№1568

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ

ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання з дисципліни

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Харків - 2013

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 17 квітня 2012 р., протокол № 8.

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання загальнотехнічних спеціальностей.

Укладачі:

проф. Ю.В. Куліш,
старші викладачі О.О. Гончарова,
О.І. Семяшкіна,
О.В. Рибачук

Рецензент

доц. В.В. Науменко

ВСТУП

Методичні вказівки присвячені розділу курсу вищої математики: кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Вони містять теоретичні відомості, зразки розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання РГР або домашніх завдань, список літератури.

Методичні вказівки рекомендовані для студентів загальнотехнічних спеціальностей денної форми навчання. Вони призначені для виконання розрахунково-графічної роботи або індивідуальних домашніх завдань.

Номери варіантів індивідуальних завдань або розрахунково-графічних робіт видаються викладачем.

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Подвійні інтеграли

Визначення 1. Інтегральною сумою для функції 1 у плоскій області D називається сума

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i,$$

яка будується так (рисунок 1.1):

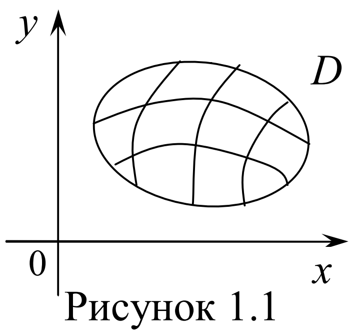

Рисунок 1.1

1) сіткою довільних кривих ділимо область D на підобласті, які позначимо $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Найбільшу відстань між двома точками підобласті ω_i називають діаметром підобласті. Позначимо площі і діаметри підобластей $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$

відповідно $\Delta\omega_1,\ \Delta\omega_2,...,\ \Delta\omega_n$ та $d_1,\ d_2,...,\ d_n$;

2) в кожній підобласті обираємо довільну точку

$$M_i(x_i, y_i) \quad (i = 1,2,...,n);$$

3) в кожній точці M_i обчислимо значення функції

$$z_i = f(x_i, y_i) = f(M_i) \quad (i = 1,2,...,n)$$

(точка $P_i(x_i, y_i, z_i)$ належить поверхні, рівняння якої $z = f(x, y)$);

4) далі обчислюємо добутки

$$f(M_1)\Delta\omega_1,\ f(M_2)\Delta\omega_2,\ ...,\ f(M_n)\Delta\omega_n$$

(кожний добуток є об'ємом малого циліндра, основою якого є підобласть ω_i, а висотою – $f(M_i)$);

5) сума цих добутків і є інтегральною сумою

$$f(M_1)\Delta\omega_1 + f(M_2)\Delta\omega_2 + ... + f(M_n)\Delta\omega_n = \sum f(M_i)\Delta\omega_i. \quad (1.1)$$

Зауваження. З геометричної точки зору інтегральна сума дорівнює об'єму ступінчастого тіла, складеного із малих циліндрів.

Визначення 2. Для кожної неперервної в замкненій області $\overline{D}$ функції $f(x, y)$ існує границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$ при умові, що число малих підобластей ω_i прямує до нескінченності $(n \to \infty)$, а діаметр кожної з них прямує до нуля $(d_i \to 0)$. Ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D і позначається так:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (1.2)$$

Властивості подвійних інтегралів

1 Сталу можна виносити за знак інтеграла

$$\iint_D Cf(x,y)dxdy = C\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (1.3)$$

2 Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (1.4)$$

3 Якщо область D можна представити як суму (об’єднання) двох частин D_1 та D_2 $(D = D_1 + D_2)$, то інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів по частинам D_1 та D_2 (рисунок 1.2).

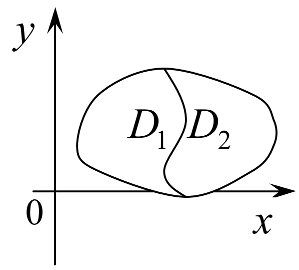

Рисунок 1.2

$$\iint_{D=D_1+D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (1.5)$$

4 **Теорема про середнє.** *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *неперервна в замкненій області* D*, тоді існує принаймні одна точка* $M_0 \in D$*, така, що справедлива рівність*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(M_0)S_D, \qquad (1.6)$$

де S_D *– площа області* D.

Значення $f(M_o) = \bar{f}$ називають середнім.

5 **Геометричний зміст**. Подвійний інтеграл дорівнює об'єму зрізаного циліндра, обмеженого областю D на площині $z = 0$, циліндричною поверхнею (для якої твірна паралельна осі OZ, а напрямна збігається з контуром області D) і поверхнею з рівнянням $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$ в області D)

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{1.7}$$

Зауваження. Якщо $f(x, y) = 1$, то подвійний інтеграл дорівнює площі області D

$$S_D = \iint_D dxdy. \tag{1.8}$$

6 **Фізичний зміст.** Подвійний інтеграл дорівнює масі неоднорідної плоскої фігури D , якщо підінтегральна функція $\rho = f(x, y)$ є щільністю (густиною) неоднорідного матеріалу

$$m_D = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{1.9}$$

Правило обчислення подвійного інтеграла

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Будемо вважати, що область D проектується на вісь OX у відрізок $[a; b]$. Межа області D перетинається будь-якою вертикальною прямою $x = x_0$, де $x_0 \in (a; b)$, не більше, ніж у двох точках. Нехай нижня межа описується рівнянням $y = \varphi_1(x)$, а верхня – рівнянням $y = \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ (рисунок 1.3). Таку область D називатимемо **правильною відносно осі OX**.

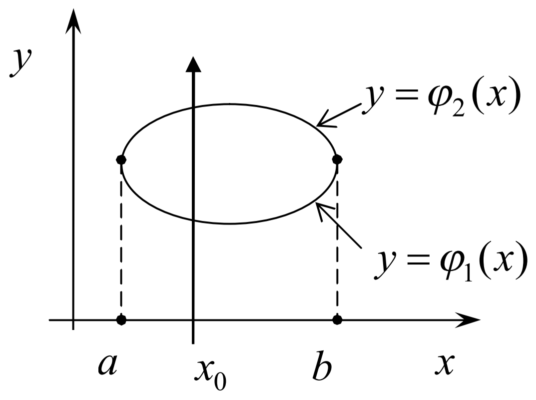

Рисунок 1.3

Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \qquad (1.10)$$

Інтеграл у квадратних дужках називається внутрішнім інтегралом. Обчислюється він як визначений інтеграл, причому y є змінною інтегрування, а x у цей час виконує роль сталої величини. Результат обчислення внутрішнього інтеграла є функція одного аргументу x. Потім обчислюється визначений інтеграл від цієї функції в межах від a до b. Він називається зовнішнім інтегралом.

Формулу (1.10) ще записують у формі

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.11)$$

При обчисленні подвійного інтеграла можна змінити порядок інтегрування. Будемо вважати, що область D проектується на вісь OY у відрізок $[c;d]$. Межа області D перетинається будь-якою горизонтальною прямою $y=y_0$, де $y_0 \in (c;d)$, не більше, ніж у двох точках. Нехай ліва межа описується рівнянням $x=\psi_1(y)$, а права – рівнянням $x=\psi_2(y)$, де $\psi_1(y)<\psi_2(y)$

(рисунок 1.4). Таку область D називатимемо **правильною відносно осі OY**.

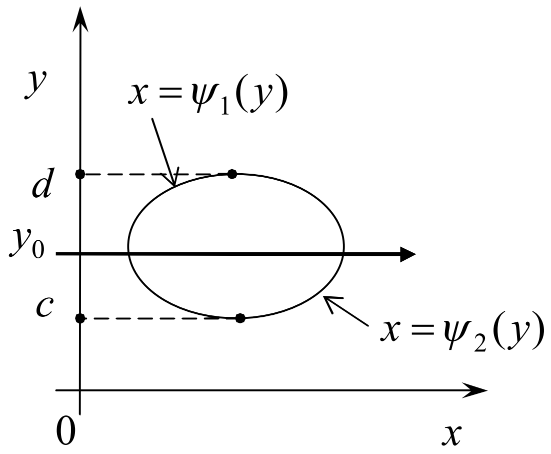

Рисунок 1.4

Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.12)$$

В цьому випадку, внутрішній інтеграл обчислюється по змінній x у припущенні, що y в цей час виконує роль сталої величини. Потім обчислюється зовнішній інтеграл.

Обчислення подвійного інтеграла від функції $f(x,y)$ по області D можна виконати за такою схемою:

1) зробити рисунок області інтегрування D, для чого в системі координат XOY побудувати лінії, які обмежують область D;

2) знайти проекцію області інтегрування D на вісь OX; це буде сегмент $[a,b]$ у формулах (1.11) (або на вісь OY, тоді це буде сегмент $[c;d]$ у формулі (1.12));

3) знайти рівняння нижньої $y=\varphi_1(x)$ і верхньої $y=\varphi_2(x)$ межі контуру області D, якщо використовуємо формули (1.11) (або рівняння лівої $x=\psi_1(y)$ і правої $x=\psi_2(y)$ межі контуру області D, якщо використовуємо формулу (1.12));

4) визначити межі інтегрування внутрішнього інтеграла зі змінною інтегрування y в (1.11), для цього через довільну точку $x_0 \in (a,b)$ провести стрілку, яка паралельна і має напрямок осі OY, і знайти ординати точок перетину з обома межами контуру (ординати точок «входу» і «виходу» із області D) (або визначити межі інтегрування внутрішнього інтеграла зі змінною інтегрування x у формулі (1.12), для цього через довільну точку інтервалу $y_0 \in (c;d)$ провести стрілку, яка паралельна і має напрямок осі OX, і знайти абсциси точок «входу» і «виходу» із області D);

5) обчислити інтеграл.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$ по області D, де D − область, обмежена лініями $y = 2 - x^2$ та $2x - y = 1$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла використаємо формулу (1.11).

1 На площині XOY побудуємо лінії, що обмежують область D: $y = 2 - x^2$ – парабола, вітки якої напрямлені вниз, вершиною є точка $(0,2)$, парабола симетрична відносно осі OY; $2x - y = 1$ – пряма, яка відсікає на осях координат відрізки $1/2, -1$ (рисунок 1.5).

2 Проектуємо область D на вісь OX.

На осі утворився сегмент, кінцями якого є абсциси точок перетину параболи $y = 2 - x^2$ з прямою $2x - y = 1$. Щоб знайти їх, розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ 2x - y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = 2x - 1; \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$$

За теоремою Вієта $x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

Таким чином, сегмент $[-3;1]$ буде проміжком інтегрування зовнішнього інтегралу, змінною інтегрування якого є x.

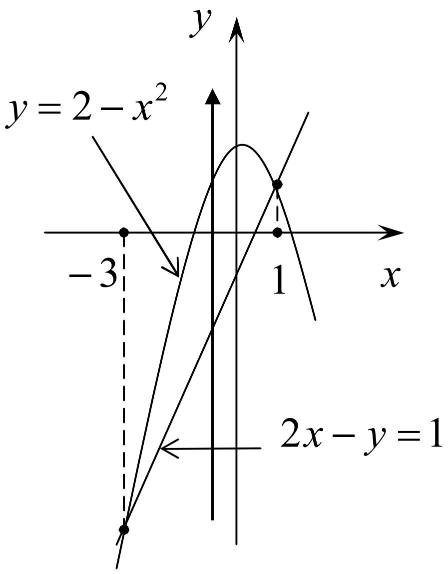

Рисунок 1.5

3 Нижня межа області D описується рівнянням $2x - y = 1$, тобто $y = 2x - 1$, а верхня $y = 2 - x^2$.

4 Визначимо межі інтегрування внутрішнього інтеграла (змінна інтегрування y): проводимо через довільні точки інтервалу (–3;1) стрілку паралельно до осі OY і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу» із області $\varphi_1(x) = 2x - 1$ і $\varphi_2(x) = 2 - x^2$.

Нагадаємо, що при інтегруванні внутрішнього інтеграла вважаємо, що x поводить себе як стала величина.

5 Обчислюємо

$$I = \iint_D (x - y)\,dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)dy = \int_{-3}^{1} dx \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(x(2 - x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2}\left((2 - x^2)^2 - (2x - 1)^2\right) \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(-x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\left(4 - 4x^2 + x^4 - 4x^2 + 4x - 1\right) \right) dx =$$

$$=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=\left(-\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{243}{10}-\frac{81}{4}-\frac{54}{3}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=$$

$$=\frac{-6-15+40-60-1458+1215+1080-540}{60}=\frac{256}{60}=\frac{64}{15}.$$

Відповідь. $I=\dfrac{64}{15}$.

Зауваження. Якщо межа області D має складнішу форму, то область D потрібно розбити на суму правильних відносно осі OX (або OY) підобластей, а тоді використати властивість (1.5) подвійного інтеграла. Інколи вдається запобігти такого розбиття області D на частини при вдалому виборі формули (1.11) або (1.12) для обчислення подвійного інтеграла.

Приклад 2. Щоб обчислити подвійний інтеграл з прикладу 1 за формулою (1.12), потрібно область D: $y=2-x^2$, $2x-y=1$; спроектувати на вісь OY. Права межа області D в такому випадку буде складатися з двох ліній – прямої і частини параболи, що задаються різними аналітичними виразами. Тому для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ за формулою (1.12) потрібно розбити область D на суму двох підобластей $D=D_1+D_2$, для чого провести горизонтальну пряму через точку перетину параболи і прямої. Тоді

$$\iint\limits_{D=D_1+D_2}(x-y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x-y)dxdy.$$

1 Ще раз зробимо креслення (рисунок 1.6).

