (32)$$

Момент буде вважатись **додатним**, якщо з кінця осі Z поворот, який сила $\overline{F}_{ПР}$ намагається створити, можна побачити спрямованим проти стрілки годинника, і **від'ємним**, якщо за стрілкою годинника.

Момент сили відносно осі буде **дорівнювати нулю**, якщо сила і вісь лежать в одній площині, тобто:

1) сила паралельна осі, тому що при цьому $\overline{F}_{ПР}=0$;

2) лінія дії сили перетинає вісь, тому що при цьому $h=0$.

Аналітичні визначення моментів сили відносно осей координат.

$$\left.\begin{aligned} M_X(\overline{F}) &= \pm F_{YZ}\cdot h = y\cdot F_Z - z\cdot F_Y, \\ M_Y(\overline{F}) &= \pm F_{XZ}\cdot h = z\cdot F_X - x\cdot F_Z, \\ M_Z(\overline{F}) &= \pm F_{XY}\cdot h = x\cdot F_Y - y\cdot F_X. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

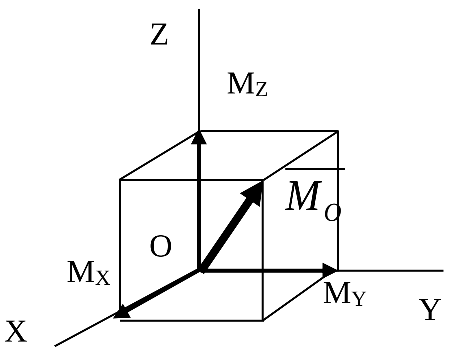


Рисунок 32

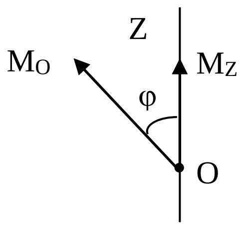
Момент сили відносно центра (точки) в просторі $\overline{M}_O$ прикладається в центрі О (рисунок 32) та за модулем визначається за рівнянням:

$$M_O(\overline{F}) = \sqrt{M_X^2(\overline{F}) + M_Y^2(\overline{F}) + M_Z^2(\overline{F})}. \quad (34)$$

Залежність моментів сили відносно точки і осі, яка проходить через цю точку (центр):

момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь вектора, що утворює момент даної сили відносно будь – якого центра, що проходить через цю вісь (рисунок 33).

$$M_Z = M_O\cdot\cos\varphi. \quad (35)$$



M_Z - момент сили відносно осі Z;

M_O - момент сили відносно центра О.

Рисунок 33

1.8.2 Визначення головного вектора та головного моменту просторової системи сил

Головним вектором системи $\overline{R}$ називається вектор, прикладений у центрі приведення, що дорівнює геометричній сумі всіх сил системи

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n} . \tag{36}$$

Головний момент системи $\overline{M_O}$ відносно даного центра дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра О

$$\overline{M_O} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n}) . \tag{37}$$

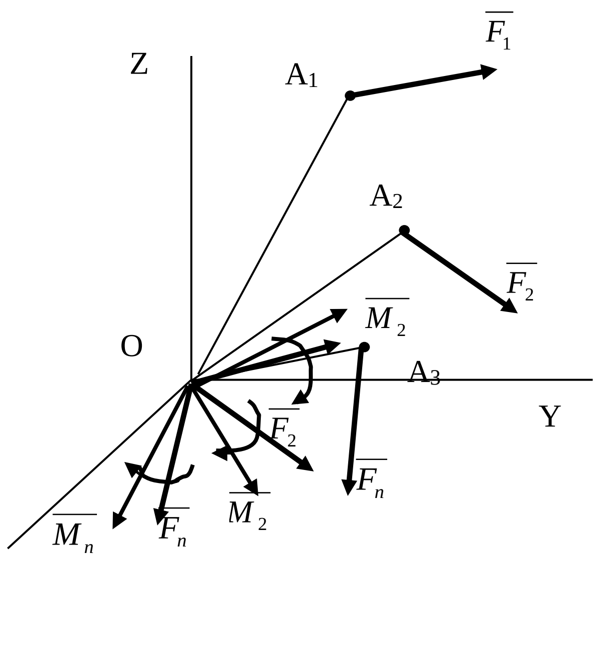


Рисунок 34

За основною теоремою статики, будь – яка система сил, що діють на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центра О може бути замінена одною силою $\overline{R}$, що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі приведення О, та одною парою з моментом $\overline{M_O}$, що дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення О (рисунок 35).

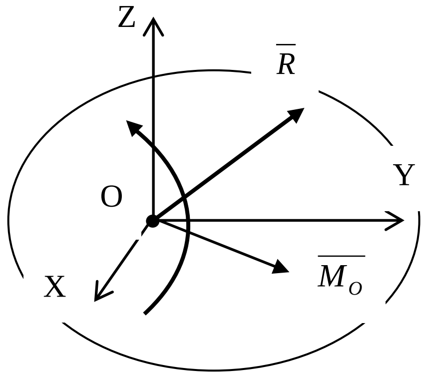


Рисунок 35

Аналітичне визначення векторів $\overline{R}$ та $\overline{M_O}$

1 Проекції $\overline{R}$ головного вектора системи на координатні осі:

$$R_X = \sum_{n=1}^{k} F_{nX}, \quad R_Y = \sum_{n=1}^{k} F_{nY}, \quad R_Z = \sum_{n=1}^{k} F_{nZ}. \qquad (38)$$

Модуль головного вектора

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}. \qquad (39)$$

Напрямок головного вектора

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_X}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_Y}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{k}) = \frac{R_Z}{R}. \qquad (40)$$

2 Проекції $\overline{M_O}$ головного моменту системи:

$$M_{OX}=\sum_{n=1}^{k}M_X(\overline{F_n}),\quad M_{OY}=\sum_{n=1}^{k}M_Y(\overline{F_n}),\quad M_{OZ}=\sum_{n=1}^{k}M_Z(\overline{F_n}). \qquad (41)$$

Модуль головного моменту

$$M_O=\sqrt{M_{OX}^2+M_{OY}^2+M_{OZ}^2}\,. \qquad (42)$$

Напрямок головного моменту системи:

$$\cos(\overline{M_O},\bar{i})=\frac{M_{OX}}{M},\ \cos(\overline{M_O},\bar{j})=\frac{M_{OY}}{M},\ \cos(\overline{M_O},\bar{k})=\frac{M_{OZ}}{M}. \qquad (43)$$

Системи сил, для яких $\overline{R}$ та $\overline{M_O}$ збігаються, **статично еквівалентні**.

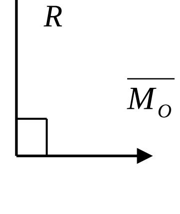
Випадки приведення просторової системи сил

1 $\overline{R}=0$ та $\overline{M_O}=0$ - система знаходиться **в стані рівноваги**.

2 $\overline{R}=0$ та $\overline{M_O}\neq 0$ - система приводиться **до пари сил**, момент якої дорівнює головному моменту системи. Вільне тіло під дією такої системи може рухатись обертально.

3 $\overline{R}\neq 0$, $\overline{M_O}=0$ - система сил приводиться **до рівнодійної**, лінія дії якої проходить через центр приведення. Вільне тіло під дією такої системи може рухатись поступально (якщо рівнодійна проходить через центр ваги тіла).

4 $\overline{R}\neq 0$, $\overline{M_O}\neq 0$, $\overline{M_O}\perp\overline{R}$ ($\overline{M^*}$=0) - система приводиться **до рівнодійної**, лінія дії якої не проходить через центр приведення (рисунок 36).



$\overline{M_O}\perp\overline{R}$ - нормальний головний момент (перпендикулярний) головному вектору системи ($\overline{M_\perp}$), Рисунок 36 $\overline{M^*}$ - найменший головний момент.

5 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{M_O} \parallel \overline{R}$, ($\overline{M^*} \neq 0$) - система приводиться до динамічного гвинта (**динами сил**) – сукупності сили $\overline{R}$ та пари, що розташована у площині, перпендикулярній силі (рисунок 37).

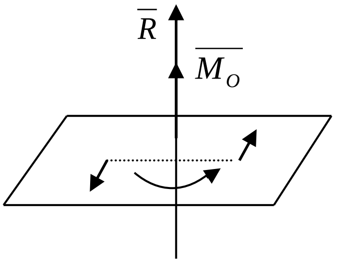


Рисунок 37

Вісь динами - лінія дії сили $\overline{R}$, яка проходить через центр приведення (рисунок 37).

Найменший головний момент визначається за формулою

$$M^* = \frac{Rx \cdot Mox + Ry \cdot Moy + Rz \cdot Moz}{R}.$$

6 $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{M_O} \nparallel \overline{R}$, $\overline{M_O} \perp \overline{R}$, $\overline{M^*} \neq 0$.

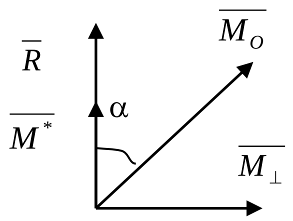


Рисунок 38

- система приводиться **до динами сил**, вісь якої не проходить через центр приведення O (рисунок 38).

1.8.3 Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, & \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, & \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0, \\ \sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n}) = 0, & \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n}) = 0, & \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n}) = 0. \end{array}\right\} \qquad (44)$$

Випадок паралельних сил

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну силам, і суми їх моментів відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

Для системи сил, паралельних осі Z,

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0, \sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n}) = 0, \ \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n}) = 0. \qquad (45)$$

1.9 Центр паралельних сил. Центр ваги

1.9.1 Центр паралельних сил

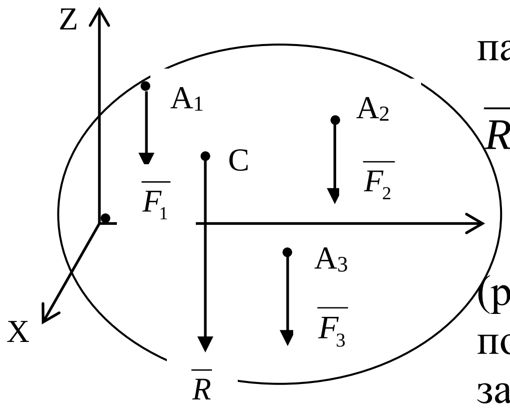


Рисунок 39

Рівнодійна $\overline{R}$ системи паралельних сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, ...\overline{F_n}\}$ дорівнює $\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$.

Лінія дії рівнодійної $\overline{R}$ (рисунок 39) паралельна силам, положення точки її прикладання залежить від величин та положень точок A_1, A_2,... A_n прикладання сил системи.

Центр паралельних сил – точка С прикладання рівнодійної $\overline{R}$ системи паралельних сил.

Положення центра паралельних сил – точки С - визначається **координатами цієї точки С (** x_C, y_C, z_C **)**:

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot x_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot y_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot z_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}, \qquad (46)$$

де $\sum_{n=1}^{k} F_n = R$.

1.9.2 Центр ваги твердого тіла. Координати центру ваги тіл

Вага тіла - це рівнодійна сил ваги окремих часток тіла, яка дорівнює їх сумі

$$\overline{G} = \sum_{n=1}^{k} \overline{\Delta G_n} . \qquad (47)$$

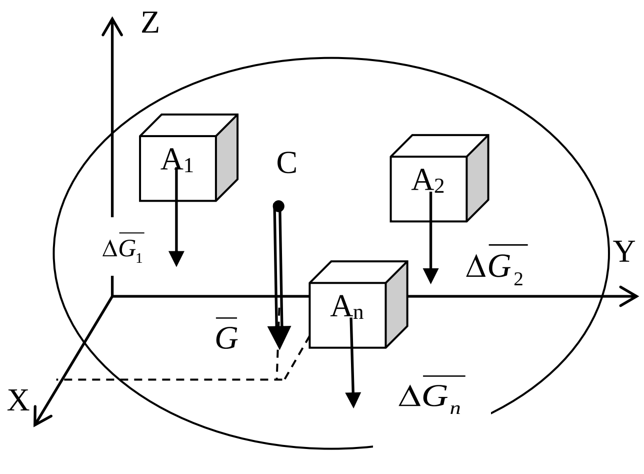


Рисунок 40

Кожна окрема з n - часток тіла знаходиться під дією власних сил ваги $\overline{\Delta G_n}$, які складають систему паралельних, односпрямованих сил $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ...\overline{\Delta G_n}$, прикладених у точках A_1, A_2,.., A_n відповідно (рисунок 40).

Центр ваги тіла - незмінно зв'язана з цим тілом геометрична точка, в якій прикладена рівнодійна сил ваги окремих часток тіла, тобто вага тіла в просторі.

Координати центра ваги визначають аналогічно координатам центра паралельних сил С **(**x_C, y_C, z_C**)** (формула 43), складених силами ваги часток тіла $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ... \overline{\Delta G_n}$:

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot x_n)}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot y_n)}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot z_n)}{G}, \quad (48)$$

де $G = \sum_{n=1}^{k} \Delta G_n$ - вага тіла;

x_n, y_n, z_n - відповідні координати точок прикладання A_1, A_2,.., A_n сил ваги часток тіла.

Положення **центру ваги однорідного тіла** $(\rho = const)$ залежить тільки від його геометричної форми і розмірів та не залежить від властивостей матеріалу, із якого тіло виконано.

1 Центр ваги об'єму ($G \sim V$) (рисунок 41).

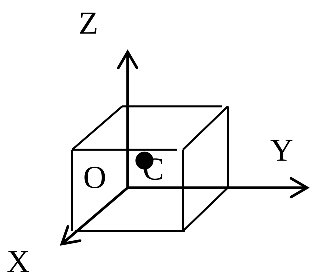


Рисунок 41

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot x_n)}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot y_n)}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot z_n)}{V}. \quad (49)$$

2. Центр ваги площини ($G \sim S$) (рисунок 42).

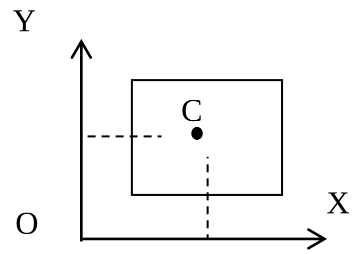


Рисунок 42

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta S_n \cdot x_n \right)}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta S_n \cdot y_n \right)}{S}. \qquad (50)$$

3 Центр ваги лінії ($G \sim L$) (рисунок 43)**.**

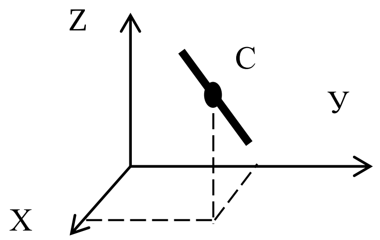


Рисунок 43

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta L_n \cdot x_n \right)}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta L_n \cdot y_n \right)}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} \left(\Delta L_n \cdot z_n \right)}{L}. \qquad (51)$$

1.9.3 Способи визначення положення центра ваги

Аналітичні методи

1 Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то центр ваги лежить відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

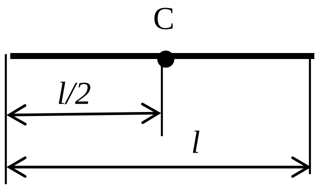
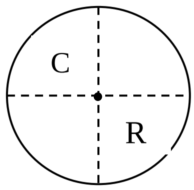


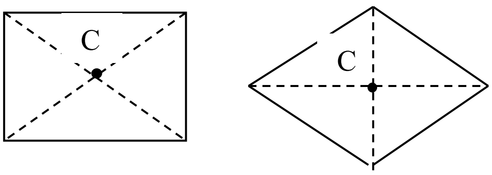
Рисунок 44

Центр ваги лінії довжини l - посередині (рисунок 44).



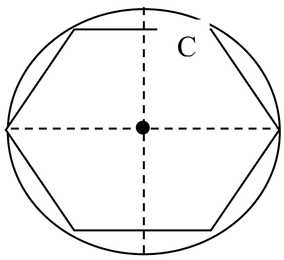
Центр ваги кола (або кулі) радіуса R - у його центрі, тобто в точці перетину діаметрів (рисунок 45).

Рисунок 45



Центр ваги паралелограма, ромба або паралелепіпеда – у точці перетину діагоналей (рисунок 46).

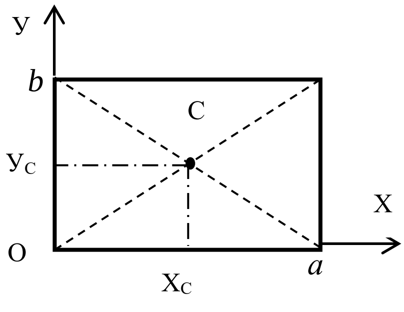
Рисунок 46



Центр ваги правильного багатокутника – у центрі вписаного або описаного кола (рисунок 47).

Рисунок 47

Координати центра ваги симетричних фігур



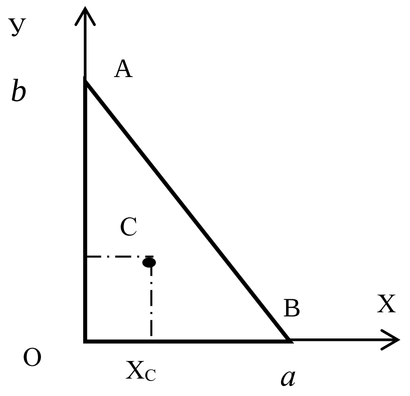
1 Прямокутник (рисунок 48)

$S = a \cdot b$ - площа прямокутника.

C $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ – точка перетину діагоналей.

Рисунок 48

2 Прямокутний трикутник (рисунок 49)



$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ - площа;

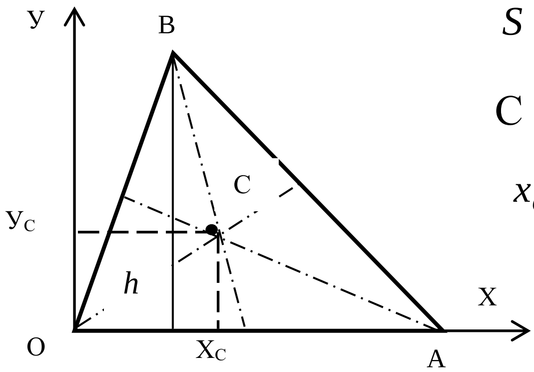
C (x_C , y_C) – точка перетину медіан;

$x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_O) = \frac{1}{3}b$;

$y_C = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}a$.

Рисунок 49

3 Трикутник (рисунок 50)



$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AO$ - площа;

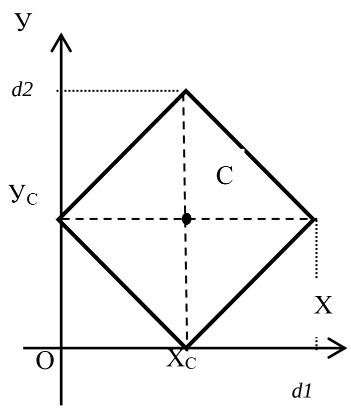
C (x_C , y_C) – точка перетину медіан;

$x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_O)$;

$y_C = \frac{1}{3}h$.

Рисунок 50

4 Ромб (рисунки 51, 52)

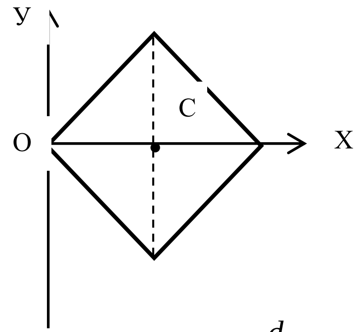


$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ - площа;

C (x_C , y_C) - точка перетину діагоналей.

C ($\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}$)

Рисунок 51



$C\left(\frac{d_1}{2},0\right)$

Рисунок 52

5 Трапеція (рисунок 53)

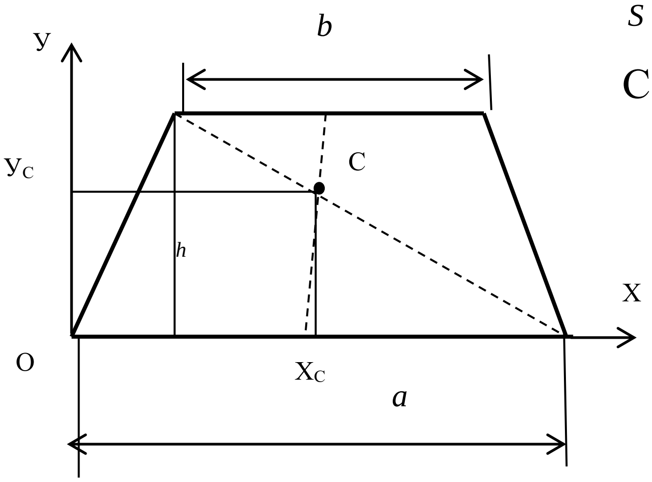


Рисунок 53

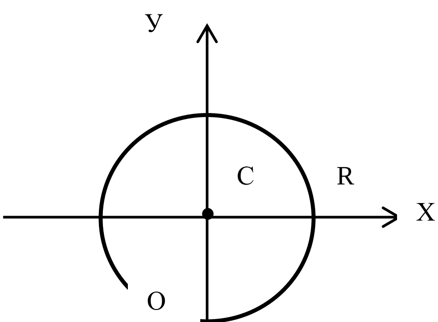
$S=\frac{(a+b)}{2}\cdot h$;

С (x_C, y_C) - на лінії, проведеній через середини основ;

$x_C=\frac{a}{2}$;

$y_C=\frac{h\cdot(a+2b)}{3\cdot(a+b)}$.

6 Коло (рисунки 54, 55)

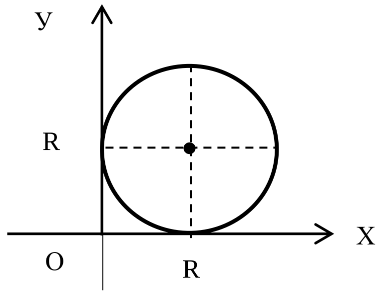


С (0,0)

Рисунок 54

$S=\pi\cdot R^2$;

С (x_C, y_C) – точка перетину діаметрів.

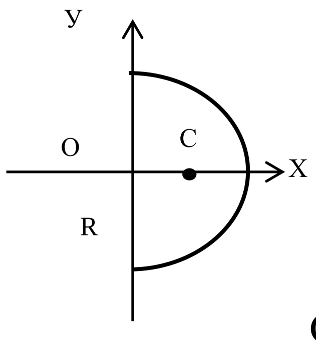


C(R, R)

Рисунок 55

7 Півколо (рисунки 56, 57)

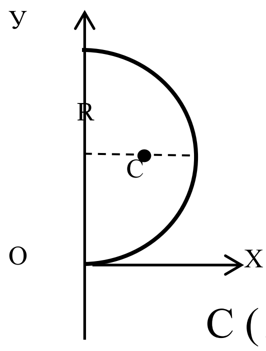
$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$



C (x_C, 0)

$$x_C = \frac{4R}{3\pi};$$

$$y_C = 0.$$

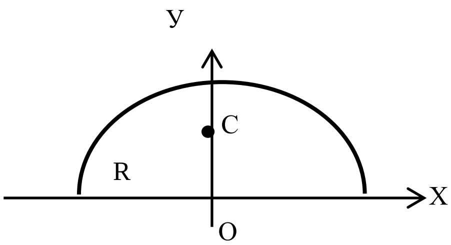


C (x_C, y_C)

$$x_C = \frac{4R}{3\pi};$$

$$y_C = R.$$

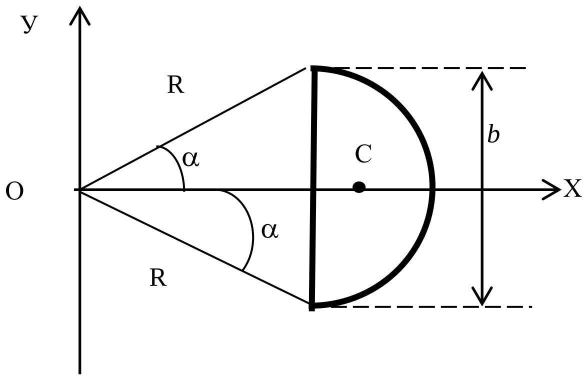
Рисунок 56



C (0; y_C) $x_C = 0$; $y_C = \frac{4R}{3\pi}$.

Рисунок 57

8 Круговий сегмент (рисунок 58)



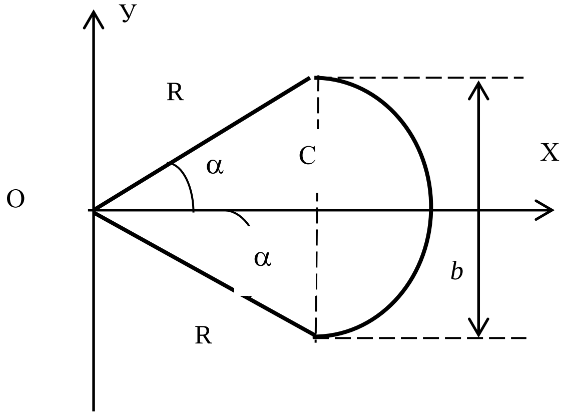
$$S = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha);$$

C (x_C, 0);

$$x_C = \frac{b^3}{12 \cdot S}.$$

Рисунок 58

9 Круговий сектор (рисунок 59)



$$S = \alpha \cdot R^2;$$

C (x_C, 0);

$$x_C = \frac{b \cdot R^2}{3 \cdot S}.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{6}$: $S = \frac{\pi R^2}{6}$ $x_C = \frac{2R}{\pi}$.

Рисунок 59

2 Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на кінцеву кількість елементів (об’ємів, площин, ліній (рисунок 60), для кожної з яких положення центра ваги відоме, то координати центра ваги всього тіла можна визначити, складаючи значення елементів та безпосередньо за формулами (46), (47), (48).

