ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина I

Харків – 2020

Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища та прикладна математика: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2020. – Ч. 1. – 66 с.

Конспект лекцій рекомендується для студентів освітнього рівня «бакалавр» економічного факультету всіх форм навчання.

Іл. 21, табл. 5, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 9 грудня 2019 р., протокол № 3.

Рецензент:

доц. А. П. Рибалко (ХНЕУ ім. С. Кузнеця)

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина 1

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 23.12.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 3,3. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ 4
1.1 Визначники та їхні властивості 4
1.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь 9
1.3 Розв'язання системи лінійних рівнянь за формулами Крамера 9
1.4 Матриці та дії над ними 14
1.5 Обернена матриця 20
1.6 Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь 20
2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ 24
2.1 Вектори та лінійні операції над ними 24
2.2 Проекція вектора на вісь 27
2.3 Координати вектора. Напрямні косинуси 28
2.4 Дії над векторами в координатній формі 31
2.5 Скалярний добуток векторів 32
2.6 Деякі застосування скалярного добутку векторів 33
3 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ 37
3.1 Пряма на площині 37
3.1.1 Види рівнянь 37
3.1.2 Взаємне розміщення прямих на площині 45
3.1.3 Відстань від точки до прямої 48
3.2 Криві другого порядку 54
3.2.1 Коло 54
3.2.2 Еліпс 55
3.2.3 Гіпербола 58
3.2.4 Парабола 60
Список літератури 66

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Визначники та їхні властивості

Визначення. *Визначником (детермінантом) другого порядку* називається число, що обчислюється за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1.1)$$

Визначення. *Визначником (детермінантом) третього порядку* називається число, що обчислюється за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}. \qquad (1.2)$$

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*, причому перший індекс i відповідає номеру рядка, а другий індекс j – номеру стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент. Так, елемент a_{32} стоїть у третьому рядку і другому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику формули (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику формули (1.2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *побічну діагональ*.

Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, розташованих на головній і побічній діагоналях формули (1.1).

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (рисунок 1.1).

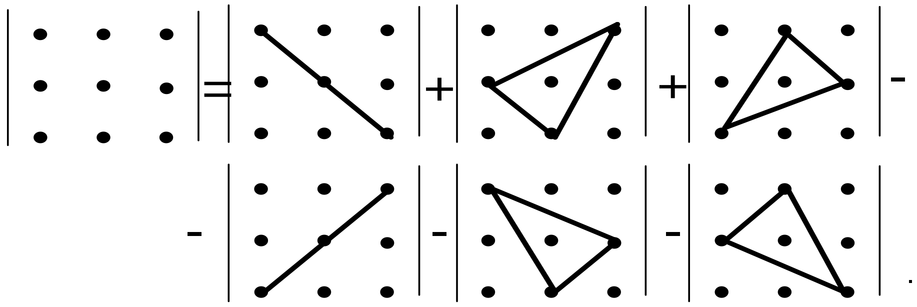


Рисунок 1.1 – Правило трикутників

Зауваження. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 1\cdot(-2) = 14.$$

Відповідь: 14.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)\cdot(-2) + 5\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot(-1) -$$
$$- 0\cdot 3\cdot 4 - 5\cdot 3\cdot(-2) = 62.$$

Відповідь: 62.

Визначення. *Мінором* M_{ij} називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Визначення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента визначника a_{ij} називається добуток $(-1)^{i+j}$ на мінор M_{ij}, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} . \qquad (1.3)$$

Приклад 3. Задано визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити M_{11}, M_{12}, A_{11}, A_{12}.

Розв'язання.

$M_{11} = 4$, $M_{12} = 1$, $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1$.

Відповідь: $M_{11} = 4$, $M_{12} = 1$, $A_{11} = 4$, $A_{12} = -1$.

Властивості визначників на прикладі визначників другого порядку

1 Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями з тими самими номерами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Ця операція називається *транспонуванням.*

2 Якщо у визначнику поміняти місцями два сусідніх рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3 Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

4 Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника може бути винесеним за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5 Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника однакові, то визначник дорівнює нулю.

Наслідок. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0 .$$

6 Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

7 Визначник, у якого елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких у зазначеному рядку (стовпці) стоять перші доданки, а у другого – другі доданки, а всі інші рядки (стовпці) в обох визначників однакові:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

При обчисленні визначників n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

користуються ***теоремою Лапласа*** (теоремою про розкладання визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця): визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \qquad (1.4)$$

(розкладання за елементами i-го рядка, $i=\overline{1,n}$),
або

$$\Delta = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij} \qquad (1.5)$$

(розкладання за елементами j-го стовпця, $j=\overline{1,n}$).

Приклад 4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання.

За формулою (1.4) отримаємо

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -6\cdot A_{11} + 3\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = -6\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -6\cdot(-4+5) - 3\cdot(0-4) +$$

$$+1\cdot(0+8) = -6+12+8 = 14.$$

Відповідь: 14.

Приклад 5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами другого стовпця.

Розв'язання.

За формулою (1.5) отримаємо

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{12} + 2\cdot A_{22} + 5\cdot A_{32} = 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot(0-4) + 2\cdot(12+4) -$$

$$-5\cdot(6-0) = 12+32-30 = 14.$$

Відповідь: 14.

1.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь, яка містить m рівнянь та n невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.6)$$

де числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – *коефіцієнти*, а числа $b_1, b_2, ..., b_m$ – *вільні члени* системи.

Система рівнянь (1.6) називається *однорідною,* якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоча б один з них відмінний від нуля.

Розв'язком системи (1.6) називається сукупність чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, яка перетворює систему (1.6) у систему тотожностей.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система називається *несумісною*, якщо вона розв'язків не має.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

1.3 Розв'язання системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему n рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Головним визначником системи (1.7) називається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.8)$$

Допоміжними визначниками системи (1.7) називаються визначники $\Delta_j, j = \overline{1,n}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}. \qquad (1.9)$$

Допоміжні визначники $\Delta_j, j = \overline{1,n}$ отримують заміною елементів стовпця, який відповідає змінній x_j, відповідними вільними членами системи рівнянь.

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (1.7) має єдиний розв'язок, який можна знайти за ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.10)$$

Зауваження.

1 Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (1.7) має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами (1.10).

2 Якщо визначник системи $\Delta = 0$, то система (1.7) або має безліч розв'язків, або несумісна. У цьому випадку необхідне додаткове дослідження.

Формули для розв'язання систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням визначників надано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Формули Крамера

	Вигляд системи	Формули для розв'язання
1	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$	Формули Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
2	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$	Формули Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Приклад 6. Знайти розв’язок системи $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ за формулами Крамера.

Розв'язання.

За таблицею 1.1 обчислюємо визначник системи Δ і допоміжні визначники Δ_1 і Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \;\Rightarrow \text{ система має єдиний розв'язок;}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 39,\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20.$$

За формулами Крамера отримаємо

$$x_1 = \frac{39}{17},\; x_2 = \frac{20}{17}.$$

Відповідь: $\left(\frac{39}{17}; \frac{20}{17}\right)$.

Приклад 7. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - 4x_3 = 4 \end{cases}$ за формулами Крамера.

Розв'язання.

За таблицею 1.1 обчислюємо визначник системи Δ та допоміжні визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{31} + (-4) \cdot A_{33} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(6-1) - 4(-1-6) = 38 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{система має}$$

єдиний розв'язок;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{13} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}7 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-2(-28-12)-(0+4)=76;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 7 & 3\\ 2 & 4 & -4\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{13}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7 & 3\\ 4 & -4\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}=(-28-12)-(12-14)=-38;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}+2\cdot A_{12}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 0 & 4\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=(-4-0)-2(12-14)=0.$$

За формулами Крамера отримаємо:

$$x_1=\frac{76}{38}=2;\ x_2=\frac{-38}{38}=-1;\ x_3=\frac{0}{38}=0.$$

Відповідь: $(2;-1;0)$.

Приклад 8. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва наведено в таблиці 1.2. Потрібно визначити обсяг продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

Зауваження. Задачі такого роду типові при прогнозах і оцінках функціонування підприємств, а також у плануванні мікроекономічних процесів.

Таблиця 1.2 – Дані прикладу 8

Тип сировини	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції, ваг. од.			Запас сировини, ваг. од.
	I вид	II вид	III вид	
1	6	4	5	1850
2	4	3	1	1200
3	5	2	3	1150

Розв'язання.

Позначимо через $x_i, i=\overline{1,3}$ – обсяг продукції i-го виду. Тоді за умовою таблиці 1.2 складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1850, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1200, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1150. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1850 & 4 & 5 \\ 1200 & 3 & 1 \\ 1150 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1850 & 5 \\ 4 & 1200 & 1 \\ 5 & 1150 & 3 \end{vmatrix} = -5250, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1850 \\ 4 & 3 & 1200 \\ 5 & 2 & 1150 \end{vmatrix} = -1050;$$

$$x_1 = \frac{-2100}{-21} = 100; \ x_2 = \frac{-5250}{-21} = 250; \ x_3 = \frac{-1050}{-21} = 50.$$

Відповідь: обсяг продукції кожного виду відповідно дорівнює 100, 250 і 50 од.

1.4 Матриці та дії над ними

Визначення. Прямокутну упорядковану таблицю, яка складається з чисел $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, називають *матрицею*, а числа a_{ij} - *елементами* матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.11)$$

Добуток кількості рядків на кількість стовпчиків $m \times n$ називають *розмірністю* матриці та позначають $A_{m \times n}$.

Матрицю називають *квадратною*, якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають *нульовою* і позначають

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи $a_{1n}, ..., a_{n1}$ – *бічну діагональ*.

Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові.

Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають *діагональною*.

Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називають *одиничною* і позначають

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

Матрицю A^T називають *транспонованою* до матриці A, якщо її рядки є відповідно стовпцями матриці A, а її стовпці є рядками матриці A:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.13)$$

Нехай матриці A і B мають однакову розмірність $m \times n$.