2 Проектуємо області D_1 та D_2 на вісь OY. На осі утворилися два сегменти, кінцями яких є ординати точок перетину обох віток параболи $y = 2 - x^2$ з прямою $2x - y = 1$ і перетину параболи $y = 2 - x^2$ з віссю OY $(x = 0)$. Згадаємо, що в прикладі 1 було знайдено абсциси точок перетину параболи і прямої $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Тоді, очевидно, відповідні ординати такі: $y_1 = 2 - (-3)^2 = -7$, $y_2 = 2 - 1^2 = 1$.Ордината y_3 точки перетину параболи з віссю OY, очевидно, $y_3 = 2 - 0^2 = 2$.

Таким чином, сегменти $[-7;1]$ та $[1;2]$ є проміжками інтегрування зовнішнього інтеграла, змінною інтегрування якого є y.

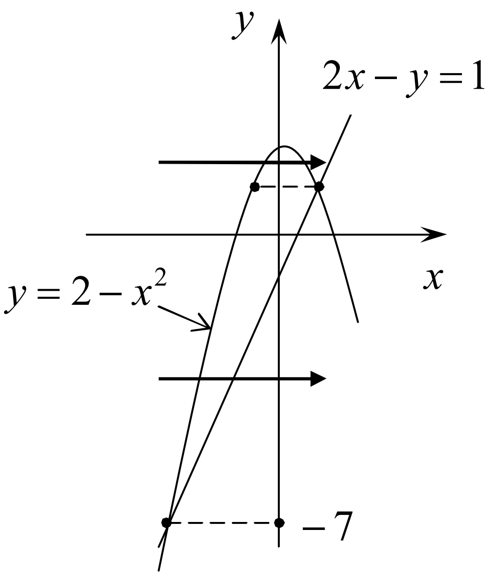

Рисунок 1.6

3 Рівняння параболи $y = 2 - x^2$, тобто $x = \pm\sqrt{2 - y}$, будемо вибирати рівняння $x = \sqrt{2 - y}$, якщо $x > 0$, а рівняння $x = -\sqrt{2 - y}$, якщо $x < 0$. Так, ліва межа області D_1 описується рівнянням $x = -\sqrt{2 - y}$, а права – рівнянням $2x - y = 1$, тобто $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. Для області D_2 ліва межа описується рівнянням $x = -\sqrt{2 - y}$, а права – рівнянням $x = \sqrt{2 - y}$.

4 Визначимо межі інтегрування внутрішніх інтегралів (змінна інтегрування x): проводимо через довільні точки інтервалів $(-7;1)$ та $(1;2)$ стрілки паралельно до осі OX і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу»:

для D_1: $\psi_1(y) = -\sqrt{2 - y}$ і $\psi_2(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$;

для $D_2: \psi_1(y) = -\sqrt{2-y},\ \ \psi_2(y) = \sqrt{2-y}$.

$$5\ \iint\limits_{D=D_1+D_2} (x-y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x-y)dxdy + \iint\limits_{D_2} (x-y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}} (x-y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} (x-y)dx.$$

Нагадаємо, що при інтегруванні внутрішнього інтеграла за dx, вважаємо, що y поводить себе як стала величина.

Потрійні інтеграли.

Визначення 3. Інтегральною сумою для функції $\rho = f(x, y, z)$ в області Ω називається сума

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i,$$

яка будується за алгоритмом, аналогічним алгоритму побудови інтегральної суми для функції $z = f(x, y)$ (див. вираз (1.1)), тільки просторова область Ω в даному випадку ділиться на малі просторові підобласті ω_i довільними поверхнями, $\Delta\upsilon_i$ – це об'єми підобластей , а точки P_i мають координати $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

Визначення 4. Для кожної неперервної в замкненій області $\overline{\Omega}$ функції $\rho = f(x, y, z)$ існує границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i$ при умові, що число малих підобластей $\Delta\upsilon_i$ прямує до нескінченності $(n \to \infty)$, а діаметр кожної з них прямує до нуля $(d_i \to 0)$. Ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $\rho = f(x, y, z)$ по області Ω і позначається так:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\upsilon_i = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz. \qquad (1.13)$$

Властивості потрійних інтегралів

Властивості 1 – 4 аналогічні властивостям подвійних інтегралів (див. формули (1.3) – (1.6)).

5 **Фізичний зміст**. Потрійний інтеграл дорівнює масі неоднорідного тіла Ω, якщо підінтегральна функція $\rho = f(x,y,z)$ є щільністю цього тіла

$$m_{\Omega} = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz. \qquad (1.14)$$

6 **Геометричний зміст.** Потрійний інтеграл від функції $\rho \equiv 1$ на області Ω дорівнює об’єму просторового тіла Ω

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} 1dxdydz. \qquad (1.15)$$

Правило обчислення потрійного інтеграла

Обчислення потрійного інтеграла, аналогічно обчисленню подвійного, зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Будемо вважати, що просторова область Ω проектується на площину OXY у правильну відносно осі OX плоску область D. Межа області Ω перетинається будь-якою вертикальною прямою, проведеною через довільну точку області D і паралельно осі OZ, не більше, ніж у двох точках. Нехай нижня межа описується рівнянням $z = h_1(x,y)$, а верхня – рівнянням $z = \varphi_2(x,y)$ ($h_1(x,y) < h_2(x,y)$ для $(x,y) \in D$). Якщо при цьому в області D площини OXY x змінюється в межах відa до b, і область D обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$, тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b}\{\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}[\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dy\}dx. \qquad (1.16)$$

Формулу (1.16) ще записують у формі

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (1.17)$$

Зауваження 1. Кожний з трьох інтегралів інтегрується за однією змінною (саме змінна інтегрування розташована під знаком диференціала), інші літери в цей час виконують роль сталих величин, причому порядок інтегрування такий: внутрішній, проміжний, зовнішній.

Зауваження 2. За аналогією з подвійним інтегралом в потрійному інтегралі можна змінити порядок інтегрування. Таким чином, потрійний інтеграл можна обчислювати шістьма способами.

Обчислення потрійного інтеграла можна виконати за такою схемою:

1) знайти проекцію D просторової області Ω на площину XOY;

2) знайти проекцію плоскої області D на вісь OX, це буде сегмент $[a,b]$;

3) визначити точки дотику A і B дотичних до контуру області D, які проходять через кінці сегмента $[a,b]$; точки A і B поділяють контур області D на дві частини: $y=\varphi_1(x)$ – нижня, $y=\varphi_2(x)$ – верхня;

4) провести через контур області D циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі OZ.

Спільні точки циліндричної поверхні і поверхні області Ω утворюють лінію ℓ, яка поділяє поверхню області Ω на дві частини: нижню з рівнянням $z=h_1(x,y)$ і верхню з рівнянням $z=h_2(x,y)$ відносно площини XOY;

5) через довільну точку $x\in(a,b)$ провести стрілку паралельно осі OY в площині XOY, яка перетинає область D, і визначити ординати точок «входу» і «виходу» із області D:

$$y=\varphi_1(x),\ \ y=\varphi_2(x).$$

6) через довільну точку області D провести стрілку паралельно осі OZ, яка перетинає область Ω, і визначити аплікати точок «входу» і «виходу» із області Ω:

$$z=h_1(x,y),\ \ z=h_2(x,y).$$

7) обчислити інтеграл за формулою (1.17).

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$ по області Ω, де Ω − область, обмежена координатними площинами $XOY\,(z=0)$, $YOZ\,(x=0)$, $XOZ\,(y=0)$ і похилою площиною P з рівнянням $x+y+z=1$.

Розв'язання. Накреслимо в просторовій системі координат піраміду Ω, яка має вершини в точках $O(0{,}0{,}0)$, $A(1{,}0{,}0)$, $B(0{,}1{,}0)$, $C(0{,}0{,}1)$ (похила площина P відсікає на осях координат відповідно відрізки $a=1$, $b=1$, $c=1$) (рисунок 1.7).

Далі діємо за схемою:

1) проектуємо тіло Ω (піраміду) на площину XOY – проекція D − це трикутник OAB;

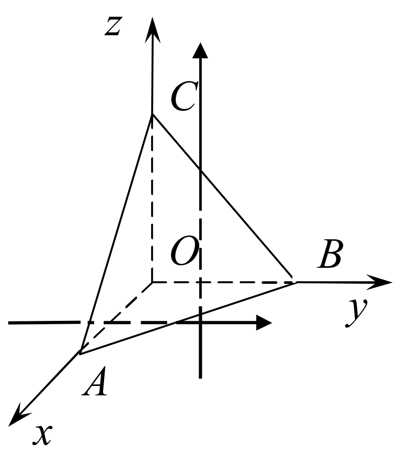

Рисунок 1.7

2) проектуємо трикутник OAB на вісь OX – проекція, що є сегментом $[0;1]$ – проміжок інтегрування зовнішнього інтеграла (за аргументом x);

3) через довільну точку інтервалу $(0;1)$ будуємо в площині XOY стрілку паралельно осі OY і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу» з області D (нижня межа – це вісь OX, тобто $y=0$; а верхня межа – пряма AB, яка є

лінією перетину площини P і площини $XOY\,(z=0)$, тобто розв’язком системи $\begin{cases} x+y+z=1, \\ z=0; \end{cases}$ звідки $x+y=1$, і $y=1-x$).

Таким чином, $\varphi_1(x)=0,\ \varphi_2(x)=1-x$;

4) проводимо далі стрілку паралельно осі OZ так, щоб вона перетнула область Ω (піраміду) і відмічаємо аплікати точок «входу» і «виходу» (нижня межа – це площина XOY, тобто $z=0$, а верхня межа – це площина $P: x+y+z=1$, звідки $z=1-x-y$. Таким чином, $h_1(x,y)=0,\ h_2(x,y)=1-x-y$;

5) обчислимо інтеграл

$$I=\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xyzdz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-y}ydy\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1-x-y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}y(1-x-y)^2dy=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}[(1-x)^2y-2(1-x)y^2+y^3]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\left.\left((1-x)^2\frac{y^2}{2}-2(1-x)\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^{1-x}=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6-8+3}{12}\int_0^1 x(1-x)^4dx=\frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4dx=\begin{vmatrix} t=1-x, \\ dt=-dx, \\ t_1=1, t_2=0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{24}\int_1^0(1-t)t^4dt=\frac{1}{24}\int_0^1(t^4-t^5)dt=\frac{1}{24}\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}\right)\right|_0^1=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{720}.$$

Відповідь. $I=\dfrac{1}{720}$.

Заміна змінних у кратних інтегралах. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Якщо область інтегрування D у подвійному інтегралі є кругом або частиною круга, тоді обчислення таких інтегралів стає простішим, якщо перейти від прямокутних координат (x, y) до полярних координат (φ, r), де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, (рисунок 1.8).

Якщо полярна система координат (полярна вісь із полюсом) узгоджена з прямокутною, зв'язок між прямокутними координатами точки $M(x, y)$ та її полярними координатами $M(\varphi, r)$ має вигляд: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

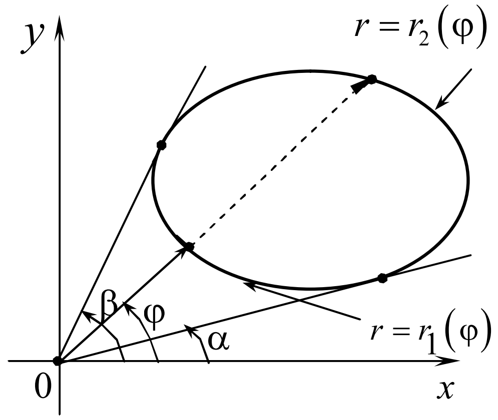

Рисунок 1.8

Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D f\left[r\cos\varphi, r\sin\varphi\right]rdrd\varphi. \tag{1.18}$$

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах

Визначення 5. Циліндричними координатами просторової точки $M(\varphi, r, z)$ називають сукупність полярних координат її проекції на площину XOY і аплікати точки.

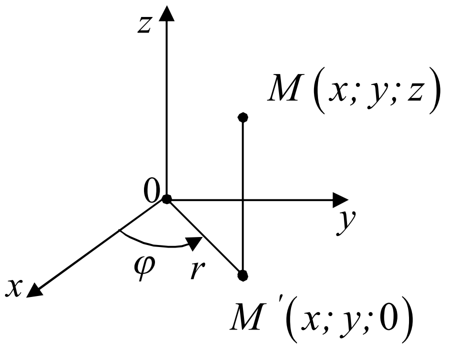

Рисунок 1.9

Якщо область інтегрування Ω у потрійному інтегралі є частиною кругового циліндра, тоді обчислення такого інтеграла стає простішим, якщо перейти від прямокутних координат (x, y, z) до циліндричних координат (φ, r, z) (див. рисунок 1.9).