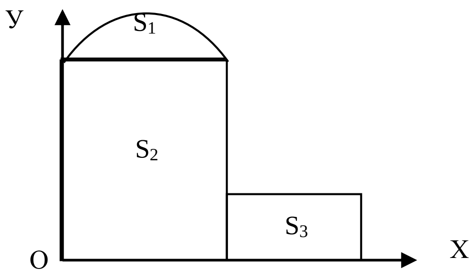


Рисунок 60

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (\Delta S_n \cdot x_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S};$$

$$y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (\Delta S_n \cdot y_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}.$$

3 Метод доповнення (від'ємних площин)

Якщо тіло має вирізані елементи то при розбитті на елементи, вирізана частина (площа, об'єм) вилучається із загальної, тобто вирізаним елементам надається від'ємне значення площі або об'єму (рисунок 61).

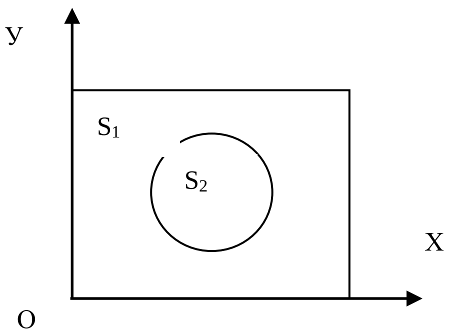


Рисунок 61

$$S = S_1 - S_2;$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (\Delta S_n \cdot x_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S};$$

$$y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} (\Delta S_n \cdot y_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S}.$$

2 КІНЕМАТИКА

Основні поняття та визначення

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору без урахування сил, які викликають цей рух.

Механічним рухом називається зміна положення одного тіла відносно до іншого в просторі, що пов'язаний з системою відліку, яка відбувається плином часу. Інакше, механічний рух –

це переміщення у часі тіл з одного положення в інше. Механічний рух є найпростішою формою руху.

Простір у механіці розглядається як тривимірний евклідів простір і всі вимірювання в ньому проводяться на базі методів евклідової геометрії. За одиницю довжини при вимірюванні відстаней приймається один метр (1 м).

Система відліку – це система координат, невідривно пов’язана з тим тілом, відносно якого розглядається положення рухомого тіла або точки.

Час у механіці є універсальним, тобто однаковим в усіх системах відліку і незалежним від руху одних систем відліку відносно інших. Час є скалярною, додатною і безперервно змінною величиною. Всі кінематичні характеристики (відстань, швидкість, прискорення) розглядаються як функції часу. За одиницю часу прийнята одна секунда (1с).

Для розв'язання задач кінематики потрібно, щоб рух був заданий.

Кінематично **задати рух** або **закон руху** тіла (точки) означає задати положення цього тіла (точки) відносно даної системи відліку в будь – який момент часу. **Закон (або рівняння) руху** – це залежність між положенням тіла в просторі впродовж часу. Закон руху визначає положення тіла (точки) в будь – який момент часу.

В кінематиці розглядаються всі тверді тіла як абсолютно тверді, тобто вважається, що відстань між кожними двома точками тіла весь час руху залишається незмінною.

Основна задача кінематики: знаючи закон руху тіла (або точки), визначити всі кінематичні характеристики руху тіла в цілому та кожної його точки окремо.

2.1 Кінематика точки

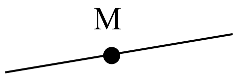
2.1.1 Способи задання руху точки. Траєкторія руху точки

Матеріальна точка – фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху

Задати спосіб описання руху точки означає встановити сукупність таких параметрів, за допомогою яких можна однозначно встановити положення точки в просторі в будь – який момент часу відносно обраної системи відліку.

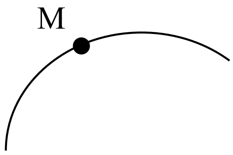
Траєкторія руху – це безперервна лінія, яку описує рухома точка відносно обраної системи відліку.

За виглядом траєкторії можна охарактеризувати **вид руху** точки.



Якщо траєкторія руху точки М – пряма лінія, рух називається **прямолінійним** (рисунок 62).

Рисунок 62



Якщо траєкторія руху точки М – крива лінія, рух називається **криволінійним** (рисунок 63).

Рисунок 63

Для задання руху точки існує **три способи**: натуральний, координатний, векторний.

Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральним способом задання руху точки користуються, коли **траєкторія руху точки відома**.

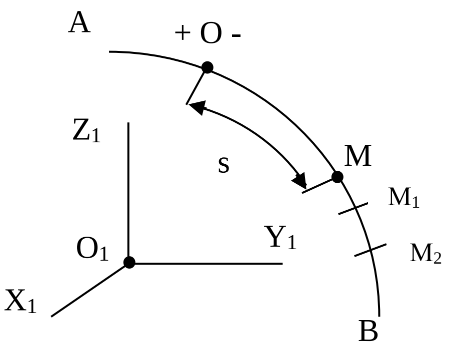


Рисунок 64

Крива АВ є траєкторією точки М під час її руху відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рисунок 64).

О - нерухома точка на траєкторії, яку приймають за початок відліку.

Траєкторія АВ розглядається як криволінійна координатна вісь, на якій встановлено додатний та від'ємний напрямок.

Положення точки М на траєкторії в кожний момент часу однозначно встановлено **криволінійною (дуговою) координатою** s (s=ОМ), яка дорівнює відстані від точки О до точки М виміряній вздовж дуги траєкторії і обраній з відповідним знаком. Під час руху точка буде займати положення M_1, M_2,..., тобто відстань s буде з плином часу змінюватись. Тоді, положення точки М на траєкторії в будь-який момент часу надасть залежність криволінійної координати s від часу.

Закон руху точки вздовж траєкторії

$$s = f(t). \tag{52}$$

Для **задання руху точки натуральним способом** треба знати:

1) траєкторію точки (АВ);
2) початок відліку на траєкторії (т. О);
3) додатний та від'ємний напрямок відліку ($\pm$);
4) закон руху точки вздовж траєкторії $s = f(t)$ (рисунок 65).

Величина s в рівнянні (1) визначає положення рухомої точки, а не довжину пройденого точкою шляху. В випадку прямолінійного руху, якщо направити вісь *Ox* вздовж траєкторії (рисунок 65), буде $s = x$ і закон прямолінійного руху точки виглядатиме як $x = f(t)$.

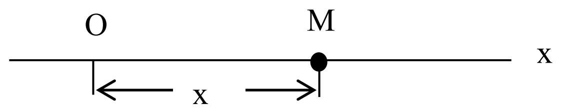


Рисунок 65

Координатний спосіб задання руху точки

Траєкторія точки невідома

Положення точки відносно системи відліку $Oxyz$ в будь–який момент часу може бути визначено її декартовими координатами (x,y,z) (рисунок 66).

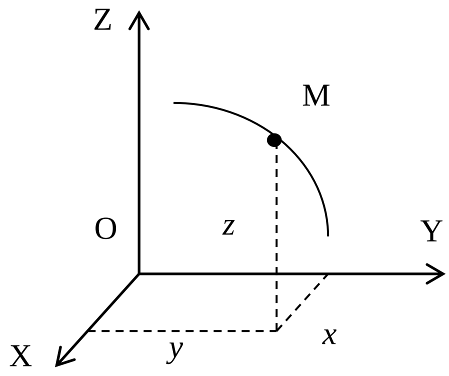


Рисунок 66

Закон руху точки в декартових прямокутних координатах

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{53}$$

Також рух точки можна задати обираючи будь-яку іншу систему координат, наприклад, полярну, сферичну і т. п.

Рівняння руху точки в площині, вважаючи площиною руху *Oxy* (рисунок 6):

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t). \tag{54}$$

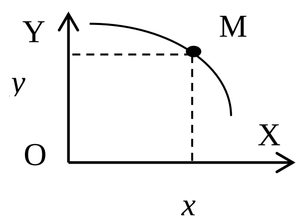


Рисунок 67

Рівняння руху (2) і (3) являють собою одночасно **рівняння траєкторії точки в параметричній формі**, де параметром є час t. Виключаючи з рівнянь руху час t , можна знайти рівняння траєкторії у звичній формі, тобто у вигляді залежності між її координатами.

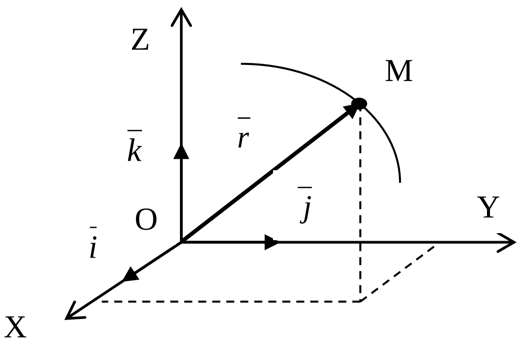
Рисунок 68

Рівняння прямолінійного руху точки вздовж координатної осі *Ox* (рисунок 68)

$$x = f\ (t) \qquad (55)$$

Координатний та натуральний способи задання руху в цьому випадку (55) збігаються.

Векторний спосіб задання руху точки



Положення точки в будь-який момент часу можна визначити, задаючи вектор $\bar{r}$, проведений із початку координат О в рухому точку М (рисунок 69).

Рисунок 69

Вектор $\bar{r}$ називається **радіусом – вектором** точки М, це вектор, проведений із нерухомої точки простору в рухому. Під час руху точки М вектор $\bar{r}$ змінюється з часом за модулем і за напрямком, тобто $\bar{r}$ є змінним вектором (вектором-функцією), який залежить від аргумента.

Закон руху точки у векторній формі

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\,. \qquad (56)$$

Геометричне місце кінцевих точок радіуса-вектора $\bar{r}$ - **годограф** цього вектора, визначає **траєкторію** рухомої точки.

Векторний спосіб задання руху зручний при встановленні загальних залежностей, тому що дозволяє описати рух точки одним векторним рівнянням (57) замість трьох скалярних рівнянь (54).

Відносно координатних осей рівняння руху точки у векторній формі

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \tag{57}$$

де проекції вектора $\bar{r}$ на осі *Ox, Oy, Oz* дорівнюють координатам точки М, тобто $r_X = x$, $r_Y = y$, $r_Z = z$.

2.1.2 Швидкість точки

Швидкість точки – одна з основних кінематичних характеристик руху, векторна величина, що характеризує швидкість та напрямок руху точки в даній системі відліку.

Швидкість точки як похідна за часом радіус-вектора (визначення швидкості точки при векторному способі задання руху)

Кожному положенню точки М в моменти часу t і t_1: М(t) і М$_1$(t_1) відповідають належні значення радіус-вектора $\bar{r}(t)$ та $\bar{r}_1(t_1)$, тоді $\Delta t = t_1 - t$.

$\overline{MM_1}$ - **вектор переміщення** точки за проміжок часу Δt спрямований *за хордою*, якщо точка рухається криволінійно (рисунок 70), та *вздовж траєкторії*, якщо - прямолінійно (рисунок 71), та дорівнює $\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$.

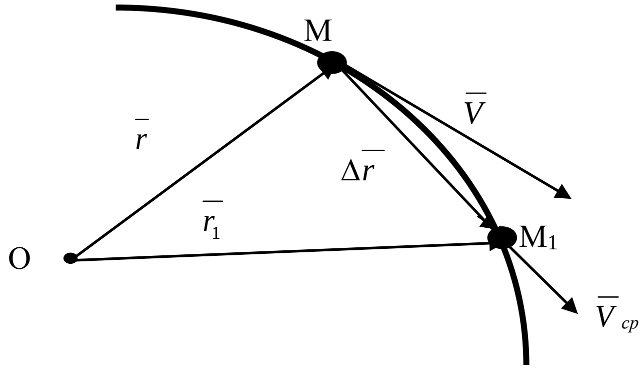


Рисунок 70

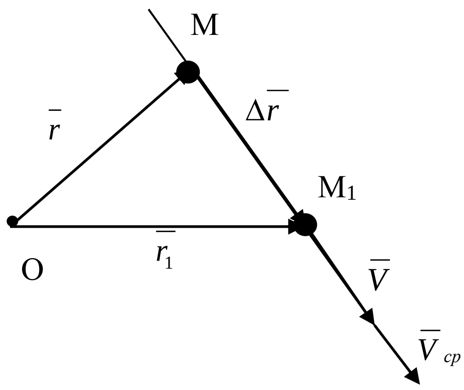


Рисунок 71

Середньою швидкістю точки називається векторна величина, яка дорівнює відношенню вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу

$$\overline{V_{CP}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}. \tag{58}$$

Напрямок вектора $\overline{V_{CP}}$ збігається з вектором переміщення $\overline{MM_1}$ (рисунки 70 і 71).

Очевидно, що чим меншим буде проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$, для якого визначена середня швидкість, тим величина $\overline{V_{CP}}$ буде точніше характеризувати рух точки. Характеристика руху, яка не залежить від обрання проміжку часу Δt, це швидкість точки в даний момент часу.

Швидкістю точки в даний момент часу t називається векторна величина $\overline{V}$, до якої спрямована середня швидкість $\overline{V_{CP}}$ при набіганні проміжку часу Δt до нуля

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} (\overline{Vcp}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \tag{59}$$

Границя відношення $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ являє собою першу похідну від вектора $\bar{r}$ за аргументом t і визначається, як похідна від скалярної функції $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Швидкість точки в даний момент часу – це векторна величина, яка дорівнює першій похідній від радіус-вектора точки за часом:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (60)$$

Враховуючи, що граничним напрямком січної MM_1 є дотична, вектор швидкості точки в даний момент часу спрямований **по дотичній до траєкторії** точки в бік руху (рисунок 70). У випадку прямолінійного руху вектор $\bar{V}$ весь час спрямовується вздовж прямої (рисунок 71), за якою відбувається рух точки, і може змінюватись лише за модулем. При криволінійному русі, окрім чисельної величини, весь час може змінюватись і напрямок вектора швидкості точки.

Одиницею вимірювання швидкості є метр за секунду (м/с).

Визначення швидкості за проекціями на координатні осі

При **координатному способі задання руху** точки, коли закон руху надано у вигляді рівнянь (54), проекції швидкості на координатні осі визначаються як перші похідні від належних координат точки за часом

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (61)$$

Модуль вектора швидкості дорівнює

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \,. \tag{62}$$

Напрямок вектора швидкості визначається за напрямними косинусами

$$\cos(\overline{V},\overline{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{k}) = \frac{V_z}{V}. \tag{63}$$

Визначення швидкості точки при натуральному способі задання руху точки

Алгебраїчна (чисельна) величина швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від переміщення (криволінійної координати) s точки за часом

$$V = \frac{ds}{dt}. \tag{64}$$

Спрямовується вектор швидкості по дотичній до траєкторії, яка наперед відома.

Алгебраїчна (чисельна) величина швидкості визначає одночасно і модуль вектора швидкості, і бік, в який вона спрямована (за знаком похідної).

Якщо величина $V > 0$, то вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований в додатному напрямку відліку переміщення S, а якщо $V < 0$, то у від'ємному.

Рівняння (64) вказує, що величину V можна визначати як відношення елементарного переміщення ds точки вздовж дуги траєкторії до відповідного проміжку часу dt.

2.1.3 Прискорення точки

Прискоренням точки називається векторна величина, яка характеризує зміну модуля і напрямку швидкості точки з плином часу.

Прискорення точки як похідна вектора швидкості за часом (визначення швидкості точки при векторному способі задання руху)

За проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ точка здійснює переміщення $\overline{MM_1}$ і приріст швидкості дорівнює $\overline{\Delta V} = \overline{V_1} - \overline{V}$. Вектор $\overline{\Delta V}$ завжди спрямований в бік увігнутості траєкторії.

Вектор середнього прискорення точки $\overline{a_{CP}}$ за проміжок часу Δt дорівнює відношенню приросту вектора швидкості $\overline{\Delta V}$ до відповідного проміжку часу Δt

$$\overline{a_{CP}} = \frac{\overline{\Delta V}}{\Delta t}. \tag{65}$$

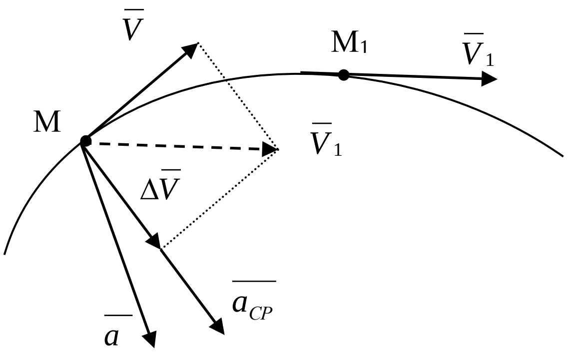


Рисунок 72

Вектор середнього прискорення точки $\overline{a_{CP}}$ має той же напрямок, що і вектор $\overline{\Delta V}$, тобто спрямований в бік увігнутості траєкторії (рисунок 72).

Прискоренням точки в даний момент часу t називається векторна величина $\overline{a}$, до якої спрямовується середнє прискорення $\overline{a_{CP}}$ при набіганні проміжку часу Δt до нуля

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\overline{a_{cp}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt}. \tag{66}$$

Таким чином, з урахуванням рівняння (60) буде отримано рівняння (67).

Прискоренням точки в даний момент часу називається векторна величина $\bar{a}$, яка дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіус-вектора точки за часом

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (67)$$

Вектор прискорення точки в даний момент часу $\bar{a}$ лежить у дотичній площині і спрямований у бік увігнутості траєкторії при криволінійному русі точки (рисунки 70 і 73) та вздовж прямої при прямолінійному русі.

Одиниці вимірювання прискорення – метр за секунду в квадраті (м/с^2).

При координатному способі задання руху точки проекції вектора прискорення точки в даний момент часу визначаються як перші похідні від проекцій швидкості або другі похідні від відповідних координат точки за часом

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (68)$$

Модуль вектора прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (69)$$

Напрямок прискорення визначається із рівнянь напрямних косинусів

$$\cos(\overline{a},\overline{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\overline{a}\,\overline{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\overline{a},\overline{k}) = \frac{a_z}{a}. \qquad (70)$$

Дотичне та нормальне прискорення

При натуральному способі задання руху вектор прискорення точки $\bar{a}$ визначають за його проекціями на натуральні координатні осі (τ, n, b), які мають початок в точці M і рухаються разом з нею (рисунок 73).

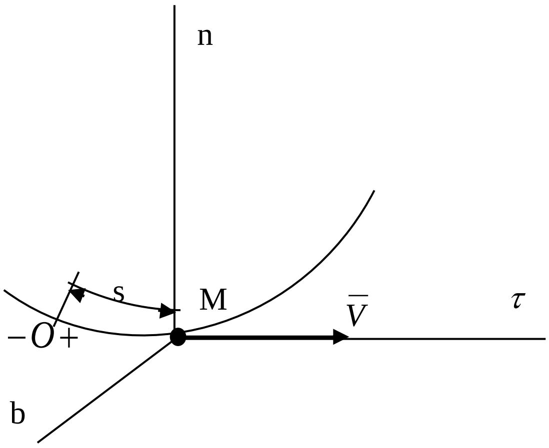


Рисунок 73

Вісь $M\tau$ - спрямована вздовж дотичної до траєкторії в бік додатного відліку відстані s.

Вісь Mn - спрямована за нормаллю, що лежить в площині співдотику, в бік увігнутості траєкторії (головна нормаль).

Вісь Mb - спрямована перпендикулярно $M\tau$ та Mn, формуючи з ними праву трійку (бінормаль).

Прискорення точки $\bar{a}$, як було встановлено раніш, лежить в площині співдотику, тобто в площині (τ, n), тому проекція вектора $\bar{a}$ на бінормаль дорівнює нулю. Проекції вектора $\bar{a}$ на дві другі осі зображені на рисунку 74.

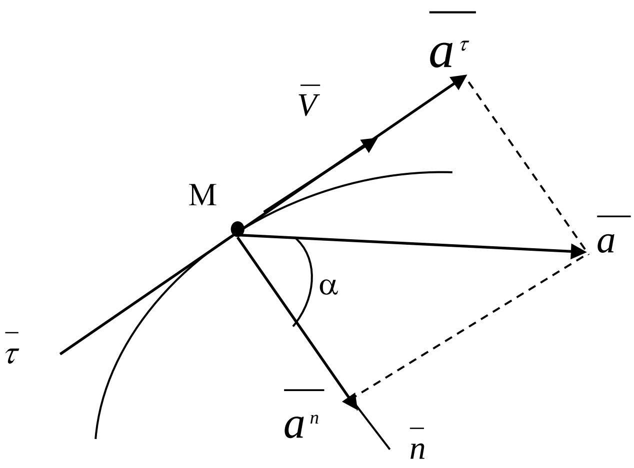


Рисунок 74

$\overline{a^{\tau}}$ - дотичне прискорення;

$\overline{a^{n}}$ - нормальне прискорення;

$\bar{a}$ - прискорення (повне);

$(\overline{a^{\tau}} \perp \overline{a^{n}})$,

$$tg\alpha = \frac{a^{\tau}}{a^{n}}.$$

Прискорення точки (повне прискорення) $\overline{a}$ визначається як векторна сума дотичного та нормального прискорень (рисунок 74)

$$\overline{a} = \overline{a^{\tau}} + \overline{a^{n}} . \qquad (71)$$

Модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^{n})^2} . \qquad (72)$$

Дотичним (тангенціальним) прискоренням a^{τ} називається проекція прискорення точки на дотичну до траєкторії, тобто на вектор швидкості.

Дотичне прискорення дорівнює першій похідній від алгебраїчної величини швидкості або другій похідній від криволінійної координати s за часом

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} . \qquad (73)$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості точки **за величиною**. Існує тільки при нерівномірному русі.

Значення дотичного прискорення надає **характеристики руху** точки.

1) якщо, $a^{\tau} = \dfrac{dV}{dt}$ = 0 – швидкість не змінюється за величиною;

2) $a^{\tau} = \dfrac{dV}{dt}$>0 – коли модуль швидкості зростає, рух точки **прискорений** (величини швидкості та дотичного прискорення мають однакові знаки, тобто вектор дотичного прискорення збігається за напрямком з вектором швидкості) (рисунок 75, а);

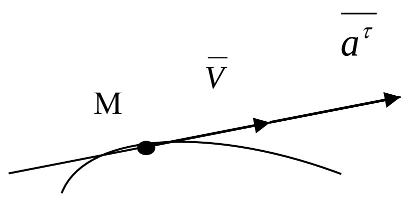


Рисунок 75, а

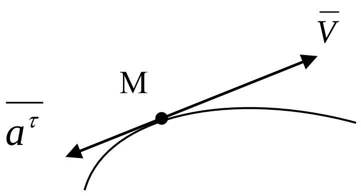


Рисунок 75, б

3) $a^{\tau} = \dfrac{dV}{dt}$ <0 – коли модуль швидкості зменшується, рух точки **сповільнений (**величини швидкості та дотичного прискорення мають різні знаки, тобто вектор дотичного прискорення спрямований протилежно вектору швидкості) (рисунок 75, б).

Нормальним прискоренням a^n називається проекція прискорення точки на головну внутрішню нормаль до траєкторії.

Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії в даній точці:

$$a^n = \frac{V^2}{R}. \tag{74}$$

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості **за напрямком**. Існує тільки при криволінійному русі.

Нормальне прискорення є завжди додатною величиною.

Нормальне прискорення **характеризує рух за виглядом траєкторії** точки:

- $a^n = \dfrac{V^2}{R} \neq 0$ - рух точки криволінійний ($R \neq 0$);
- $a^n = \dfrac{V^2}{R} = const$ - рух за колом радіусу R;
- $a^n = \dfrac{V^2}{R} = 0$ - рух точки прямолінійний ($R \to \infty$).

2.1.4 Класифікація рухів точки

Таблиця 2

Вид руху	Швидкість	Прискорення	Закон руху	Закон швидкості
Рівномірний прямолінійний	$\overline{V} = const$	$\overline{a}=0$ $\overline{a^n}=0$ $(R \to \infty)$ $\overline{a^\tau}=0$		
Нерівномірний прямолінійний	$\overline{V} \neq const$	$\overline{a}=\overline{a^\tau} \neq 0$ $\overline{a^n}=0$ $(R \to \infty)$		
Рівномірний криволінійний	$\overline{V} = const$	$\overline{a}=\overline{a^n} \neq 0$ $\overline{a^\tau}=0$	$s = s_0 + V \cdot t$	
Рівнозмінний криволінійний	$\overline{V} \neq const$	$\overline{a} = \overline{a^\tau} + \overline{a^n}$ $\overline{a^n} \neq 0$ $\overline{a^\tau} \neq 0$	$s = s_0 + V_0 \cdot t + \frac{a^\tau}{2} \cdot t^2$	$V = V_0 + a^\tau t$
Гармонійні коливання			$x = a \cdot \sin(kt + \alpha)$ a, $k = const$ (a - амплітуда, $T = \frac{2\pi}{k}$ - період коливань, k - частота, α - початкова фаза)	$x' = ak \cdot \cos(kt)$

2.2 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь – яка пряма лінія, проведена в тілі, рухається, залишаючись паралельною самій собі (власному початковому положенню).

Приклади поступального руху.

1 Кузов автомобіля на прямолінійній горизонтальній ділянці дороги. При цьому траєкторії його точок будуть прямими лініями.

2 Вантаж AB при обертанні кривошипів O_1A та O_2B ($O_1A = O_2B$) рухається поступально. Траєкторії його точок – кола радіусу $R = O_1A = O_2B$ (рисунок 76).

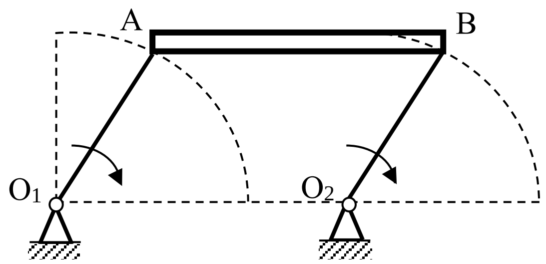


Рисунок 76

3 Рух вантажу на прямолінійній ділянці (рисунок 77). Траєкторії точок вантажу – прямі.