Сумою (різницею) матриць A і B є матриця $C = A \pm B$ розмірності $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Добутком дійсного числа k *на матрицю* A є матриця kA:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Якщо кількість стовпців матриці $A_{m \times n}$ збігається з кількістю рядків матриці $B_{n \times k}$, то *добутком матриць* A і B називають матрицю $C = A \cdot B$ розмірності $m \times k$, у якої елемент c_{ij} є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,k}. \tag{1.16}$$

У частинному випадку

$$A_{m \times n} \cdot E_{n \times n} = A_{m \times n},$$
$$E_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

Зауваження. У загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $AB \neq BA$.

Наведемо деякі ***властивості дій над матрицями***:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
4) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
6) $(\alpha A)B=A(\alpha B)$;
7) $(A+B)C=AC+BC$;
8) $(AB)C=A(BC)$;
9) $\left(A^T\right)^T=A$;
10) $(A+B)^T=A^T+B^T$;
11) $(AB)^T=A^T B^T$.

Приклад 9. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

Знайти:

1) $2A$;
2) AB;
3) $(AB)^T-3E$.

Розв'язання:

1) за формулою (1.15) одержимо

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 8 & -2 & 0\end{pmatrix};$$

2) за формулою (1.16) отримаємо

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3\cdot(-2)+2\cdot 4 & 1\cdot 0+3\cdot 3+2\cdot(-3)\\ 4\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 4 & 4\cdot 0+(-1)\cdot 3+0\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 10 & -3\end{pmatrix};$$

3) за формулами (1.13) - (1.15) обчислюємо

$$(AB)^T - 3E = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $(AB)^T - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Матриці використовують при побудові математичних моделей економічних процесів.

Приклад 10. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею $A = (55 \quad 90 \quad 175)$. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у кожному з регіонів задана матрицею $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти C – матрицю виручки по регіонах. Зробити висновок.

Вказівка. Виручка від реалізації продукції – це сума грошей, що надійшла на рахунок підприємства за реалізовану продукцію.

Розв'язання.

Матрицю виручки по регіонах обчислюємо за формулою (1.16):

$$C = AB = (55 \quad 90 \quad 175) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (55 \cdot 2 + 90 \cdot 5 + 175 \cdot 9 \quad 55 \cdot 8 + 90 \cdot 6 + 175 \cdot 8 \quad 55 \cdot 1 + 90 \cdot 7 + 175 \cdot 2 \quad 55 \cdot 4 + 90 \cdot 8 + 175 \cdot 3) =$$

$$= (2135 \quad 2380 \quad 1035 \quad 1465).$$

Відповідь: Таким чином, у другому регіоні виручка є найбільшою і складає 2380 грош. од.

Приклад 11. Підприємство виробляє три типи виробів, використовуючи для цього чотири види сировини. Норми затрат a_{ij}, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,3}$ сировини i-го виду для виробництва одиниці продукції j-го типу задані матрицею $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. План випуску виробів кожного типу задано матрицею $X=\begin{pmatrix} 2100 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix}$. Вартість одиниці сировини кожного виду в грошових одиницях (грош. од.) задано матрицею $C=\begin{pmatrix} 65 & 90 & 185 & 95 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) матрицю S – витрат сировини при заданому плані випуску виробів;

2) загальну вартість необхідної сировини W.

Розв'язання:

1) матриця витрат сировини S при заданому плані випуску виробів X обчислюється за формулою (1.16):

$$S=AX=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2100 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\cdot 2100+9\cdot 2000+3\cdot 800 \\ 9\cdot 2100+3\cdot 2000+7\cdot 800 \\ 3\cdot 2100+8\cdot 2000+4\cdot 800 \\ 6\cdot 2100+2\cdot 2000+5\cdot 800 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33000 \\ 30500 \\ 25500 \\ 20600 \end{pmatrix}.$$

2) обчислюємо загальну вартість необхідної сировини

$$W=CS=\begin{pmatrix} 65 & 90 & 185 & 95 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 33000 \\ 30500 \\ 25500 \\ 20600 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2145000+2745000+4717500+1957000 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11564500 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальна вартість використаної сировини складає 11564500 грош. од.

Відповідь: 1) $S=\begin{pmatrix}33000\\30500\\25500\\20600\end{pmatrix}$; 2) $W=11564500$ грош. од.

1.5 Обернена матриця

Дана квадратна матриця A. Якщо існує квадратна матриця A^{-1}, яка задовольняє умову

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\,, \qquad (1.17)$$

то матриця A^{-1} називається *оберненою* матрицею до матриці A^{-1}.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо її визначник $\Delta=0$ $(\det A=0)$, і *невиродженою*, якщо $\Delta\neq 0$ $(\det A\neq 0)$.

Для невиродженої матриці A існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка може бути знайдена за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\tilde{A}^{T}\,, \qquad (1.18)$$

де матриця $\tilde{A}$ складається з алгебраїчних доповнень матриці A і називається *приєднаною* до матриці A, тобто

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & ..\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (1.19)$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

1.6 Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему n лінійних рівнянь з n невідомими (1.7) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B, \tag{1.20}$$

де матриця A утворена з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

матриця X – матриця-стовпець із невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

матриця B – матриця-стовпець із вільних членів системи

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді розв’язок матричного рівняння (1.20) обчислюється за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{1.21}$$

де A^{-1} – обернена матриця до матриці A.

Приклад 12. Розв’язати систему $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ (приклад 6) матричним методом.

Розв'язання.

Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Для розв'язання системи матричним методом за формулою (1.21) необхідно знайти обернену матрицю A^{-1}.

Для цього спочатку обчислюємо визначник матриці A:

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow$ обернена матриця A^{-1} існує.

За формулою (1.3) алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = 4;\ A_{12} = -1;\ A_{21} = 5;\ A_{22} = 3$.

За матрицею (1.19) отримаємо

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.18) одержимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{5}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння знаходимо за формулою (1.21):

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{5}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} + \frac{35}{17} \\ -\frac{1}{17} + \frac{21}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} \frac{39}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$.

Приклад 13. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3=7, \\ 2x_1 \qquad -4x_3=4 \end{cases}$ (приклад 7)

матричним методом.

Розв'язання.

Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для розв'язання системи за формулою (1.21) необхідно знайти обернену матрицю A^{-1}.

Для цього обчислюємо визначник матриці A:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=4+0+12-2-0+24=38\neq 0 \quad \Rightarrow$$ обернена матриця A^{-1} існує.

За формулою (1.3) алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=4;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=18;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=8;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-2;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-7.$$

За формулою (1.19) маємо

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 4 & 18 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix} \text{ та } \tilde{A}^T=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 18 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.18) отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 18 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{38} & \frac{8}{38} & \frac{5}{38} \\ \frac{18}{38} & -\frac{2}{38} & -\frac{6}{38} \\ \frac{2}{38} & \frac{4}{38} & -\frac{7}{38} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок матричного рівняння знаходимо за формулою (1.21):

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{38} & \frac{8}{38} & \frac{5}{38} \\ \frac{18}{38} & -\frac{2}{38} & -\frac{6}{38} \\ \frac{2}{38} & \frac{4}{38} & -\frac{7}{38} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{56}{38} + \frac{20}{38} \\ 0 - \frac{14}{38} - \frac{24}{38} \\ 0 + \frac{28}{38} - \frac{28}{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1 Вектори та лінійні операції над ними

Визначення. *Вектор* – це спрямований відрізок, тобто відрізок, який має довжину і напрямок.

Якщо точка A – початок вектора, а точка B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\overrightarrow{a}$ (рисунок 2.1).

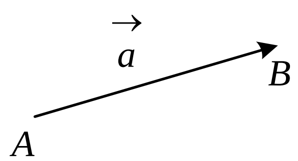


Рисунок 2.1 – Вектор $\overrightarrow{AB}$

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нульовим* вектором і позначається $\vec{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* вектором і позначається $\vec{e}$.

Одиничний вектор, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\vec{a}$, називається *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^{0}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними* ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Якщо колінеарні вектори мають один напрямок, то їх називають *однаково спрямованими.*

Якщо колінеарні вектори мають протилежні напрямки, то їх називають *протилежно спрямованими*.

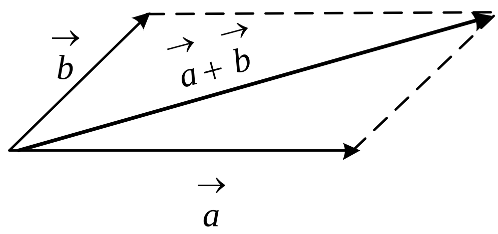
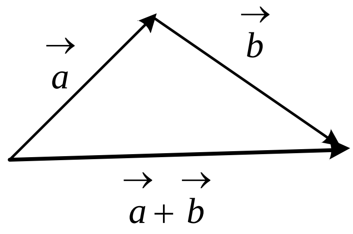
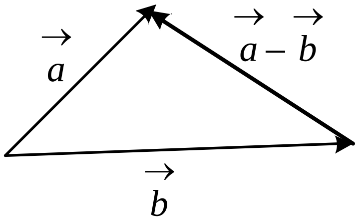
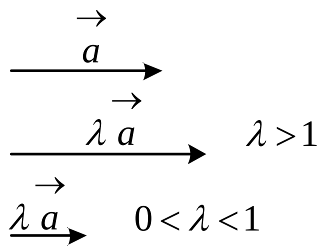
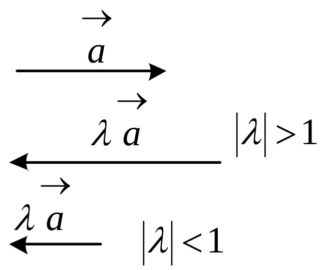
Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакову довжину.

Три вектори в просторі називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами, заданими геометрично, наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Лінійні операції над векторами

Назва операції	Виконання операції	
Додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	***Правило паралелограма*** 	***Правило трикутника*** 
Віднімання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$		
Множення вектора $\vec{a}$ на скаляр λ	$\lambda>0$ 	$\lambda<0$ 

Властивості лінійних операцій над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$;

3) $\lambda_1\left(\lambda_2\vec{a}\right)=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;

4) $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;

5) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{b}+\lambda\vec{a}$.

2.2 Проекція вектора на вісь

Визначення. Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь l називається додатне число $\left|\vec{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\vec{A_1B_1}$ та вісь l однаково спрямовані, і від'ємне число $-\left|\vec{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\vec{A_1B_1}$ та вісь l протилежно спрямовані (рисунок 2.2).