Якщо прямокутна та полярна системи координат на площині XOY узгоджені між собою, то зв'язок між прямокутними координатами точки $M(x, y, z)$ та її циліндричними координатами $M(\varphi, r, z)$ має вигляд

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Формула переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі така:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f\left[r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right]rd\varphi drdz. \qquad (1.19)$$

Геометричні та фізичні застосування кратних інтегралів

Подвійні інтеграли:

1 Об'єм зрізаного циліндра

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

2 Площа плоскої фігури D

$$S_D = \iint_D dxdy.$$

3 Маса неоднорідної плоскої фігури D із щільністю $\rho = f(x, y)$

$$m_D = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

4 Координати центра мас плоскої фігури D із щільністю $\rho = f(x, y)$

$$x_{cm} = \frac{1}{m_D} \iint_D x f(x, y) dxdy,$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m_D} \iint_D y f(x, y) dxdy.$$

***Потрійні інтеграли*:**

5 Об'єм довільного тіла Ω

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dxdydz.$$

6 Маса неоднорідного тіла Ω із щільністю $\rho = f(x, y, z)$

$$M_\Omega = \iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz.$$

7 Моменти інерції неоднорідного тіла Ω із щільністю $\rho = f(x, y, z)$ відносно осей координат

$$J_{OZ} = \iiint_D (x^2 + y^2) f(x, y, z) dxdydz;$$

$$J_{OX} = \iiint_D (y^2 + z^2) f(x, y, z) dxdydz;$$

$$J_{OY} = \iiint_D (x^2 + z^2) f(x, y, z) dxdydz.$$

8 Координати центра мас неоднорідного тіла Ω із щільністю $\rho = f(x, y, z)$

$$x_{cm} = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x f(x, y, z) dV;$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega y f(x, y, z) dV;$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z f(x, y, z) dV.$$

2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай у просторі задано функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$ і нехай в області визначення цієї функції задано дугу AB кривої L:

1) поділимо дугу AB довільними точками $A = M_0$, M_1,.., $M_n = B$ на малі дужки M_0M_1, M_1M_2,…, $M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо Δl_1, Δl_2,..., Δl_n ($M_{i-1}M_i = \Delta l_i$);

2) на кожній дужці (рисунок 2.1) довільно оберемо точку P_1, $P_2,...,P_n$ $(P_i(x_i,\, y_i,\, z_i))$;

3) обчислимо значення функції $u = f(x,\, y,\, z)$ у точках P_i $f(P_1)$, $f(P_2),...,f(P_n)$;

4) обчислимо добутки $f(P_1)\Delta l_1$, $f(P_2)\Delta l_2,...,f(P_n)\Delta l_n$;

5)обчислимо суму таких добутків

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.1)$$

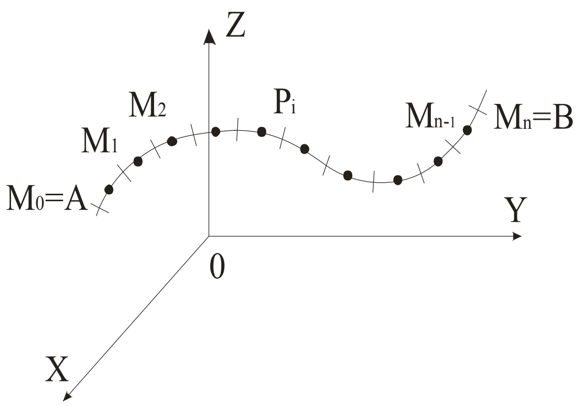

Рисунок 2.1

Визначення 1. Сума (2.1) називається інтегральною сумою, побудованою для функції $u = f(x,\, y,\, z)$ вздовж дуги AB кривої L.

Визначення 2. Якщо функція $u = f(x,\, y,\, z)$ неперервна, а дуга AB кривої L має скінченну довжину, тоді існує границя інтегральної суми (2.1) при умові, що $\max \Delta l_i \to 0$, яка називається криволінійним інтегралом першого роду і позначається так:

$$\lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{L} f(x, y, z)d\ell , \qquad (2.2)$$

$d\ell$ називають диференціалом довжини дуги.

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

1 Сталу можна виносити за знак інтеграла

$$\int_{AB} C\, f\, dl = C \int_{AB} f\, dl. \tag{2.3}$$

2 Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій

$$\int_{AB} (f+g)\, dl = \int_{AB} f\, dl + \int_{AB} g\, dl\ . \tag{2.4}$$

3 Якщо дугу AC кривої L можна подати як суму (об'єднання) двох частин AB та BC $(A\tilde{N} = AB + BC)$, тоді

$$\int_{AB+BC} f\, dl = \int_{AB} f\, dl + \int_{BC} f\, dl\ . \tag{2.5}$$

4 Криволінійний інтеграл першого роду не змінює знак при зміні напрямку інтегрування

$$\int_{AB} f\, dl = \int_{BA} f\, dl\ . \tag{2.6}$$

5 Якщо підінтегральна функція $Q = Q(x,y,z)$ є лінійною щільністю неоднорідної кривої L, тоді криволінійний інтеграл буде масою дуги AB кривої L

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dl = M_{AB}. \tag{2.7}$$

Зауваження. У випадку однорідної кривої $(Q \equiv 1)$ маса чисельно дорівнює довжині дуги

$$M_{AB} = \int_{AB} dl = l_{AB}\ .$$

Правило обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду виконується шляхом перетворення його у звичайний визначений інтеграл за таким правилом: якщо крива L задається параметричними рівняннями

$$(L)\quad \begin{cases} x = x(t), & t_0 \le t \le t_1 \\ y = y(t), & \ \ \updownarrow \quad\ \ \updownarrow \\ z = z(t), & \ \ A \quad\ \ B \end{cases}$$

причому існують неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, тоді має місце рівність

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt. \quad (2.8)$$

Зауваження. У випадку криволінійного інтеграла вздовж плоскої кривої, рівняння якої задано явно $y = y(x)$, з формули (2.8) можна одержати

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \quad (2.9)$$

де x_1, x_2 – абсциси точок A і B відповідно.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} y^2 d\ell$, якщо дуга AB є частиною кола $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Знайдемо диференціал довжини дуги $d\ell$:

$$x'_t = -a\sin t,\ y'_t = a\cos t,\ \left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t = a^2,$$

$$dl = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt = a\,dt.$$

Тоді

$$I=\int\limits_{AB} y^2 d\ell=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t a dt=a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{a^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^3\pi}{4}.$$

Відповідь. $I=\dfrac{a^3\pi}{4}$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\frac{y}{x}d\ell$, якщо AB є дуга параболи $y=\frac{1}{2}x^2$ від точки $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;2)$.

Розв'язання. Для обчислення цього інтеграла використаємо формулу (2.9). Дуга AB параболи $y=\frac{1}{2}x^2$, тоді $y'=\frac{1}{2}2x=x$. Диференціал дуги дорівнює

$$d\ell=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx,\ \ x\in[1;2].$$

Тоді

$$I=\int\limits_{AB}\frac{y}{x}d\ell=\int\limits_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=1+x^2, \\ dt=2xdx, \\ \dfrac{dt}{2}=xdx, \\ t_1=2,\ t_2=5 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\int\limits_2^5\sqrt{t}dt=\frac{1}{4}\frac{2t^{3/2}}{3}\Bigg|_2^5=\frac{1}{6}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}\right)=\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

Відповідь. $I = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$

Приклад 3. Знайти координати центра мас гвинтової лінії зі сталою лінійною густиною (щільністю) ρ_0, якщо рівняння лінії задано в параметричній формі $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = at$ $(0 \le t \le \pi)$.

Розв'язання. Радіус-вектор центра мас $\bar{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int\limits_{\ell} \rho(\ell)(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})d\ell$, де m – маса лінії. За формулою (2.7) для маси маємо

$$m = \int\limits_{L} \rho(\ell)d\ell = \rho_0 \int\limits_0^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^{\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + a^2}\,dt = \rho_0\sqrt{R^2 + a^2}\int\limits_0^{\pi} dt = \pi\rho_0\sqrt{R^2 + a^2}.$$

Тепер знаходимо

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{m}\rho_0 \int\limits_0^{\pi} \left[R\cos t\vec{i} + R\sin t\vec{j} + at\vec{k}\right]\sqrt{R^2 + a^2}\,dt =$$

$$= \frac{\rho_0}{m}\sqrt{R^2 + a^2}\left[R\sin t\vec{i} - R\cos t\vec{j} + a\frac{t^2}{2}\vec{k}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\rho_0}{m}\sqrt{R^2 + a^2}\left[2R\vec{j} + a\frac{\pi^2}{2}\vec{k}\right].$$

Щоб виразити координати центра мас через параметри гвинтової лінії підставимо знайдене значення маси. Тоді ми одержуємо

$$\bar{r}_{cm} = 2\frac{R}{\pi}\bar{j} + \frac{a}{2}\pi\bar{k}.$$

Тобто центр мас гвинтової лінії на відрізку $0 \le t \le \pi$ знаходиться в точці $M_{cm}\left(0; \dfrac{2R}{\pi}; \dfrac{a\pi}{2}\right)$.

Відповідь. $\overline{r}_{cm} = \left(0; \dfrac{2R}{\pi}; \dfrac{a\pi}{2}\right)$.

Криволінійний інтеграл другого роду.

Визначення, фізичний зміст, обчислення

Нехай у деякій області D, в якій задано вектор $\vec{F} = (P, Q, R)$, координати якого є функціями від координат точки $M(x, y, z) \in D$, обрано дугу AB орієнтованої лінії L (тобто лінії, для якої вказано напрям її обходу). Лінію L будемо вважати заданою, якщо в кожній точці $M \in L$ задано її радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Побудуємо аналогічно формулі (2.1) інтегральну суму для вектор-функції $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(P_i)\Delta\vec{r}_i \quad \text{,…………………..(2.10)}$$

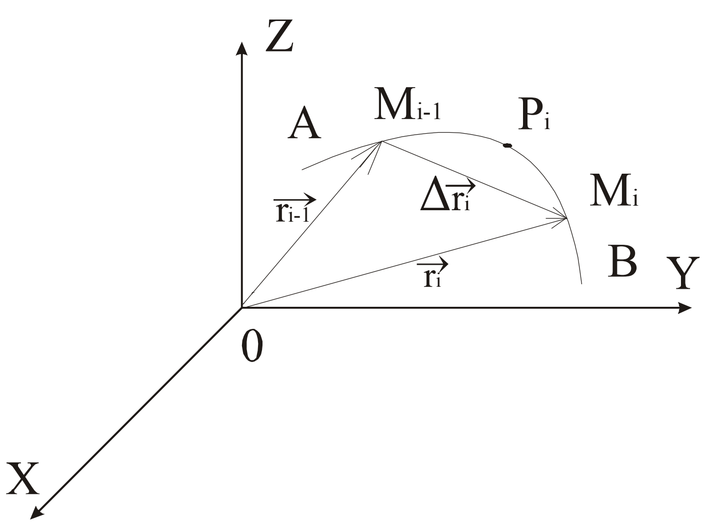

Рисунок 2.2

обчислюючи в кожному її доданку скалярний добуток вектора $\vec{F}(P_i)$ на приріст радіус-вектора $\Delta\vec{r}_i$ між двома сусідніми точками ділення дуги AB на піддуги $M_{i-1}M_i$ (рисунок 2.2).

Визначення 3. Границя інтегральної суми (2.10) при умові, що $\max|\Delta\vec{r}_i| \to 0$, називається криволінійним інтегралом другого роду і позначається так:

$$\lim_{|\Delta\vec{r}_i|}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\Delta\vec{r}_i = \int_{AB}\vec{F}d\vec{r}\,. \qquad (2.11)$$

Криволінійний інтеграл (2.11) є величиною скалярною і має такі ж властивості 1 – 3, як і інтеграл першого роду. Але при зміні орієнтації лінії L він змінює знак, тобто

$$\int_{BA}\vec{F}d\vec{r} = -\int_{AB}\vec{F}d\vec{r}\,. \qquad (2.12)$$

Зауваження 1. Якщо вектори $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ мають координати $\vec{F} = (P, Q, R)$, $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, тоді інтеграл (2.11) можна записати в координатній формі

$$\int_{AB}\vec{F}d\vec{r} = \int_{AB}Pdx + Qdy + Rdz\,. \qquad (2.13)$$

Зауваження 2. Інтеграл (2.13) має прозорий фізичний зміст, якщо вектор $\vec{F}$ є силою, тоді

$$\int_{AB}\vec{F}d\vec{r} = \int_{AB}Pdx + Qdy + Rdz = W \qquad (2.14)$$

дорівнює роботі W змінної сили $\vec{F}$ при пересуванні із точки A у точку B вздовж кривої L. Дійсно, елемент інтегральної суми (2.10) $\vec{F}(P_i)\Delta\vec{r}_i = |\vec{F}(P_i)||\Delta\vec{r}_i|\cos\alpha$ можна вважати наближеним значенням роботи сили $\vec{F}$ вздовж елементарного шляху $\Delta\vec{r}_i$, а тоді повна робота дорівнює саме формулі (2.14).

Зауваження 3. Якщо крива L задана параметричними рівняннями

$$(L)\quad \begin{cases} x = x(t), & t_0 \le t \le t_1 \\ y = y(t), & \updownarrow \qquad \updownarrow \\ z = z(t), & A \qquad B \end{cases} \tag{2.15}$$

(тобто радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ є функцією аргументу t $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$), причому функції $P(x(t), y(t), z(t))$, $Q(x(t), y(t), z(t))$, $R(x(t), y(t), z(t))$, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на сегменті $[t_0, t_1]$ ($t_0 = t_A$, $t_1 = t_B$), тоді справедлива рівність

$$\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)\} dt. \tag{2.16}$$

Рівність (2.16) можна вважати правилом обчислення криволінійного інтеграла другого роду, а саме:
криволінійний інтеграл (2.13) перетворюється у звичайний визначений інтеграл (2.16), якщо всі змінні (в тому числі і під знаками диференціалів) замінити їх виразами із параметричних рівнянь шляху інтегрування L (2.15); змінною інтегрування цього визначеного інтеграла є параметр t, а проміжком інтегрування є проміжок зміни параметра $t_0 \le t \le t_1$.

Зауваження 4. Якщо AB – дуга плоскої кривої L, що задана рівнянням $y = y(x)$, то криволінійний інтеграл (2.13) перетворюється у визначений інтеграл ($t = x$, $z \equiv 0$)

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} P[x, y(x)] dx + Q[x, y(x)] y'(x) dx \\ = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] y'(x)\} dx, \tag{2.17}$$

де x_1 – абсциса точки A; x_2 – абсциса точки B.