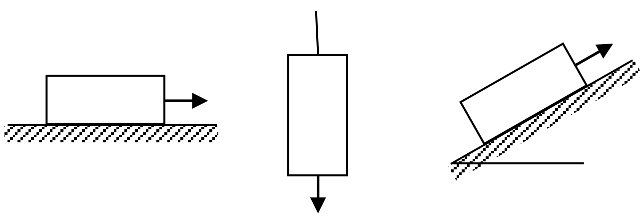


Рисунок 77

Всі властивості поступального руху визначаються **теоремою**:

при поступальному русі всі точки тіла описують однакові траєкторії і в кожний момент часу мають однакові за модулем і напрямком швидкості та прискорення.

Наслідок. Поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь–якої однієї його точки, зазвичай центром ваги, тобто кінематика поступального руху може бути зведена до кінематики точки.

При поступальному русі всі точки тіла рухаються тотожно.

Законом поступального руху твердого тіла є рівняння руху будь-якої точки цього тіла, зазвичай рівняння руху центру ваги тіла

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad z_C = f_3(t). \tag{75}$$

При поступальному русі загальну для всіх точок тіла швидкість $\overline{V}$ називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення $\overline{a}$ - прискоренням поступального руху.

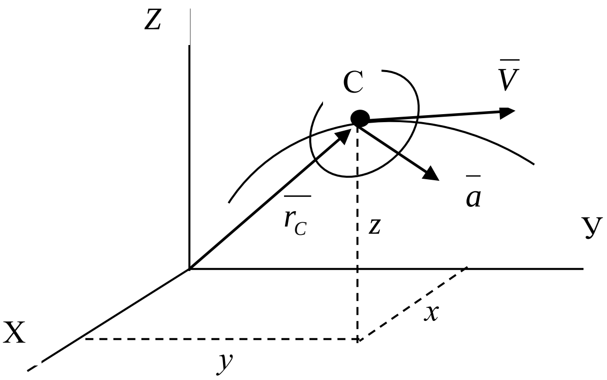


Рисунок 78

Вектори $\overline{V}$ і $\overline{a}$ зображують прикладеними до будь – якої точки тіла (рисунок 78).

C (x_C, y_C, z_C) - центр ваги тіла;

$\overline{r_C}$ - радіус-вектор точки С.

Поняття швидкості та прискорення тіла мають сенс тільки при поступальному русі. У всіх інших випадках точки тіла рухаються з різними швидкостями та прискореннями.

2.3 Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому залишаються нерухомими його точки, що лежать на деякій прямій, яка називається віссю обертання. Всі інші точки тіла рухаються в площинах, перпендикулярних осі обертання, і описують кола, радіуси яких дорівнюють відстаням від точок у тілі до осі обертання, а центри лежать на нерухомій осі (рисунок 79).

Обертання тіла навколо осі може проходити і так, що при цьому жодна з точок тіла не буде лежати на самій осі. Наприклад, обертання колеса, надітого на вісь, або обертання людини, що сидить на каруселі.

Положення тіла в будь-який момент часу однозначно встановлюється обраним з відповідним знаком кутом обертання φ, який в залежності від часу t відображає **закон обертального руху твердого тіла**

$$\varphi = f(t). \qquad (76)$$

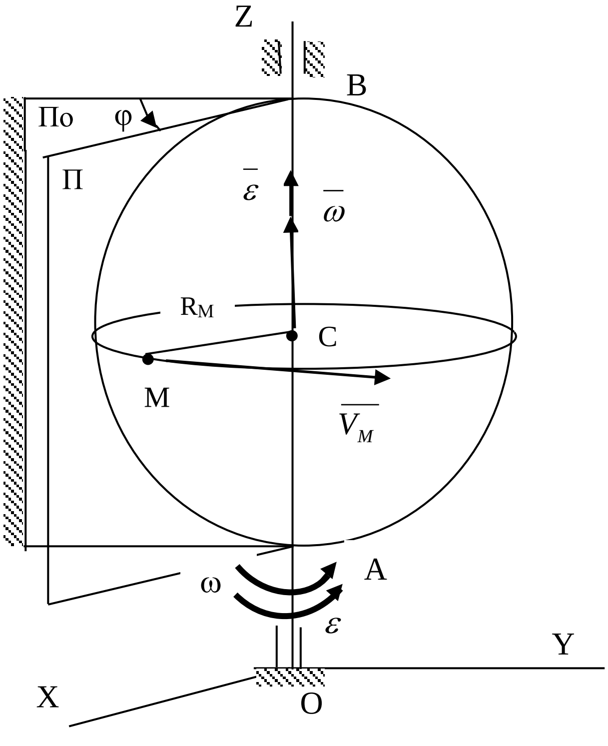


Рисунок 79

На рисунку 79 наведена схема обертального руху тіла.

По – нерухома півплощина,
П – рухома півплощина,
АВ – нерухома вісь обертання,
М – рухома точка тіла,
С – точка на осі обертання,
φ - кут обертання тіла, сформований між нерухомою і рухомою півплощинами.

φ - **кут обертання** - двогранний кут, який утворюється при обертанні тіла між рухомою та нерухомою півплощинами (рисунок 79).

Кут обертання φ вважається додатним, якщо відкладений від нерухомої півплощини в напрямку проти ходу стрілки годинника (дивлячись з додатного кінця осі Az), та від'ємним, якщо за стрілкою годинника. Одиницею вимірювання кута обертання φ є радіан.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω та кутове прискорення ε (рисунок 79).

2.3.1 Кутова швидкість та кутове прискорення тіла

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута обертання тіла з плином часу (рисунок 79).

Кутова швидкість тіла в даний момент часу ω чисельно дорівнює першій похідній від кута обертання за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{77}$$

Знак кутової швидкості визначає напрямок обертання тіла, якщо:

- $\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$ – обертання тіла відбувається проти ходу стрілки годинника;
- $\omega = \frac{d\varphi}{dt} < 0$ – обертання тіла відбувається за ходом стрілки годинника;
- $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0$ – має місце зупинка або зміна напрямку обертання.

Одиниці вимірювання кутової швидкості – радіан за секунду або одиниця за секунду ($с^{-1}$).

Кутове прискорення ε характеризує зміну кутової швидкості тіла з плином часу (рисунок 79).

Кутове прискорення тіла в даний момент часу ε чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута обертання тіла за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{78}$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення – радіан за секунду в квадраті або одиниця за секунду в квадраті ($с^{-2}$).

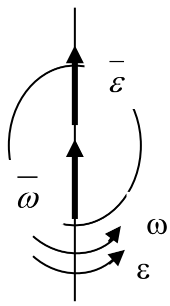
Обертання тіла вважається:

- **прискореним**, якщо модуль кутової швидкості з плином часу зростає, тобто величини ω та ε збігаються за знаком: $\omega>0$ і $\varepsilon>0$ (рисунок 20);

- **сповільненим**, якщо модуль кутової швидкості з плином часу зменшується, тобто величини ω та ε протилежні за знаком: $\omega>0$ і $\varepsilon<0$ (рисунок 21);

- **рівномірним**, якщо кутова швидкість тіла постійна $\omega = const$ та $\varepsilon = 0$.

Вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ та кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ спрямовуються вздовж осі обертання тіла в тому напрямку, звідки обертання видно проти ходу стрілки годинника. Такі вектори визначають одразу і модулі кутової швидкості та прискорення, і вісь обертання, і напрямок обертання навколо цієї осі (рисунки 80 та 81). Вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ не мають точки прикладання, є **ковзними умовними векторами.**

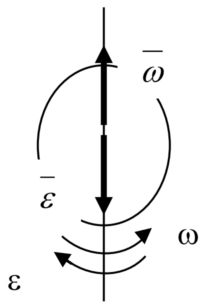


$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} > 0$$

обертання прискорене

Рисунок 80



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0$$

обертання сповільнене

Рисунок 81

Якщо кутова швидкість тіла весь час руху залишається постійною $\omega = const$, то обертання тіла називається **рівномірним**. Закон рівномірного обертання

$$\varphi = \omega \cdot t. \tag{79}$$

Наслідком закону (76) є рівняння кутової швидкості

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{80}$$

Швидкість рівномірного обертання часто визначають **кількістю обертів** за хвилину n (об/хв). За один оберт тіло обертається на кут 2π, а за n обертів на $2\pi n$, такий оберт створюється за час t = 1 хвилина = 60 секунд. Тоді із рівняння (80) виходить

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n. \qquad (81)$$

Якщо кутове прискорення тіла весь час руху залишається постійним $\varepsilon = const$, то обертання тіла називається **рівнозмінним**.

Закон рівнозмінного обертання

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \qquad (82)$$

Кутова швидкість рівнозмінного обертання

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \qquad (83)$$

Якщо величини ω та ε мають однакові знаки, обертання буде рівноприскореним, а якщо різні – рівносповільненим.

2.3.2 Швидкість та прискорення точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Кінематичні характеристики окремих точок тіла різні, їх можна називати лінійними або обертальними (поворотними).

Швидкість V **точки тіла**, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла ω на відстань від цієї точки до осі обертання R (рисунок 82)

$$V = \omega \cdot R. \qquad (84)$$

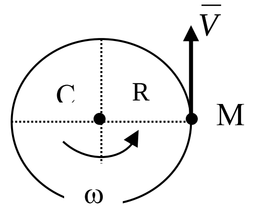


Рисунок 82

Вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований по дотичній до кола обертання ($\overline{V} \perp R$), тобто перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання та точку М (рисунок 82).

Для всіх точок тіла ω в даний момент часу має однакове значення, тому, враховуючи рівняння (84), очевидно, що швидкості точок тіла при обертанні навколо нерухомої осі пропорційні відстаням від цих точок до осі обертання, тобто в залежності від радіуса обертання розподіляються за лінійним законом (рисунок 83)

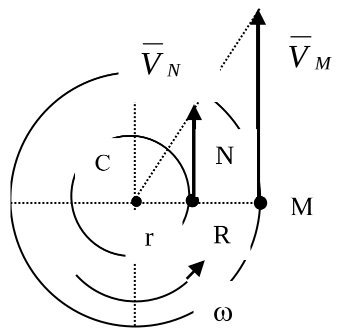


Рисунок 83

$$V_M = \omega \cdot R, \qquad V_N = \omega \cdot r\ .$$

Прискорення точки тіла $\overline{a}$ при обертанні складається з дотичного $\overline{a^\tau}$ (обертального $\overline{a^{ОБ}}$) та нормального $\overline{a^n}$ (доцентрового $\overline{a^Д}$).

Дотичне прискорення a^τ залежить від знака алгебраїчної величини кутового прискорення тіла ε і радіуса обертання R

$$\left(a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon\right), \qquad a^\tau = R \cdot \varepsilon\ . \qquad (85)$$

Вектор $\overline{a^\tau}$ спрямований по дотичній до траєкторії, якою є коло обертання ($\overline{a^\tau} \perp R$), тобто вздовж вектора швидкості $\overline{V}$ точки в напрямку кутового прискорення ε (в напрямку руху, якщо тіло обертається прискорено, або протилежно, якщо тіло обертається сповільнено) (рисунок 84).

Нормальне прискорення a^n точки залежить від кутової швидкості ω обертання тіла та радіуса обертання R

$$(a^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R), \qquad a^n = \omega^2 \cdot R. \qquad (86)$$

Вектор нормального $\overline{a^n}$ прискорення завжди спрямований вздовж радіуса R до центра обертання, тобто від точки М до точки С (рисунок 84).

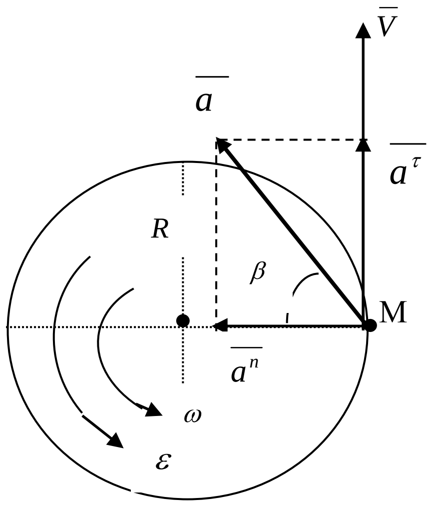


Рисунок 84

Прискорення (повне) $\overline{a}$ точки тіла визначають як векторну суму дотичного $\overline{a^\tau}$ та нормального $\overline{a^n}$ прискорень (рисунок 28)

$$\overline{a} = \overline{a^\tau} + \overline{a^n}. \qquad (87)$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (88)$$

Кут β, який визначає відхилення вектора повного прискорення $\overline{a}$ від радіуса описаного точкою кола R, визначається за формулою

$$tg\beta = \frac{a^\tau}{a^n} = \frac{R \cdot \varepsilon}{R \cdot \omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (89)$$

Значення ε та ω в даний момент для всіх точок тіла однакові, тоді із формул (88) та (89) виходить, що прискорення всіх точок твердого тіла при обертанні пропорційні їх відстаням до осі обертання і в даний момент часу формують однаковий кут β з радіусами описаних кол. Таким чином, β не залежить від положення точки в тілі, тобто однаковий для всіх точок тіла (рисунок 85).

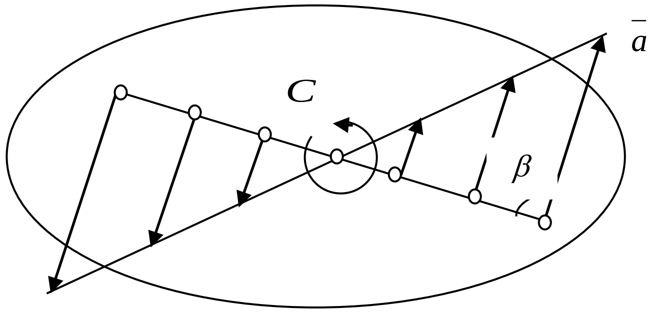


Рисунок 85

Формули (84) - (89) дозволяють визначити швидкість та прискорення будь-якої точки тіла, якщо відомий закон обертання тіла та відстань даної точки до осі обертання. За цими формулами можна, знаючи рух однієї точки тіла, визначити рух будь-якої іншої його точки, а також характеристики руху тіла в цілому.

При передачі обертання кутова швидкість, кутове прискорення та кут обертання тіла обернено пропорційні відстаням від точок в тілі до точок на осі обертання

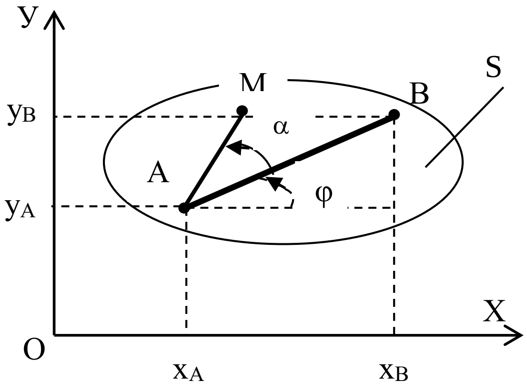
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

2.4 Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним або **плоским** рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних до деякої нерухомої площини, що називається базовою.

Плоский рух здійснюють багато часток механізмів та машин, наприклад, колесо, що котиться на прямолінійній ділянці шляху, шатун в кривошипно - шатунному механізмі, колесо в планетарному механізмі.

Для вивчення плоского руху абсолютно твердого тіла достатньо розглянути рух однієї **плоскої фігури** S (перерізу) в нерухомій (базовій) площині (Oxy). Площину (Oxy) поєднують з площиною рисунка, тоді тверде тіло зображують тільки плоскою фігурою S. Положення плоскої фігури S в площині Oxy визначається положенням будь - якого, проведеного в ній, прямолінійного відрізка АВ. У свою чергу, положення відрізка можна визначити координатами однієї точки, наприклад, точки А, x_A та y_A, а також кутом φ, який створює відрізок АВ з віссю Ox. Точку А, обрану для визначення положення плоскої фігури S, називають **полюсом** (рисунок 86).



S - плоска фігура,
AB = const –відрізок абсолютно твердого тіла,
X_A, Y_A, X_B, Y_B - координати точок А і В,
φ - кут обертання відрізка,
α - кут обертання відрізка АМ,
точка А – **полюс.**

Рисунок 86

Під час руху тіла величини x_A, y_A та φ будуть змінюватись. Для визначення закону плоского руху, тобто для визначення положення тіла в просторі в будь-який момент часу треба знати залежності x_A, y_A та φ від часу t.

Закон плоскопаралельного руху

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \qquad (90)$$

Рівняння $x_A = f_1(t)$ та $y_A = f_2(t)$ є рівняннями **поступального руху полюса А**, а рівняння $\varphi = f_3(t)$ описує закон **обертального руху** плоскої фігури навколо полюса.

Плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального, при якому всі точки тіла рухаються як полюс, та обертального руху навколо полюса. (Обертальний рух тіла створюється навколо осі, що перпендикулярна базовій площині та проходить через полюс А, для скорочення, рух вважають обертанням навколо полюса А.)

Обертальна частина руху не залежить від обрання полюса, а поступальна залежить.

Основні кінематичні характеристики плоского руху тіла:

- швидкість $\overline{V_A}$ та прискорення $\overline{a_A}$ поступального руху полюса;

- кутова швидкість ω та кутове прискорення ε обертального руху навколо полюса.

Траєкторія довільної точки М (рисунок 86) плоскої фігури визначається відстанню від точки М до полюса А та кутом обертання α навколо полюса

$$x = x_A + AM \cdot \cos(\varphi + \alpha), \quad y = y_A + AM \cdot \sin(\varphi + \alpha), \quad (91)$$

де x_A, y_A та φ - відомі за рівняннями (90) функції часу.

Рівняння (91), що одночасно визначають закон руху довільної точки М в площині Oxy, і є рівняннями її траєкторії в параметричному вигляді. Звичне рівняння траєкторії можна отримати, виключивши з системи (91) час t.

2.4.1 Визначення швидкостей точок тіла

2.4.1.1 Теорема про швидкості точок та її наслідки

Плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального, при якому всі точки тіла рухаються зі швидкістю полюса $\overline{V_A}$, та обертального руху навколо цього полюса. Швидкість будь-якої точки М тіла складається геометрично із швидкостей, які вона отримує в кожному з цих рухів.

Теорема про швидкості точок

Швидкість будь-якої точки М тіла дорівнює геометричній сумі швидкості точки А, прийнятої за полюс, та швидкості точки М в її обертанні разом з тілом навколо цього полюса А.

$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}. \tag{92}$$

Швидкість точки М в її обертанні навколо полюса А дорівнює

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \tag{93}$$

де ω - кутова швидкість обертального руху тіла навколо полюса.

Вектор $\overline{V_{MA}}$ спрямований по дотичній до кола радіуса МА, за яким обертається точка М навколо полюса А, тобто $\overline{V_{MA}} \perp MA$ в напрямку обертання (за ω) (рисунок 87).

Швидкість точки М ($\overline{V_M}$) визначається діагоналлю паралелограма, побудованого при точці М на швидкості полюса А, перенесеної в точку М, і швидкості точки М при обертанні навколо полюса А (рисунок 87).

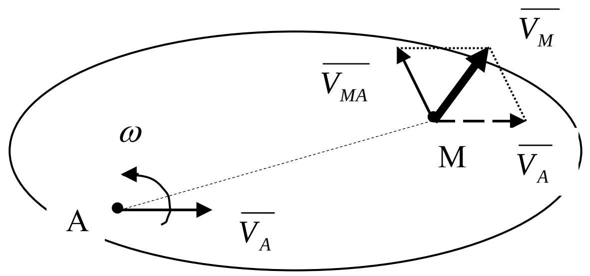


Рисунок 87

Точка А – полюс,
$\overline{V_A}$ - швидкість поступального руху полюса,
ω - кутова швидкість тіла,

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \quad \overline{V_{MA}} \perp MA,$$
$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}.$$

Наслідок 1

Проекції швидкостей точок плоскої фігури (твердого тіла) на вісь, що проходить через ці точки, однакові.

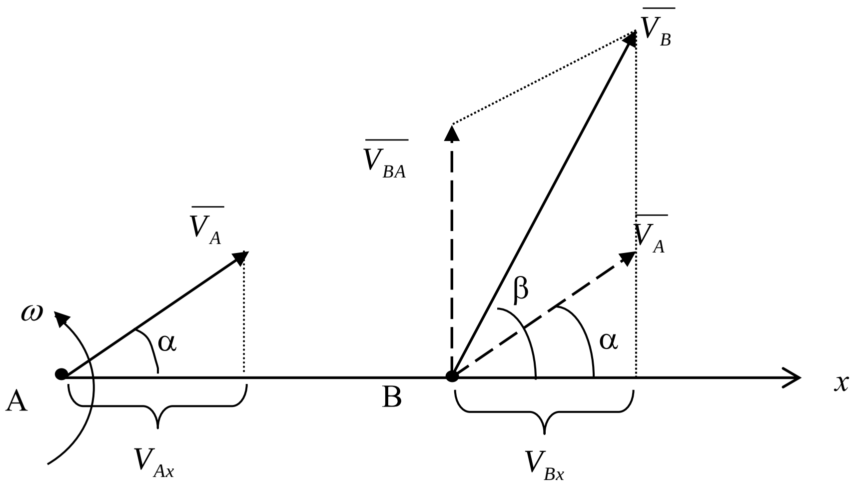


Рисунок 88

Якщо в даний момент часу відома швидкість $\overline{V_A}$ точки А плоскої фігури, напрямок її обертання та модуль кутової швидкості фігури ω (рисунок 88), швидкість точки В визначається як $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}$, де швидкість обертання В навколо А дорівнює $V_{BA} = \omega \cdot BA$ і спрямовується $\overline{V_{BA}} \perp BA$ (рисунок 88). Проекція швидкості $\overline{V_{BA}}$ на вісь Ox: $V_{BAx} = 0$, тому що $\overline{V_{BA}} \perp Ox$. Тоді проекція швидкості точки В знайдена як $V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}$, надасть рівняння $V_{Bx} = V_{Ax}$ і $Aa = Bb$, тобто проекції швидкостей однакові.

Наслідок 2

Кінці швидкостей точок незмінного відрізка лежать на одній прямій та розділяють цю пряму на частини, пропорційні відстаням між відповідними точками відрізка.

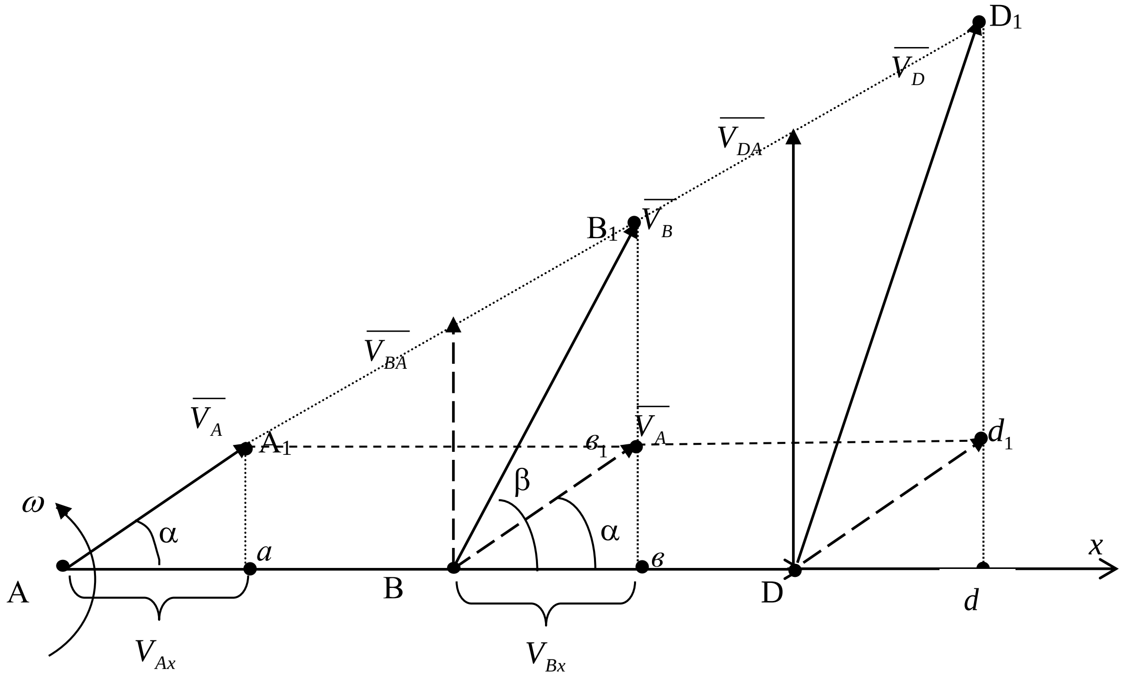
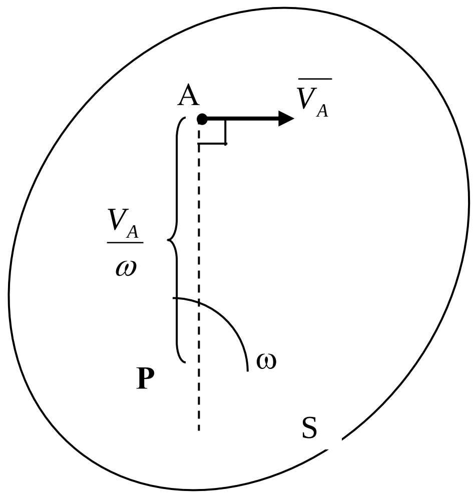


Рисунок 89

Розглядаючи рисунок 89, можна встановити, що $в_1B_1 = V_{AB} = AB \cdot \omega$, $d_1D_1 = V_{AD} = AD \cdot \omega$, звідки $\dfrac{d_1D_1}{в_1B_1} = \dfrac{AD}{AB}$. Враховуючи, що $A_1d_1 = AD$ і $A_1в_1 = AB$ як протилежні сторони паралелограмів, $\dfrac{d_1D_1}{в_1B_1} = \dfrac{A_1d_1}{A_1в_1}$. Ці співвідношення показують, що $A_1B_1D_1$ - відрізок прямої. Із подібності трикутників $A_1в_1B_1$ та $A_1d_1D_1$ видно, що $\dfrac{A_1D_1}{A_1B_1} = \dfrac{A_1d_1}{A_1в_1}$ або $\dfrac{A_1D_1}{A_1B_1} = \dfrac{AD}{AB}$ та $\dfrac{A_1D_1}{D_1B_1} = \dfrac{AD}{AB}$, тобто відстані між кінцями швидкостей пропорційні відстаням між відповідними точками.