Якщо точки A_1 і B_1 співпадають, тобто $\vec{A_1B_1} = \vec{0}$, тоді проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l дорівнює нулю.

Проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l позначається $пр_l\vec{AB}$.

Якщо $\vec{AB} = \vec{0}$ або $\vec{AB} \perp l$, то $пр_l\vec{AB} = 0$.

Позначимо через φ кут між вектором $\vec{AB}$ і віссю l ($0 \le \varphi \le \pi$).

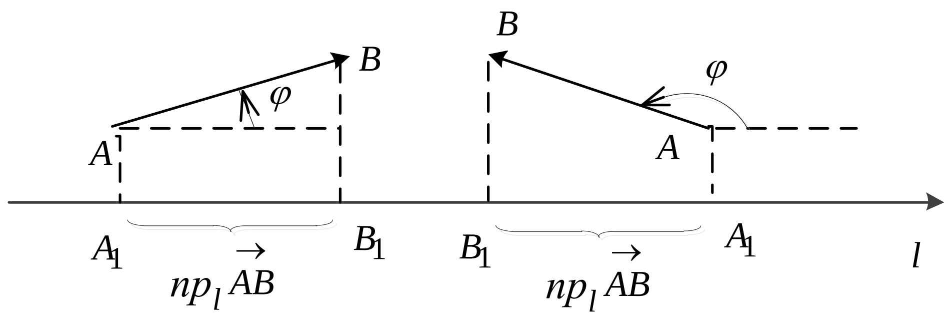


Рисунок 2.2. Проекція вектора на вісь

Властивості проекції вектора на вісь

1 Проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{AB}$ на косинус кута між вектором $\vec{AB}$ та віссю l, тобто

$$пр_l\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos\varphi \tag{2.1}$$

Наслідки:

- проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут прямий;
- проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь дорівнюють між собою.

2 Проекція суми векторів на одну і ту саму вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\,\vec{a}+np_l\,\vec{b}\,. \tag{2.2}$$

3 При множенні вектора $\vec{AB}$ на число λ його проекція на вісь l також множиться на це число, тобто

$$np_l\left(\lambda\,\vec{AB}\right)=\lambda\,np_l\,\vec{AB}\,. \tag{2.3}$$

2.3 Координати вектора. Напрямні косинуси

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ – орти (одиничні вектори) осей OX, OY, OZ. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ та перенесемо його на початок координат $\vec{a}=\vec{OM}$ (рисунок 2.3).

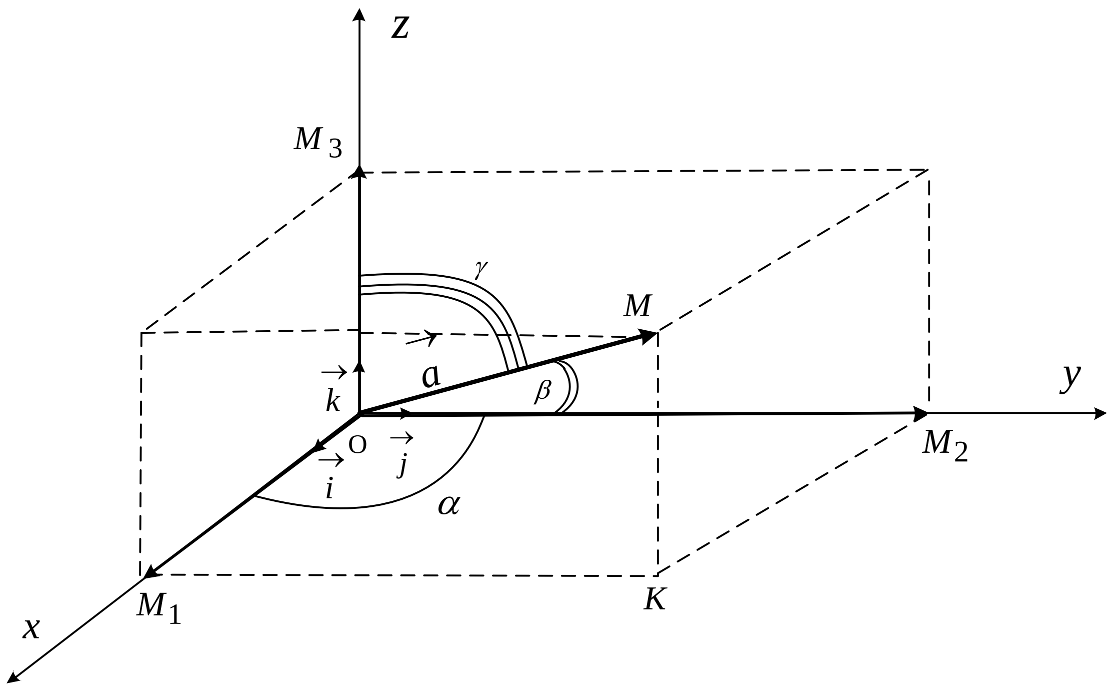


Рисунок 2.3 – Вектор $\vec{a}$ в декартовій системі координат

Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі

$$np_{OX}\,\vec{a} = \left|\vec{OM_1}\right|,\ np_{OY}\,\vec{a} = \left|\vec{OM_2}\right|,\ np_{OX}\,\vec{a} = \left|\vec{OM_3}\right|.$$

За правилом додавання векторів (таблиця 2.1)

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}.$$

Введемо позначення

$$\left|\vec{OM_1}\right| = a_x,\ \left|\vec{OM_2}\right| = a_y,\ \left|\vec{OM_3}\right| = a_z.$$

Враховуючи, що

$$\vec{OM_1} = \left|\vec{OM_1}\right| \cdot \vec{i},\ \vec{OM_2} = \left|\vec{OM_2}\right| \cdot \vec{j},\ \vec{OM_3} = \left|\vec{OM_3}\right| \cdot \vec{k},$$

отримаємо *розкладання вектора по ортах координатних осей*:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \qquad (2.4)$$

де a_x, a_y, a_z – координати вектора.

Рівність (2.4) можна записати у вигляді

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z). \qquad (2.5)$$

Оскільки квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює

$$|\vec{OM}|^2 = |\vec{OM_1}|^2 + |\vec{OM_2}|^2 + |\vec{OM_3}|^2,$$

то модуль вектора $\vec{a}$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2.$$

Тобто модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.6)$$

Позначимо кути, що утворює вектор $\vec{a}$ з осями OX, OY та OZ через α, β та γ відповідно (рисунок 2.3).

За властивістю проекції вектора на вісь отримаємо

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \; a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \; a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma,$$

або

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (2.7)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$.

Очевидно, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.8)$$

2.4 Дії над векторами в координатній формі

Розглянемо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$.

Тоді:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$ або

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \cdot \vec{i} + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{j} + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{k}; \qquad (2.9)$$

2) $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$ або

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \cdot \vec{i} + \lambda a_y \cdot \vec{j} + \lambda a_z \cdot \vec{k}; \qquad (2.10)$$

3) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z;$ (2.11)

4) $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$ (2.12)

Зауваження. Якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\vec{AB}$ обчислюють за формулою

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \qquad (2.13)$$

або

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

2.5 Скалярний добуток векторів

Визначення. *Скалярним добутком* двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (2.14)$$

де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$.

Зауваження. З визначення проекції вектора на вісь випливає

$$|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{b}}\, \vec{a}, \quad |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{a}}\, \vec{b}.$$

Тоді отримаємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\, \vec{a}. \qquad (2.15)$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3) $\left(\lambda \vec{a}\right)\cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot \vec{b}\right)$;

4) $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$;

5) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot \vec{b} = 0$;

6) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (нерівність Коші-Буняковського для скалярного добутку).

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z. \tag{2.16}$$

2.6 Деякі застосування скалярного добутку векторів

1 *Кут між векторами* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.17}$$

Наслідок:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = 0. \tag{2.18}$$

2 *Проекція вектора* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на вектор $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ обчислюється за формулою

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.19}$$

Приклад 1. Задано вектори $\vec{a}(2;-1;3)$ і $\vec{b}(0;4;-2)$. Необхідно:

1) знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{a}$;

2) обчислити $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3) знайти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$;

4) обчислити координати вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

5) знайти вектор $\vec{d} = -\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$ та його довжину;

6) перевірити, чи будуть вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ колінеарними;

7) обчислити скалярний добуток векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$;

8) перевірити, чи будуть вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярними.

Розв'язання:

1) обчислюємо за формулою (2.6) довжину вектора $\vec{a}(2;-1;3)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

і за формулою (2.7) напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}};$$

2) за формулою (2.17) отримаємо

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} =$$

$$= -\frac{10}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{70}};$$

3) використовуючи результат, одержаний в пункті 2, і формулу (2.19), знаходимо проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$:

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5};$$

4) за формулами (2.9), (2.10) отримаємо

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(2;-1;3) - 3(0;4;-2) = (4;-2;6) - (0;12;-6) = (4;-14;12);$$

5) за формулами (2.6), (2.9), (2.10) маємо

$$\vec{d} = -\vec{a} + 0{,}5\,\vec{b} = -(2;-1;3) + 0{,}5(0;4;-2) = (-2;1;-3) + (0;2;-1) = (-2;3;-4);$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{29};$$

6) використовуючи формулу (2.12), перевіримо, чи будуть вектори $\vec{c} = (4;-14;12)$ і $\vec{d} = (-2;3;-4)$ колінеарними:

$$\frac{4}{-2} \neq \frac{-14}{3} \neq \frac{12}{-4}.$$

Отже, вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неколінеарні;

7) за формулою (2.16) обчислюємо скалярний добуток векторів $\vec{c} = (4;-14;12)$ і $\vec{d} = (-2;3;-4)$:

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = 4\cdot(-2) + (-14)\cdot 3 + 12\cdot(-4) = -98;$$

8) використовуючи результат, отриманий в пункті 7, і формулу (2.18), перевіримо, чи будуть вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярними:

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=-98\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неперпендикулярні.