Якщо AB – дуга плоскої кривої L, що задана рівнянням $x = x(y)$, то криволінійний інтеграл (2.13) перетворюється у визначений інтеграл

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} P[x(y),y]x'(y)dy + Q[x(y),y]dy$$
$$= \int_{y_1}^{y_2} \left\{ P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y] \right\} dy, \tag{2.18}$$

де $x'(y) = x'_y(y)$, y_1 – ордината точки ; y_2 – ордината точки B.

Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} \vec{F} d\vec{r}$ від шляху інтегрування

Визначення 4. Область називається однозв'язною, якщо будь-який контур у цій області можна стягнути в точку.

Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *разом із похідними* $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ *неперервні в однозв'язній області* D. *Тоді для того, щоб інтеграл* $\int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ *не залежав від шляху інтегрування в деякій просторовій області* D, *необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз* $Pdx + Qdy + Rdz$ *був в області* D *повним* *диференціалом деякої однозначної функції, тобто щоб існувала така функція $u(x, y, z)$, для якої*

частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ збігаються з P, Q, R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R;$$

і щоб виконувалися рівності:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{2.19}$$

Зауважимо, що рівності (2.19) виконуються, якщо функція $u(x, y, z)$ двічі диференційована в області D.

Визначення 5. Циркуляцією вектора $\vec{F}(\vec{r})$ по замкненому контуру L називається криволінійний інтеграл другого роду від цього вектора по контуру L, він позначається

$$\ddot{O} = \oint_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}. \tag{2.20}$$

Теорема. *Якщо в області D криволінійний інтеграл другого роду $\int_L \vec{F}d\vec{r}$ не залежить від форми шляху інтегрування, то циркуляція вектора $\vec{F}(\vec{r})$ по будь-якому замкненому контуру в цій області дорівнює нулю.*

Теорема. *Якщо в області D циркуляція вектора $\vec{F}(\vec{r})$ по будь-якому контуру дорівнює нулю, то криволінійний інтеграл $\int_L \vec{F}d\vec{r}$ в цій області не залежить від форми шляху інтегрування L, а залежить тільки від кінцевих точок.*

Напрямок обходу контуру пов'язаний із напрямком нормалі до поверхні і на контурі. Ми вважаємо, що нормаль до поверхні у внутрішній частині області можна неперервно перенести до нормалі на контурі без зміни напрямку нормалі.

При обчисленні циркуляції вважається додатним такий напрямок переносу нормалі по контуру, при якому внутрішня область залишається зліва.

Це визначення додатного напрямку обходу контуру еквівалентне такому: додатним є такий напрямок обходу контуру, який з кінця нормалі до поверхні має вигляд руху проти годинникової стрілки.

Зв'язок між подвійними і криволінійними інтегралами

Зв'язок між подвійними інтегралами на плоскій області D і криволінійним інтегралом вздовж контуру Г, який обмежує область D, міститься у формулі Гріна – Остроградського, яка має місце при таких умовах:

Теорема. *Якщо функції* $P(x,y)$ *і* $Q(x,y)$ *мають неперервні частинні похідні* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *у замкненій області* $\overline{D}$, *тоді має місце формула*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy \ . \qquad (2.21)$$

Наслідок. Нехай $P = -y$, $Q = x$. Тоді формула Гріна – Остроградського має вигляд $\iint_D [1-(-1)]dxdy = \oint_\Gamma - ydx + xdy$, тобто за допомогою криволінійних інтегралів можна обчислювати площу плоскої фігури, а саме

$$S_D = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \oint_\Gamma - ydx + xdy \,. \qquad (2.22)$$

Зв'язок між криволінійними інтегралами

Криволінійний інтеграл другого роду можна зобразити у вигляді

$$\int\limits_{AB} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора дотичної, в припущенні, що його напрямок відповідає напрямку шляху інтегрування.

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int\limits_{L} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy$ вздовж ліній:

1) $L_1 = AB$ – парабола $y = x^2$, яка проходить через точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$;

2) $L_2 = ACB$ – ламана, яка проходить через точки $A(0;0)$, $C(1;0)$, $B(1;1)$.

<u>*Розв'язання*</u>. 1 Зобразимо криву AB (рисунок 2.3). Криволінійний інтеграл вздовж дуги зведемо до визначеного інтеграла за формулою (2.16). Дуга параболи $AB: y = x^2$, тоді $y' = 2x$. Межами інтегрування будуть $x_1 = 0$ (абсциса початкової точки A) та $x_2 = 1$ (абсциса кінцевої точці B). Обчислимо цей інтеграл

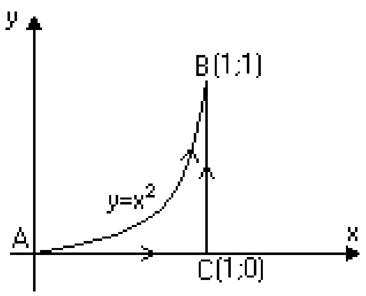

Рисунок 2.3

$$I = \int\limits_{AB} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 \left(3x^2 \cdot x^2dx + \left(x^3+1\right)\cdot 2xdx\right) =$$

$$=\int_0^1 (3x^4+2x^4+2x)dx=\int_0^1 (5x^4+2x)dx=\left(x^5+x^2\right)\Big|_0^1=1+1=2.$$

Відповідь. $I=2$.

2 Лінія AB є ламаною і вона складається з суми відрізків $AB=AC+CB$ (див. рисунок 2.3).

$$I=\int_{AB} 3x^2ydx+(x+1)dy=\int_{AC} 3x^2ydx+(x+1)dy+\int_{CB} 3x^2ydx+(x+1)dy.$$

Обчислимо інтеграл на кожному з них.

а) рівняння прямої AC має вид $y=0$, тоді $dy=0$, оскільки на цій прямій y має стале значення. Перетворимо криволінійний інтеграл у визначений, межами якого є в точці A $x_1=0$, а в точці C $x_2=1$. За формулою (2.17) одержимо

$$\int_{AC} 3x^2ydx+(x+1)dy=\int_0^1\left(3x^2\cdot 0\cdot dx+\left(x^3+1\right)\cdot 0\right)=0;$$

б) зівняння прямої CB: $x=1$, звідси $dx=0$. Інтеграл вздовж відрізка CB зведемо до визначеного інтеграла за формулою (2.18). Межами інтегрування будуть $y_1=0$ (ордината початкової точки C) та $y_2=1$ (ордината кінцевої точки B). Одержимо

$$I=\int_{CB} 3x^2ydx+(x+1)dy=\int_0^1 3\cdot 1^2y\cdot 0dy+(1+1)dy=\int_0^1 2dy=2y\Big|_0^1=2.$$

$$I=\int_{AC}+\int_{CB}=0+2=2.$$

Відповідь. $I=2$.

Зауваження. Зазначимо, що рівність цих криволінійних інтегралів не випадкова. Дійсно, перепишемо

$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy$ у вигляді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$, де $P(x,y) = 3x^2 y$, $Q(x,y) = x^3 + 1$. Функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні на всій площині. Їхні похідні $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$ та $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ теж неперервні і рівні між собою (тобто виконується рівність (2.19): $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$). Тому цей криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування між будь-якими точками на площині XOY.

3 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Розглянемо деяку поверхню G у просторі і її проекцію G_{xy} на площину XOY. Кожній точці $P(x,y,z)$ у декартовій системі координат відповідає радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Рівняння поверхні можна задати у явному вигляді

$$z = u(x,y), \quad z = z(x,y). \tag{3.1}$$

У загальному випадку рівняння поверхні має вигляд

$$S(x,y,z) = 0. \tag{3.2}$$

Геометрично це означає, що кожній точці $M(x,y,0)$, яка розташована в області G_{xy}, відповідає точка $P(x,y,z)$ на поверхні.

Визначення 1. Площина, утворена дотичними прямими, проведеними до кривих на поверхні в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$, називається дотичною площиною, проведеною до поверхні в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Визначення 2. Пряма, яка проходить через точку $P_0(x_0,y_0,z_0)$ на поверхні G перпендикулярно дотичній площині, проведеній до площини G в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$, називається нормаллю, проведеною до поверхні G в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Визначення 3. Вектором нормалі $\vec{N}(P_0)$, проведеним до поверхні G в точці P_0 , називається вектор на нормальній прямій, проведеній до поверхні G в точці P_0.

В загальному випадку вектор нормалі має вигляд

$$\vec{N}(P) = gradS(P) = \frac{\partial S(P)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial S(P)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial S(P)}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (3.3)$$

Якщо рівняння поверхні задано явно формулою (3.1), то це рівняння можна зобразити у формі (3.2):

$$-u(x,y) + z = 0. \qquad (3.4)$$

Тоді

$$\vec{N}(P) = -\frac{\partial z(P)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z(P)}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}, \qquad (3.5а)$$

$$\left|\vec{N}(P)\right| = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z(P)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z(P)}{\partial y}\right]^2}\,. \qquad (3.5б)$$

Визначення 4. Поверхня G називається двосторонньою, якщо після обходу по довільному контуру на поверхні G орієнтація вектора нормалі не змінюється.

Прикладами двосторонніх поверхонь є сфера, поверхні куба та циліндра. Далі будемо розглядати двосторонні кусково гладкі поверхні, тобто поверхні, які можна розбити на ділянки, на кожній з яких нормаль до поверхні, на будь-якій лінії на цій ділянці, змінюється неперервно.

Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай $G_1, G_2, ..., G_n$ – ділянки на поверхні G. Площі цих ділянок – $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$, а точки $P_1, P_2, ..., P_n$ – довільні точки на цих ділянках. Функція $f(P) = f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ внаслідок рівняння поверхні (3.1) або (3.2) залежить від двох незалежних змінних, тобто $f(x,y,z)=\widetilde{f}(x,y)$.

Розглянемо суму

$$\sum_n f(P_n)\Delta\sigma_n\,, \tag{3.6}$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(P)$ на поверхні G.

Визначення 5. Границя інтегральної суми (3.6), коли $\max\Delta\sigma_n\to 0$ (якщо вона існує, тобто не залежить ні від способу розбиття поверхні G на ділянки $G_1,G_2,...,G_n$, ні від вибору точок $P_1,P_2,...,P_n$ на цих ділянках), називається поверхневим інтегралом першого роду і позначається

$$\lim_{\max\Delta\sigma_n\to 0}\sum_n f(P_n)\Delta\sigma_n=\iint_G f(x,y,z)d\sigma. \tag{3.7}$$

Теорема 1. *Якщо функція $f(P)$ неперервна, то поверхневий інтеграл першого роду $\iint_G f(x,y,z)d\sigma$ існує.*

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

1 Сталу можна винести за знак інтеграла

$$\iint_G Cf(x,y,z)d\sigma=C\iint_G f(x,y,z)d\sigma. \tag{3.8}$$

2 Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій

$$\iint_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]d\sigma = \iint_G f(x,y,z)d\sigma + \iint_G g(x,y,z)d\sigma. \quad (3.9)$$

3 Якщо поверхню G можна розбити на дві частини (тобто $G = G_1 + G_2$), то інтеграл по поверхні G дорівнює сумі інтегралів по цим частинам

$$\iint_G f(x,y,z)d\sigma = \iint_{G_1} f(x,y,z)d\sigma + \iint_{G_2} g(x,y,z)d\sigma. \qquad (3.10)$$

4 Поверхневий інтеграл першого роду не змінюється при зміні напрямку вектора нормалі на протилежний у кожній точці поверхні G.

5 Якщо $f(x,y,z) > 0$, то

$$\iint_G f(x,y,z)d\sigma > 0. \qquad (3.11)$$

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Якщо $\Delta\sigma_n \to 0$, то $\Delta\sigma_n$ є нескінченно мала і вона є диференціал, тобто $\Delta\sigma \to d\sigma$. В той же час елемент площини є вектор. Дійсно, нескінченно мала ділянка поверхні є частина площини. Припустимо, що рівняння цієї площини має вигляд $S(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$, де A, B, C, D – деякі сталі. З аналітичної геометрії відомо, що цій площині відповідає вектор нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$, який збігається з вектором нормалі (3.3). Для елемента площини з нескінченно малою площею можна написати

$$d\vec{s} = ds_x\vec{i} + ds_y\vec{j} + ds_z\vec{k}, \qquad (3.12)$$

де

$$ds_x = dydz,\ ds_y = dxdz,\ ds_z = dxdy \qquad (3.13)$$

є елементами площин, нормалі до яких паралельні осям OX, OY, OZ відповідно.

Для вектора $d\vec{s}$ в точці $P=(x,y,z)$ можна також написати

$$d\vec{s}(P)=\vec{n}(P)\left|d\vec{s}(P)\right|=\vec{n}(P)d\sigma(P)=\vec{n}(P)d\sigma, \qquad (3.14)$$

де $$\vec{n}(P)=\frac{\overrightarrow{N}(P)}{\left|\overrightarrow{N}(P)\right|}=\frac{-\dfrac{\partial z(P)}{\partial x}\vec{i}-\dfrac{\partial z(P)}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z(P)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z(P)}{\Im y}\right)^2}},\quad \left|\vec{n}(P)\right|=1. \qquad (3.15)$$

З формул (3.13), (3.14) можна отримати

$$ds_z=n_z d\sigma,\qquad d\sigma=\frac{ds_z}{n_z}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z(P)}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial z(P)}{dy}\right)^2}dxdy. \quad (3.16)$$

Оскільки нормаль до області G_{xy} (проекції поверхні G на площину XOY) паралельна вектору $\vec{k}$, то інтегрування за $dxdy$ ведеться по області G_{xy}, тобто

$$\iint\limits_{G} f(P)d\sigma=\iint\limits_{G_{xy}} f(P)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z(P)}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial z(P)}{dy}\right)^2}dxdy. \quad (3.17)$$

Таким чином, поверхневий інтеграл першого роду по поверхні G виражається через подвійний інтеграл по області G_{xy}, яка є проекцією поверхні G на площину $z=0$.