2.4.1.2 Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

Миттєвий центр швидкостей (*МЦШ* – точка Р) - геометрична точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю: $\overline{V_P} = 0$.



МЦШ (Р) плоскої фігури (S) знаходиться на перпендикулярі до напрямку швидкості полюса $\overline{V_A}$ на відстані, що дорівнює $\frac{V_A}{\omega}$ (рисунок 90).

Рисунок 90

Якщо ***МЦШ*** розглядається **як**, тоді за теоремою у виразі формули (41) $\overline{V_A} = \overline{V_P} + \overline{V_{AP}} = \overline{V_{AP}}$, враховуючи, що $\overline{V_P} = 0$. Таким чином, швидкість довільної точки тіла, що належить плоскій фігурі, дорівнює швидкості її обертання навколо миттєвого центра швидкостей

$$\overline{V_A} = \overline{V_{AP}}, \qquad \overline{V_B} = \overline{V_{BP}}, \qquad \overline{V_C} = \overline{V_{CP}} \tag{94}$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури (тіла) в кожний момент часу має модуль, що дорівнює добутку кутової швидкості фігури на довжину відрізка від точки до *МЦШ*, і спрямована (рисунок 91) перпендикулярно цьому відрізку в напрямку обертання фігури:

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP \qquad \overline{V_A} \perp AP, \\ V_B &= \omega \cdot BP \qquad \overline{V_B} \perp BP, \\ V_C &= \omega \cdot CP \qquad \overline{V_C} \perp CP. \end{aligned} \tag{95}$$

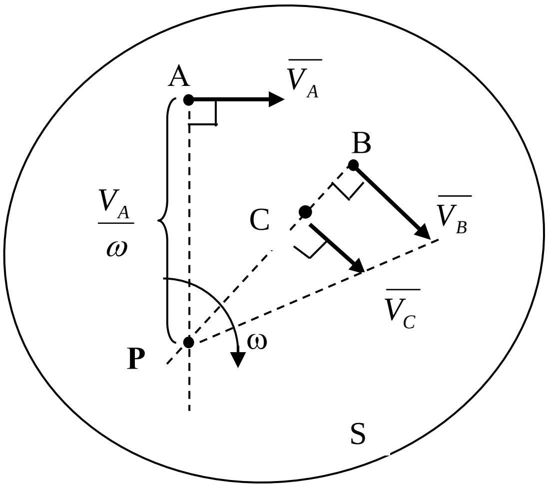


Рисунок 91

Модулі швидкостей точок плоскої фігури (тіла) в кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до миттєвого центру швидкостей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}, \qquad \frac{V_A}{V_C} = \frac{AP}{CP}, \qquad \frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP},$$

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}. \tag{96}$$

Випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

1 Якщо відома швидкість одної точки тіла $\overline{V_A}$ за величиною та напрямком і кутова швидкість обертання тіла ω, МЦШ (Р) знаходиться на перпендикулярі до $\overline{V_A}$ (рисунок 92) на відстані

AP = $\dfrac{V_A}{\omega}$.

Швидкість точки В при цьому визначається $V_B = \omega \cdot BP$ $(\overline{V_B} \perp BP)$ та спрямовується в напрямку обертання тіла (за ω).

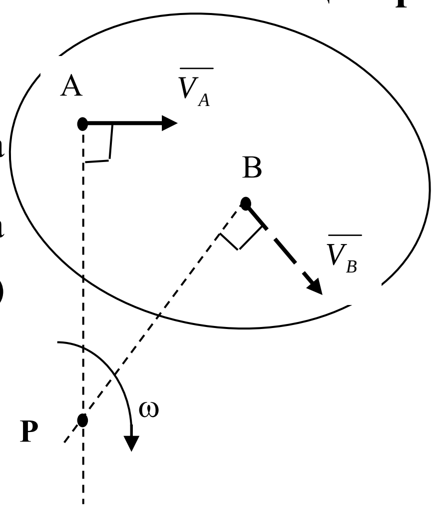


Рисунок 92

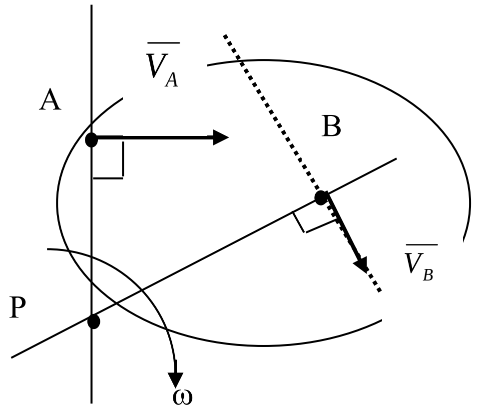
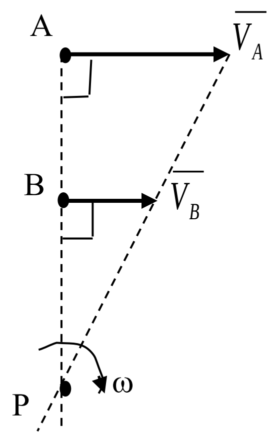


Рисунок 93

2 Якщо відома швидкість одної точки тіла $\overline{V_A}$ за величиною та напрямком і швидкість $\overline{V_B}$ другої точки В тільки за напрямком, *МЦШ* (Р) знаходиться в точці перетину перпендикулярів до векторів $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$, а кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP}$. Напрямок обертання визначається з вектором відомої швидкості $\overline{V_A}$. Модуль швидкості точки В дорівнює $V_B = \omega \cdot BP$ (рисунок 93).

3 Якщо відомі швидкості двох точок тіла $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ за величиною та напрямком, $\overline{V_A}$ II $\overline{V_B}$, AB ⊥ $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$;

а) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ різні за модулем ($V_A \neq V_B$) та збігаються за напрямком (рисунок 94)

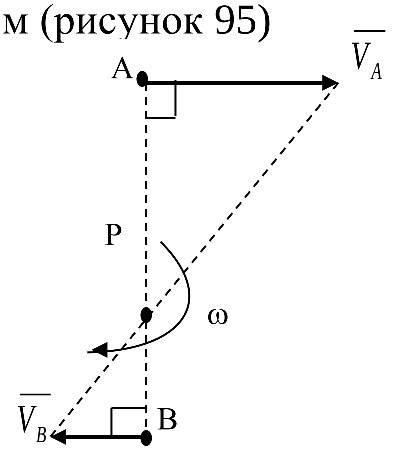


Миттєвий центр швидкостей знаходиться на лінії АВ за точкою з меншою швидкістю.

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP}$;

Рисунок 94

б) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ різні за модулем ($V_A \neq V_B$) і протилежні за напрямком (рисунок 95)

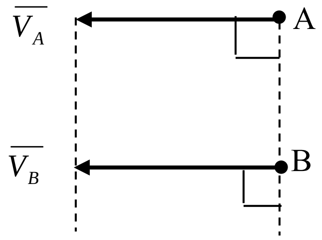


Миттєвий центр швидкостей знаходиться на лінії АВ між точками ближче до точки з меншою швидкістю.

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP}$;

Рисунок 95

в) $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ однакові за модулем ($V_A = V_B$) (рисунок 96).

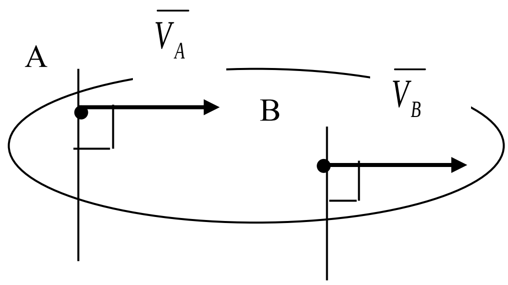


Миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності (AP=∞).

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.

Рисунок 96

4 Якщо відомі швидкості двох точок тіла $\overline{V_A}$ та $\overline{V_B}$ за величиною та напрямком, $\overline{V_A}$ II $\overline{V_B}$, $\overline{V_A}$ = $\overline{V_B}$ і АВ не перпендикулярний $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$ (рисунок 97).



Миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності (AP=BP=...=∞).

Кутова швидкість $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$.

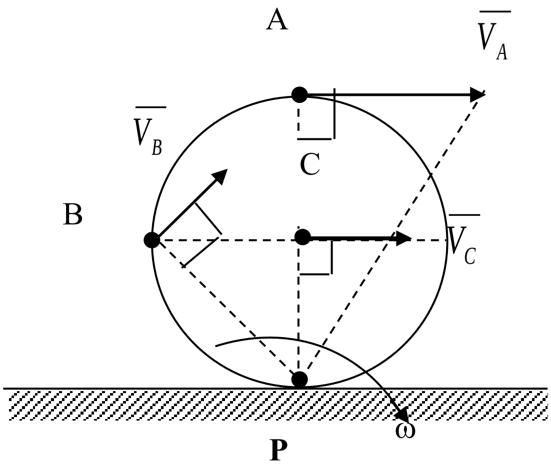
Рух тіла - миттєво поступальний ($\overline{V_A} = \overline{V_B}$, $\overline{a_A} \neq \overline{a_B}$).

Рисунок 97

5 Кочення колеса без ковзання

Відома швидкість точки центра колеса $\overline{V_C}$. *МЦШ* (Р) знаходиться в точці дотику нерухомої та рухомої поверхонь (рисунок 98).

Напрямок кочення колеса (напрямок кутової швидкості ω) визначається за напрямком вектора відомої швидкості поступального руху центру колеса $\overline{V_C}$.



$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R},$$

$$V_B = \omega \cdot BP, \quad \overline{V_B} \perp BP,$$

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot 2R, \quad \overline{V_A} \perp AP,$$

$$V_A = 2V_C.$$

Рисунок 98

2.4.2 Визначення прискорень точок тіла

2.4.2.1 Теорема про прискорення точок

Теорема про прискорення точок

Прискорення довільної точки М тіла дорівнює геометричній сумі прискорення будь-якої іншої точки А, обраної як полюс, та прискорення цієї точки М в її обертанні разом з тілом навколо полюса

$$\overline{a}_M = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}}. \qquad (97)$$

Прискорення точки М її в обертальному русі разом з тілом навколо полюса А складається з дотичного $\overline{a^{\tau}_{MA}}$ та нормального $\overline{a^{n}_{MA}}$, тобто

$$\overline{a}_{MA} = \overline{a^{\tau}_{MA}} + \overline{a^{n}_{MA}}. \qquad (98)$$

Дотичне прискорення точки М в обертанні навколо полюса А дорівнює:

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot MA. \quad (99)$$

Вектор $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ спрямований перпендикулярно відстані від точки М до полюса А ($\overline{a_{MA}^{\tau}} \perp MA$) за напрямком кутового прискорення ε. При прискореному обертанні дотичне прискорення $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ спрямоване по відношенню до полюса в бік обертання плоскої фігури, при сповільненому обертанні - протилежно, тобто напрямок $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ по відношенню до полюса завжди відповідає напрямку кутового прискорення ε (рисунок 99).

Нормальне прискорення точки М в обертанні навколо полюса А дорівнює

$$a_{MA}^{n} = \omega^2 \cdot MA. \quad (100)$$

Вектор $\overline{a_{MA}^{n}}$ спрямований з точки М до полюса А ($M \to A$) (рисунок 99).

Модуль прискорення точки М в обертанні разом з тілом навколо полюса А дорівнює

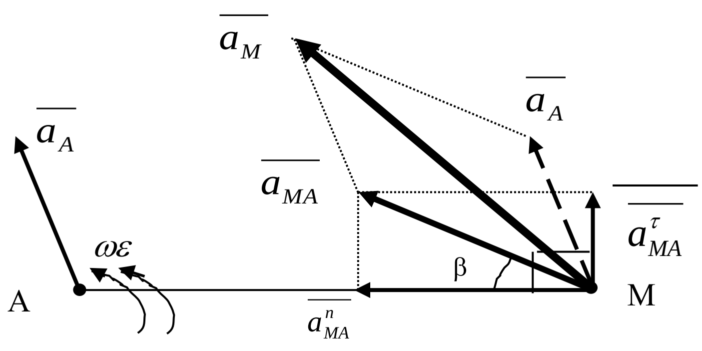
$$a_{MA} = \sqrt{(a_{MA}^{\tau})^2 + (a_{MA}^{n})^2} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (101)$$

Напрямок вектора $\overline{a_{MA}}$ знаходиться побудовою діагоналі прямокутника, складеного векторами $\overline{a_{MA}^{\tau}}$ та $\overline{a_{MA}^{n}}$ (рисунок 99).

Таким чином, поєднуючи теорему (98) та рівняння (99) і (100), отримується прискорення точки М

$$\overline{a}_M = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}^{\tau}} + \overline{a_{MA}^{n}}. \quad (102)$$

Прискорення точки М $\overline{a_M}$ визначається як діагональ паралелограма прискорень, сторонами якого є прискорення полюса $\overline{a_A}$ та прискорення точки М $\overline{a_{MA}}$ в її обертанні разом з тілом навколо полюса А (рисунок 99).



$$\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}},$$

$$\overline{a_{MA}} = \overline{a_{MA}^{\tau}} + \overline{a_{MA}^{n}},$$

$$tg\beta = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Рисунок 99

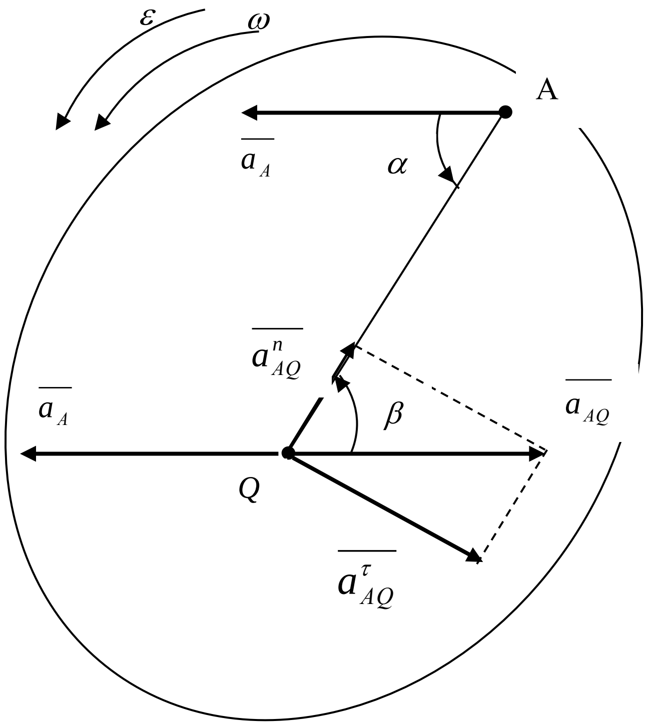
2.4.2.2 Миттєвий центр прискорень

Точка Q, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається **миттєвим центром прискорень** (***МЦП***).

Миттєвий центр прискорень знаходиться на відрізку, який складає з прискоренням полюса (точкою А) $\overline{a_A}$ кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$, відкладений від прискорення полюса в бік, що відповідає напрямку кутового прискорення ε, на відстані від полюса $AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рисунок 100).

Якщо **МЦП** прийняти **за полюс**, то прискорення будь-якої точки плоскої фігури в даний момент визначається як прискорення цієї точки в обертальному русі фігури навколо миттєвого центру прискорень (рисунок 100).

$$\overline{a_C} = \overline{a_Q} + \overline{a_{CQ}} = \overline{a_{CQ}} \qquad (\overline{a_Q} = 0). \tag{103}$$



Точка A - полюс.

Точка Q - миттєвий центр прискорень

Рисунок 100

Аналогічно $\overline{a_B} = \overline{a_{BQ}}$, $\overline{a_D} = \overline{a_{DQ}}$. Звідси, згідно з (101),

$$a_C = a_{CQ} = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,,$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \qquad (104)$$

$$a_D = a_{DQ} = DQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

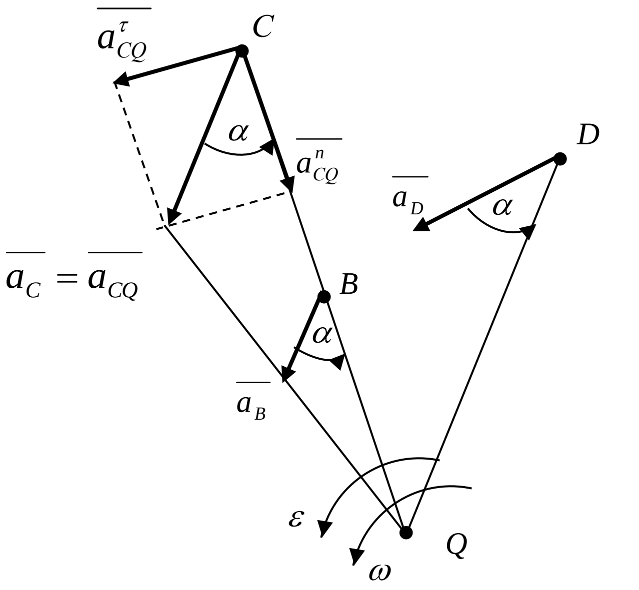


Рисунок 101

Таким чином, $\dfrac{a_B}{a_C} = \dfrac{QB}{QC}$,

$$\frac{a_B}{a_D} = \frac{QB}{QD} \qquad (105)$$

Модулі прискорень точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до *МЦП*, а вектори прискорень складають з відрізками від точок до *МЦП* однаковий кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$.

Миттєвий центр прискорень Q та миттєвий центр швидкостей P є різними точками плоскої фігури (рисунок 102).

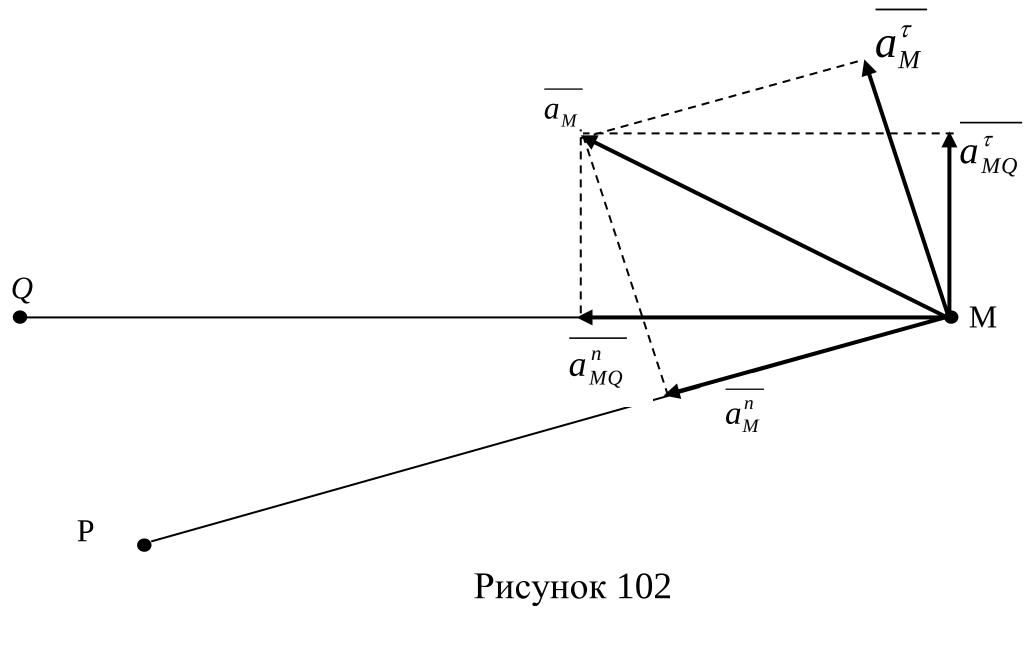


Рисунок 102

Прискорення точки М $\overline{a_M}$ (рисунок 102) розкладені спочатку на дотичне $\overline{a_M^{\tau}}$ та нормальне $\overline{a_M^{n}}$, а потім на дотичне $\overline{a_{MQ}^{\tau}}$ та нормальне $\overline{a_{MQ}^{n}}$ в обертанні фігури навколо миттєвого центру прискорень Q.

Дотичне $\overline{a_M^\tau}$ та нормальне $\overline{a_M^n}$ прискорення спрямовуються по дотичній та головній нормалі до траєкторії точки М, тобто перпендикулярно відрізку PM (вздовж вектора швидкості $\overline{V_M}$) та вздовж відрізка PM.

Дотичне $\overline{a_{MQ}^\tau}$ та нормальне $\overline{a_{MQ}^n}$ прискорення обертання точки М навколо точки Q спрямовуються перпендикулярно відрізку QM, що з'єднує точку М з миттєвим центром прискорень, та вздовж цього відрізка.

Таким чином, $\overline{a_{MQ}^\tau}$ та $\overline{a_{MQ}^n}$ не слід плутати з істинними дотичним та нормальним прискореннями точки $\overline{a_M^\tau}$ і $\overline{a_M^n}$.

Випадки визначення положення миттєвого центра прискорень

1 Якщо відома точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю, ця точка і є миттєвим центром прискорень.

Кочення без ковзання колеса з постійною швидкістю центра $\overline{V_C}$.

МЦШ точка Р, тоді швидкість $V_C = CP \cdot \omega = R \cdot \omega$, де R - радіус колеса.

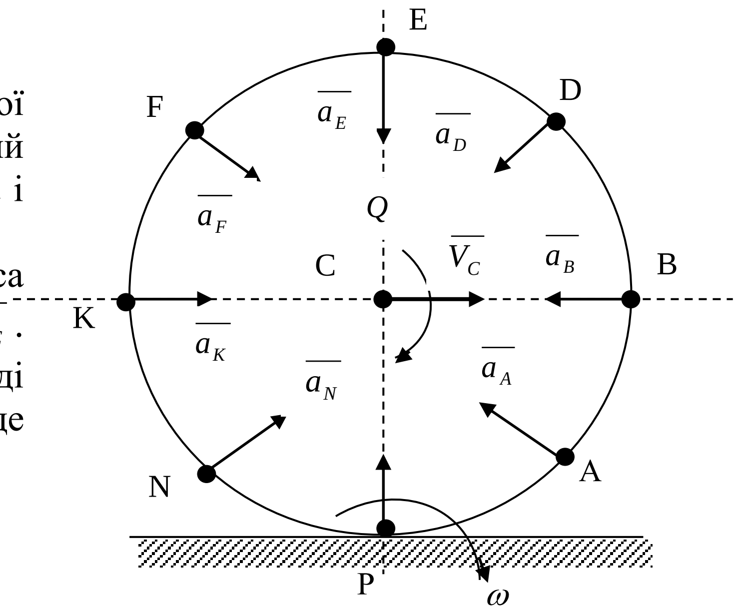


Рисунок 103

Кутова швидкість $\omega = \frac{V_C}{R} = const$. Центр колеса рухається рівномірно прямолінійно, тоді його прискорення $\overline{a_C} = 0$. Таким чином, центр колеса С є миттєвим центром прискорень Q. Обертання колеса рівномірне, тобто прискорення всіх точок колеса (рисунок 103) є доцентровими прискореннями в їх обертальному русі навколо *МЦП* (вектори спрямовуються до *МЦП*) і дорівнюють

$$a_A = a_B = a_D = ... = a_P = R \cdot \omega^2 = \frac{V_C^2}{R}. \qquad (106)$$

Миттєвий центр швидкостей P, не маючи швидкості ($\overline{V_P} = 0$), має прискорення (106).

2 Відомі модуль і напрямок прискорення будь-якої точки A плоскої фігури $\overline{a_A}$, а також кутова швидкість ω та кутове прискорення ε фігури.

2.1 Нерівномірне обертання $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. В такому випадку миттєвий центр прискорень знаходиться на відрізку, який складає з напрямком прискорення $\overline{a_A}$ кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$, відкладений від прискорення точки A в бік, що відповідає напрямку кутового прискорення ε, на відстані від точки $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рисунки 104 і 105).

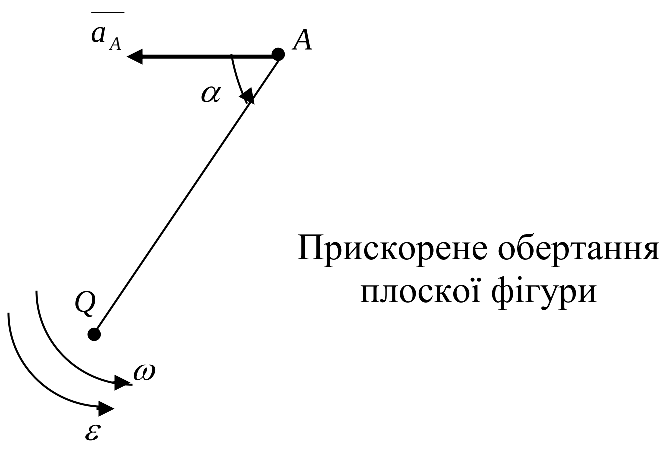
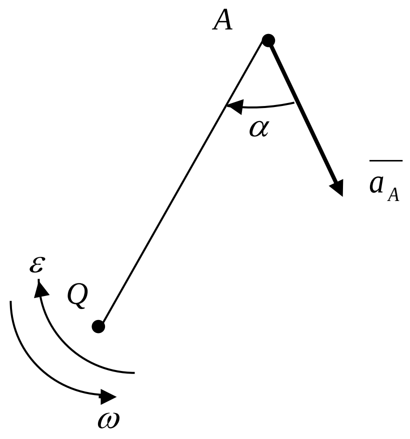


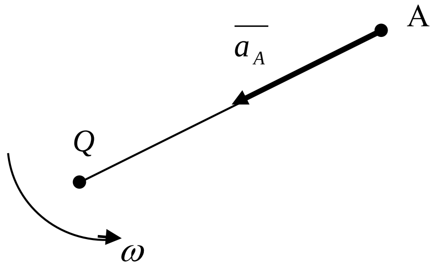
Рисунок 104



Сповільнене обертання плоскої фігури

Рисунок 105

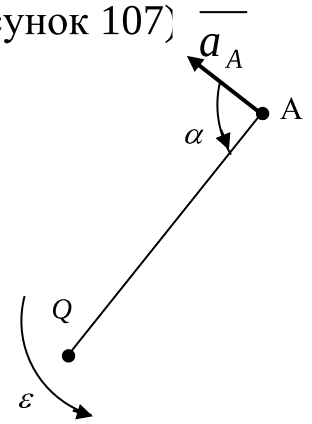
2.2 Рівномірне обертання $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$ (також момент коли $\varepsilon = 0$ при нерівномірному обертанні) (рисунок 106).