Відповідь: 1) $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$;

2) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{5}{\sqrt{70}}$; 3) $np_{\vec{b}}\,\vec{a}=-\sqrt{5}$; 4) $\vec{c}=(4;-14;12)$;

5) $\vec{d}=(-2;3;-4)$, $|\vec{d}|=\sqrt{29}$; 6) $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неколінеарні;

7) $\vec{c}\cdot\vec{d}=-98$; 8) $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неперпендикулярні.

Приклад 2. Витрати фірми на ресурси, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, надано в таблиці 2.2. Визначити сумарну вартість ресурсів для виготовлення одиниці продукції.

Таблиця 2.2. Дані прикладу 2

Ресурс	Кількість	Вартість
Сировина I виду	15 кг	3 грош. од./ кг
Сировина II виду	66 $м^3$	4 грош. од./$м^3$
Витрати праці	0, 65 люд. год	1,5 грош. од./люд. год
Обладнання	0,7 маш. год	0,75 грош. од./маш. год

***Розв'язання*.**

Розглянемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\vec{x}(15;66;0{,}65;0{,}7)$ і вектор цін за одиницю відповідного ресурсу $\vec{c}(3;4;1{,}5;0{,}75)$. Сумарна вартість ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, є скалярним добутком векторів $\vec{x}$ і $\vec{c}$. За формулою (2.16) обчислюємо:

$$\vec{x}\cdot\vec{c} = 15\cdot 3 + 66\cdot 4 + 0{,}65\cdot 1{,}5 + 0{,}7\cdot 0{,}75 = 310{,}5 \text{ грош. од.}$$

Відповідь: 310,5 грош. од.

Приклад 3. Будівельна організація отримала кредити від трьох банків. Кожен з них надав кредити в розмірі 15, 7, 10 тис. грош. од. під річні процентні ставки 25 %, 40 % і 30 % відповідно. Обчислити, яку суму треба заплатити наприкінці року за взяті кредити.

Розв'язання.

Розглянемо вектор кредитів $\vec{x}_0 = (15;7;10)$ та обчислемо відповідні річні процентні ставки $\vec{x}_1 = (0{,}25\cdot 15; 0{,}4\cdot 7; 0{,}3\cdot 10) = (3{,}75; 2{,}8; 3)$. Знаходимо вектор суми, яку необхідно заплатити наприкінці року:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1 = (15;7;10) + (3{,}75;2{,}8;3) = (18{,}75;\ 9{,}8;\ 13).$$

Тоді загальна сума дорівнює

$$W = 18{,}75 + 9{,}8 + 13 = 41{,}55 \text{ тис. грош. од.}$$

Відповідь: $W = 41{,}55$ тис. грош. од.

3 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Пряма на площині

3.1.1 Види рівнянь

Пряма є найпростішою лінією на площині. Розглянемо різні види рівнянь, якими вона задається.

1 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Розглянемо на прямій довільну точку $M(x;y)$ (рисунок 3.1).

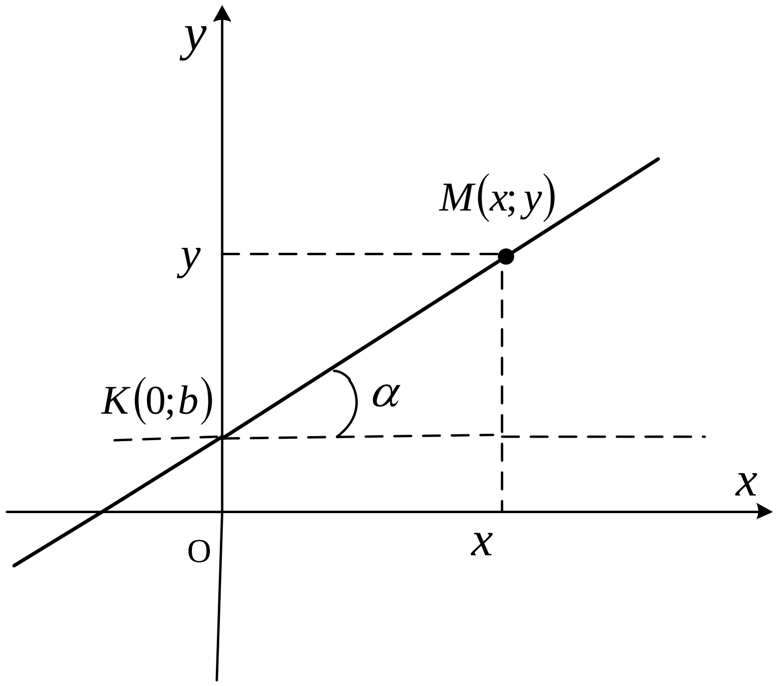


Рисунок 3.1 – Пряма з кутовим коефіцієнтом

З рисунка 3.1 випливає, що $tg\alpha = \frac{y-b}{x}$, тобто $y = tg\alpha \cdot x + b$. Позначимо через $k = tg\alpha$ й отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

де $(x;y)$ – множина точок прямих.

Число $k = tg\alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої.*

Зауваження:

- якщо пряма проходить через початок координат ($b = 0$), то отримаємо рівняння

$$y = kx; \quad (3.2)$$

- якщо пряма паралельна осі OX ($\alpha = 0$), то одержимо рівняння

$$y = b, \qquad (3.3)$$

де b – точка перетину прямої з віссю OY;

- якщо пряма паралельна осі OY ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, кутовий коефіцієнт k не існує), то рівняння прямої має вигляд

$$x = a, \qquad (3.4)$$

де a – точка перетину прямої з віссю OX;

- якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, то отримаємо *рівняння пучка прямих* з центром у точці M_0

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.5)$$

2 Загальне рівняння прямої.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до ненульового вектора $\vec{N} = (A; B)$ (рисунок 3.2).

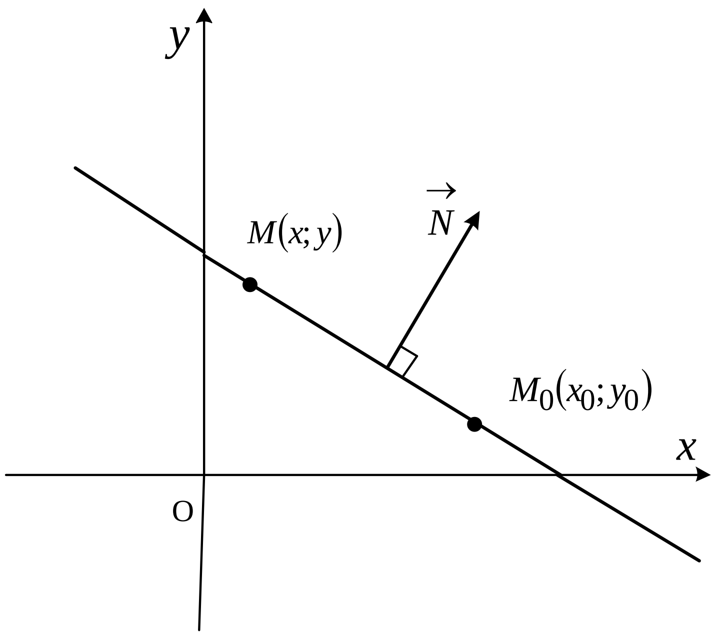


Рисунок 3.2 – Загальне рівняння прямої

Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x;y)$ та отримаємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$. Оскільки $\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{N}$, то за формулою (2.18) одержимо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\overrightarrow{N}=(A;B)$.

Якщо в рівнянні (3.6) позначити $C=-Ax_0-By_0$, то отримаємо рівняння

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.7)$$

яке називається *загальним рівнянням* прямої.

Вектор $\overrightarrow{N}=(A;B)$ називається *нормальним вектором* прямої.

3 Канонічне рівняння прямої.

Припустимо, що пряма проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{s}(l;m)$ (рисунок 3.3).

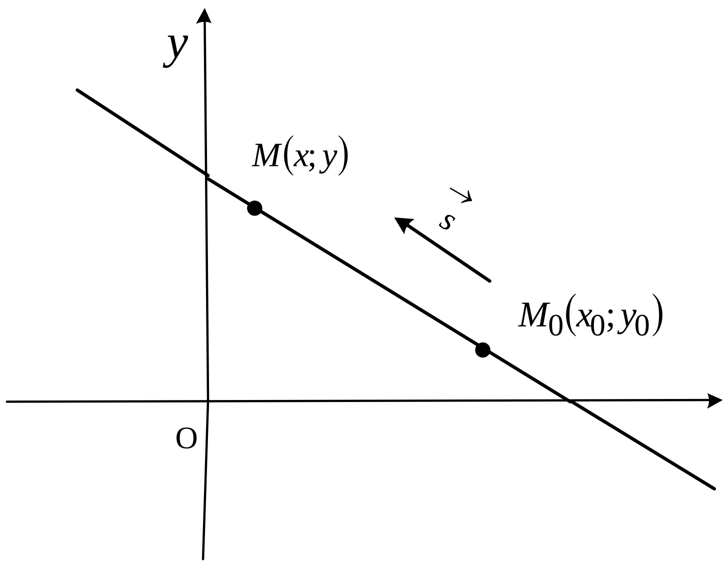


Рисунок 3.3 – Канонічне рівняння прямої

Аналогічно пункту 2 складаємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні, то за формулою (2.12) отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{3.8}$$

яке називається *канонічним рівнянням* прямої, а вектор $\vec{s}(l; m)$ – *напрямним вектором* прямої.

4 Параметричне рівняння прямої.

З канонічного рівняння (3.8) випливає, що

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t, t \in R.$$

Після перетворень отримаємо рівняння

$$\begin{cases} x = tl + x_0, \\ y = tm + y_0, \ t \in R, \end{cases}$$

яке називається *параметричним* рівнянням, а t – параметром.

5 Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Припустимо, що пряма проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ (рисунок 3.4).