Застосування поверхневих інтегралів першого роду

6 Інтеграл від одиниці на поверхні дорівнює площі цієї поверхні

$$\iint\limits_{G} 1 d\sigma = \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = S_{\text{ïîâ}} \ . \tag{3.18}$$

6 Якщо поверхня G матеріальна із заданою поверхневою густиною (щільністю) $\rho(P)$, то інтеграл від густини дорівнює масі поверхні

$$\iint\limits_{G} \rho(P) d\sigma = m_G \ . \tag{3.19}$$

6 Вектор центра мас поверхні G визначається формулою

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\vec{i} + y_{cm}\vec{j} + z_{cm}\vec{k} = \frac{1}{m_G}\iint\limits_{G} \rho(x,y,z)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) d\sigma \ . \tag{3.20}$$

6 Моменти інерції поверхні G відносно координатних осей можна подати у вигляді

а) відносно осі OX

$$J_x = \iint\limits_{G} \rho(x,y,z)(y^2+z^2) d\sigma \ ; \tag{3.21}$$

б) відносно осі OY

$$J_y = \iint\limits_{G} \rho(x,y,z)(x^2+z^2) d\sigma \ ; \tag{3.22}$$

в) відносно осі OZ

$$J_z = \iint\limits_{G} \rho(x,y,z)(x^2+y^2) d\sigma \ . \tag{3.23}$$

Приклад 1. Знайти $\iint\limits_{G} f(P) d\sigma$ для функції $f(P) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, якщо поверхня G є частина гіперболічного параболоїда $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$, а її проекція на площину $XOY(z=0)$ є півколо радіуса $R=1$ з центром у початку системи координат при $y\geq 0$.

Розв'язання. Інтеграл $\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$ обчислюємо за формулою (3.17). Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}=x$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=-y$, то

$$\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma=\iint\limits_{G_{xy}}(1+x^2+y^2)dxdy.$$

Одержаний інтеграл обчислимо в полярній системі координат:
$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad dxdy=rdrd\varphi,$ причому $0\leq r\leq 1,\ \ 0\leq\varphi\leq\pi$ (для $y\geq 0$).

Тоді

$$I=\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma=\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^\pi d\varphi(1+r^2)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1+r^2)dr^2\varphi\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(r^2+\frac{(r^2)^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi.$$

Відповідь. $I=\frac{3}{4}\pi.$

Приклад 2. Знайти масу m, координати центра мас та момент інерції відносно осі OZ півсфери радіуса R зі сталою поверхневою густиною ρ_0.

Розв'язання. Розглянемо півсферу з центром у початку системи координат при $z\geq 0$. Тоді

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Згідно з формулою (3.19),

$$m = \iint\limits_{G} \rho_0 d\sigma = \rho_0 \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \rho_0 \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dxdy =$$

$$= \rho_0 \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} dxdy = \rho_0 \iint\limits_{G_{xy}} \frac{R}{z} dxdy = \rho_0 R \iint\limits_{G_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Далі будемо обчислювати інтеграл у полярній системі координат $(t = r^2)$

$$m = \rho_0 R \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\rho_0 R}{2} \int\limits_0^{R^2} \frac{dr^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi \rho_0 R \int\limits_0^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{R^2 - t}} =$$

$$= -2\pi \rho_0 R \sqrt{R^2 - t}\Big|_0^{R^2} = -2\pi R \rho_0 (0 - R) = 2\pi R^2 \rho_0 .$$

Зауважимо, що цей результат для маси півсфери можна одержати і інакше. Дійсно, при сталій густині маса дорівнює добутку густини ρ_0 на площу поверхні, тобто

$$m = \rho_0 \frac{S_{\tilde{n}\hat{o}}}{2} = \rho_0 \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi R^2 \rho_0 .$$

Тепер знайдемо координати центра мас. Згідно з виразом (3.20) маємо в полярній системі координат

$$x_{cm} = \frac{1}{m} \iint\limits_{G} x \rho_0 d\sigma = \frac{\rho_0}{m} \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rr\cos\varphi}{z} d\varphi = \frac{R\rho_0}{m} \int\limits_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{R\rho_0}{m} \int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

Аналогічно

$$y_{cm}=\frac{1}{m}\iint\limits_G y\rho_0 d\sigma=\frac{\rho_0}{m}\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^{2\pi}\frac{Rr\sin\varphi}{z}d\varphi=0\,.$$

Для z_{cm} маємо

$$z_{cm}=\frac{1}{m}\iint\limits_G z\rho_0 d\sigma=\frac{\rho_0}{m}\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^{2\pi}\frac{z}{z}d\varphi=\frac{R\rho_0}{m}\int\limits_0^R rdr\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi\frac{R\rho_0}{m}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^R=$$

$$=\pi\frac{R^3}{m}\rho_0=\frac{\pi R^3\rho_0}{2\pi R^2\rho_0}=\frac{R}{2}\,.$$

Таким чином, $\vec{r}_{cm}=\left(0{,}0,\frac{R}{2}\right)$.

Знайдемо тепер момент інерції J_z відносно осі OZ. За формулою (3.23) маємо

$$J_z=\iint\limits_G\rho_0(x^2+y^2)d\sigma=\rho_0 R\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2}{z}d\varphi=\rho_0 R\int\limits_0^R r\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}dr\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi\rho_0 R\int\limits_0^R\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}dr^2=\left|\begin{array}{l} r^2=t,\\ r_1=0\Rightarrow t_1=0\\ r_2=R\Rightarrow t_2=R^2\end{array}\right|=\pi R\rho_0\int\limits_0^{R^2}\frac{tdt}{\sqrt{R^2-t}}=$$

$$=\pi\rho_0 R\int\limits_0^{R^2}\frac{(t-R^2)+R^2}{\sqrt{R^2-t}}dt=\pi R\rho_0\int\limits_0^{R^2}\left(-\sqrt{R^2-t}+\frac{R^2}{\sqrt{R^2-t}}\right)dt=$$

$$=\pi\rho_0 R\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{R^2-t}\right)^3-2R^2\sqrt{R^2-t}\right]\Bigg|_0^{R^2}=\pi R\rho_0\left[-\frac{2}{3}R^3+2R^3\right]=$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^4 \rho_0 = \frac{2}{3} m R^2 .$$

Поверхневий інтеграл другого роду. Потік вектора

Розглянемо векторну функцію

$$\vec{F}(\vec{r}) = P(\vec{r})\vec{i} + Q(\vec{r})\vec{j} + R(\vec{r})\vec{k} = F_x(\vec{r})\vec{i} + F_y(\vec{r})\vec{j} + F_z(\vec{r})\vec{k}\,, \quad (3.24)$$

задану на поверхні G. Як і для поверхневого інтеграла першого роду розіб'ємо цю поверхню на елементарні ділянки $G_1, G_2, ..., G_n$ з точками $P_1, P_2, ..., P_n$ на них. Будемо розглядати елементарні ділянки дуже малі і майже плоскі. Тоді вектори елементів площ

$$\overrightarrow{\Delta s}(P_k) = \vec{n}(P_k)\Delta\sigma_k\,, \quad (3.25)$$

при $\Delta\sigma_n \to 0$, $\overrightarrow{\Delta s}(P_k) \to d\vec{s}(P_k)$. На поверхні G векторна функція $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ залежить від двох незалежних змінних внаслідок рівняння поверхні (3.1) або (3.2). Розглянемо інтегральну суму для скалярного добутку вектора $\vec{F}(P_k)$ та вектора елемента площі $\overrightarrow{\Delta s}(P_k)$

$$\sum_k \vec{F}(P_k)\overrightarrow{\Delta s}(P_k). \quad (3.26)$$

Визначення 6. Границя інтегральної суми (3.26), коли $\max\left|\overrightarrow{\Delta s}(P_k)\right| \to 0$ (якщо вона існує), називається поверхневим інтегралом другого роду (а також потоком вектора $\vec{F}(\vec{r})$ через поверхню G) і позначається

$$\lim_{\max\left|\overrightarrow{\Delta s}(P_k)\right| \to 0} \sum_k \vec{F}(P_k)\overrightarrow{\Delta s}(P_k) = \iint_G \vec{F}(P)d\vec{s} = \iint_G \left(\vec{F}(P), d\vec{\sigma}\right). \quad (3.27)$$

Друга назва поверхневого інтеграла другого роду (потік вектора через поверхню) пов'язана з тим, що маса рідини або газу Δm з густиною $\rho(\vec{r})$, які протікають через поверхню G зі швидкістю $\vec{V}(\vec{r})$ за проміжок часу Δt , дорівнює

$$\Delta m = \Delta t \iint\limits_G \rho(\vec{r})\vec{V}(\vec{r})d\vec{s} . \tag{3.28}$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна також записати у вигляді

$$\iint\limits_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} = \iint\limits_G F_x(\vec{r})ds_x + F_y(\vec{r})ds_y + F_z(\vec{r})ds_z , \tag{3.29}$$

де $ds_x = dydz,\ ds_y = dxdz, ds_z = dxdy.$

Зауважимо, що потік через поверхню G залежить від трьох чинників:1) вектора $\vec{F}(\vec{r})$; 2) форми поверхні G; 3) напрямку нормалі до поверхні.

Властивості потоку вектора. Методи обчислення

1 Сталу можна виносити за знак інтеграла

$$\iint\limits_G C\vec{F}(\vec{r})d\vec{s} = C\iint\limits_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} . \tag{3.30}$$

2 Інтеграл від суми векторів дорівнює сумі інтегралів

$$\iint\limits_G \left[\vec{F_1}(\vec{r}) + \overrightarrow{F_2}(\vec{r})\right]d\vec{s} = \iint\limits_G \overrightarrow{F_1}(\vec{r})d\vec{s} + \iint\limits_G \overrightarrow{F_2}(\vec{r})d\vec{s} . \tag{3.31}$$

3 Якщо поверхню G можна представити як суму (об'єднання) двох частин G_1 та G_2 $(G = G_1 + G_2)$, то інтеграл по поверхні G дорівнює сумі інтегралів по частинам G_1 та G_2

$$\iint_G \vec{F}(r)d\vec{s} = \iint_{G_1} \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} + \iint_{G_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}\,. \qquad (3.32)$$

4 При зміні напрямку вектора нормалі на протилежний у кожній точці поверхні потік вектора змінює знак. Цю властивість добре видно з формули (3.28): при протіканні рідини або газу в одному напрямку з однієї сторони поверхні маса рідини або газу збільшується. А при протіканні в протилежному напрямку маса зменшується.

Ми бачимо, що властивості 1 – 3 поверхневих інтегралів першого і другого роду однакові, а властивість 4 відмінна. Обчислювати потік вектора можна двома способами:

1) спочатку за допомогою формули (3.14) звести потік вектора до поверхневого інтеграла першого роду, а потім використати формулу (3.17). Тобто

$$\iint_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} = \iint_G \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})d\sigma = \iint_{G_{xy}} \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (3.33)$$

2) за формулами (3.14) та (3.15) можна ds_x та ds_y виразити через $ds_z = dxdy$ і звести потік вектора до подвійного інтеграла

$$\iint_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} = \iint_{G_{xy}} \left[-F_x(\vec{r})\frac{\partial z}{\partial x} - F_y(\vec{r})\frac{\partial z}{\partial y} + F_z\right]dxdy\,. \qquad (3.34)$$

При обчисленні потоку вектора через поверхню ми повинні задати напрямок нормалей у точках поверхні.

Визначення *7.* Вектор $\vec{n}(P)$ має додатний (від'ємний) напрямок у точці P до поверхні G обмеженої контуром λ, якщо при цьому напрямку $\vec{n}(P)$ поверхня G залишається зліва (справа) при обході по контуру λ. Такий напрямок нормалі до поверхні відповідає додатному напрямку обходу контуру (наприклад, межі поверхні) при обчисленні циркуляції вектора по цьому контуру.

В деяких випадках розглядається потік вектора через замкнену поверхню G. В такому випадку потік вектора позначається кружком на інтегралах

$$\Pi = \oiint_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}\,. \tag{3.35}$$

Ми позначаємо потік вектора через замкнену поверхню літерою Π.

4 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Визначення 1. Полем називається величина, задана у просторі або на площині. Поля бувають скалярні та векторні. Прикладами скалярних полів є поле електростатичного потенціалу, поле тисків, поле температур. Прикладами векторних полів є електричне поле $\vec{E}(\vec{r})$, магнітне поле $\vec{H}(\vec{r})$, поле швидкостей у рідині. Скалярні поля пов'язані з векторними, оскільки градієнт скалярної функції є вектор. Наприклад, вектор напруженості електростатичного поля (тобто поля, яке не залежить від часу), $\vec{E}(\vec{r}) = -grad\varphi(\vec{r})$, де $\varphi(\vec{r})$ – електростатичний потенціал (скаляр).

Зауважимо, що у випадку залежності напруженості електричного поля $\vec{E}$ від часу

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -grad\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{4.1}$$

де $\varphi(\vec{r},t)$ – скалярний потенціал; $\vec{A}(r,t)$ – векторний потенціал.

Далі будемо розглядати функції просторових змінних $u(P) = u(\vec{r}) = u(x,y,z)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Оскільки градієнт скалярної функції є вектор, то вводять диференціальний оператор Гамільтона

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.2}$$

Трикутник у виразі (4.2) є грецька літера «набла». Тоді можна записати

$$grad u(x,y,z)=\vec{\nabla}u(\vec{r}). \qquad (4.3)$$

Постає питання про дію диференціального оператора Гамільтона на векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$.