В такому випадку $tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = 0$ і $\alpha = 0$, тобто прискорення всіх точок спрямовані до *МЦП*. Відстані від точки до *МЦП* визначаються як $AQ = \dfrac{a_A}{\omega^2}$.

Рисунок 106

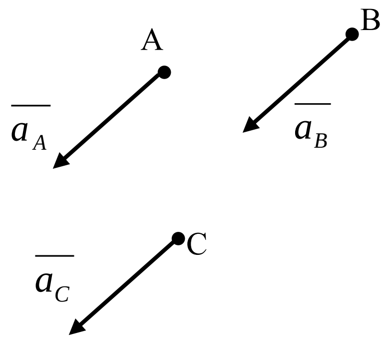
2.3 Момент, коли кутова швидкість стає рівною нулю $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$ (рисунок 107)



В цьому випадку $tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = \infty$ і $\alpha = 90^O$, тобто прискорення всіх точок спрямовані перпендикулярно відстаням , що з'єднують ці точки з *МЦП*. Відстань визначається як $AQ = \dfrac{a_A}{\varepsilon}$. Кутова швидкість фігури зазвичай стає рівною нулю $\omega = 0$ при зміні напрямку обертання фігури.

Рисунок 107

2.4 Момент, коли кутова швидкість та кутове прискорення стають рівними нулю при непоступальному русі $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ (рисунок 108).



Прискорення всіх точок плоскої фігури в даний момент часу геометрично рівні, тому що прискорення будь-якої точки дорівнює прискоренню полюса,

$$\overline{a}_A = \overline{a}_B = \overline{a}_C \quad \text{і} \quad AQ = \frac{a_A}{0} = \infty .$$

Рисунок 108

3 Відомі модулі і напрямки прискорень будь-яких двох точок A і B плоскої фігури $\overline{a}_A$ і $\overline{a}_B$ (рисунок 109).

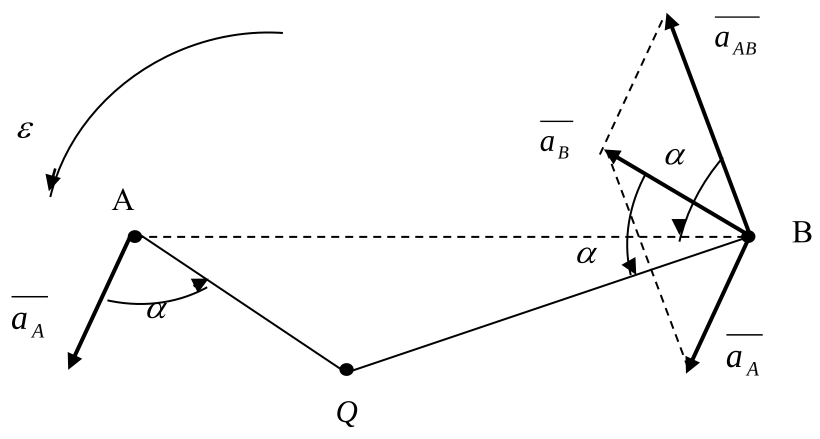


Рисунок 109

Точка A обирається як полюс. Тоді $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}$ за теоремою (97). Стороною паралелограма в точці B встановлюється $\overline{a}_{BA}$, яке визначає кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$ з відрізком AB і напрямок кутового прискорення ε. Точка перетину ліній відкладених за кутом α в напрямку ε від відомих прискорень точок A і B, є миттєвим центром прискорень Q.

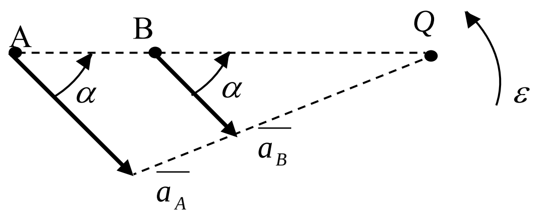
Такий спосіб визначення положення миттєвого центра прискорень не потребує розрахунку кута α. Якщо положення *МЦП* за цим способом визначається графічно, то прискорення точок треба відкладати в масштабі за їх істинними напрямками.

3.1 Прискорення точок $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ паралельні ($\overline{a_A} \parallel \overline{a_B}$), різні за модулем ($a_A \neq a_B$) (рисунки 110 - 115)

Положення миттєвого центра прискорень визначається на базі того, що:

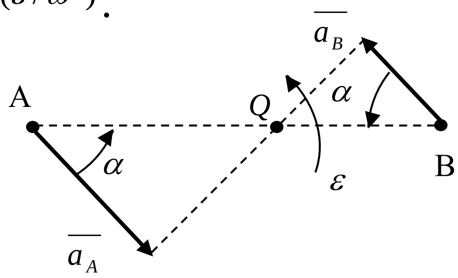
1) модулі прискорень пропорційні відрізкам, що з'єднують точки з *МЦП* (54) $\dfrac{a_A}{a_B} = \dfrac{AQ}{BQ}$;

2) прискорення точок складають з відрізками, що з'єднують точки з *МЦП*, на однаковий кут $\alpha = arctg(\varepsilon / \omega^2)$.



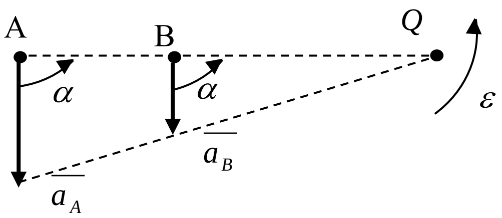
$0 < \alpha < 90^O$, $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$,
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$
однаково спрямовані

Рисунок 110



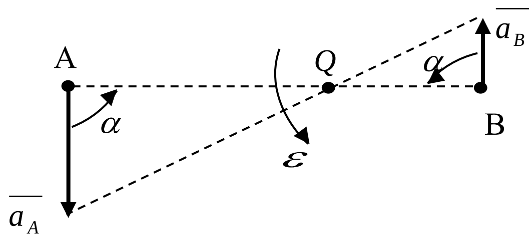
$0 < \alpha < 90^O$, $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$,
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ різних напрямків

Рисунок 111



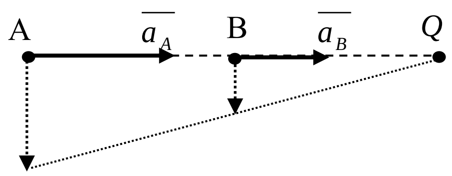
$\alpha = 90^O$, $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$,
$tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = \infty$,
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ однаково спрямовані

Рисунок 112



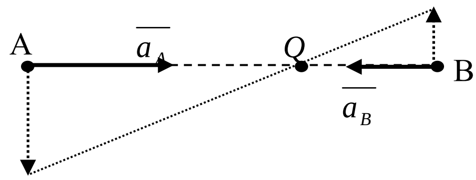
$\alpha = 90^O$, $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$,
$tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = \infty$,
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ різних напрямків

Рисунок 113



$\alpha = 0,\ \omega \neq 0,\ \varepsilon = 0,$
$tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = 0,$
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ однаково спрямовані

Рисунок 114



$\alpha = 0,\ \omega \neq 0,\ \varepsilon = 0,$
$tg\alpha = \varepsilon / \omega^2 = 0,$
вектори $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ різних напрямків

Рисунок 115

3.2 Прискорення точок $\overline{a_A}$ і $\overline{a_B}$ паралельні ($\overline{a_A}\,\mathrm{II}\,\overline{a_B}$), однакові за модулем ($a_A = a_B$) (рисунок 116).

За теоремою про прискорення точок (97)

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}},$$

але $\overline{a_B} = \overline{a_A}$, тому за формулою (101)

$$a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4 = 0}\,.$$

При $AB \neq 0,\ \varepsilon = 0,\ \omega = 0$ і

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty\,.$$

Миттєвий центр прискорень знаходиться в нескінченності, а прискорення всіх точок плоскої фігури геометрично рівні.

Рисунок 116

2.5 Складний рух точки

Складним рухом точки називається такий рух, при якому точка одночасно бере участь у декількох рухах.

Розглядається рух точки одночасно по відношенню до двох (або декількох) систем відліку, із яких одна вважається умовно нерухомою, а друга певним чином рухається відносно першої.

Наприклад, складний рух здійснює пасажир, який іде по вагону, що рухається, або людина, що йде вздовж ескалатора.

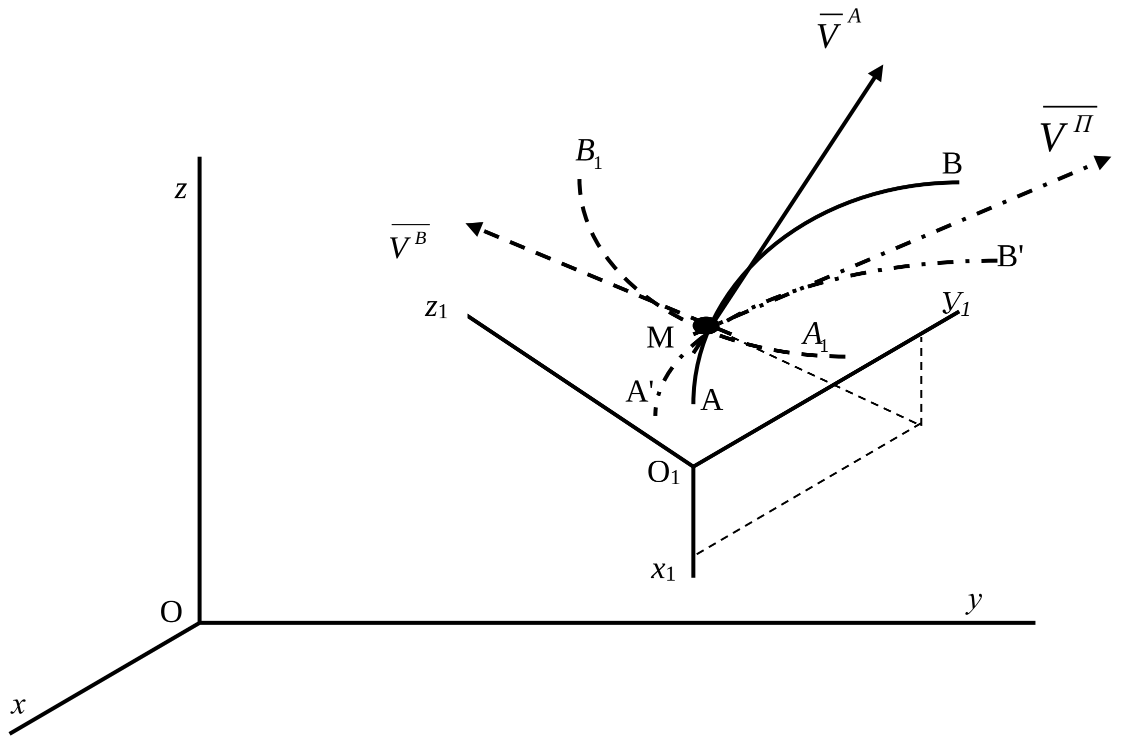


Рисунок 117

Точка M рухається відносно двох систем відліку (рисунок 117). (Oxy) - нерухома система відліку, ($O_1x_1y_1$) – рухома система відліку.
AB – траєкторія точки відносно нерухомої системи (Oxy) (———),
A_1B_1 - траєкторія точки відносно рухомої системи ($O_1x_1y_1$) (- - - -),
$A^/B^/$ - траєкторія точки разом з рухомою системою відносно нерухомої системи відліку (_ . _ . _ .) (рисунок 117).

Відносним рухом називається рух точки відносно рухомої ($O_1x_1y_1$) системи відліку (рисунок 117).

Траєкторія руху точки в її відносному русі – відносна траєкторія (A_1B_1).

Швидкість точки щодо рухомої системи відліку – відносна швидкість $\overline{V^{B}}$ (вектор $\overline{V^{B}}$ - по дотичній до відповідної відносної траєкторії A_1B_1 в напрямку руху).

Прискорення точки у відносному русі – відносне прискорення $\overline{a^{B}}$.

Переносним рухом називається рух, який створює рухома система відліку ($O_1x_1y_1$) разом з точкою (М) відносно нерухомої системи (Oxy) відліку (рисунок 117).

Траєкторія руху точки в її переносному русі – переносна траєкторія ($A^{/}B^{/}$).

Швидкість точки разом з рухомою системою щодо нерухомої системи відліку – переносна швидкість $\overline{V^{П}}$ (вектор $\overline{V^{П}}$ - по дотичній до відповідної переносної траєкторії $A^{/}B^{/}$ в напрямку руху).

Прискорення точки у переносному русі– переносне прискорення $\overline{a^{П}}$.

Абсолютним (або складним) рухом називається рух точки відносно нерухомої (Oxy) системи відліку (рисунок 117).

Траєкторія руху точки відносно нерухомої системи відліку – абсолютна траєкторія (АВ).

Швидкість точки щодо нерухомої системи відліку – абсолютна швидкість $\overline{V^{A}}$ (вектор $\overline{V^{A}}$ по дотичній до відповідної абсолютної траєкторії АВ в напрямку руху).

Прискорення точки в абсолютному русі – абсолютне прискорення $\overline{a^{A}}$.

Абсолютний рух точки є складним рухом - складається з відносного та переносного рухів.

2.5.1 Визначення швидкостей точки

Теорема про додавання швидкостей:
при складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі її відносної та переносної швидкостей

$$\overline{V^{A}} = \overline{V^{B}} + \overline{V^{П}}. \qquad (107)$$

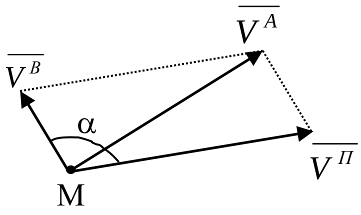


Рисунок 118

$\overline{V^B}$, $\overline{V^П}$, $\overline{V^A}$ - відносна, переносна, абсолютна швидкості точки (рисунок 118).

Фігура, зображена на рисунку 118, називається **паралелограмом швидкостей**.

Напрямок вектора абсолютної швидкості точки $\overline{V^A}$ визначається як діагональ паралелограма, побудованого на векторах відносної $\overline{V^B}$ та переносної $\overline{V^П}$ швидкостей.

Якщо кут між напрямками векторів $\overline{V^B}$ та $\overline{V^П}$ дорівнює α, то модуль абсолютної швидкості визначається за формулою

$$V^A = \sqrt{(V^B)^2 + (V^П)^2 + 2 \cdot V^B \cdot V^П \cdot cos\alpha}\,. \qquad (108)$$

У випадках, коли розташування векторів $\overline{V^B}$ і $\overline{V^П}$ граничні, визначення напрямку та величини абсолютної швидкості $\overline{V^A}$ спрощується (рисунки 119 і 120).

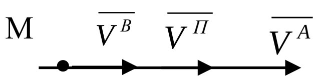


Рисунок 119

Якщо $\alpha = 0$, вектори швидкостей спрямовані вздовж одної лінії.

$$\overline{V^A} = \overline{V^B} + \overline{V^П}\,.$$

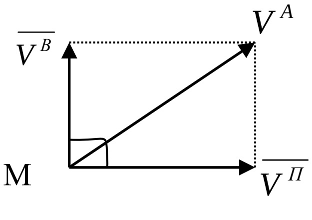


Рисунок 120

Якщо $\alpha = 90^O$ ($\overline{V^B} \perp \overline{V^П}$), вектор $\overline{V^A}$ - діагональ прямокутника.

$$V^A = \sqrt{(V^B)^2 + (V^П)^2}\,.$$

2.5.2 Визначення прискорень точки

Для визначення залежностей між абсолютним $\overline{a^A}$, відносним $\overline{a^B}$ та переносним $\overline{a^\Pi}$ прискореннями можна використати теорему про додавання швидкостей (107) і знайти абсолютне прискорення точки в загальному випадку як похідну від вектора абсолютної швидкості

$$\overline{a^A} = \frac{d\overline{V^A}}{dt} = \frac{d\overline{V^B}}{dt} + \frac{d\overline{V^\Pi}}{dt}. \qquad (109)$$

Подальші розрахунки залежать від **характеру переносного руху**.

1 Поступальний переносний рух

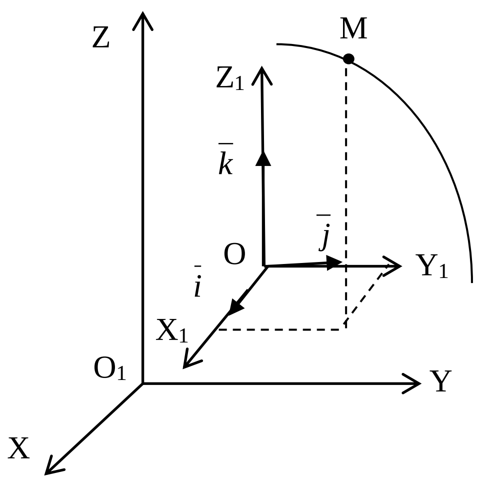


Рисунок 121

Рухома система відліку ($O_1x_1y_1$) переміщається відносно нерухомої (Oxy) поступально (рисунок 121)

При поступальному русі для будь-якого положення точки М

$$\frac{d\overline{V^B}}{dt} = \overline{a^B} \quad \text{та} \quad \frac{d\overline{V^\Pi}}{dt} = \overline{a^\Pi}.$$

Таким чином, як виходить із (109), абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного та переносного прискорень

$$\overline{a^A} = \overline{a^B} + \overline{a^\Pi}. \qquad (110)$$

2 Непоступальний переносний рух

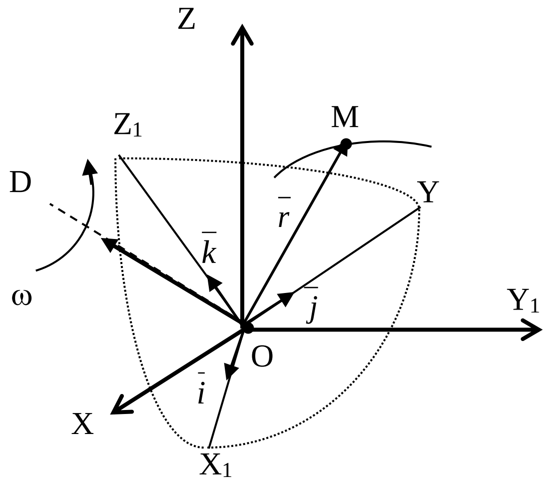


Рисунок 122

Переносний рух - **обертальний** з кутовою швидкістю ω.

OD – вісь обертання рухомої системи відліку ($O_1x_1y_1$) відносно нерухомої (Oxy) (рисунок 122).

Вісь обертання може бути нерухомою або миттєвою віссю, коли точка O нерухома.

Похідна відносної швидкості за часом при обертальному переносному русі

$$\frac{d\overline{V^B}}{dt} = \overline{a^B} + \overline{a_1} = \overline{a^B} + (\overline{\omega} \times \overline{V^B}) . \qquad (111)$$

Відносне прискорення $\overline{a^B}$ враховує зміну вектора $\overline{V^B}$ тільки при відносному русі точки М, а додаткова величина $\overline{a_1}$ (111) враховує ту зміну вектора $\overline{V^B}$, яка виникає при його повороті разом з рухомою системою ($O_1x_1y_1$) навколо осі *OD*, тобто в переносному русі.

Похідна переносної швидкості за часом при обертальному переносному русі

$$\frac{d\overline{V^П}}{dt} = \overline{a^П} + \overline{a_2} = \overline{a^П} + (\overline{\omega} \times \overline{V^B}) . \qquad (112)$$

Переносне прискорення $\overline{a^П}$ враховує зміну вектора $\overline{V^П}$ тільки в переносному русі тому, що вона знаходиться як прискорення точки, незмінно пов'язаної з осями рухомої системи відліку ($O_1x_1y_1$). Додаткова величина $\overline{a_2}$ (61) враховує ту зміну вектора $\overline{V^П}$, яка виникає при відносному русі точки.

Таким чином, підставляючи рівняння (111) і (112) в формулу (110), отримано

$$\overline{a^A} = \overline{a^B} + \overline{a^П} + \overline{a_1} + \overline{a_2}\,. \qquad (113)$$

Сума $(\overline{a_1} + \overline{a_2})$ визначається як **прискорення Коріоліса,** яке характеризує зміну вектора відносної швидкості $\overline{V^B}$ в переносному русі та вектора переносної швидкості $\overline{V^П}$ у відносному русі

$$\overline{a^K} = (\overline{a_1} + \overline{a_2}) = 2\,(\overline{\omega} \times \overline{V^B})\,. \qquad (114)$$

Тоді рівняння (113) набуває вигляду

$$\overline{a^A} = \overline{a^B} + \overline{a^П} + \overline{a^K} \qquad (115)$$

і відображає **теорему Коріоліса**:

абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох векторів: відносного прискорення $\overline{a^B}$, яке характеризує зміну відносної швидкості точки у відносному русі, переносного прискорення $\overline{a^П}$, яке характеризує зміну переносної швидкості точки в переносному русі, і прискорення Коріоліса $\overline{a^K}$, яке характеризує зміну відносної швидкості точки в переносному русі та переносної швидкості точки у відносному русі.

Якщо переносний рух є поступальним, $\omega = 0$ і прискорення Коріоліса $\overline{a^K} = 0$, тобто рівняння (115) набуває вигляду рівняння (110).

Прискорення Коріоліса точки дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху $\overline{\omega}$ на відносну швидкість точки $\overline{V^B}$:

$$\overline{a^K} = 2\,(\overline{\omega} \times \overline{V^B})\,. \qquad (113)$$

Якщо кут між векторами $\overline{V^B}$ та $\overline{\omega}$ визначити через α, то модуль прискорення Коріоліса

$$a^K = 2 \cdot \omega \cdot V^B \cdot \sin \alpha . \tag{114}$$

Вектор прискорення Коріоліса спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через вектори $\overline{\omega}$ та $\overline{V^B}$, в тому напрямку, звідки найкоротше накладання цих векторів видно проти ходу стрілки годинника.

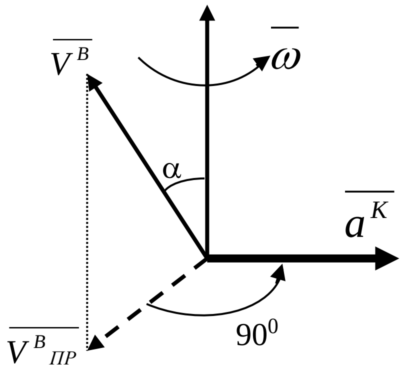


Рисунок 123

Напрямок прискорення Коріоліса (рисунок 123) визначають за **правилом Жуковського**: щоб знайти напрямок $\overline{a^K}$, необхідно спроектувати вектор відносної швидкості $\overline{V^B}$ на площину, перпендикулярну осі переносного обертання (вектор $\overline{\omega}$), і повернути цю проекцію $\overline{V^B{}_{ПР}}$ на кут 90^0 в напрямку переносного обертання (за ω, тобто за або проти ходу стрілки годинника в залежності від напрямку обертання).

Прискорення Коріоліса $a^K = 2 \cdot \omega \cdot V^B \cdot \sin \alpha = 0$ **дорівнює нулю**, коли:

1) ω = 0, тобто переносний рух не є обертальним (поступальний переносний рух), або має місце моментальна зупинка обертання (або зміна напрямку руху);

2) $V^B = 0$, тобто точка рухається тільки відносно нерухомої системи;

3) $\sin \alpha = 0$, тобто $\alpha = 0$ та $\alpha = 180^O$ - відносний рух точки відбувається за напрямком, паралельним осі переносного обертання ($\overline{V^B}$ II $\overline{\omega}$), або в даний момент часу вектор $\overline{V^B}$ паралельний цій осі.

3 ДИНАМІКА

Динаміка - це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальних тіл у залежності від сил, що діють на них.

3.1 Основні закони динаміки (закони Галілея-Ньютона)

1 Закон про інерцію (I закон Галілея)

Матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до того часу, поки прикладені сили не змінять цей стан.

Інертність - намагання тіла зберігати незмінною швидкість свого руху, тобто зберігати отриманий раніше механічний рух.

Рух, який створює точка при відсутності сил, називається **рухом за інерцією**.

Інерційними системами відліку (умовно нерухомими) називають системи відліку, відносно яких відбувається рух тіл з плином часу і виконується закон інерції.

2 Закон пропорційності сили та прискорення (основний закон динаміки)

Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній силі і має однаковий з нею напрямок

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}. \qquad (118)$$

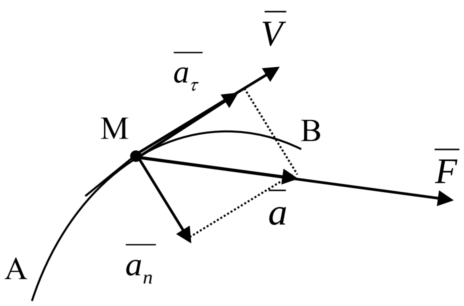


Рисунок 124

AB – траєкторія точки,
$\overline{V}$ - швидкість точки,
$\overline{a}$ - повне прискорення точки,
$\overline{a_\tau}$ - дотичне прискорення,
$\overline{a_n}$ - нормальне прискорення,
$\overline{F}$ - сила, що діє на точку (рисунок 124).

Кількісною мірою інертності матеріальної точки є її **маса** m, коефіцієнт пропорційності сили $\overline{F}$ та прискорення $\overline{a}$, величина постійна, скалярна і додатна.

Одиницею вимірювання маси є кілограм (кг).