Позначимо через $M(x; y)$ довільну точку прямої. Отримані вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ колінеарні. За формулою (2.12) одержимо *рівняння прямої, що проходить через дві точки*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.9}$$

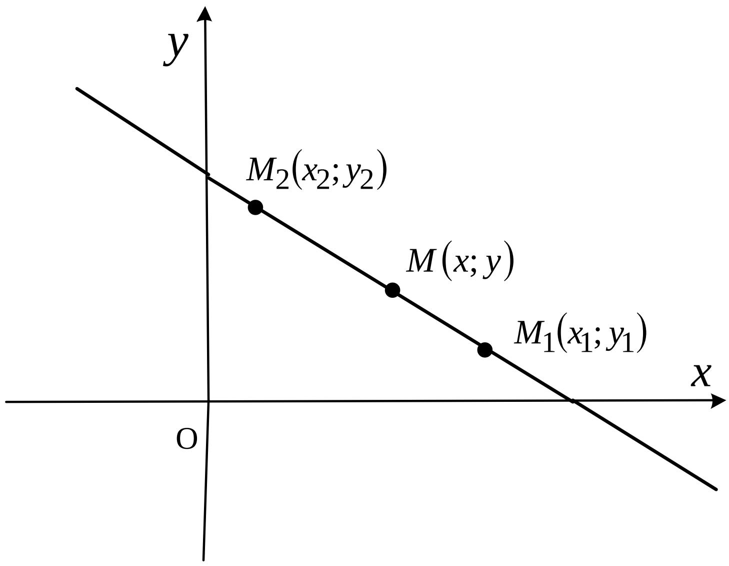


Рисунок 3.4 – Рівняння прямої, що проходить через дві точки

6 Рівняння прямої «у відрізках».

Припустимо, що пряма перетинає вісь OX у точці $M_1(a;0)$, а вісь OY – у точці $M_2(0;b)$ (рисунок 3.5).

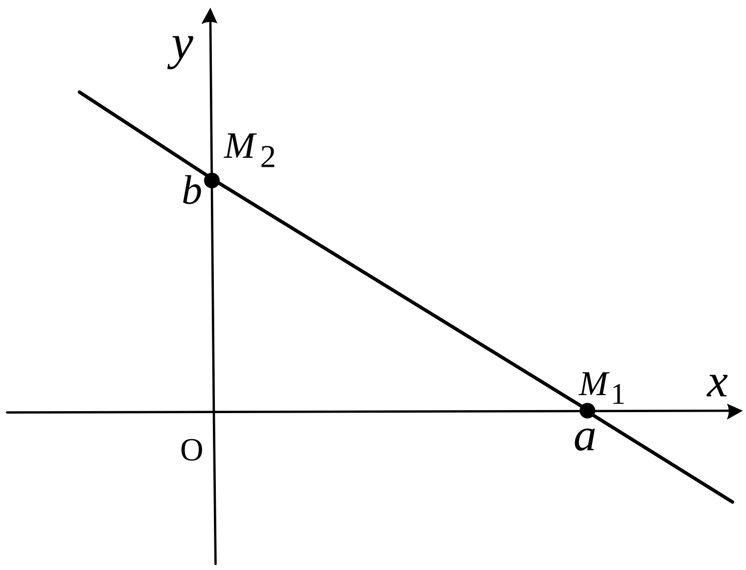


Рисунок 3.5 – Рівняння прямої «у відрізках»

З рівняння (3.9) отримаємо

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

тобто

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.10)$$

Рівняння (3.10) називається *рівнянням прямої «у відрізках»*, де числа a і b - це відрізки, які пряма відтинає від координатних осей.

7 Нормальне рівняння прямої.

Припустимо, що задано пряму (рисунок 3.6).

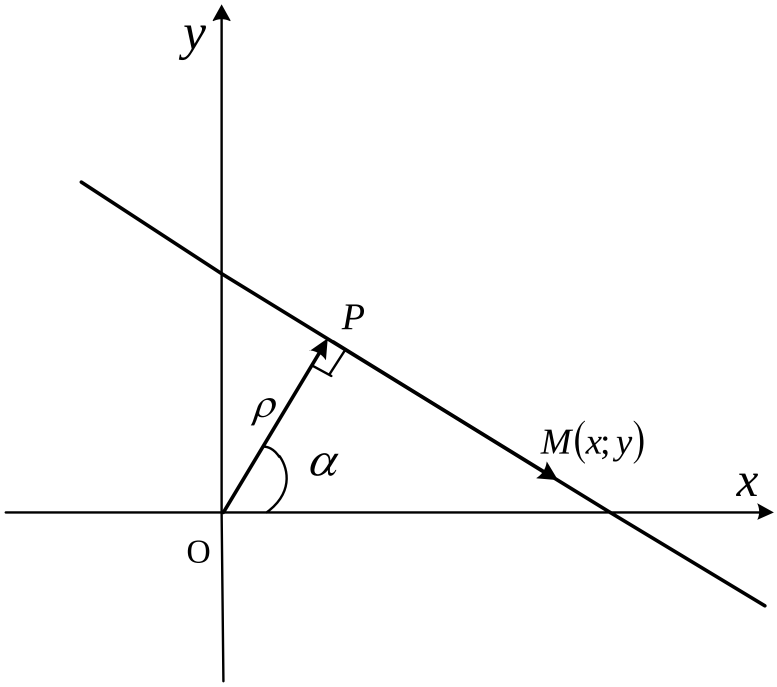


Рисунок 3.6 – Нормальне рівняння прямої

Припустимо, що перпендикуляр OP, опущений з початку координат до прямої, має довжину $\rho\ (\rho \geq 0)$ та утворює з віссю OX кут α. Тоді $\vec{OP}=(\rho\cos\alpha;\rho\sin\alpha)$.

Розглянемо довільну точку $M(x;y)$ на прямій і одержимо вектор $\vec{PM}=(x-\rho\cos\alpha; y-\rho\sin\alpha)$. Оскільки $\vec{PM}\perp\vec{OP}$, то за формулою (2.18) отримаємо

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OP}=(x-\rho\cos\alpha)\cdot\rho\cos\alpha+(y-\rho\sin\alpha)\cdot\rho\sin\alpha=$$

$$=x\rho\cos\alpha-\rho^2\cos^2\alpha+y\rho\sin\alpha-\rho^2\sin^2\alpha=$$

$$=x\rho\cos\alpha+y\rho\sin\alpha-\rho^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$

$$=x\rho\cos\alpha+y\rho\sin\alpha-\rho^2=0.$$

Таким чином, рівняння

$$\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y-\rho=0 \tag{3.11}$$

називається *нормальним рівнянням* прямої.

Приклад 1. Задано рівняння прямої на площині $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}$. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1) загального рівняння прямої;
2) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння прямої «у відрізках».

Побудувати задану пряму.

Розв'язання:

1) задане рівняння $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}$ необхідно звести до вигляду формули (3.7):

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}\Leftrightarrow -x+2=3y+3\Leftrightarrow x+3y+1=0;$$

2) потрібно отримати рівняння у вигляді формули (3.1):

$$x+3y+1=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3};$$

3) запишемо рівняння у вигляді формули (3.10):

$$x+3y=-1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1}+\frac{3y}{-1}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1.$$

Побудуємо задану пряму $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$ (рисунок 3.7).

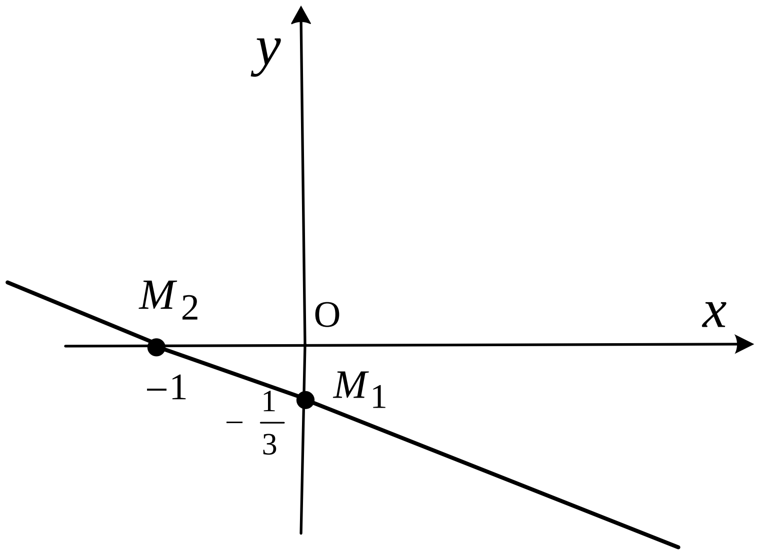


Рисунок 3.7 – Пряма прикладу 1

Відповідь: 1) $x+3y+1=0$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$.

3.1.2 Взаємне розміщення прямих на площині

I Припустимо, що прямі l_1 і l_2 задано їхніми загальними рівняннями

$$l_1 : A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2 : A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Для знаходження точки перетину $M_0(x_0;y_0)$ прямих l_1 і l_2 необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Кут φ між прямими співпадає з кутом між їхніми векторами нормалі $\vec{N}_1(A_1;B_1)$ та $\vec{N}_2(A_2;B_2)$, тобто

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.13)$$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2 випливає з умови паралельності векторів нормалі $\vec{N}_1(A_1;B_1)$ і $\vec{N}_2(A_2;B_2)$, а саме

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \| \vec{N}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (3.14)$$

Зауваження. Якщо прямі l_1 і l_2 збігаються, то відповідні координати векторів нормалі пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.15)$$

Очевидно, прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, якщо перпендикулярні їхні вектори нормалі $\vec{N}_1(A_1;B_1)$ і $\vec{N}_2(A_2;B_2)$:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (3.16)$$

II Припустимо, що прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$l_1 : y = k_1 x + b_1,$$
$$l_2 : y = k_2 x + b_2.$$

Знайдемо кут φ між прямими l_1 і l_2 (рисунок 3.8), де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$.