Дивергенція векторного поля

Визначення 2. Дивергенцією векторного поля $F(r)=\vec{F}_x(\vec{r})\vec{i}+\vec{F}_y(\vec{r})\vec{j}+\vec{F}_z(\vec{r})\vec{k}$ називається скаляр

$$div\vec{F}(\vec{r})=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})=\frac{\partial\vec{F}_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial\vec{F}_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial\vec{F}_z(\vec{r})}{\partial z}. \qquad (4.4)$$

Зауваження. Можна вважати дивергенцію вектора $\vec{F}(\vec{r})$ скалярним добутком диференціального оператора Гамільтона і вектора $\vec{F}(\vec{r})$. Слово дивергенція (divergence) перекладається як розбіжність.

Формула Остроградського – Гаусса

Потік вектора $\vec{F}(\vec{r})$ через замкнену поверхню G області Ω у просторі у напрямку зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього вектора по об'єму області Ω

$$\oiint_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}=\iiint_\Omega div\vec{F}(\vec{r})dxdydz. \qquad (4.5)$$

За допомогою цієї формули можна дати інше (так зване інваріантне) визначення дивергенції

$$divF(P)=\lim_{V_\Omega\to 0}\frac{1}{V_\Omega}\oiint \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}, \qquad (4.6)$$

де V_{Ω} – об'єм області (тіла) Ω, в якій розташована точка P.

Розглянемо три випадки:

1 Нехай в області Ω є тільки джерела поля $\vec{F}(\vec{r})$, тобто поле виходить з області Ω. Тоді на всій поверхні G області Ω $F(\vec{r})d\vec{s} > 0$ і $div\vec{F}(\vec{r}) > 0$. Таким чином, додатна дивергенція поля відповідає джерелам цього поля.

2 Нехай в області Ω є тільки стоки поля $\vec{F}(\vec{r})$, тобто вектори, які відповідають полю $\vec{F}(\vec{r})$, направлені до середини області Ω. На всій поверхні G $F(\vec{r})d\vec{s} < 0$ і $div\vec{F}(\vec{r}) < 0$. Таким чином, від'ємна дивергенція відповідає стокам поля.

3 Тепер розглянемо випадок, коли в області Ω поле $\vec{F}(\vec{r})$ не має ні джерел, ні стоків, тобто поле $\vec{F}(\vec{r})$ пронизує область Ω. Можна ввести силові лінії поля $\vec{F}(\vec{r})$, тобто лінії, в кожній точці яких поле $\vec{F}(\vec{r})$ напрямлене вздовж дотичної прямої до лінії. Тоді можна сказати, що ми розглядаємо випадок, коли кількість силових ліній, які входять до Ω та виходять з Ω, однакова. Тоді на частині поверхні $F(\vec{r})d\vec{s} > 0$, а на іншій частині G $F(\vec{r})d\vec{s} < 0$, але в цілому

$$\oiint\limits_{G} \vec{F}(\vec{r})d\vec{s} = 0,\; div\vec{F}(\vec{P}) = 0. \tag{4.7}$$

Таким чином, за знаком $div\vec{F}(\vec{P})$ можна визначити, чи має поле $\vec{F}(\vec{r})$ в точці P джерело або стік. Якщо в деякій області простору $div\vec{F}(\vec{r}) = 0$, то в цій області поле не має ні джерел, ні стоків. Прикладом поля, яке не має у всьому просторі ні джерел, ні стоків, є магнітне поле з напруженістю $\vec{H}(\vec{r})$ та індукцією $\vec{B}(\vec{r})$. Це означає, що у всьому просторі

$$div\vec{B}(\vec{r}) = div\vec{H}(\vec{r}) = 0. \tag{4.8}$$

Ротор вектора

Визначення 3. Ротором вектора $\vec{F}(\vec{r})$ називається вектор

$$rotF(r) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \ldots..(4.9)$$

Зауваження. Можна вважати, що ротор вектора $\vec{F}(\vec{r})$ дорівнює векторному добутку диференціального оператора Гамільтона $\vec{\nabla}$ (4.2) і вектора $\vec{F}(\vec{r})$.

Ротор вектора $\vec{F}(\vec{r})$ називають також вихором вектора і позначають $curl\vec{F}(\vec{r})$.

Можна показати, що для точки, яка обертається по колу із кутовою швидкістю ω, ротор її лінійної швидкості $\vec{v}$ дорівнює (тобто, якщо $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})$)

$$rot\vec{v} = 2\vec{\omega}. \qquad (4.10)$$

Ця рівність демонструє механічний сенс ротора вектора. Ротор вектора відмінний від нуля для точок або тіл, які обертаються (наприклад, у вихорі).

Формула Стокса. *Циркуляція вектора $\vec{F}(\vec{r})$ по контуру λ дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню G, обмежену контуром λ*

$$\oint_{\lambda} \vec{F} d\vec{\ell} = \oint_{\lambda} \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \iint_{G} rot\vec{F} d\vec{s}\,. \qquad (4.11)$$

Якщо вектор $\vec{F}(\vec{r})$ заданий у просторі, то поверхня G може бути кусково-гладкою і розташовуватися у просторі довільним чином при умові, що вона обмежена контуром λ. Якщо контур λ розташований на площині XOY, то напрямок обходу контуру відповідає руху проти годинникової стрілки, а нормаль до поверхні G утворює гострий кут із віссю OZ. Досить часто контур λ та поверхню G вибирають за умови спрощення обчислень.

Частинний випадок формули Стокса (4.11) для векторної функції $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, заданої на площині XOY, називається формулою Гріна-Остроградського

$$\oint_{\lambda} Pdx+Qdy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{4.12}$$

при цьому контур λ і поверхня G розташовані на площині XOY. З формули Стокса можна також одержати умову незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Дійсно, якщо $rot\vec{F}=0$ на поверхні G, то і циркуляція вектора $\vec{F}(\vec{r})$ по контуру λ дорівнює нулю, тобто криволінійний інтеграл другого роду не залежить від форми шляху інтегрування.

Умова незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування

Якщо в деякій однозв'язній області простору векторна функція $\vec{F}(x,y,z)$ неперервна разом із частинними похідними і виконуються рівності

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}, \tag{4.13}$$

то криволінійний інтеграл другого роду по будь-якій лінії в цій області не залежить від форми шляху інтегрування, а його величина залежить тільки від положення початкової і кінцевої точок.

Важливо зазначити, що якщо векторна функція $\vec{F}(\vec{r})$ разом із частинними похідними неперервні у просторі (або в його деякій частині), то в формулах Остроградського – Гаусса і Стокса область Ω та поверхню G можна вибирати довільним чином. Ця можливість вибору області Ω і поверхні G дозволяє спростити обчислення.

Приклад 1. Еквівалентність першого рівняння Максвелла

$$div\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \tag{4.14}$$

де $\rho(\vec{r})$ – густина електричного заряду і закону Кулона

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{4.15}$$

де ε, ε_0 – сталі.

Як відомо, закон Кулона визначає напруженість електричного поля $\vec{E}(\vec{r})$ на відстані r від точкового заряду q. Для більшості середовищ вектор $\vec{D}(\vec{r})$ індукції електричного поля пов'язаний з вектором $\vec{E}(\vec{r})$ рівністю

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}). \tag{4.16}$$

Бачимо, що векторні функції $\vec{E}(\vec{r})$ та $\vec{D}(\vec{r})$ неперервні разом із частинними похідними у просторі, окрім точки розташування заряду $O(0,0,0)$.

Нехай поверхня G є сфера радіуса R з центром у точці $O(0,0,0)$. Оскільки інтеграл по об'єму Ω від $\rho(\vec{r})$ є заряд q, то ми маємо

$$\begin{gathered}\iiint\limits_{\Omega}\rho(\vec{r})dxdydz = q = \iiint\limits_{\Omega}div\vec{D}dxdydz\ ; \\ \varepsilon\varepsilon_0\iiint\limits_{\Omega}divEdxdydz = \varepsilon\varepsilon_0\oiint E(\vec{r})d\vec{s}.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Ми використали рівняння Максвелла (4.14) і формулу Остроградського – Гаусса (4.5). На сфері радіуса R величина $\left|\vec{E}(\vec{r})\right| = E(r)$ має стале значення. Тому

$$q = \varepsilon\,\varepsilon_0 \oiint_G E(R)\cdot\vec{n}\cdot d\vec{s} = \varepsilon\,\varepsilon_0 E(R) S_{\tilde{n}\hat{o}}(R) = 4\pi R^2 \varepsilon\,\varepsilon_0 E(R), \quad (4.18)$$

де $S_{\tilde{n}\hat{o}}(R) = 4\pi R^2$ – площа сфери.

Таким чином, модуль напруженості електричного поля

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}. \quad (4.19)$$

Замінимо R на $|\vec{r}|$. Тоді для вектора напруженості $\vec{E}(\vec{r})$ маємо формулу (4.15).

Приклад 2. Напруженість магнітного поля $\vec{H}(\vec{r})$ нескінченно довгого прямолінійного провідника із сталим струмом I.

Для обчислення використаємо друге рівняння Максвелла

$$rot\vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}), \quad (4.20)$$

де $\vec{j}(\vec{r})$ – густина електричного струму. Потік вектора густини струму через поверхню перерізу провідника σ дорівнює силі струму

$$\iint_\sigma \vec{j}(\vec{r})d\vec{s} = I. \quad (4.21)$$

Знайдемо напруженість магнітного поля на відстані R, яка набагато більша від розмірів перерізу провідника із струмом. За поверхню G візьмемо круг радіуса R у площині, перпендикулярній до провідника. Тоді замкнений контур λ буде коло радіуса R. Розглянемо потік $\vec{j}(\vec{r})$,тоді

$$\iint_G \vec{j}(\vec{r})d\vec{s} = I = \iint_G rot\vec{H}(\vec{r})d\vec{s} = \oint_\lambda \vec{H}(\vec{r})d\vec{\ell}, \qquad (4.22)$$

оскільки поверхня перерізу провідника σ є частина поверхні G, а за межами провідника $\vec{j}(\vec{r}) = 0$. У виразі (4.22) ми використали формулу Стокса (4.11). Слід очікувати, що модуль $\vec{H}(\vec{r})$ залежить тільки від відстані R між точкою спостереження і провідником, тобто $\left|\vec{H}(\vec{r})\right| = H(R)$. Тоді з виразу (4.22) маємо

$$I(R) = H(R) \cdot L_{êî\,ëà} = H(R) \cdot 2\pi R. \qquad (4.23)$$

Таким чином, одержуємо

$$H(R) = \frac{I}{2\pi R}. \qquad (4.24)$$

Зазначимо, що вектор $\vec{H}(\vec{r})$ колінеарний вектору $\vec{r} \times \vec{\ell}$, де ℓ – вектор напрямку $\vec{j}(\vec{r})$, тобто вздовж дотичної прямої до кола (контуру λ).

Диференціальні операції другого порядку

Якщо $u(\vec{r})$ є скалярна функція, то

$$div(u\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (u\vec{F}) = grad\, u \cdot \vec{F} + u \cdot div\vec{F}, \qquad (4.25а)$$

$$rot(u\vec{F}) = \vec{\nabla} \times (u\vec{F}) = grad\, u \times \vec{F} + u \cdot rot\vec{F}. \qquad (4.25в)$$

Розглянемо тепер дію на поле $\vec{F}(\vec{r})$ добутків диференціального оператора Гамільтона. Будемо розглядати неперервні векторні поля $\vec{F}(\vec{r})$ з неперервними частинними похідними першого і другого порядку. Для таких полів мішані похідні рівні між собою.

$$\vec{\nabla} \cdot grad\, u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \,. \qquad (4.26)$$

Оператор $\vec{\nabla}^2 = \Delta$ називається оператором Лапласа або лапласіаном.

Для дивергенції ротора вектора маємо

$$div\, rot\, \vec{F} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \,. \qquad (4.27)$$

Рівність (4.27) можна розглядати як рівність нулю мішаного добутку компланарних векторів (два вектора з трьох колінеарні).

Тепер знайдемо ротор градієнта

$$rot\, grad\, u = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0 \,. \qquad (4.28)$$

Цю рівність можна розглядати як векторний добуток колінеарних векторів.

Нарешті, для ротора вектора можна одержати

$$rot\, rot \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = grad\, div \vec{F} - \Delta \vec{F} \,. \qquad (4.29)$$

Потенціальні поля

В однозв'язній області можна дати три еквівалентні визначення потенціального поля.

Визначення 4. Векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ називається потенціальним, якщо $\vec{F}(\vec{r})$ є градієнт скалярної функції (яка називається потенціалом):

$$\vec{F}(\vec{r})_{ïîò} = grad u \,. \qquad (4.30)$$

Визначення 5. Векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ називається потенціальним, якщо його ротор дорівнює нулю

$$rot\vec{F}(\vec{r})_{\text{ïîò}} = 0. \qquad (4.31)$$

Дійсно, рівність нулю ротора потенціального поля є наслідком (4.28).

Визначення 6. Векторне поле називається потенціальним, якщо робота в цьому полі не залежить від форми шляху переносу заряду (або матеріальної точки).

Робота по переносу заряду в полі визначається криволінійним інтегралом другого роду (згідно з формулою (2.13)). З формули Стокса (4.11) випливає, що якщо в деякій області $rot\vec{A} = 0$, то в цій області і циркуляція цього вектора по будь-якому контуру дорівнює нулю, тобто робота не залежить від форми шляху переносу заряду.

Незалежність роботи від форми шляху переносу заряду можна показати і без формули Стокса. Дійсно,

$$\int_{\breve{AB}} \vec{F}_{\text{ïîò}}\, d\vec{r} = \int_{\breve{AB}} gradud\vec{r} = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \int_{\breve{AB}} du = u(B) - u(A), \cdots (4.32)$$

тобто робота є повний диференціал і її значення залежить тільки від різниці потенціалів у початковій і кінцевій точках. З останньої формули випливає, що криволінійний інтеграл другого роду по дузі AB визначає різницю потенціалів у точках A та B.