3 Закон рівності дії та протидії

Кожній дії відповідає рівна за модулем та протилежна за напрямком протидія.

3.2 Динаміка вільної матеріальної точки

3.2.1 Диференційні рівняння вільної матеріальної точки

Вільна матеріальна точка М відомої маси m рухається під дією системи сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, ... \overline{F_n}\}$, рівнодійна системі $\overline{F} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$ (рисунок 125).

Прискорення, що надає система сил точці, є сумарним вектором $\overline{a} = \sum_{n=1}^{k} \overline{a_n}$, який спрямований за вектором рівнодійної.

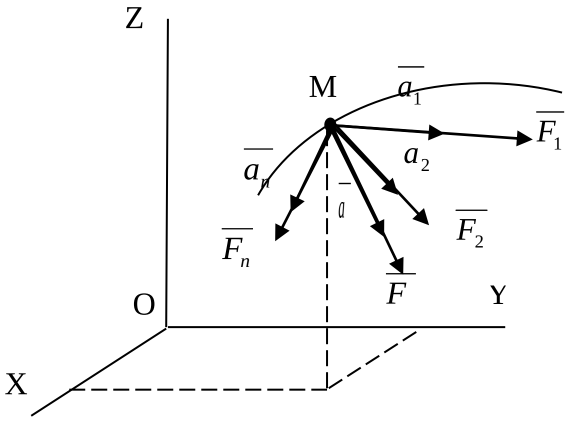


Рисунок 125

Основне рівняння динаміки (формула 118) **для системи сил**

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n}. \tag{119}$$

Диференційні рівняння руху матеріальної точки:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= m\cdot\ddot{x} = F_{1x}+F_{2x}+...+F_{nx} = \sum_{n=1}^{k}F_{nx}\,, & m\cdot\ddot{x} &= \sum_{n=1}^{k}F_{nx} \\ m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} &= m\cdot\ddot{y} = F_{1y}+F_{2y}+...+F_{ny} = \sum_{n=1}^{k}F_{ny}\,, & m\cdot y'' &= \sum_{n=1}^{k}F_{ny} \\ m\cdot\frac{d^2z}{dt^2} &= m\cdot\ddot{z} = F_{1z}+F_{2z}+...+F_{nz} = \sum_{n=1}^{k}F_{nz}\,, & m\cdot\ddot{z} &= \sum_{n=1}^{k}F_{nz} \end{aligned}\right\}, \qquad (120)$$

де $\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}$, $\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}$ - проекції прискорення $\bar{a}$ на координатні осі;

$F_{1X}, F_{1Y}, F_{1Z}, F_{2X}, F_{2Y}, F_{2z} ....F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ - проекції сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ...\overline{F_n}$ на координатні осі.

3.2.2 Дві задачі динаміки точки

Перша задача динаміки (пряма)

Знаючи масу точки m та рівняння її руху $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, ***визначити*** модуль і напрямок рівнодійної сил, прикладених до точки.

Розв'язок першої задачі динаміки проводиться методом подвійного *диференціювання* рівнянь руху за часом.

Диференційні рівняння руху точки

$$m\cdot\ddot{x}=\sum_{n=1}^{k}F_{nx}=F_X\,,\quad m\cdot\ddot{y}=\sum_{n=1}^{k}F_{ny}=F_y\,,\quad m\cdot\ddot{z}=\sum_{n=1}^{k}F_{nz}=F_z\,. \qquad (121)$$

Модуль рівнодійної

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\,. \qquad (122)$$

Напрямок рівнодійної

$$\cos(\overline{F},\overline{i})=\frac{F_x}{F}\,,\quad \cos(\overline{F},\overline{j})=\frac{F_y}{F}\,,\quad \cos(\overline{F},\overline{k})=\frac{F_z}{F}\,. \qquad (123)$$

Друга задача динаміки (обернена, основна)

Знаючи масу точки m, сили, що діють на точку, а також початкове положення (X_0, Y_0, Z_0) і початкову швидкість (X_0', Y_0', Z_0'), **в*изначити*** закон руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Розв'язання другої задачі динаміки здійснюється методом подвійного *інтегрування* за часом диференційних рівнянь при відомих початкових умовах.

1 Складання диференційних рівнянь у вигляді (формули 120)

$$m \cdot \ddot{x} = F_X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m \cdot \ddot{y} = F_Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m \cdot \ddot{z} = F_Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

2 Інтегрування диференційних рівнянь руху двічі за часом.

3 Визначення постійних інтегрування за початковими умовами

$$t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0,$$

де t_0 – початковий момент часу, x_0, y_0, z_0 - початкові координати, $\dot{x}_0 = \frac{dx}{dt} = v_{0x}$, $\dot{y}_0 = \frac{dy}{dt} = v_{0y}$, $\dot{z}_0 = \frac{dz}{dt} = v_{0z}$ - проекції початкової швидкості $\overline{v_0}$.

4 Отримання рівнянь руху точки:

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

3.3 Коливальний рух матеріальної точки

Види коливальних рухів матеріальної точки

Коливальний рух матеріальної точки М відбувається за умови, коли на точку, відхилену від стану спокою О, діє сила $\overline{P}$, що намагається повернути точку в те саме положення.

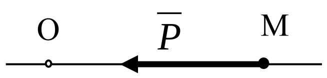


Рисунок 126

Сила $\overline{P}$, яка намагається повернути матеріальну точку М в положення рівноваги О, називається **відновлюючою силою** (рисунок 126).

Коливальним рухом називається рух, який характеризується багаторазовим проходженням положення рівноваги.

Види коливального руху матеріальної точки:

1) **вільні коливання**, які створюються тільки під дією *відновлюючої сили;*

2) вільні коливання, які створюються під дією *відновлюючої сили* та *сили опору середовища* (**затухаючі** коливання);

3) **вимушені коливання**, які створюються під дією *відновлюючої сили* та сили періодичного характеру, яка називається *збуреною силою*;

4) **вимушені коливання**, які створюються під дією *відновлюючої сили, збуреної сили* та *сили опору середовища*.

Незважаючи на те, що коливання, які розглядаються в різних галузях, наприклад механіці, радіотехніці, акустиці й такому іншому, відрізняються між собою за фізичною природою, основні закони вони мають однакові.

3.3.1 Вільні коливання матеріальної точки

Матеріальна точка М рухається прямолінійно вздовж осі *OX* під дією тільки **відновлюючої сили**, яка пропорційна відхиленню точки від зрівноваженого положення

$$\overline{P} = c \cdot \overline{OM} \;, \qquad (124)$$

де c – **постійний коефіцієнт пропорційності** (коефіцієнт пружності).

Прикладом відновлюючої сили може бути сила пружності, або сила тяжіння.

Проекція відновлюючої сили $\overline{P}$ на вісь OX (рисунок 127)

$$P_x = -c \cdot x \;. \qquad (125)$$

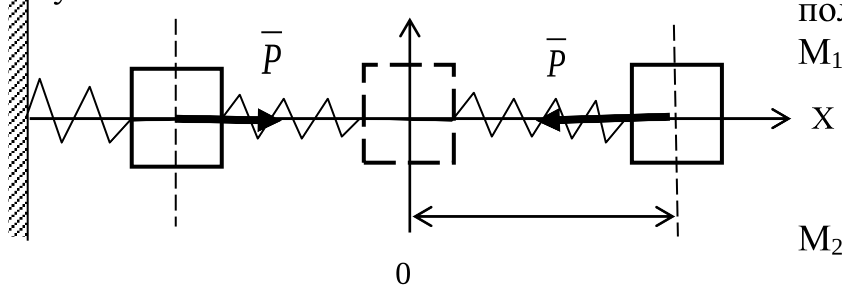


Рисунок 127

На рисунку 127 положення точки М:
М1(пружина розтягнута)

$$Px = -c \cdot x \,;$$

М2 (пружина стиснута)

$$Px = c \cdot x \,.$$

Закон руху точки можна знайти, складаючи диференційне рівняння на основі (120): $m \cdot \ddot{x} = \sum_{n=1}^{k} F_{nx} = -P_x = -c \cdot x$, потім розділити на масу і перенести складові рівняння: $\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$.

Диференційне рівняння вільних коливань

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0 \,, \qquad (126)$$

де $\frac{c}{m} = k^2$.

Загальне рішення рівняння

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \,. \qquad (127)$$

C_1 і C_2 - постійні інтегрування, якщо замість постійних ввести a та α, такі що $C_1 = a \cdot cos\alpha$ та $C_2 = a \cdot \sin\alpha$, то буде отримано $x = a \cdot (\sin kt \cdot \cos\alpha + \cos kt \cdot \sin\alpha)$ або **амплітудне рішення**

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha)\,. \tag{128}$$

Коливання, які відбуваються за законом (128), є **гармонійними коливаннями** (рисунок 128).

Швидкість точки

$$\dot{x} = ak \cdot \cos(kt + \alpha)\,. \tag{129}$$

Власна, або кругова (циклічна) частота k - величина, яка визначає число коливань матеріальної точки за 2π коливань,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,. \tag{130}$$

Період коливань *T* – проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання (рисунок 128),

$$T = \frac{2\pi}{k}\,. \tag{131}$$

Амплітуда коливань a – величина, яка дорівнює найбільшому відхиленню точки від центра коливань (рисунок 128). Визначається за початковими умовами ($t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$) та дорівнює

$$a = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0^2}{k})}\,. \tag{132}$$

Фаза коливань - $(kt + \alpha)$.

Початкова фаза α визначає фазу початку коливань (рисунок 128), відповідає початковим умовам ($t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$)

$$tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \qquad (133)$$

Початкове положення точки (рисунок 128)

$$x_0 = a \cdot \sin\alpha. \qquad (134)$$

Графік вільних коливань

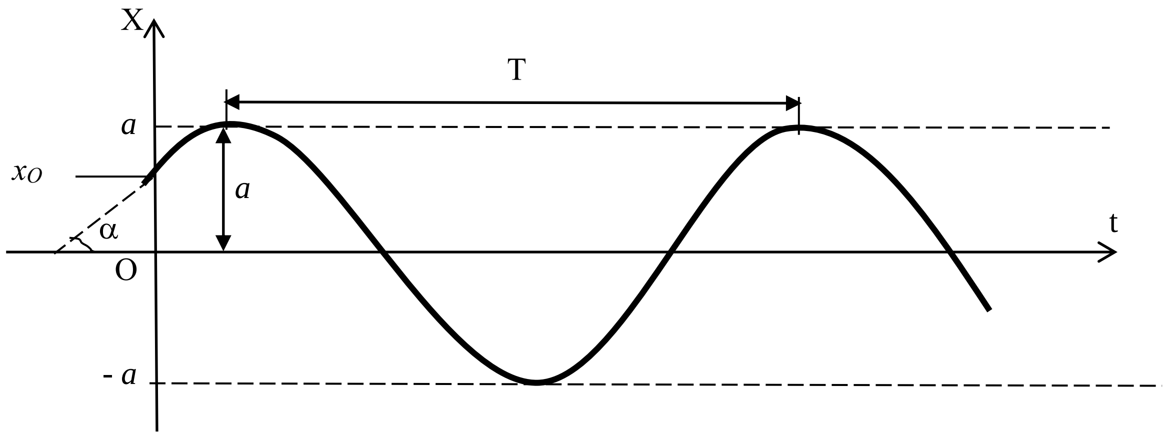


Рисунок 128

Висновки: 1) амплітуда вільних коливань - величина постійна;
2**)** амплітуда та початкова фаза *залежать* від початкових умов;
3) частота та період вільних коливань матеріальної точки залежать тільки від маси точки m та від коефіцієнта c, який характеризує відновлюючу силу, та *не залежать* від початкових умов руху, тобто k і Т є незмінними характеристиками даної коливальної системи.

Вплив постійної сили на вільні коливання точки

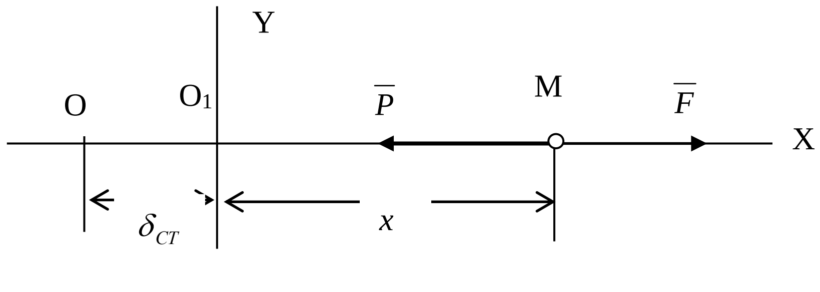


Рисунок 129

На точку М, окрім відновлюючої сили $\bar{P}$, спрямованої до центру О, діє щей постійна за модулем та напрямком сила $\bar{F}$ (рисунок 129). Величина сили пропорційна відстані від центра ОМ (124) $P_x = c \cdot OM = -c \cdot x$. В такому випадку положенням рівноваги точки М буде O_1, розташоване на відстані $OO_1 = \delta_{CT}$. Величина δ_{CT} - **статистичне відхилення** точки ,визначається рівнянням $c \cdot \delta_{CT} = F$ або

$$\delta_{CT} = \frac{F}{c}. \qquad (135)$$

Якщо прийняти центр O_1 за початок відліку та спрямувати координатну вісь O_1x в бік дії сили $\bar{F}$, то $P_x = -c(x + \delta_{CT})$, $F_x = F$. Диференційне рівняння руху з врахуванням $F = c \cdot \delta_{CT}$ можна записати як $m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x$, або $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$, тобто рівняння збігається з (126) рівнянням вільних коливань.

Таким чином, постійна сила $\bar{F}$ не змінює характеру коливань, що здійснюються під дією відновлюючої сили $\bar{P}$, а тільки зміщує центр коливань в бік дії постійної сили $\bar{F}$ на величину статичного відхилення.

Період коливань при наявності постійної сили $\bar{F}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{F} \cdot \delta_{CT}} \ . \qquad (136)$$

Тобто період коливань пропорційний кореню квадратному від статичного відхилення.

Якщо як постійну силу розглядати силу ваги $F = mg$, то має місце **коливання вантажу на вертикальній пружині**, тобто період визначається

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{CT}}{g}} \ . \qquad (137)$$

3.3.2 Затухаючі коливання матеріальної точки

Вільні коливання матеріальної точки являють собою ідеальний випадок. Матеріальна точка, яка здійснює коливальний рух у реальних умовах, зазнає опору руху, тобто знаходиться під дією не тільки **відновлюючої сили** $\overline{P}$, спрямованої до центра коливань, а і **сили опору** $\overline{R}$, яка завжди спрямована в бік, протилежний напрямку руху точки (рисунок 130).

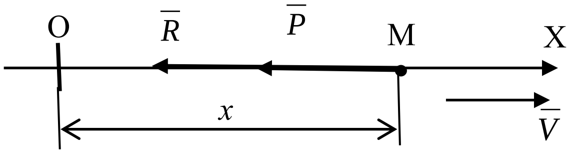


Рисунок 130

Сила опору пропорційна швидкості руху точки

$$\overline{R} = \lambda \cdot \overline{V} = \lambda \cdot \overline{\dot{x}},$$

$$P_X = -c \cdot x, \quad R_X = -\lambda \cdot \dot{x}.$$

λ - **коефіцієнт пропорційності,** що характеризує опір середовища та чисельно дорівнює силі опору при швидкості руху точки, яка дорівнює одиниці.

Диференційне рівняння затухаючих коливань

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0, \qquad (138)$$

де k - **власна частота** (частота вільних коливань), що визначається за формулою (130): $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$,

n - **коефіцієнт затухання**, який визначається як $n = \dfrac{\lambda}{2m}$ і характеризує опір середовища.

Величини k та n мають однакові одиниці вимірювання (1/с), що дозволяє їх порівнювати.

Вигляд загального рішення диференційного рівняння залежить від співвідношення коефіцієнтів n та k.

1 Випадок малого опору $n < k$ (опір, порівняно з відновлюючою силою, малий).

Загальне рішення диференційного рівняння (138) -

$$x = e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)$$

та амплітудне рішення – **закон затухаючих коливань**

$$x = a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \qquad (139)$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ **- частота затухаючих коливань.**

Амплітуда a та початкова фаза α є постійними інтегрування і визначаються за початковими умовами.

Амплітуда затухаючих коливань ($a \cdot e^{-nt}$) – найбільше відхилення точки від положення рівноваги під час кожного коливання (e^{-nt} - **декремент затухання**). Величина $x = OM$ з плином часу зменшується, спрямовуючись до нуля. Графік коливань (рисунок 131) показує, що лінія знаходиться між кривими $x = a \cdot e^{-nt}$ та $x = -a \cdot e^{-nt}$, тому що $\sin(k_1 t + \alpha)$ за модулем не перевищує одиницю. Розмах коливань буде зменшуватись за законом геометричної прогресії.

Період затухаючих коливань T_1 – проміжок часу, який дорівнює періоду $\sin(k_1 t + \alpha)$, коли відбувається одне повне коливання

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - (\frac{n}{k})^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - (\frac{n}{k})^2}} \approx T(1 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{k^2}), \qquad (140)$$

де $T = \frac{2\pi}{k}$ - період вільних коливань. Формула (139) свідчить, що $T_1 > T$, тобто при наявності опору період коливань збільшується.

Однак, якщо **опір дуже малий** ($n \langle\langle k$), то величиною $\frac{n^2}{k^2}$ (140) порівняно з одиницею можна знехтувати, вважаючи $T_1 \approx T$.

Графік затухаючих коливань

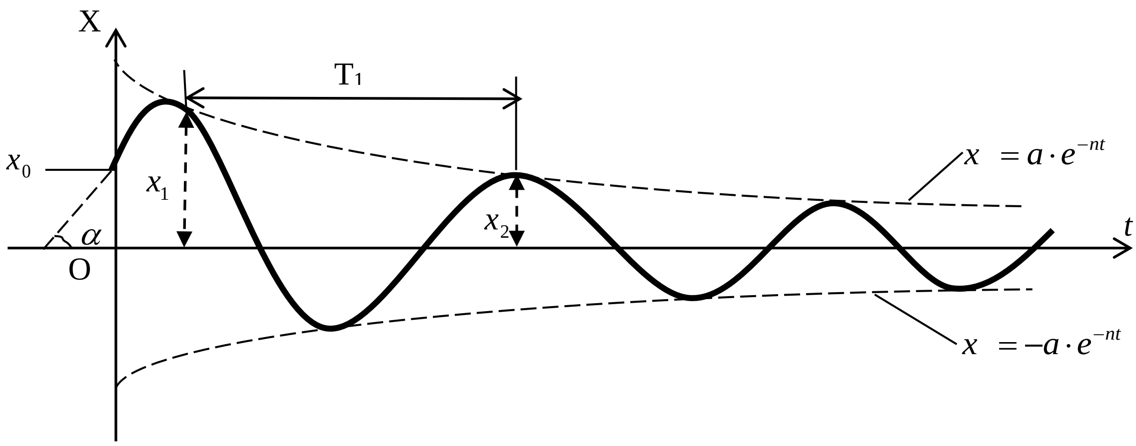


Рисунок 131

Висновки: Малий опір не суттєво впливає на період коливань, але викликає їх поступове затухання за законом геометричної прогресії;

1) період затухаючих коливань T_1 більший за період вільних коливань T;

2) основний вплив опору на коливальний рух матеріальної точки - це зменшення амплітуди коливань, тобто затухання.

2 Випадок відсутності опору $n=0$ – призводить до вільних коливань матеріальної точки.

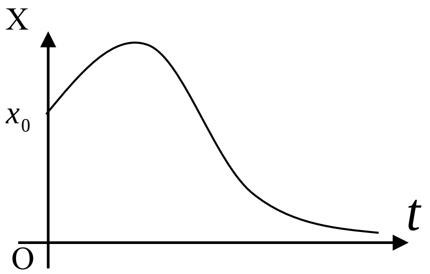
3 Випадок великого опору $n \geq k$ (опір порівняно з відновлюючою силою великий) призводить рух матеріальної точки до втрати коливального характеру, до **аперіодичного руху** (рисунок 132).

Оскільки функція e^{-nt}, де $a > 0$, з плином часу монотонно зменшується, спрямовуючись до нуля, то рух точки не буде коливальним і під дією відновлюючої сили точка буде поступово наближатись до стану рівноваги (положення коли x=0).

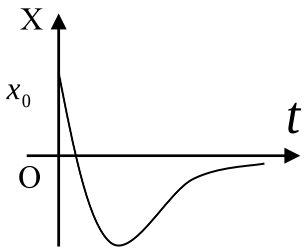
Закон руху, який є рішенням диференційного рівняння (138) при $n > k$**,** відображається функцією гіперболічного синуса, яка не є періодичною,

$$x = a \cdot e^{-nt} sh((\sqrt{n^2 - k^2})t + \alpha). \tag{141}$$

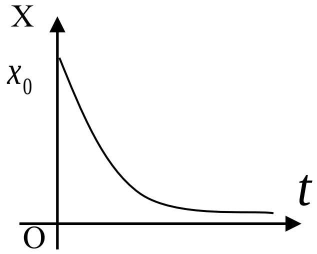
Графік аперіодичного руху точки



$\overline{V_O}$ спрямована за *OX*



$\overline{V_O}$ спрямована протилежно ОХ ($\overline{V_O}$ великої величини)



$\overline{V_O}$ спрямована протилежно ОХ ($\overline{V_O}$ малої величини)

Рисунок 132

Закон руху, який є рішенням диференційного рівняння (138) при $n = k$, також є аперіодичною функцією

$$x = e^{-nt}(x_O + (\dot{x}_O + nx_O)t)\,. \qquad (142)$$

3.3.3 Вимушені коливання матеріальної точки

Вимушені коливання матеріальна точка здійснює, коли на неї, поряд з **відновлюючою силою** $\overline{P}$, діє **збурена сила** $\overline{Q}$, яка періодично змінюється за часом.

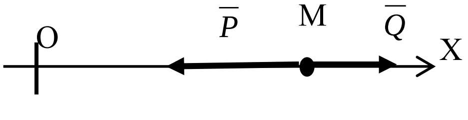


Рисунок 133

Проекція **збуреної сили** на вісь *OX (*рисунок 133):

$$Qx = H\sin(\,pt + \delta)\,,$$

де Н – **амплітуда** збуреної сили;

р – **частота збуреної сили**, яка дорівнює числу повних циклів змінення збуреної сили за 2π секунд;

$\tau = \dfrac{2\pi}{p}$ - **період** збуреної сили;

$(pt + \delta)$ - **фаза** збуреної сили, δ - **початкова фаза** збуреної сили.

Диференційне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = h \cdot \sin(pt + \delta), \qquad (143)$$

де $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - **власна частота** (частота вільних коливань); $h = \dfrac{H}{m}$.

Загальне рішення диференційного рівняння для випадку, коли $p \neq k$,

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin(pt + \delta)$$

та амплітудне рішення – **закон вимушених коливань:**

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin(pt + \delta), \qquad (144)$$

де $\dfrac{h}{(k^2 - p^2)} = A$ - **амплітуда вимушених коливань**,

a і α- постійні інтегрування, які визначаються за початковими умовами.

Висновки

1 При одночасній дії відновлюючої $\overline{P}$ та збуреної $\overline{Q}$ сил матеріальна точка створює складний коливальний рух, який є результатом накладання 1) *вільних (власних) коливань* $(a \cdot \sin(kt + \alpha))$ з амплітудою a (яка залежить від початкових умов) та частотою k та 2) *вимушених коливань* $(\dfrac{h}{(k^2 - p^2)} \sin(pt + \delta))$ з амплітудою A (яка не залежить від початкових умов) та частотою p, яка збігається з частотою збуреної сили.

2 Складова $(\dfrac{h}{(k^2 - p^2)} \sin(pt + \delta))$, яка визначає вимушені коливання, не містить постійних інтегрування, тобто вимушені коливання не залежать від початкових умов руху матеріальної точки.

Завдяки наявності будь-якого опору власні коливання будуть затухати. Основне значення мають вимушені коливання.

Частота p вимушених коливань збігається з частотою збуреної сили. Амплітуда A, поділена на k^2, може бути подана у вигляді

$$A = \frac{h}{(k^2 - p^2)} = \frac{\delta_0}{\left|1 - (\frac{p}{k})^2\right|}, \qquad (145)$$

де $\delta_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{H}{c}$ - статичне відхилення точки під дією збуреної сили $\overline{Q}$.

Амплітуда А залежить від співвідношення частоти p збуреної сили власної частоти коливань k. Графік цієї залежності показано на рисунку 137 кривою залежності А від p/k при $h = 0$.

Від співвідношення між частотою збуреної сили p та власною частотою k залежать вимушені коливання з різними амплітудами.

1) $p = 0$ ($p \langle\langle k$) амплітуда дорівнює статичному відхиленню δ_0 (або наближається до цієї величини);

2) $p \to k$ амплітуда А стає дуже великою;

3) $p \rangle\rangle k$ амплітуда А практично наближується до нуля.

У випадку, коли $p = k$, тобто частота збуреної сили дорівнює частоті власних коливань, виникає **резонанс**.

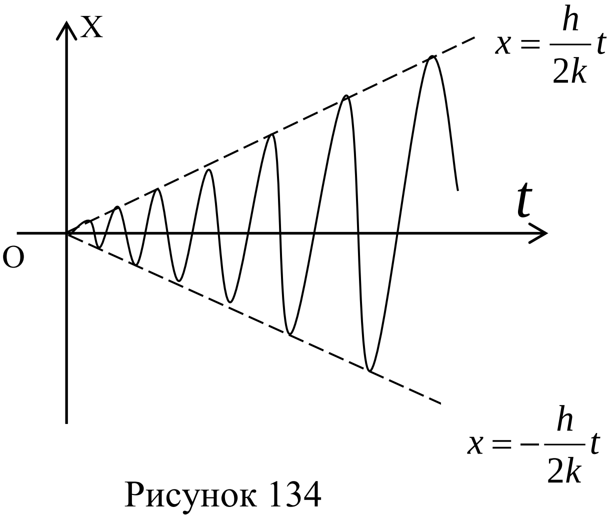


Рисунок 134

Амплітуда коливань при резонансі зростає пропорційно часу до нескінченності (рисунок 134). Зсув фази при резонансі дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

У випадку, коли $p \approx k$, тобто частота збуреної сили наближається до частоти власних коливань, виникає явище **биття**. Має місце накладання двох періодичних коливань, близьких за частотою, яке виражається в періодичному зменшенні та збільшенні амплітуди сумарного сигналу. Частота зміни амплітуди сумарного коливання визначається різницею частот складових коливань (рисунок 135).