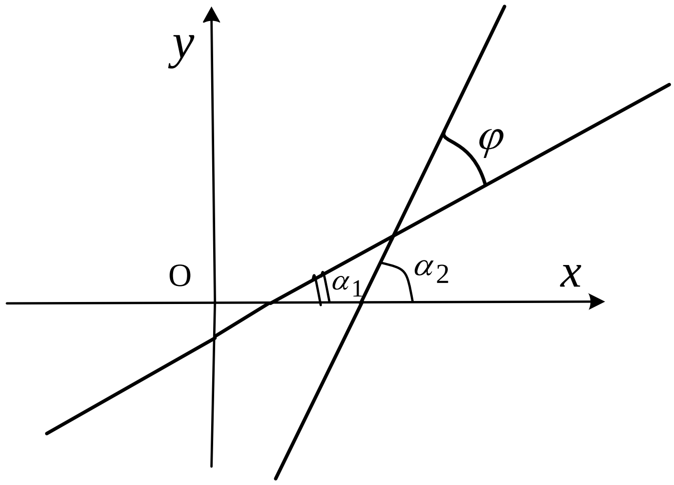


Рисунок 3.8 – Кут між прямими

Оскільки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, то у випадку $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ отримаємо

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

тобто

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{3.17}$$

Зауваження. Для знаходження гострого кута між прямими використовують формулу

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \tag{3.18}$$

Прямі l_1 і l_2 паралельні, коли $\varphi = 0\ (tg\varphi = 0)$, тобто вони мають рівні кутові коефіцієнти

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \tag{3.19}$$

Прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, коли $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(ctg\varphi = \dfrac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0 \right)$. Звідси випливає

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (3.20)$$

3.1.3 Відстань від точки до прямої

Припустимо, що задані точка $M_0(x_0; y_0)$ і пряма l: $Ax + By + C = 0$.

Знайдемо відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l (рисунок 3.9). Оберемо на прямій довільну точку $M_1(x_1; y_1)$.

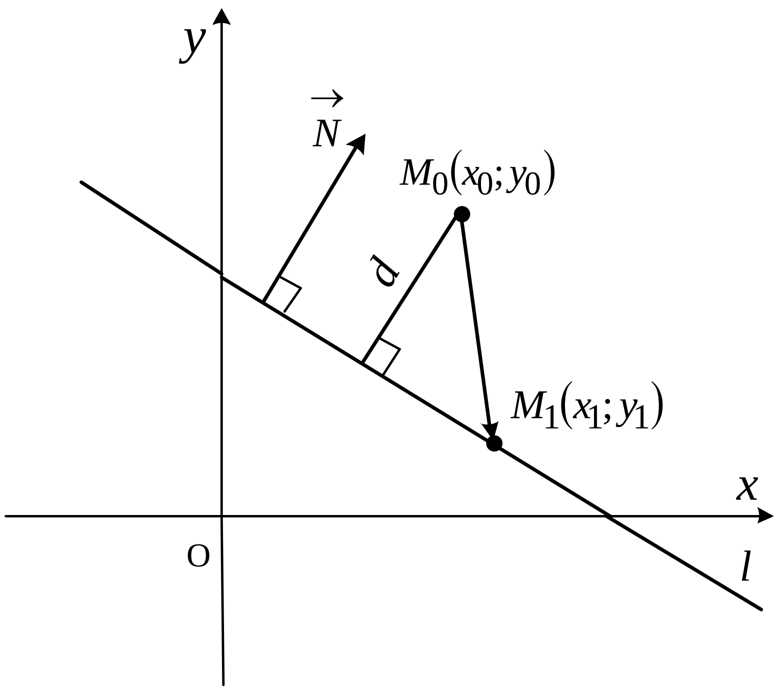


Рисунок 3.9 – Відстань від точки до прямої

Відстань d від точки M_0 до прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ на напрям нормального вектора $\vec{N} = (A; B)$. За формулою (2.19) отримаємо

$$d=\left|np_{\vec{N}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\left|\frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}}{\left|\vec{N}\right|}\right|=\left|\frac{A\cdot(x_1-x_0)+B\cdot(y_1-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_1-Ax_0+By_1-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1+C-(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Оскільки точка $M_1(x_1;y_1)$ належить прямій l, то $A_1x+B_1y+C_1=0$.

Отже, одержимо формулу для обчислення відстані від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої l, яка задана рівнянням $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.21}$$

Приклад 2. Задано координати вершин $A(-3;1), B(2;0), C(-1;-5)$ трикутника ABC. Необхідно:

1) обчислити периметр трикутника ABC;
2) записати рівняння сторін AB і AC;
3) обчислити внутрішній кут A трикутника ABC;
4) записати рівняння висоти CD;
5) обчислити довжину CD;
6) навести креслення.

Розв'язання:

1) обчислюємо координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}=(2-(-3);0-1)=(5;-1),\ \overrightarrow{BC}=(-1-2;-5-0)=(-3;-5),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1-(-3);-5-1)=(2;-6)$$

і за формулою (2.6) модулі відповідних векторів

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26},\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Розраховуємо периметр трикутника:

$$P_{\Delta ABC} = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26} + \sqrt{34} + 2\sqrt{10} \approx 17{,}25.$$

Відповідь: $P_{\Delta ABC} \approx 17{,}25$;

2) складаємо рівняння прямих AB і AC як рівняння прямих, що проходять через дві задані точки

$M_1(x_1;y_1)$	$M_2(x_2;y_2)$
$A(-3;1)$	$B(2;0)$
$A(-3;1)$	$C(-1;-5)$

За формулою (3.9) отримаємо канонічне рівняння прямої AB

$\frac{x-(-3)}{2-(-3)} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{-1}$ або $x + 5y - 2 = 0$ – загальне рівняння.

Аналогічно складаємо рівняння прямої AC:

$\frac{x-(-3)}{-1-(-3)} = \frac{y-1}{-5-1} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-6}$ - канонічне рівняння

або $3x + y + 8 = 0$ – загальне рівняння.

Відповідь: рівняння прямої AB: $x + 5y - 2 = 0$,
рівняння прямої AC: $3x + y + 8 = 0$;

3) з пункту 2 отримали координати векторів нормалі прямих AB і AC – $\overrightarrow{N_{AB}}(1;5)$ і $\overrightarrow{N_{AC}}(3;1)$ відповідно. За формулою (3.13) знайдемо внутрішній кут A трикутника ABC:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AB}}, \overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AC}}}) = \frac{\overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AC}}}{\left|\overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AB}}\right| \left|\overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AC}}\right|} = \frac{1\cdot 3 + 5\cdot 1}{\sqrt{1^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{260}} \approx 0{,}496 \Rightarrow \alpha \approx 60^0.$$

Відповідь: $\alpha \approx 60^0$;

4) оскільки $CD \perp AB$, то вектор нормалі $\overrightarrow{N}_{\overrightarrow{AB}} = (1;5)$ є напрямним вектором прямої CD. Складаємо рівняння висоти CD за формулою (3.8):

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m},$$

де $(x_0; y_0) = (-1;-5)$ – координати точки C. Таким чином, отримаємо

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-(-5)}{5} \Leftrightarrow 5x - y = 0.$$

Відповідь: рівняння висоти CD: $5x - y = 0$;

5) обчислюємо довжину CD як відстань від точки $C(-1;-5)$ до прямої AB: $x + 5y - 2 = 0$ за формулою (3.21):

$$d = \frac{|-1+5\cdot(-5)-2|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{26}} \approx 5{,}5.$$

Відповідь: довжина CD наближено дорівнює 5,5;

6) наведемо креслення (рисунок 3.10).

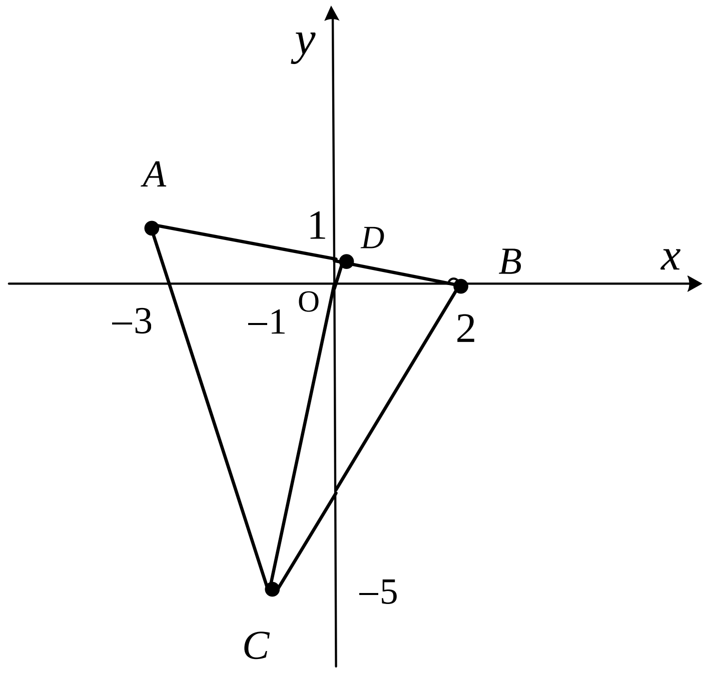


Рисунок 3.10 – Креслення до прикладу 2

Приклад 3. За умови, що функція попиту має вигляд $q(p) = -3p + 20$, а функція пропозиції $s(p) = 8p - 2$, де p – ціна за одиницю товару, грош. од., потрібно:

1) визначити рівноважну ціну;

2) проаналізувати зміну обсягів пропозиції, якщо ціну товару встановити на рівні 3 грош. од.;

3) проаналізувати зміну попиту, якщо ціну товару встановити на рівні 1 грош. од.

Навести креслення.

Розв'язання:

1) координати точки рівноваги $E\left(p^*; q^*\right)$ задовольняють умову рівноваги $q\left(p^*\right) = s\left(p^*\right)$. Таким чином, для знаходження точки рівноваги необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} q^* = -3p^* + 20, \\ s^* = 8p^* - 2, \\ q^* = s^*; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^* = 14, \\ s^* = 14, \\ p^* = 2. \end{cases}$$

Тобто отримаємо точку рівноваги $E\left(p^*;q^*\right)=(14;14)$. Тому рівноважний обсяг продажу складає $s^*=14$ умов. од.

Відповідь: $E\left(p^*;q^*\right)=(14;14)$;

2) обчислюємо пропозицію на рівні $p=3$ грош. од.:

$$s(3)=24-2=22.$$

Отримаємо

$$s(3)=22>s\left(p^*\right)=14.$$

Отже, на ринку спостерігається надлишок товарів, що дорівнює $22-14=8$ умов. од.

Відповідь: надлишок товарів у розмірі 8 умов. од.

3) обчислюємо попит при ціні на рівні $p=1$ грош. од.:

$$q(1)=-3+20=17,$$

тобто

$$q(1)=17>q\left(p^*\right)=14.$$

Таким чином, на ринку спостерігається дефіцит товарів, що дорівнює $14-17=-3$ умов. од.