Потенціальні поля можуть мати джерела або стоки, оскільки за формулою (4.27)

$$divF_{\text{ïîò}} = divgradu = \Delta u\,, \qquad (4.33)$$

а лапласіан потенціалу може бути відмінним від нуля.

Соленоїдальні поля

Означення 7. Векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ називається соленоїдальним, якщо воно є ротор деякого вектора (векторного потенціалу)

$$\vec{F}(\vec{r})_{\text{ñîë}} = rot\vec{A}. \tag{4.34}$$

Соленоїдальні поля називаються також вихровими і трубковими (рурковими). Важливою властивістю соленоїдального поля є те, що воно не має ні джерел, ні стоків, тобто його дивергенція дорівнює нулю. Тому можна дати еквівалентне визначення соленоїдального поля.

Визначення 8. Векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ називається соленоїдальним, якщо

$$div\vec{F}(\vec{r})_{\text{ñîë}} = 0. \tag{4.35}$$

Силові лінії соленоїдального поля замкнені: ніде не починаються (немає джерела) і не закінчуються (немає стоків). Можна вважати, що силові лінії соленоїдальних полів розташовані в трубках. Прикладом соленоїдального поля є магнітне поле

$$\vec{H} = rot\vec{A}, \tag{4.36}$$

де $\vec{A}$ – векторний потенціал електромагнітного поля, який визначає також напруженість електричного поля за формулою (4.1).

Гармонічні поля

Визначення 9. Векторне поле, яке не має джерел, стоків та вихорів називається гармонічним, тобто

$$div\vec{F}_{\text{ãàðì}} = 0, \tag{4.37}$$

$$rot\vec{F}_{\text{ãàðì}} = 0. \tag{4.38}$$

Внаслідок відсутності вихорів (4.38) для гармонічного поля

$$\vec{F}(\vec{r})_{\text{ãàðì}} = gradu(\vec{r})_{\text{ãàðì}}\,. \qquad (4.39)$$

Оскільки гармонічне поле не має джерел і стоків, то внаслідок (4.26)

$$\Delta u(\vec{r})_{\text{ãàðì}} = 0\,. \qquad (4.40)$$

Рівняння (4.40) називається рівнянням Лапласа. Функції $u(\vec{r})_{\text{ãàðì}}$ називаються гармонічними. Ці функції мають деякі однакові властивості у просторах різної вимірності.

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1а. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями, заданими своїми рівняннями.

Варіант 31. $\iint\limits_{(D)} xy^2\,dxdy$, $D: \ y = x^2,\ y = x.$

Розв'язання.

1-й спосіб. Для обчислення інтеграла використаємо формулу (1.11).

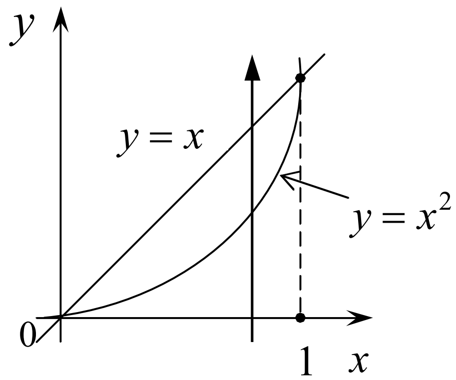

Рисунок 4.1

1 На площині XOY побудуємо лінії, що обмежують область D: $y = x^2$ – парабола, гілки якої напрямлені угору, вершиною є точка $(0;0)$, парабола симетрична відносно осі OY; $y = x$ – пряма, яка проходить через точки (0;0) та $(1;1)$.

2 Проектуємо область D на вісь OX. На осі утворився сегмент, кінцями якого є абсциси точок перетину параболи $y = x^2$

з прямою $y = x$ (рисунок 4.1). Щоб знайти їх, розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x; \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0,$$

тобто $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

Таким чином, сегмент [0;1] буде проміжком інтегрування зовнішнього інтеграла, змінною інтегрування якого є x.

3 Нижня і верхня межі області D описуються рівняннями виду $y = \varphi(x)$.

4 Визначимо межі інтегрування внутрішнього інтеграла (змінна інтегрування y): проводимо через довільну точку інтервала (0;1) стрілку паралельно до осі OY і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу» із області: $\varphi_1(x) = x^2$ та $\varphi_2(x) = x$.

5 Обчислюємо

$$I = \iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 dx \left(\frac{xy^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{x} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x^4 - x^7 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{40}.$$

Нагадаємо, що при інтегруванні внутрішнього інтеграла за dx вважаємо, що x поводить себе як стала величина.

2-й спосіб. Для обчислення інтеграла використаємо формулу (1.12)

1 Ще раз зробимо рисунок (див. рисунок 4.2).

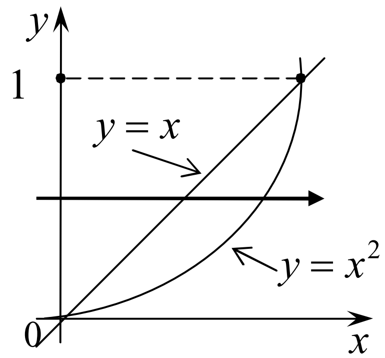

Рисунок 4.2

2 Проектуємо область D на вісь OY. На осі утворився сегмент, кінцями якого є ординати точок перетину параболи $y = x^2$ з прямою $y = x$. Вище було знайдено абсциси точок перетину параболи і прямої $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

Тоді, очевидно, відповідні ординати такі: $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Таким чином, сегмент $[0;1]$ є проміжком інтегрування зовнішнього інтеграла, змінною інтегрування якого є y.

3 Ліва межа області D описується рівнянням $x = y$, а права – рівнянням $y = x^2$, тобто $x = \sqrt{y}$ (знак «+», бо це права вітка параболи).

4 Визначимо межі інтегрування внутрішніх інтегралів (змінна інтегрування x): проводимо через довільну точку інтервалу $(0;1)$ стрілку паралельно до осі OX і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу»: $\psi_1(y) = y$ і $\psi_2(y) = \sqrt{y}$.

Нагадаємо, що при інтегруванні внутрішнього інтеграла вважаємо, що y поводить себе як стала величина.

5 Обчислюємо

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \int\limits_0^1 dy \left.\frac{x^2 y^2}{2}\right|_y^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 y^2 - y^4\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y^3 - y^4\right) dy = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{40}.$$

Відповідь. $I = \dfrac{1}{40}$.

Завдання 1b. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями, заданими своїми рівняннями.

Варіант 31. $\iint\limits_{(D)}(3x-y)dxdy$, $D: y=\sqrt{x},\ y=-x+2,\ y=0.$

Розв'язання.

1-й спосіб.

1 На площині XOY побудуємо лінії, що обмежують область D: графік функції $y=\sqrt{x}$ – крива, вітка якої лежить в I чверті, початком є точка $(0;0)$; $y=-x+2$ – пряма, яка проходить через точки (0;2) та (2;0) (рисунок 4.3).

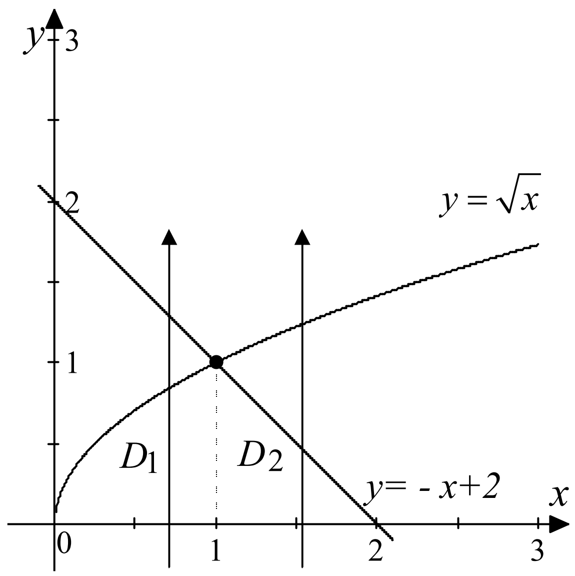

Рисунок 4.3

Для обчисленні подвійного інтеграла $\iint\limits_{D}(3x-y)\,dxdy$ за формулою (1.11) потрібно розбити область D на суму двох підобластей $D=D_1+D_2$, для чого провести вертикальну пряму через точку перетину кривої $y=\sqrt{x}$ і прямої $y=-x+2$. Тоді

$$\iint\limits_{D=D_1+D_2}(3x-y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(3x-y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(3x-y)dxdy.$$

2 Проектуємо область D на вісь OX. На осі утворилися два сегменти, кінцями яких є абсциси точок перетину кривої $y=\sqrt{x}$ з віссю OX $(y=0)$, перетину кривої з прямою $y=-x+2$, та абсциса точки перетину прямої $y=-x+2$ з віссю OX. Щоб знайти їх, розв'яжемо системи:

I. $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=0; \end{cases} \Rightarrow \quad x=0,$

II. $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=-x+2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=-x+2 \Rightarrow x=(-x+2)^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0,$

отже, за теоремою Вієта, $x_1=1$, $x_2=4$. Корінь $x_2=4$ не має відношення до області D, тому він не береться до уваги, тобто він є стороннім коренем.

III. $\begin{cases} y=-x+2, \\ y=0; \end{cases} \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2.$

Таким чином, сегменти $[0;1]$ та $[1;2]$ будуть проміжками інтегрування зовнішнього інтеграла, змінною інтегрування якого є x.

3 Нижня межа області D_1 описується рівнянням $y=0$, а верхня – рівнянням $y=\sqrt{x}$. Нижня межа області D_2 описується рівнянням $y=0$, а верхня – рівнянням $y=-x+2$.

4 Визначимо межі інтегрування внутрішніх інтегралів (змінна інтегрування y): проводимо через довільні точки інтервалів $(0;1)$ та $(1;2)$ стрілки паралельно до осі OY і відмічаємо абсциси точок «входу» і «виходу»:

для D_1: $\varphi_1(x)=0$ і $\varphi_2(x)=\sqrt{x}$;
для D_2: $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=-x+2$.

5 Обчислюємо

$$I = \iint\limits_{D=D_1+D_2} (3x-y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (3x-y)dxdy + \iint\limits_{D_2} (3x-y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (3x-y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{-x+2} (3x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(3xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}} + \int_1^2 dx \left(3xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{-x+2} \boxed{=}$$

Далі підставляємо границі інтегрування змінної y:

$$\boxed{=} \int_0^1 \left(3x\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx + \int_1^2 \left(3x(-x+2) - \frac{1}{2}(-x+2)^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2} \right) dx + \int_1^2 \left(6x - 3x^2 - \frac{1}{2}(2-x)^2 \right) dx \boxed{=}$$

Інтегруємо за змінною x:

$$\boxed{=} \left(\frac{2 \cdot 3x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^2}{4} \right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{(2-x)^3}{-3} \right)\Bigg|_1^2 \boxed{=}$$

і підставляємо границі інтегрування змінної x:

$$\boxed{=} \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 3(4-1) - (8-1) + \frac{1}{6}(0-1) = \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{72 - 15 + 120 - 10}{60} = \frac{167}{60}.$$

2-й спосіб.

Для обчислення інтеграла використаємо формулу (1.12)

1 Ще раз зобразимо рисунок (див. рисунок 4.4).

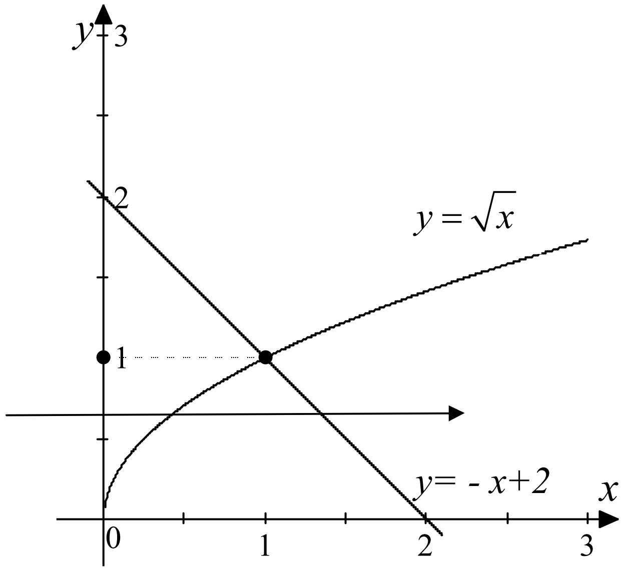

Рисунок 4.4

2 Проектуємо область D на вісь OY. На осі утворився сегмент, кінцями якого є $y=0$ та ордината точки перетину кривої $y=\sqrt{x}$ з прямою $y=-x+2$. Вище було знайдено абсцису точки перетину кривої і прямої, це $x=1$. Тоді, очевидно, відповідна ордината $y=-1+2=1$. Таким чином, сегмент [0;1] є проміжком інтегрування зовнішнього інтеграла, змінною інтегрування якого є y.

3 Ліва межа області D описується рівнянням $y=\sqrt{x}$, тобто $x=y^2$, а права – рівнянням $y=-x+2$, тобто $x=2-y$.

4 Визначимо межі інтегрування внутрішнього інтеграла (змінна інтегрування x): проводимо через довільну точку інтервалу $(0;1)$ стрілку паралельно до осі OX і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу»: $\psi_1(y)=y^2$ і $\psi_2(y)=2-y$.

Нагадаємо, що при інтегруванні внутрішнього інтеграла вважаємо, що y поводить себе як стала величина.