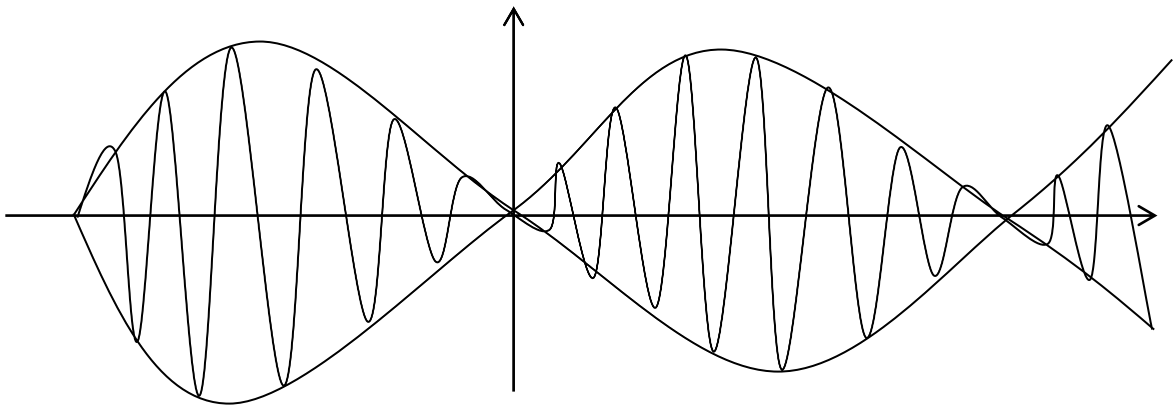


Рисунок 135

3.3.4 Вимушені коливання матеріальної точки під впливом опору

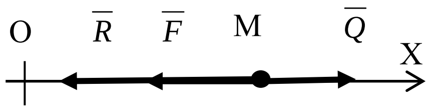


Рисунок 136

На матеріальну точку поряд з відновлюючою $\overline{P}$ та збуреною силою $\overline{Q}$ діє сила опору $\overline{R}$ (рисунок 136).

Диференційне рівняння руху точки

$$x'' + 2n \cdot x' + k^2 \cdot x = h \cdot \sin(pt + \delta). \qquad (146)$$

Загальне рішення диференційного рівняння (146) залежить від співвідношення коефіцієнта затухання n та частоти вільних коливань k.

У випадку **малого опору** $n<k$ амплітудне рішення диференційного рівняння - **закон гармонійного коливального руху**

$$x = a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + A \cdot \sin(pt + \delta - \beta), \tag{147}$$

де **Амплітуда** вимушених коливань при наявності опору;

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} , \tag{148}$$

β - **зсув фази** вимушених коливань щодо фази збуреної сили

$$tg\beta = \frac{2np}{k^2 - p^2} . \tag{149}$$

При одночасній дії відновлюючої сили, збуреної сили та сили опору матеріальна точка створює складний коливальний рух, який є накладанням затухаючих $(a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha))$ та вимушених ($A \cdot \sin(pt + \delta - \beta)$) коливань. Формули (148) і (149) вказують, що амплітуди А і β залежать від власної частоти k, частоти збуреної сили p та коефіцієнта затухання n. Для зручності вводяться коефіцієнти:

$z = \frac{p}{k}$ - коефіцієнт розстроювання, відношення частот,

$h = \frac{n}{k}$ - величина, що характеризує опір,

$\delta_0 = \frac{Q}{c}$ - статичне відхилення точки від положення рівноваги ($x=0$) під дією сили, яка дорівнює максимальному значенню збуреної сили $\overline{Q}$ (135).

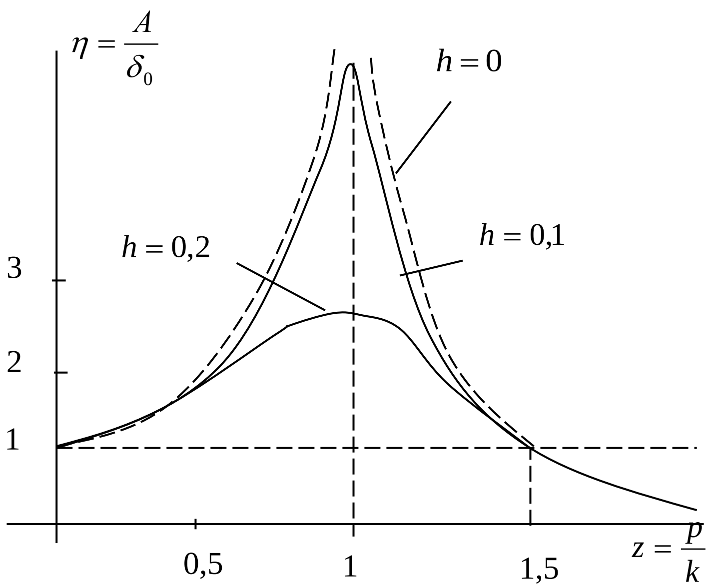
Залежність, показана на рисунку 137, характеризує залежність **коефіцієнта динамічності** $\eta = \frac{A}{\delta_0}$ від **коефіцієнта розстроювання** $z = \frac{p}{k}$.

Коефіцієнт динамічності $\eta = \dfrac{A}{\delta_0}$ - відношення амплітуди вимушених коливань A до величини статичного відхилення δ_0.

$$\eta = \frac{\dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}}{\dfrac{h}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{p}{k})^2)^2 + 4(\frac{n}{k})^2(\frac{p}{k})^2}}. \qquad (150)$$

Коефіцієнт динамічності η (рисунок 137) залежить:

- від **коефіцієнта розстроювання** $z = p/k$ - відношення частот;
- від величини, що характеризує опір n/k.



При $p = 0 \div k$ η зростає до $1 \div \infty$.

При подальшому зростанні p η зменшується: $\infty \div 0$.

При $p = k$ $\eta = \infty$ виникає резонанс (рисунок 134).

Рисунок 137

Загальні властивості вимушених коливань:

1) амплітуда вимушених коливань від початкових умов не залежить;

2) вимушені коливання при наявності опору не затухають;

3) частота вимушених коливань дорівнює частоті збуреної сили та від характеристик коливальної системи не залежить (збурена сила надає системі своєї частоти коливань);

4) навіть при малій збуреній силі можна отримати інтенсивні вимушені коливання, якщо опір малий, а частота p наближена до k (резонанс);

5) навіть при великих значеннях збуреної сили вимушені коливання можна зробити нескінченно малими, якщо частота p буде набагато перевищувати k.

3.4 Вступ до динаміки механічної системи та твердого тіла

Механічною системою матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, в якій положення та рух кожної точки (або тіла) залежить від положення та руху решти.

Матеріальне тіло розглядається як система матеріальних точок (часток), які утворюють це тіло.

Класифікація сил, що діють на механічну систему

Зовнішніми $\overline{F}_n^e$ називають такі сили, які діють на точки або тіла механічної системи з боку точок або тіл, які не належать даній системі.

Внутрішніми $\overline{F}_n^i$ називають такі сили, які діють на точки або тіла механічної системи з боку точок або тіл тієї ж системи, тобто сили, з якими точки або тіла даної системи взаємодіють між собою.

Зовнішні та внутрішні сили системи у свою чергу можуть бути **активними** та **реактивними**.

Властивості внутрішніх сил

1 Геометрична сума (головний вектор) всіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю

$$\sum_{n=1}^{k} \overline{F_n^i} = 0. \tag{151}$$

2 Сума моментів (головний вектор) всіх внутрішніх сил системи відносно будь – якого центра або осі дорівнює нулю

$$\sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n^i}) = 0, \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{k} M_X(\overline{F_n^i}) = 0, \ \sum_{n=1}^{k} M_Y(\overline{F_n^i}) = 0, \ \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n^i}) = 0. \tag{152}$$

3.4.1 Маса системи. Центр мас

Маса системи дорівнює алгебраїчній сумі мас всіх точок або тіл системи

$$M = \sum_{n=1}^{k} m_n, \tag{153}$$

де М – маса механічної системи;

m_n - маса n- ї точки системи.

В однорідному полі тяжіння, для якого прискорення вільного падіння постійне ($\overline{g} = const$), вага будь – якої частки тіла пропорційна її масі. Тому розподіл мас у тілі можна визначити за положенням його **центра ваги:**

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot g \cdot x_n}{m \cdot g} = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot x_n}{m}, \\ Y_c &= \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot g \cdot y_n}{m \cdot g} = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot y_n}{m}, \\ Z_c &= \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot g \cdot z_n}{m \cdot g} = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot z_n}{m}. \end{aligned} \tag{154}$$

Геометрична точка С (x_C, y_C, z_C), координати якої визначають за формулами (154), називають **центром мас** або **центром інерції** механічної системи.

Положення центра мас можна визначити його радіусом – вектором $\overline{r_C}$:

$$\overline{r_C} = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot \overline{r_n}}{m}, \qquad (155)$$

де $\overline{r_n}$ - радіус – вектор точки системи.

3.4.2 Момент інерції твердого тіла. Радіус інерції

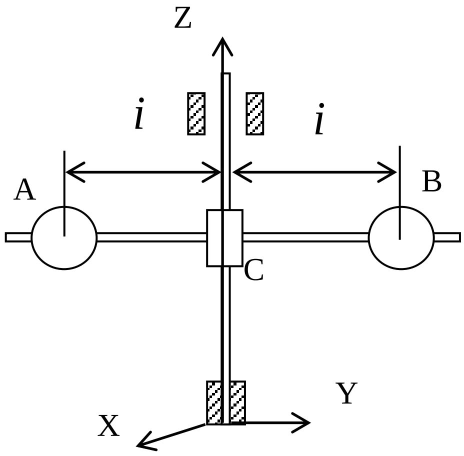


Рисунок 138

Розглядається обертання механічної системи навколо нерухомої осі OZ, яка проходить через центр мас C (рисунок 138).

Характеристикою розподілу мас є **момент інерції** J_Z.

Момент інерції тіла відносно осі J_Z (осьовий момент інерції) – скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас всіх точок тіла (системи) на квадрати їх відстаней i до осі:

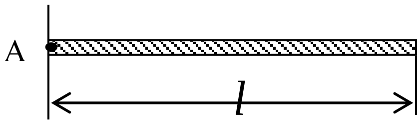
$$J_Z = \sum_{n=1}^{k} (m_n \cdot i_n^2). \qquad (156)$$

i - **радіус інерції** тіла або точки тіла - відстань від точки до осі обертання.

Момент інерції є **мірою інертності** тіла при обертальному русі (**маса** – при поступальному).

Одиницею вимірювання моменту інерції вважають кілограм на метр в квадраті (кг м^2).

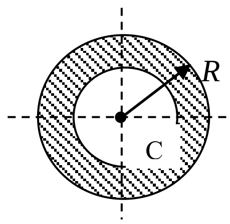
Моменти інерції однорідних тіл



1 Тонкий стержень довжиною l маси m (рисунок 139)

Рисунок 139

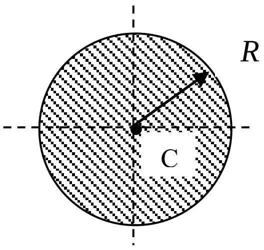
$$J_A = \frac{ml^2}{3}. \qquad (157)$$



2 Тонке кругле кільце радіуса R і маси m (рисунок 140)

$$J_C = mR^2. \qquad (158)$$

Рисунок 140



3 Кругла пластина (або циліндр) радіуса R і маси m (рисунок 141)

$$J_C = \frac{mR^2}{2}. \qquad (159)$$

Рисунок 141

Теорема Гюйгенса

Момент інерції тіла відносно осі дорівнює моменту інерції відносно осі, паралельної даній, яка проходить через центр мас тіла, складений з добутком маси всього тіла на квадрат відстані між осями (рисунок 142):

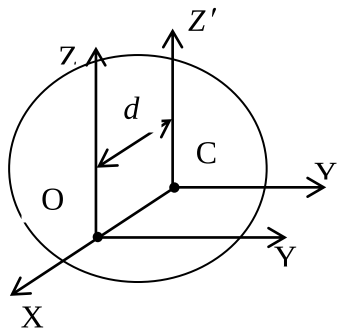


Рисунок 142

$$J_{OZ} = J_{CZ'} + Md^2 . \qquad (160)$$

3.5 Загальні теореми динаміки

3.5.1 Теорема про рух центра мас

Диференційні рівняння руху механічної системи

Система n матеріальних точок M$_1$, M$_2$,.. M$_n$, маса кожної точки відповідно дорівнює m_n, знаходиться під дією прикладених до точок зовнішніх та внутрішніх сил. Рівнодійні сил відповідно $\overline{F}_n^e$ і $\overline{F}_n^i$.

Основне рівняння динаміки для кожної точки

$$m\overline{a_n} = m_n \frac{d^2\overline{r_n}}{dt^2} = \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i} . \qquad (161)$$

Для механічної системи n матеріальних точок буде отримано n **диференційних рівнянь руху системи у векторному вигляді:**

$$m_1\overline{a_1} = m_1\frac{d^2\overline{r_1}}{dt^2} = \overline{F_1^e} + \overline{F_1^i},$$
$$m_2\overline{a_2} = m_2\frac{d^2\overline{r_2}}{dt^2} = \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i}, \qquad (162)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n\overline{a_n} = m_n\frac{d^2\overline{r_n}}{dt^2} = \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i}.$$

3.5.2 Теорема про рух центра мас механічної системи

Теорема:
центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи, до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему,

$$M\overline{a_C} = \sum_{n=1}^{k}\overline{F_n^e}, \qquad (163)$$

де $\overline{a_C}$ - прискорення центра мас механічної системи.

Теорема в проекціях на координатні осі

$$M\cdot\ddot{x} = \sum_{n=1}^{k}\overline{F_{nX}^e}, \quad M\cdot\ddot{y} = \sum_{n=1}^{k}\overline{F_{nY}^e}, \quad M\cdot\ddot{z} = \sum_{n=1}^{k}\overline{F_{nZ}^e}. \qquad (164)$$

Висновки

1 Механічну систему або тверде тіло можна розглядати як матеріальну точку в залежності від характеру її руху, а не від її розмірів.

2 Внутрішні сили не враховуються теоремою про рух центру мас.

3 Теорема про рух центру мас не характеризує обертальний рух механічної системи, а тільки поступальний.

3.5.3 Закон збереження руху центра мас системи

1 Якщо сума зовнішніх сил (головний вектор) постійно дорівнює нулю $\sum_{n=1}^{k}\overline{F_n^e}=0$, то центр мас механічної системи знаходиться в спокої або рухається рівномірно і прямолінійно

$$\overline{a_C}=0\,,\quad \overline{V_C}=const\,. \tag{165}$$

2 Якщо сума проекцій всіх зовнішніх сил на будь – яку вісь дорівнює нулю $\sum_{n=1}^{k}F_{nX}^e=0$, то проекція швидкості центру мас системи на ту ж вісь величина стала

$$x_C''=a_{CX}=0\,,\quad x_C'=V_{CX}=const\,. \tag{166}$$

3.6 Теорема про зміну кількості руху

3.6.1 Кількість руху

Кількість руху матеріальної точки – векторна величина $(m\cdot\overline{V})$, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості.

Вектор кількості руху точки $(m\cdot\overline{V})$ спрямований за вектором швидкості точки, тобто по дотичній до траєкторії.

Одиницею вимірювання кількості руху є кілограм на метр за секунду (кг м/с).

Кількість руху механічної системи – векторна величина $\overline{K}$, що дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількостей руху всіх точок системи

$$\overline{Q}=\sum_{n=1}^{k}m_n\cdot\overline{V_n}\ , \tag{167}$$

або **кількість руху системи** дорівнює добутку маси всієї системи на швидкість її центра мас

$$\overline{Q} = M \cdot \overline{V_C} \,. \tag{168}$$

Коли тіло (або система) рухається так, що її центр мас нерухомий $\overline{V_C} = 0$, то кількість руху тіла дорівнює нулю $\overline{Q} = 0$ (приклад - обертання тіла навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас тіла).

Кількість руху $\overline{Q}$ характеризує тільки поступальний рух системи (разом з центром мас), тобто якщо рух тіла складний, то $\overline{Q}$ не буде характеризувати обертальну частину руху при обертанні навколо центра мас.

3.6.2 Імпульс сили

Імпульс сили характеризує дію сили за деякий проміжок часу.

Елементарний імпульс сили - це векторна величина $\overline{dS}$, яка дорівнює добутку вектора сили $\overline{F}$ на елементарний проміжок часу dt,

$$\overline{dS} = \overline{F} \cdot dt \,. \tag{169}$$

Спрямований вектор $\overline{dS}$ за вектором сили $\overline{F}$.

Імпульс $\overline{S}$ сили $\overline{F}$ **за кінцевий проміжок часу** t_1 визначається як інтегральна сума відповідних елементарних імпульсів

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F} \cdot dt \,. \tag{170}$$

Проекції імпульсу сили на осі координат

$$S_X = \int_0^{t_1} F_X \cdot dt\,, \qquad S_Y = \int_0^{t_1} F_Y \cdot dt\,, \qquad S_Z = \int_0^{t_1} F_Z \cdot dt\,. \qquad (171)$$

Імпульс постійної сили $\overline{F}$ $(\overline{F} = const)$ за проміжок часу t_1

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot t_1\,. \qquad (172)$$

Імпульс змінних сил $F(t)$ визначається геометрично, тобто величиною площі під лінією функції сили.

Одиницею вимірювання імпульсу сили є кілограм на метр за секунду ($\dfrac{кг \cdot м}{с}$).

3.6.3 Теорема про зміну кількості руху

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

(у диференціальній формі): похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі сил, що діють на точки,

$$\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}\,. \qquad (173)$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

(в інтегральній формі): зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, прикладених до точки за той же проміжок часу,

$$m\overline{V_1} - m\overline{V_0} = \sum_{n=1}^{k} \overline{S_n}\,. \qquad (174)$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи

(у диференціальній формі): похідна за часом від кількості руху системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему,

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F^e{}_n} \ . \qquad (175)$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи

(в інтегральній формі): зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів, що діють на систему зовнішніх сил, за той же проміжок часу

$$\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum_{n=1}^{k} \overline{S^e{}_n} \ . \qquad (176)$$

У проекціях на осі координат:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum_{n=1}^{k} S_{nX}^{e} \ ,$$

$$Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum_{n=1}^{k} S_{nY}^{e} \ , \qquad (177)$$

$$Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum_{n=1}^{k} S_{nZ}^{e} \ .$$

Теорема дозволяє відкинути із розгляду наперед невідомі внутрішні сили.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи та теорема про рух центру мас є двома різними формами одної теореми.

3.6.4 Закон збереження кількості руху системи

1 Якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю $\sum_{n=1}^{k} \overline{F^e{}_n} = 0$, то вектор кількості руху системи буде постійним за напрямком та за модулем.

$$\overline{Q} = const \ . \qquad (178)$$

2 Якщо сума проекцій всіх зовнішніх сил, що діють на будь – яку довільну вісь, дорівнює нулю $\sum_{n=1}^{k} F_{nX}^{e} = 0$, то проекція кількості руху на цю вісь є величиною постійною

$$Q_X = const . \tag{179}$$

Закони збереження свідчать, що внутрішні сили не можуть змінити сумарну кількість руху системи.

3.7 Теорема про зміну моменту кількості руху

3.7.1 Момент кількості руху матеріальної точки

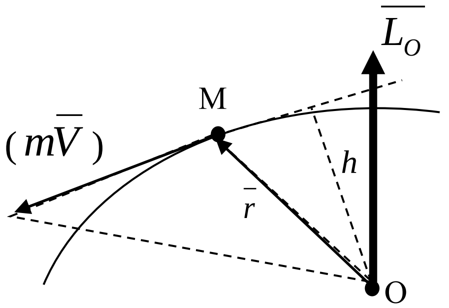


Рисунок 143

Момент кількості руху точки М відносно центру О – це вектор $\overline{L_O}$, який спрямований перпендикулярно площині, що проходить через вектор кількості руху $(m\overline{V})$ та центр О в той бік, звідки вектор $(m\overline{V})$ відносно центру О видно спрямованим проти стрілки годинника (рисунок 143) і дорівнює

$$\overline{L_O} = \bar{r} \times \overline{mV} . \tag{180}$$

Модуль вектора $\overline{L_O}$ дорівнює

$$L_O = m \cdot V \cdot h , \tag{181}$$

де h - плече вектора $(m\overline{V})$ відносно центру О.

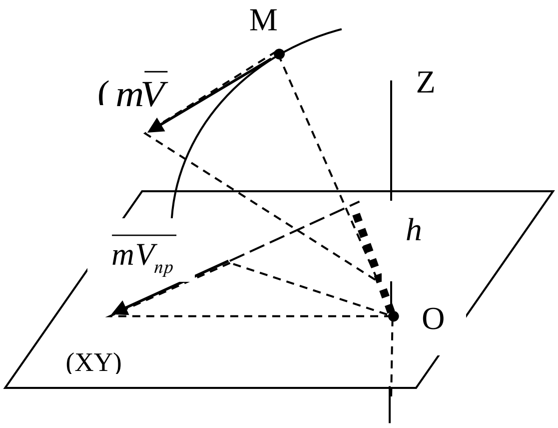


Рисунок 144

Момент кількості руху L_Z **точки М відносно осі** OZ – це алгебраїчна величина, що дорівнює добутку проекції вектора $(m\overline{V})$ на площину, перпендикулярну осі OZ, на плече цієї проекції відносно точки перетину осі з площиною (рисунок 144)

$$L_Z = \pm m V_{np} h, \tag{182}$$

де mV_{np} - проекція вектора $m\overline{V}$ на площину (XY);

h - плече $\overline{mV_{np}}$ відносно точки О.

Аналітичний вираз моментів кількості руху точки відносно осей координат

$$L_X = y \cdot mV_Z - z \cdot mV_y, \quad L_Y = z \cdot mV_X - x \cdot mV_Z, \quad L_Z = x \cdot mV_Y - y \cdot mV_X, \tag{183}$$

де x, y, z - координати точки М, яка рухається;

V_X, V_Y, V_Z - проекції швидкості точки на відповідні координатні осі.

Теорема (відносно центру)
похідна за часом від момента кількості руху матеріальної точки відносно деякого нерухомого центра дорівнює геометричній сумі моментів сил, що діють на точку, відносно того ж центру

$$\frac{d\overline{L_O}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M}_O(\overline{F_n}). \tag{184}$$

Теорема (відносно осі)
похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякої нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, що діють на точку, відносно цієї ж осі

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n}). \qquad (185)$$

3.7.2 Закони збереження моменту кількості руху

1 Якщо лінія дії рівнодійної прикладених до матеріальної точки сил увесь час проходить через деякий нерухомий центр, тобто $\sum_{n=1}^{k} \overline{M}_O(\overline{F_n}) = \frac{d\overline{L_O}}{dt} = 0$, то момент кількості руху матеріальної точки залишається постійним

$$\overline{L_O} = const. \qquad (186)$$

2 Якщо момент рівнодійної прикладених до матеріальної точки сил відносно деякої осі весь час дорівнює нулю $\sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n}) = \frac{dL_Z}{dt} = 0$, то момент кількості руху матеріальної точки відносно цієї ж осі залишається постійним

$$L_Z = const. \qquad (187)$$

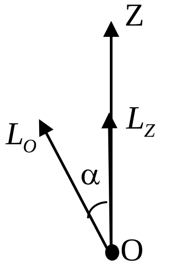
3.7.3 Кінетичний момент

Кінетичним моментом, або **головним моментом кількостей руху** механічної системи відносно центру називають вектор, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху всіх матеріальних точок системи відносно цього ж центра

$$\overline{L_O} = \sum_{n=1}^{k} \overline{L_{On}} = \sum_{n=1}^{k} (\overline{r}_n \times \overline{m_n V_n}). \qquad (188)$$

Кінетичним моментом або головним моментом кількостей руху механічної системи відносно осі називають алгебраїчну суму моментів кількостей руху всіх матеріальних точок відносно тієї ж осі:

$$L_Z = \sum_{n=1}^{k} L_{nZ} \ . \qquad (189)$$



Проекція кінетичного моменту механічної системи відносно центра O на вісь, яка проходить через цей центр, дорівнює кінетичному моменту системи відносно цієї осі (рисунок 145)

$$L_Z = L_O \cdot \cos(\overline{L_O}, \overline{k}) . \qquad (190)$$

Рисунок 145

Теорема про зміну головного моменту кількостей руху системи (відносно центра) – теорема моментів:
похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякого нерухомого центру геометрично дорівнює головному моменту зовнішніх сил, що діють на цю систему, відносно того ж центра

$$\frac{\overline{dL_O}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M}_O(\overline{F_n^{\,e}}) = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_{nO}^{e}} = \overline{M_O^{e}} \ . \qquad (191)$$

У проекціях на осі координат

$$\frac{dL_X}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nX}^{e} = M_X^{e}, \quad \frac{dL_Y}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nY}^{e} = M_Y^{e}, \quad \frac{dL_Z}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nZ}^{e} = M_Z^{e}, \qquad (192)$$

де L_X, L_Y, L_Z - кінетичні моменти механічної системи відносно координатних осей;

M_X^e, M_Y^e, M_Z^e - головні моменти зовнішніх сил відносно цих осей.

Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи
(відносно осі):
похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякої осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно цієї ж осі

$$\frac{dL_X}{dt} = M_X^e . \qquad (193)$$

Теорема моментів має велике значення при вивченні обертального руху тіл та дозволяє не враховувати наперед невідомі внутрішні сили.