Відповідь: дефіцит товарів у розмірі 3 умов. од.

Наведемо креслення (рисунок 3.11).

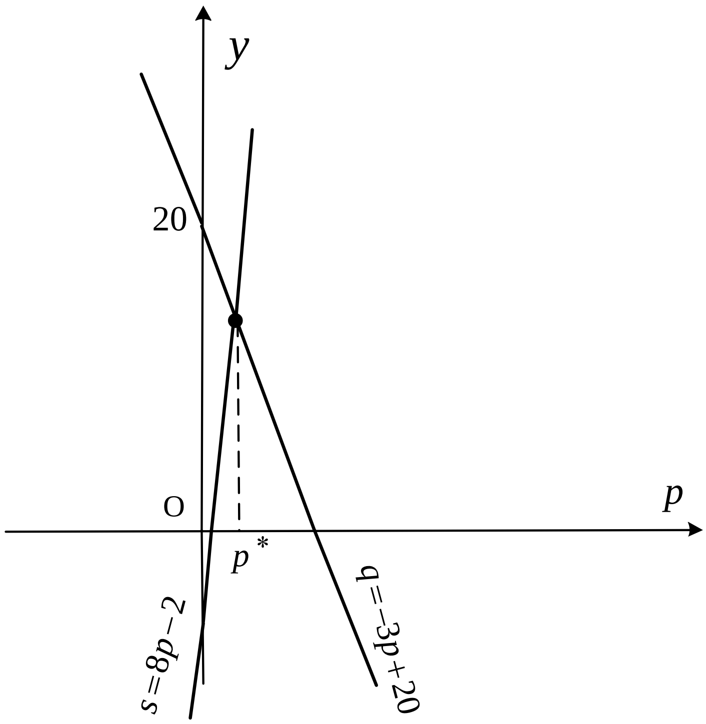


Рисунок 3.11 – Креслення до прикладу 3

3.2 Криві другого порядку

Визначення. *Лінією* або *кривою* другого порядку називається множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

де хоча б одне з чисел a, b, c не дорівнює нулю.

До ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

3.2.1 Коло

Визначення. *Колом* називається множина точок площини, відстань від яких до заданої точки (*центра кола*) дорівнює сталому числу (*радіусу*).

Рівняння кола з центром у точці $C(a;b)$ і радіусом R має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{3.22}$$

Зауваження. Якщо центр кола знаходиться на початку координат (рисунок 3.12), то рівняння (3.22) набуває *канонічного* вигляду

$$x^2+y^2=R^2. \tag{3.23}$$

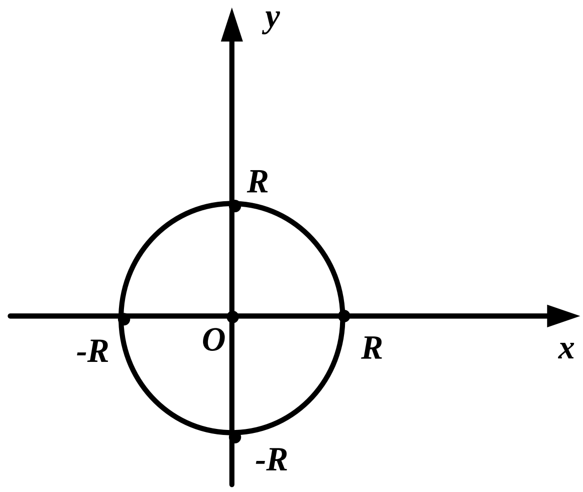


Рисунок 3.12 – Коло з центром у точці $O(0;0)$ і радіусом R

3.2.2 Еліпс

Визначення. *Еліпсом* називається множина всіх точок площини, для яких сума відстаней від кожної до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є сталою величиною (більшою, ніж відстань між фокусами).

Розглянемо на площині точки $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ – фокуси еліпса (рисунок 3.13). Розміщуємо координатні осі так, щоб вісь OX проходила через фокуси, а вісь OY – через середину відрізка F_1F_2. Позначимо суму відстаней від довільної точки еліпса $M(x;y)$ до фокусів $2a,\ 2a>2c$.

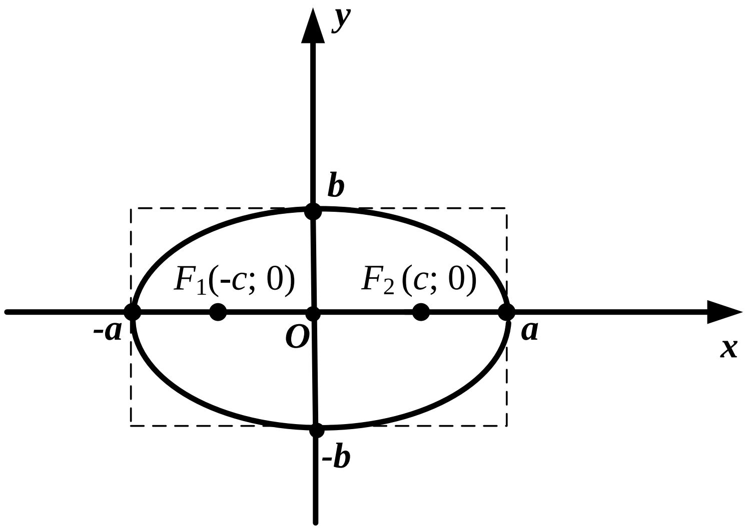


Рисунок 3.13 – Еліпс, $a > b$

За визначенням еліпса отримаємо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Обидві частини підносимо до квадрата і спрощуємо:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$
$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2;$$
$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$
$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$
$$a^4 - 2xca^2 + x^2c^2 = a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right);$$
$$a^4 - 2xca^2 + x^2c^2 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2;$$
$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Оскільки $a^2 - c^2 > 0$, то введемо позначення $b^2 = a^2 - c^2$ й отримаємо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Після ділення обох частин на a^2b^2 одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.24}$$

Рівняння (3.24) називається *канонічним* рівнянням еліпса.

Відрізки $2a$ і $2b$ називаються *великою* та *малою* осями еліпса відповідно. Точки з координатами $(\pm a;0),(0;\pm b)$ називаються *вершинами* еліпса (рисунок 3.13).

Міру відхилення еліпса від кола характеризує величина

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \tag{3.25}$$

де

$$c^2=a^2-b^2,\ a>b, \tag{3.26}$$

яка називається *ексцентриситетом* еліпса.

Очевидно, що для еліпса $0<\varepsilon<1$.

Зауваження. Якщо в рівнянні (3.24) $a=b$, то отримаємо $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола. Отже, коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються. Очевидно, для кола ексцентриситет $\varepsilon=0$.

У випадку, коли $2b$ - більша вісь еліпса, $2a$ – менша вісь еліпса, фокуси F_1, F_2 розташовані на більшій осі (рисунок 3.14), одержуємо

$$c^2=b^2-a^2,\ b>a,\ \varepsilon=\frac{c}{b} \tag{3.27}$$

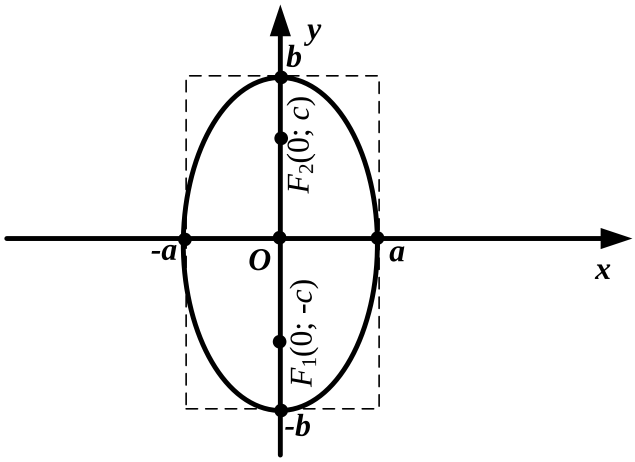


Рисунок 3.14 – Еліпс, $b > a$

3.2.3 Гіпербола

Визначення. *Гіперболою* називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней від кожної до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є сталою величиною (меншою за відстань між фокусами).

Аналогічно еліпсу розглянемо точки $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ – фокуси гіперболи (рисунок 3.15).

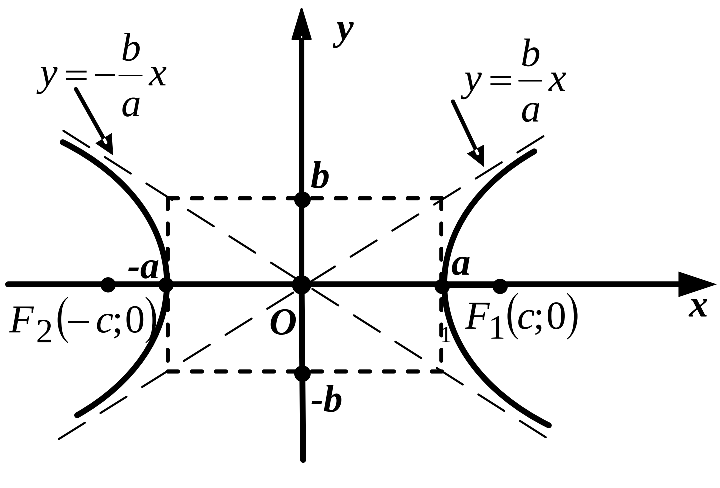


Рисунок 3.15 – Гіпербола

Позначимо модуль різниці відстаней від довільної точки $M(x;y)$ гіперболи до фокусів $2a, 2a < 2c$. Тоді за визначенням гіперболи отримаємо

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Після перетворень цього рівняння одержимо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.28}$$

де

$$b^2=c^2-a^2. \tag{3.29}$$

Рівняння (3.29) – це *канонічне* рівняння гіперболи.

Точки з координатами $(\pm a;0)$ називаються *вершинами* гіперболи.

Відрізок $2a$ називається *дійсною* віссю, а відрізок $2b$ – *уявною*.

Ексцентриситет гіперболи визначається за формулою

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \tag{3.30}$$

де $c^2=a^2+b^2$.