3.7.4 Закони збереження кінетичного моменту механічної системи

1 Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякого нерухомого центру весь час дорівнює нулю $\frac{d\overline{L_O}}{dt} = \overline{M_O^e} = 0$, то кінетичний момент механічної системи відносно цього центра - величина стала

$$\overline{L_O} = const . \qquad (194)$$

2 Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої осі дорівнює нулю $\frac{dL_X}{dt} = M_X^e = 0$, то кінетичний момент механічної системи відносно цієї ж осі – величина стала

$$L_X = const . \qquad (195)$$

Внутрішні сили не можуть змінити головний момент кількостей руху системи.

3.7.5 Випадок системи, що обертається

Для системи, що обертально рухається навколо нерухомої осі OZ (або осі, яка проходить через центр мас), кінетичний момент відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції відносно цієї осі на кутову швидкість

$$L_Z = J_Z \cdot \omega. \tag{196}$$

Якщо $\sum_{n=1}^{k} M_{nZ}^{e} = 0$, то $J_Z \cdot \omega = const$, тобто для незмінної системи (абсолютно тверде тіло) $J_Z = const$ та $\omega = const$, тоді кутова швидкість системи постійна.

Диференційне рівняння обертального руху

$$J_Z \cdot \varphi'' = \sum_{n=1}^{k} M_{nZ}, \tag{197}$$

де φ'' - кутове прискорення обертання тіла.

3.8 Теорема про зміну кінетичної енергії

3.8.1 Кінетична енергія системи

Кінетична енергія - це здатність тіла долати перешкоди під час руху.

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості,

$$T = \frac{mV^2}{2}. \tag{198}$$

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина Т, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій всіх точок системи,

$$T = \sum_{n=1}^{k} \frac{m_n V_n^{\,2}}{2}. \tag{199}$$

Кінетична енергія:

- характеризує і поступальний, і обертальний рухи;
- не залежить від напрямку руху точок системи і не характеризує зміну
  цих напрямків;
- характеризує дію і внутрішніх, і зовнішніх сил.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій складових тіл системи

$$T = \sum_{n=1}^{k} T_n . \tag{200}$$

Теорема Кьоніга (про кінетичну енергію системи): кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії центру мас системи, маса якого дорівнює масі системи, і кінетичної енергії системи у її відносному русі відносно центра мас

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \sum_{n=1}^{k} \frac{m_n V_{nr}^2}{2}, \tag{201}$$

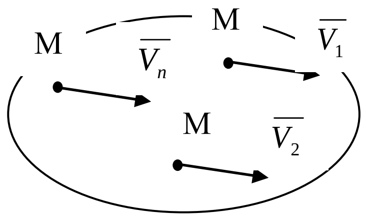
де V_{nr} - відносна швидкість точки.

Кінетична енергія **залежить** від виду руху тіл системи.

Одиницею кінетичної енергії є джоуль (Дж).

Визначення кінетичної енергії твердого тіла при поступальному, обертальному та плоскому рухах

1 Поступальний рух



При поступальному русі тіла швидкості всіх точок (M_1, M_2,.. M_n) у кожний момент часу геометрично рівні (рисунок 146).

Кінетична енергія поступального руху

$$T = \frac{mV^2}{2}. \qquad (202)$$

Рисунок 146

Як свідчить (182), **мірою інертності** тіла при поступальному русі є **маса тіла**.

2 Обертальний рух

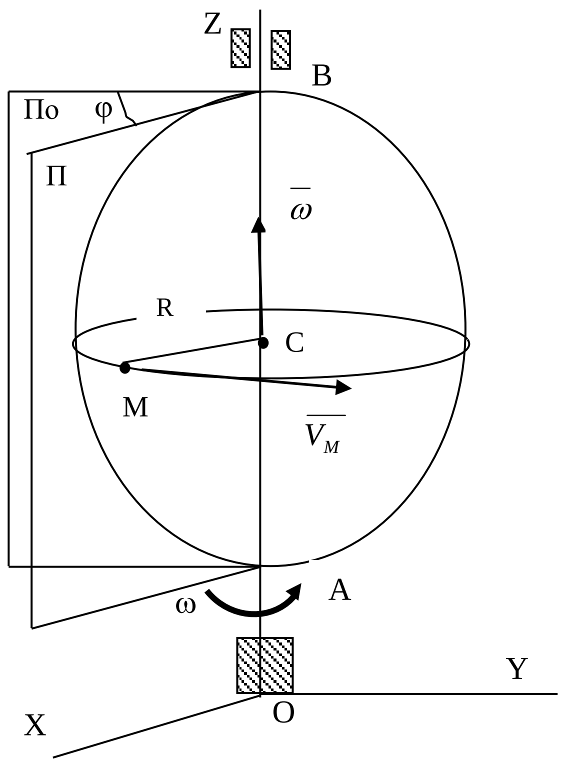


Рисунок 147

Швидкість точки М тіла при обертанні навколо нерухомої осі (рисунок 147) дорівнює

$$V_M = \omega \cdot R_M ,$$

де R_M - відстань від точки М до осі обертання;

ω - кутова швидкість тіла.

Кінетична енергія обертального руху тіла дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості

$$T = \frac{J_Z \cdot \omega^2}{2}. \qquad (183)$$

Кінетична енергія тіла від напрямку обертання тіла не залежить.

Мірою інертності тіла при обертальному русі **є момент інерції** J_z.

3 Плоскопаралельний рух

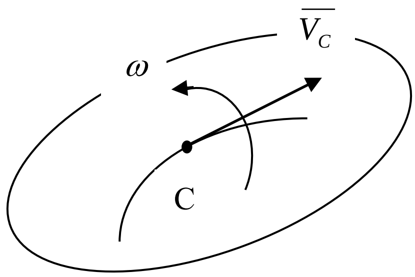


Рисунок 148

Схема плоскопаралельного руху наведена на рисунку 148.

Точка С – центр мас тіла, яка рухається із швидкістю $\overline{V_C}$;

ω - кутова швидкість обертання навколо центру в площині.

Кінетична енергія плоскопаралельного руху тіла

$$T = \frac{M \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi} \cdot \omega^2}{2}, \qquad (204)$$

де $\frac{M \cdot V_C^2}{2}$ - кінетична енергія тіла у поступальному русі разом з центром мас;

$\frac{J_{C\xi} \cdot \omega^2}{2}$ - кінетична енергія в обертанні тіла навколо рухомої осі $C\xi$, яка проходить через центр мас;

$C\xi$ - вісь, яка проходить через центр мас та перпендикулярна базовій площині;

M – маса системи;

V_C - швидкість центру мас;

$J_{C\xi}$ - момент інерції тіла відносно осі $C\xi$;

ω - кутова швидкість обертання навколо осі $C\xi$.

3.8.2 Робота сили

Робота сили характеризує дію сили на тіло при деякому переміщенні та визначає зміну модуля швидкості рухомої точки.

Елементарна робота сили

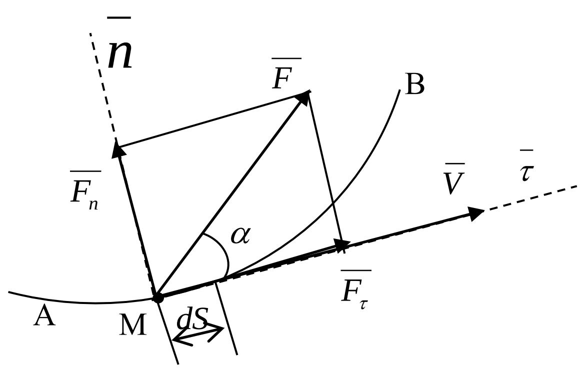


Рисунок 149

Матеріальна точка М маси m рухається вздовж траєкторії під дією сили $\bar{F}$ (рисунок 149). Швидкість точки $\bar{V}$.

Елементарне переміщення точки під дією даної сили - ds (нескінченно мале $ds \to 0$).

Елементарна робота сили визначається як скалярна величина dA, яка дорівнює добутку проекції сили F_τ на дотичну до траєкторії, спрямовану в напрямку руху точки, на нескінченно мале переміщення ds точки, спрямоване вздовж цієї дотичної

$$dA = F_\tau \cdot ds\,. \tag{205}$$

$F_\tau = F \cdot \cos\alpha$ - проекція сили $\bar{F}$ на вектор переміщення та швидкості. Надає точці дотичного прискорення та відповідає за зміну модуля швидкості.

$F_n = F \cdot \sin\alpha$ - проекція сили $\bar{F}$ на вектор внутрішньої нормалі до траєкторії. Надає точці нормального прискорення та відповідає за зміну напрямку вектора швидкості або при невільному русі змінює тиск на зв'язок.

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos\alpha\,. \tag{206}$$

При α=90°, тобто $\bar{F} \perp ds$, робота дорівнює нулю $dA = 0$.

Аналітичний вираз елементарної роботи

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz\,, \qquad (207)$$

де F_X, F_Y, F_Z - проекції сили на осі координат;

dx, dy, dz - елементарні переміщення відносно координатних осей.

Робота сили на кінцевому переміщенні M_1M_0 дорівнює інтегралу вздовж цього переміщення від елементарної роботи

$$A_{(M_1M_0)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds = \int_{M_0}^{M_1} F \cdot \cos\alpha \cdot ds \qquad (208)$$

або

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_X dx + F_Y dy + F_Z dz)\,. \qquad (209)$$

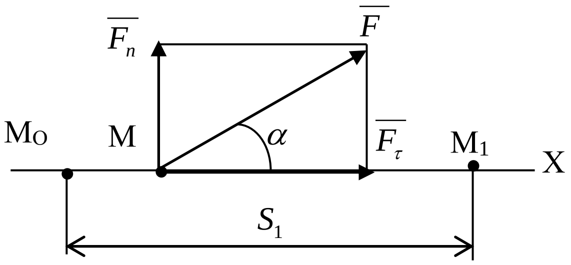


Рисунок 150

Якщо сила $\overline{F} = const$, а точка, до якої сила прикладена, рухається прямолінійно (рисунок 150), тоді

$$F_\tau = F \cdot \cos\alpha = const$$

і робота сили дорівнює

$$A_{(M_1M_0)} = F \cdot s_1 \cdot \cos\alpha\,. \qquad (210)$$

Одиницею вимірювання роботи сили, як і енергії, є джоуль (Дж).

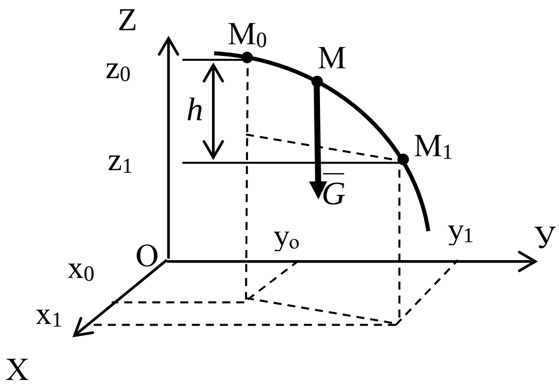
Потужність – це величина, яка визначає роботу сили за одиницю часу,

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau \cdot V\,. \qquad (211)$$

Одиницею вимірювання потужності є ватт (Вт).

Випадки визначення роботи сил

1 Робота сили ваги



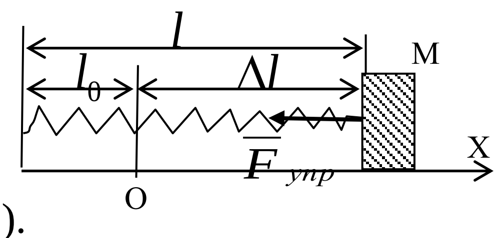
Робота сили $\overline{G} = \overline{mg}$ на вертикальному переміщенні h (рисунок 151)

$$A = \pm mgh. \qquad (212)$$

(+) - тіло спускається,
(-) - тіло піднімається.

Рисунок 151

2 Робота сили пружності



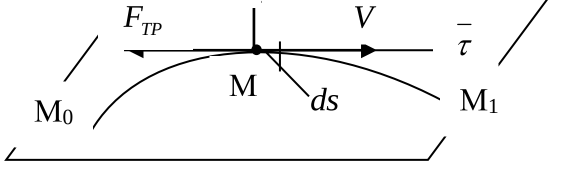
l - довжина недеформованої пружини,
l_O - довжина деформованої пружини,
с – коефіцієнт пружності (рисунок 152).

Рисунок 152

Робота сили пружності на переміщенні, яке залежить від положення (довжини) пружини,

$$A = \frac{c}{2}(\Delta l_n^2 - \Delta l_к^2). \qquad (213)$$

3 Робота сили тертя.



Сила тертя

$$\overline{F_{тр}} = f \cdot \overline{N},$$

де f - коефіцієнт тертя;
N - сила нормальної реакції поверхні (рисунок 153).

Рисунок 153

Якщо величина тертя постійна, то робота сили тертя

$$A = -F_{тр} \cdot s, \tag{214}$$

де S - переміщення, що дорівнює довжині дуги M_0M_1.

4 Робота сил, прикладених до тіла, що обертається

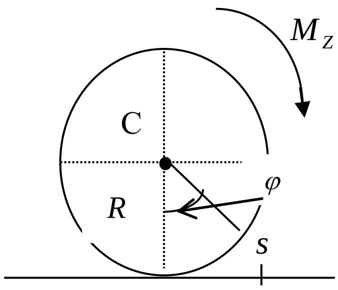


Рисунок 154

$$A = -M_Z \cdot \varphi, \tag{215}$$

де M_Z - момент обертання (момент опору) тіла навколо осі OZ, яка проходить через центр мас

$$M_Z = N \cdot \delta, \tag{216}$$

де δ - коефіцієнт тертя кочення;

$\varphi = \frac{s}{R}$ - кутове переміщення тіла,

де s - лінійне переміщення (рисунок 154).

3.8.3 Теорема про зміну кінетичної енергії

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх сил, що діють на точку, на тому ж переміщенні,

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_O M_1)}. \tag{217}$$

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи: зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт внутрішніх та зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи на тому ж переміщенні,

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e + \sum_{n=1}^{k} A_n^i . \qquad (218)$$

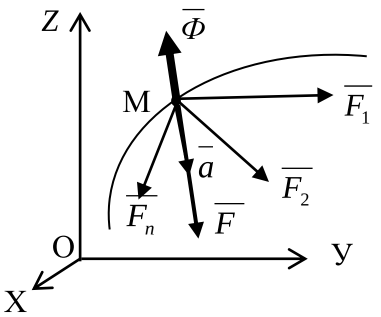
Теорема про зміну кінетичної енергії незмінної механічної системи: зміна кінетичної енергії незмінної системи на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх сил, що діють на точки системи на тому ж переміщенні,

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e . \qquad (219)$$

3.9 Загальні принципи динаміки

3.9.1 Принцип Германа–Ейлера-Даламбера

Принцип Даламбера (принцип **кінетостатики)** є одним із найзагальніших принципів механіки, за допомогою якого рівнянням динаміки за формою надається вигляд рівнянь статики.



Матеріальна точка М рухається з прискоренням $\overline{a}$ під дією прикладених сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..\overline{F_n}$ (рисунок 155).

Основне рівняння динаміки руху точки М

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n} . \qquad (220)$$

Рисунок 155

Сила інерції, або даламберова сила $\overline{\Phi}$ - векторна величина, яка має розмірність сили, що за модулем дорівнює добутку маси точки на її прискорення, та спрямована протилежно цьому прискоренню,

$$\overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a} . \qquad (221)$$

Принцип Даламбера для матеріальної точки: якщо в кожний момент часу до сил, що фактично діють на матеріальну точку, додати силу інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою, тобто

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n} + \overline{\Phi} = 0 . \qquad (222)$$

Принцип Даламбера для системи матеріальних точок: якщо в будь - який момент часу до кожної з точок системи, окрім зовнішніх та внутрішніх сил, що фактично діють на неї, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде знаходитись у рівновазі і для неї можна буде застосувати всі рівняння статики:

$$\overline{F_1^e} + \overline{F_1^i} + \overline{\Phi_1} = 0, \quad \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i} + \overline{\Phi_2} = 0, \quad \overline{F_n^i} + \overline{F_n^e} + \overline{\Phi_n} = 0 . \qquad (223)$$

Принцип Даламбера для невільної механічної системи: якщо у будь – який момент часу до кожної з точок системи, крім сил, що фактично діють на неї, додати відповідні сили інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою і для неї можна буде застосувати всі рівняння статики:

$$\sum_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,A}} + \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,R}} + \sum_{n=1}^{k} \overline{\Phi_n} = 0 . \qquad (224)$$

Узагальнена форма рівнянь рівноваги за принципом Даламбера:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,A}} + \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,R}} + \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{\Phi_n} = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n^{\,A}}) + \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n^{\,R}}) + \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{\Phi_n}) = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \overline{R_n^{\,A}} + \overline{R_n^{\,R}} + \overline{R_n^{\Phi}} = 0, \\ \overline{M_O^{\,A}} + \overline{M_O^{\,R}} + \overline{M_O^{\Phi}} = 0, \end{cases} \qquad (225)$$

де $\overline{R_n^{\,A}} = \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,A}}$, $\overline{R_n^{\,R}} = \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{F_n^{\,R}}$, $\overline{R_n^{\Phi}} = \sum\limits_{n=1}^{k} \overline{\Phi_n}$ - головні вектори активних, реактивних та сил інерції, відповідно, точок системи;

$\overline{M_O{}^A} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n{}^A})$, $\overline{M_O{}^R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n{}^R})$, $\overline{M_O^{\Phi}} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{\Phi_n})$ - головні моменти активних, реактивних та сил інерції, відповідно, точок системи відносно центра О.

Приведення сил інерції точок твердого тіла до простішого вигляду

Головний вектор сил інерції точок тіла

$$\overline{\Phi} = \sum_{n=1}^{k} \overline{\Phi_n} = -\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot \overline{a_n} = -M \cdot \overline{a_C}\ , \qquad (226)$$

де М – маса тіла;

$\overline{a_C}$ - прискорення центру мас.

Головний момент сил інерції відносно центру мас тіла

$$\overline{M_C^{\Phi}} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_C}(\overline{\Phi_n}) = \sum_{m=1}^{k} \overline{M}_{nC}^{\Phi}\ . \qquad (227)$$

Приведення системи сил інерції до простішого вигляду залежить від виду руху тіла.

Випадки приведення системи сил інерції твердого тіла до простішого вигляду

1 Поступальний рух

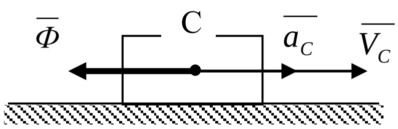


Рисунок 156

При поступальному русі сили інерції твердого тіла приводяться до однієї рівнодійної, яка проходить через центр мас тіла та дорівнює за модулем добутку маси тіла на модуль прискорення його центру мас і спрямована протилежно цьому прискоренню (рисунок 156)

$$\overline{\Phi} = -M \cdot \overline{a_C}\ . \qquad (228)$$

Обертання навколо центра мас нема, тому $\overline{M_C^{\Phi}}$ =0.

2 Обертальний рух тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі (рисунки 157 і 158), яка проходить через центр мас тіла, то сили інерції приводяться до одної пари сил, що лежить у площині, перпендикулярній осі обертання, момент якої дорівнює

$$M_C^{\Phi} = -J_{CZ} \cdot \varepsilon \,, \tag{229}$$

де J_{CZ} - момент інерції тіла відносно осі обертання;

ε - кутове прискорення тіла.

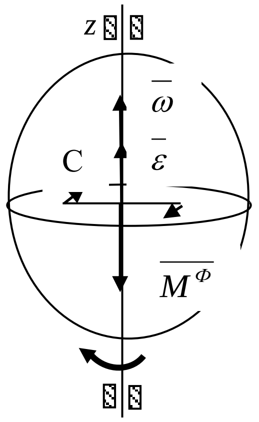


Рисунок 157

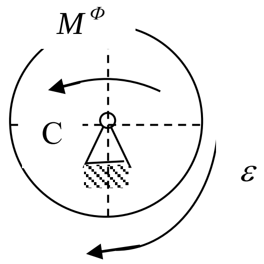


Рисунок 158

Оскільки центр мас не рухається, головний вектор сил інерції $\overline{\Phi} = 0$.

3 Плоскопаралельний рух

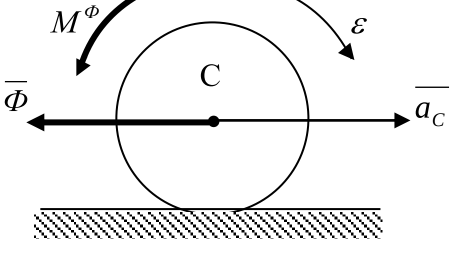


Рисунок 159

При плоскому русі тіла система сил інерції приводиться до головного вектору сил інерції (формула 205) $\overline{R^{\Phi}}$, прикладеної в центрі мас тіла та пари сил, момент якої дорівнює $\overline{M_C^{\Phi}}$ (рисунок 159)

$$\overline{\Phi} = -M \cdot \overline{a_C}\,,$$

$$M_C^{\Phi} = -J_C \cdot \varepsilon\,. \qquad (210)$$

Напрямок моменту M_C^{Φ} протилежний кутовому прискоренню тіла ε.

3.9.2 Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень у найзагальнішім вигляді **встановлює умови рівноваги будь – якої механічної системи**, тобто дозволяє розв’язувати **задачу статики як задачу динаміки**.

Можливі, або віртуальні, переміщення системи – це сукупність уявних нескінченно малих переміщень точок системи, припущених у даний момент усіма накладеними на систему зв’язками.

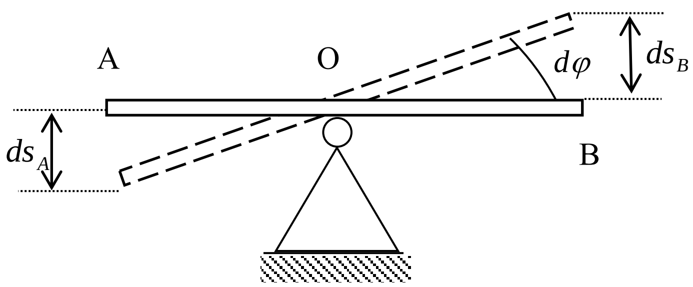


Рисунок 160

На рисунку 160:

- δs_A і δs_B можливі лінійні переміщення точок А і В балки;
- $\delta\varphi$ кутове переміщення – поворот балки на нескінченно малий кут.

$$\delta s_A = |OA| \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_B = |OB| \cdot \delta\varphi. \qquad (231)$$

Число незалежних між собою можливих переміщень системи називається **числом ступенів вільності** цієї системи.

Можлива (або віртуальна) робота - елементарна робота, яку сила, що діє на матеріальну точку, могла б створити на переміщенні, що співпадає з можливим переміщенням цієї точки.

Можлива робота активної (заданої) сили $\overline{F^A}$

$$\delta A^A = F^A \cdot \delta s \cdot \cos\alpha, \tag{232}$$

де α - кут між напрямком сили та переміщенням.

Можлива робота реактивної (реакції зв'язку) сили $\overline{F^R}$

$$\delta A^R = F^R \cdot \delta s \cdot \cos\alpha. \tag{233}$$

Принцип можливих переміщень: для рівноваги механічної системи **з ідеальними зв'язками** необхідно і достатньо, щоб сума робіт всіх активних сил при будь – якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю,

$$\sum_{n=1}^{k} \delta A_n{}^A = 0 \tag{234}$$

або

$$\sum_{n=1}^{k} (F_n^A \delta s_n \cos\alpha_n) = 0. \tag{235}$$

Рівняння (235) називають **рівнянням можливих робіт,** воно є математичним виразом необхідних і достатніх умов рівноваги будь – якої механічної системи.

Принцип можливих переміщень для механічної системи

$$\sum_{n=1}^{k} \delta A_n{}^A + \sum_{n=1}^{k} \delta A_n{}^R = 0. \tag{236}$$

В аналітичній формі принцип можливих переміщень

$$\sum_{n=1}^{k} (F_{nX}^A \cdot \delta x_n + F_{nY}^A \cdot \delta y_n + F_{nZ}^A \cdot \delta z_n) = 0, \tag{237}$$

де F_{nX}^{A}, F_{nY}^{A}, F_{nZ}^{A} - проекції активних сил на осі координат;

δx_n, δy_n, δz_n - проекції можливих переміщень $\overline{\delta s_n}$ на відповідні осі координат.

3.9.3 Загальне рівняння динаміки

Загальне рівняння динаміки (принцип Даламбера – Лагранжа): при русі механічної системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт всіх активних (заданих) сил та усіх сил інерції на будь – якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю

$$\sum_{n=1}^{k} \delta A_n^A + \sum_{n=1}^{k} \delta A_n^{\Phi} + \sum_{n=1}^{k} \delta A_n^R = 0. \qquad (238)$$

Загальне рівняння динаміки для системи з ідеальними зв'язками

$$\sum_{n=1}^{k} \delta A_n^A + \sum_{n=1}^{k} \delta A_n^{\Phi} = 0. \qquad (239)$$

Аналітична форма загального рівняння динаміки

$$\sum_{n=1}^{k} \left[(F_{nX}^{A} + \Phi_{nX}) \cdot \delta x_n + (F_{nY}^{A} + \Phi_{nY}) \cdot \delta y_n + (F_{nZ}^{A} + \Phi_{nZ}) \cdot \delta z_n \right] = 0, \qquad (240)$$

де F_{nX}^{A}, F_{nY}^{A}, F_{nZ}^{A} - проекції активних сил $\overline{F_n^A}$ на осі координат;

$\Phi_{nX}, \Phi_{nY}, \Phi_{nZ}$ - проекції сил інерції $\overline{\Phi_n}$ на осі координат;

δx_n, δy_n, δz_n - проекції можливих переміщень $\overline{\delta s_n}$ на відповідні осі координат.

Рівняння (239) та (240) дозволяють скласти диференційні рівняння руху будь – якої механічної системи.

Список літератури

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - М., 1984. – Ч. 1. – 2.