Очевидно, для гіперболи $\varepsilon>1$.

Можна довести, що асимптоти гіперболи задаються рівностями

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{3.31}$$

Зауваження. Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (3.32)$$

визначає гіперболу, яка називається *спряженою* до гіперболи (3.28).

Для спряженої гіперболи $2b$ – дійсна вісь, $2a$ – уявна вісь. Вершини спряженої гіперболи знаходяться в точках $(0;\pm b)$, а фокуси – у точках $(0;\pm c)$ (рисунок 3.16).

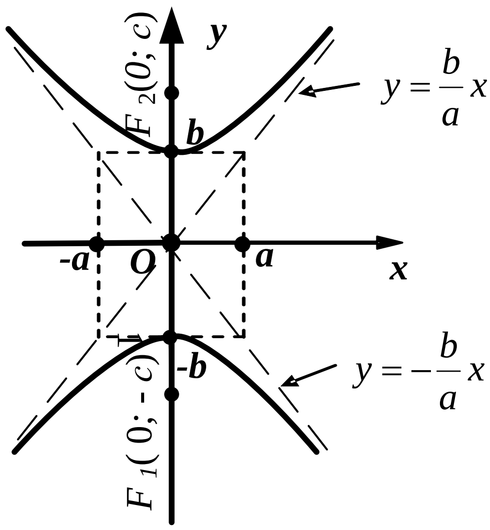


Рисунок 3.16 – Спряжена гіпербола

3.2.4 Парабола

Визначення. *Парабола* – це множина точок площини, рівновіддалених від заданої точки (*фокуса*) і даної прямої, яка не проходить через фокус (*директриса*).

Відстань від фокуса до директриси називається *параметром* параболи і позначається p, $p>0$.

Для отримання рівняння параболи відмічаємо фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ на осі OX і будуємо директрису $x=-\frac{p}{2}$ перпендикулярно осі OX (рисунок 3.17).

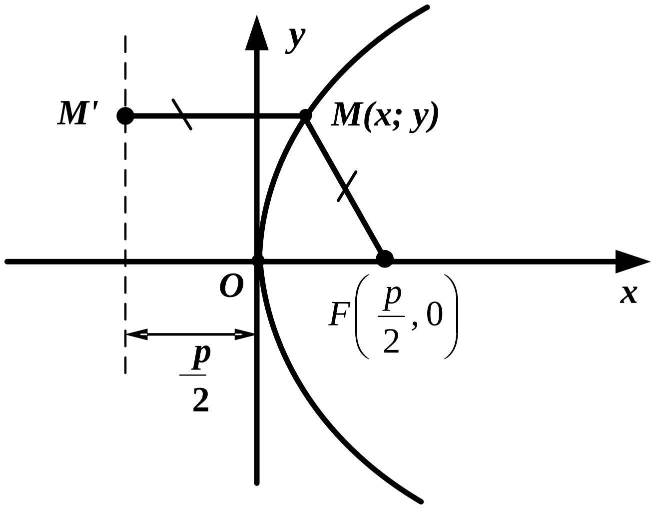


Рисунок 3.17 – Парабола

Розглянемо довільну точку параболи $M(x;y)$. З визначення параболи отримаємо

$$\frac{p}{2}+x=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\ .$$

Піднесемо обидві частини до квадрата і зробимо тотожні перетворення:

$$\frac{p^2}{4}+px+x^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

$$y^2=2px. \tag{3.33}$$

Рівняння (3.33) – це *канонічне* рівняння параболи.

Властивості параболи

1 Оскільки $p>0$, $y^2\geq 0$, то $x\geq 0$. Отже, парабола є необмеженою кривою, яка знаходиться у правій півплощині координатної площини.

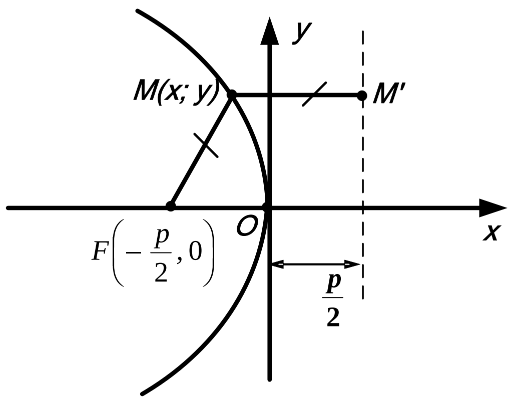
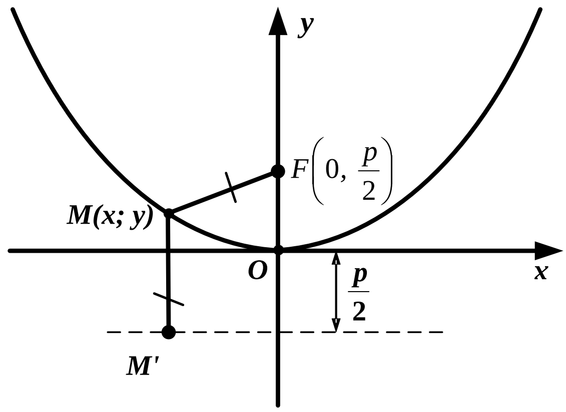
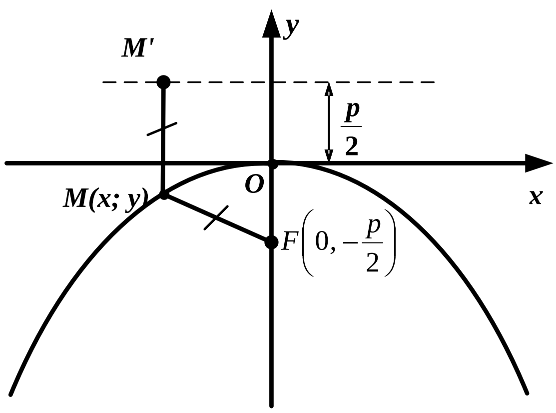
2 Точка $O(0;0)$ називається *вершиною* параболи.

3 Вісь OX – вісь симетрії параболи.

4 $\varepsilon=1$.

Зауваження. На площині XOY можна зобразити ще три параболи з центром у точці $O(0;0)$ та осями симетрії, які співпадають з координатними осями (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1

Рівняння параболи	Фокус	Директриса	Зображення параболи
$y^2 = -2px$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$	$x = \frac{p}{2}$	
$x^2 = 2py$	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$y = -\frac{p}{2}$	
$x^2 = -2py$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$	$y = \frac{p}{2}$	

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його більша вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8.

Розв’язання.

Рівняння еліпса будемо складати за формулою (3.24). За умовою $2a=10 \Rightarrow a=5$; $2c=8 \Rightarrow c=4$. За формулою (3.26) отримаємо

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9 \Rightarrow b=3.$$

Тоді канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Приклад 5. Довести, що лінія $9x^2+4y^2-36=0$ – еліпс. Знайти ексцентриситет.

Розв’язання.

За умовою $9x^2+4y^2=36$. Поділимо обидві частини рівняння на 36 та отримаємо $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ – рівняння еліпса. При цьому більша вісь $2b=6$, менша $2a=4$. Фокуси знаходяться на осі OY. За формулою (3.27) обчислюємо

$$c^2=b^2-a^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5};$$

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Відповідь: $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Приклад 6. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі OX симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=6$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

Розв’язання.

За умовою $2c=6 \Rightarrow c=3$. За формулою (3.30) отримаємо

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 5.$$

За формулою (3.28) одержимо рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

Приклад 7. Визначити тип кривої $4x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$.

Розв'язання.

$$4x^2 + 2y - 8x + 7 = 0;$$
$$4\left(x^2 - 2x\right) + 2y + 7 = 0;$$
$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4 + 2y + 7 = 0;$$
$$4(x-1)^2 + 2y + 3 = 0;$$
$$4(x-1)^2 = -2\left(y + \frac{3}{2}\right);$$
$$(x-1)^2 = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

Отримали рівняння параболи з вершиною в точці $C\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, яка розташована в нижній півплощині.

Відповідь: $(x-1)^2 = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right).$

Приклад 8. Два підприємства A і B виробляють продукцію з однією і тією самою відпускною оптовою ціною за одиницю продукції. Транспортні витрати споживача на перевезення одиниці продукції за 1 км для підприємства A складать 5 грош. од., а для підприємства B – 10 грош. од. Відстань між підприємствами – 150 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами, щоб витрати споживача були мінімальними?

Розв'язання.

Введемо позначення: c – оптова ціна за одиницю продукції, грош. од.; S_A і S_B – відстані до споживача від пунктів A і B відповідно. Тоді витрати споживачів становитимуть:

$W(A) = c + 5S_A$ (грош. од.); $W(B) = c + 10S_B$ (грош. од.).

Для зручності будемо вважати, що підприємство A в координатній площині має координати $(0;0)$, тоді за умовою підприємство B відповідно $(150;0)$.

Знайдемо множину точок $M(x;y)$, які задовольняють умову $W(A) = W(B)$, тобто

$$c + 5S_A = c + 10S_B;$$
$$S_A = 2S_B;$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-150)^2 + y^2};$$
$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 1200x + 90000 + 4y^2;$$
$$3x^2 + 3y^2 - 1200x + 90000 = 0;$$
$$(x-200)^2 + y^2 = 10000.$$

Отримали рівняння кола з центром у точці $C(200;0)$ і радіусом $R = 100$.

Відповідь: для споживачів, які територіально знаходяться всередині кола $(x-200)^2 + y^2 = 10000$, вигідніше придбати продукцію підприємства B, поза колом – продукцію підприємства A, на границі кола – однаково.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів : Вища математика. Київ : Національна академія управління, 1997. 397 с.

2 Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. Ч. 1. 546 с.

3 Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник. Київ : Знання – Прес, 2002. 454 с.

4 Гудименко Ф. С. Вища математика. Київ : Вид-во Київського університету, 1964. 377 с.

5 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2001. 648 с.

6 Неміщ В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум) : навч. посіб. Тернопіль : Економічна думка, 2001. 266 с.

7 Коваленко Л. Б., Станішевський С. О. Збірник тестових завдань для менеджерів : навч. посіб. Харків : ХНАМГ, 2010. 423 с.

8 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Харків, 2009. 86 с.