5 Обчислюємо

$$I=\iint\limits_D(3x-y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2-y}(3x-y)dx=\int_0^1 dx\left(\frac{3x^2}{2}-yx\right)\Bigg|_{y^2}^{2-y}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}\left((2-y)^2-y^4\right)-y\left(2-y-y^2\right)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}(2-y)^2-\frac{3}{2}y^4-2y+y^2+y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\frac{(2-y)^3}{-3}-\frac{3y^5}{10}-\frac{2y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}-\frac{3}{10}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{-30+240-18-60+20+15}{60}=\frac{167}{60}.$$

Відповідь. $I=\dfrac{167}{60}$.

Завдання 2. Задана піраміда, яка обмежена координатними площинами і площиною P, визначеною рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. Зобразити цю піраміду і знайти її об'єм за допомогою потрійного інтеграла.

Варіант 31.

$A=14,\quad B=-21,\quad C=-6,\quad D=-42$.

Розв'язання.

Рівняння площини P у загальній формі має вигляд $14x-21y-6z-42=0$. Зобразимо рівняння площини P у формі рівняння у відрізках:

$$14x-21y-6z=42\,\big|\,:42\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}=1.$$

З цього рівняння легко знайти точки перетину площини P з координатними осями: $A(3,0,0)$; $B(0,-2,0)$; $C(0,0,-7)$. Тепер можна зобразити піраміду (рисунок 4.5)

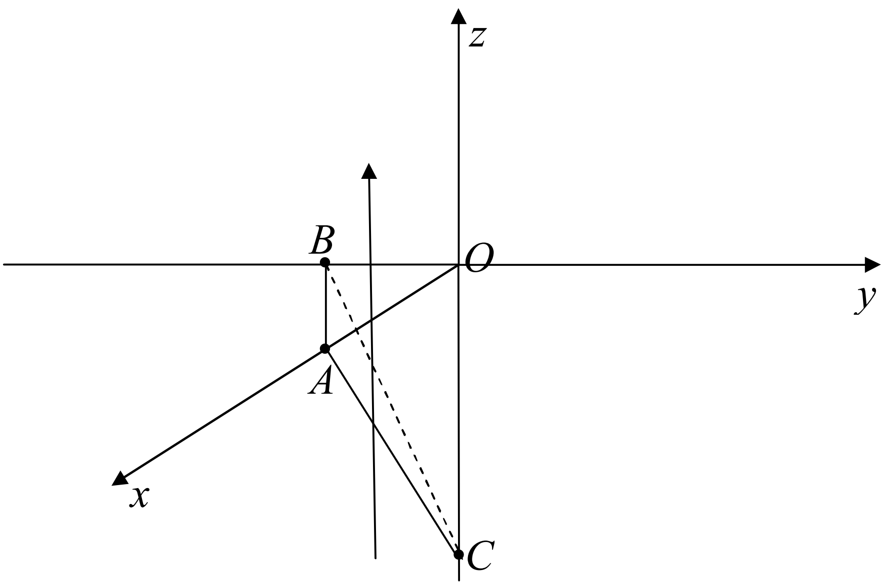

Рисунок 4.5

На площині $x=0$ розташовано трикутник OBC, на площині $y=0$ – трикутник OAC і на площині $z=0$ – трикутник OAB. Трикутник ABC розташовано на площині P. З рисунка 4.5 видно, що в піраміді $x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0$.

6 За властивостями потрійного інтеграла об’єм піраміди дорівнює $V = \iiint\limits_{\Omega} 1 \cdot dxdydz$, де Ω – область, яка відповідає піраміді. Для того щоб перейти до потрійного інтеграла, ми повинні мати на увазі, що інтегрування за кожною змінною ведеться від менших значень даної змінної до більших. Щоб знайти межі інтегрування за dz візьмемо довільну точку в піраміді і проведемо через цю точку пряму, паралельну осі Oz. В область Ω ця пряма входить на похилій площині P, рівняння якої $z_1 = 7\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} - 1\right)$, а виходить на площині OAB, рівняння якої

$z_2 = 0$. Для того щоб розставити межі інтегрування у повторному інтегралі, проектуємо тіло Ω (піраміду) на площину XOY – проекція D – це трикутник OAB. Зробимо рисунок (див. рисунок 4.6).

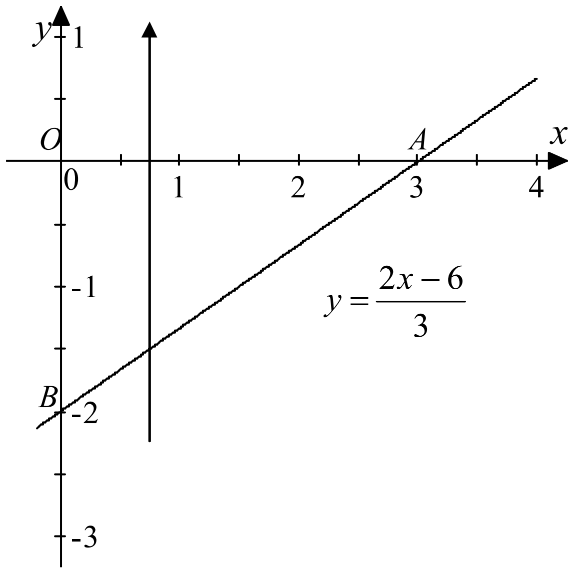

Рисунок 4.6

Проектуємо трикутник OAB на вісь OX – проекція це сегмент $[0;3]$ – проміжок інтегрування зовнішнього інтеграла (за аргументом x). Через довільну точку інтервалу $(0;3)$ будуємо в площині XOY стрілку паралельно осі OY і відмічаємо ординати точок «входу» і «виходу» з області D (нижня межа – це пряма AB, яка є лінією перетину площини P і площини XOY $(z = 0)$, тобто розв’язком системи $\begin{cases} 14x - 21y - 6z = 42, \\ z = 0; \end{cases}$ звідки $2x - 3y = 6$, і $y = \frac{2x-6}{3} = \frac{2}{3}(x-3)$), а верхня межа – це вісь OX, тобто $y = 0$.

Таким чином, $y_1(x) = \frac{2}{3}(x-3)$, $y_2(x) = 0$. Отже, обчислимо інтеграл:

$$V=\iiint_{\Omega} dxdydz=\int_0^3 dx\int_{\frac{2}{3}(x-3)}^{0} dy\int_{\frac{7}{6}(2x-3y-6)}^{0} dz=\int_0^3 dx\int_{\frac{2}{3}(x-3)}^{0} dy\left(z\Big|_{\frac{7}{6}(2x-3y-6)}^{0}\right)=$$

$$=-\frac{7}{6}\int_0^3 dx\int_{\frac{2}{3}(x-3)}^{0}(2x-3y-6)\,dy=-\frac{7}{6}\int_0^3 dx\left(\left(2(x-3)y-\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}(x-3)}^{0}\right)=$$

$$=-\frac{7}{6}\int_0^3\left(-\frac{4}{3}(x-3)^2+\frac{2}{3}(x-3)^2\right)dx=\frac{7}{9}\int_0^3(x-3)^2\,dx=\frac{7}{9}\cdot\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{7}{27}\big(0-(-27)\big)=7$$

Завдання 3. Знайти масу M циліндра, обмеженого циліндричною поверхнею $x^2+y^2=R^2$ та площинами P_1 і P_2. Обчислення виконати в циліндричній системі координат. Густина (щільність) матеріалу $\rho(x,y,z)=\rho_0(x^2+y^2)^n$.

Варіант 31.

$R=2,\ n=\dfrac{7}{2},\ P_1:\ 7x-2y+z+7=0,\ P_2:\quad 6x+5y+z-7=0$.

Розв'язання.

В нашому випадку густина дорівнює $\rho=\rho_0\left(x^2+y^2\right)^{\frac{7}{2}}=\rho_0 r^7$, а рівняння циліндра має вигляд $x^2+y^2=4$.

Зв'язок змінних у декартовій системі координат із змінними в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

$$dxdy=rdrd\varphi$$

циліндр $x^2+y^2=4 \Rightarrow \quad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ми маємо прямий круговий циліндр, вісь якого збігається з віссю OZ. Рівняння площин, які обмежують циліндр, можна зобразити у вигляді $z_1(x,y) = -7-7x+2y$, $z_2(x,y) = 7-6x-5y$. Оскільки площини P_1 і P_2 перетинаються за межами циліндра, то для x та y при $x^2+y^2<R^2$ $z_2(x,y) > z_1(x,y)$. Густина $\left(x^2+y^2\right)^n = r^{2n} \Rightarrow$

$\rho(x,y,z) = \rho_0\left(x^2+y^2\right)^n = \rho_0 r^{2n} = \rho_0 r^7$ не залежить від z. Тоді обчислення маси можна спростити, якщо проінтегрувати спочатку за z. Тому в циліндричній системі координат маємо:

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V \rho_0 r^7 r dr d\varphi\, dz =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1(r,\varphi) = -7-7r\cos\varphi + 2r\sin\varphi \\ z_2(r,\varphi) = 7-6r\cos\varphi - 5r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^8 dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} dz = \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^8 \left\{ z \ \Big|_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} \right\} dr =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^8 \left(z_2(r,\varphi) - z_1(r,\varphi)\right) dr = \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^8 \left(14 + r\cos\varphi - \right.$$

$$\left. -7r\sin\varphi\right) dr = 14\rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^8 dr + \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos\varphi - 7\sin\varphi\right) d\varphi \int\limits_0^2 r^9 dr =$$

$$= 14\rho_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{r^9}{9}\Big|_0^2 \right\} d\varphi + \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos\varphi - 7\sin\varphi\right) \left\{ \frac{r^{10}}{10}\Big|_0^2 \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{14\rho_0}{9} \cdot 2^9 \cdot \left\{ \varphi \ \Big|_0^2 \right\} + \frac{14\rho_0}{10} \cdot 2^{10} \underbrace{\left\{ \sin\varphi + 7\cos\varphi \ \Big|_0^2 \right\}}_{0} = \frac{14\pi\rho_0}{9} \cdot 2^{10}$$

Відповідь. $M = \dfrac{14\pi\rho_0}{9}2^{10}.$

Завдання 4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{AB} F_x dx + F_y dy$, де AB – дуга кривої L, задана параметрично рівняннями між точками A і B. Потрібно перевірити, чи залежить цей інтеграл від форми шляху, і обчислити його.

Варіант 31.

$$F_x = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad F_y = \frac{3x}{x^2+y^2}, \quad (L)\ \begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi .$$

Розв'язання.

Перевіряємо незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування. Функції F_x та F_y не існують у точці $O(0;0)$ Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_y' = 2\frac{\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \left(\frac{3x}{x^2+y^2}\right)_x' = 3\frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 3\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Рівність $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ не виконується, оскільки $2\left(x^2-y^2\right) \ne 3\left(y^2-x^2\right)$. Тому інтеграл $\int\limits_{AB(L)} F_x dx + F_y dy$ залежить від форми шляху інтегрування.

Обчислимо цей інтеграл по заданій лінії L, яка не проходить через точку $O(0,0)$ (рисунок 4.7).

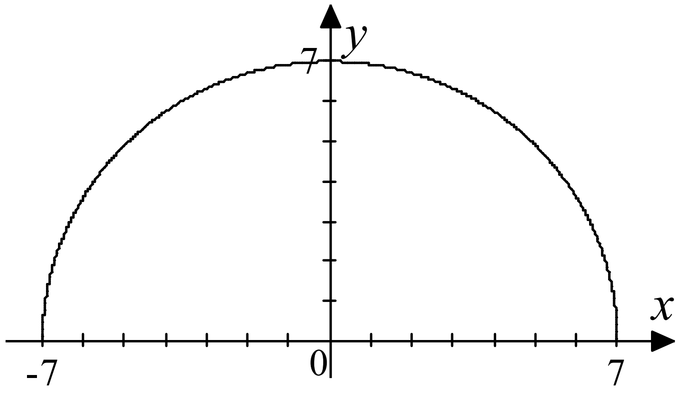

Рисунок 4.7

Для цього знайдемо залежність F_x та F_y від параметра t:

$$F_x = \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{14\sin t}{49\cos^2 t + 49\sin^2 t} = \frac{14}{49}\sin t = \frac{2}{7}\sin t,$$

$$F_y = \frac{3x}{x^2+y^2} = \frac{21\cos t}{49\cos^2 t + 49\sin^2 t} = \frac{3}{7}\cos t.$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(7\cos t\right)_t' = -7\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(7\sin t\right)_t' = 7\cos t$$

тоді за формулою (2.16) при $z = 0$ маємо:

$$\int\limits_{AB(L)} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left\{ F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right\} dt =$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\frac{2}{7}\sin t\cdot\left(-7\sin t\right)+\frac{3}{7}\cos t\cdot 7\cos t\right\}dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-2\sin^2 t+3\cos^2 t\right)dt=\int_0^{\pi}\left(-2+5\cos^2 t\right)dt=-2\int_0^{\pi}dt+\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dt+\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\cos 2t dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi}+\frac{5}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-0\right)+\frac{5}{4}\left(0-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

Відповідь. $I=\dfrac{\pi}{2}$.

Завдання 5. Задано криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{AB(L)}\vec{F}\vec{dl}$, де AB – дуга кривої L, заданої рівнянням $y=y\left(x\right)$, між точками $A\left(0;0\right)$ і $B\left(x_0;y_0\right)$. Перевірити, чи залежить інтеграл від форми шляху інтегрування і обчислити його.

Варіант 31. $\vec{F}=4x^3y^3\vec{i}+3x^4y^2\vec{j}$, $\quad y=2x^7$, $\quad B\left(1;2\right)$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$ заданий на площині $z=0$, і його компоненти дорівнюють $F_x\left(x;y\right)=4x^3y^3$, $\quad F_y\left(x;y\right)=3x^4y^2$. Компоненти вектора $\vec{F}$ неперервні при будь-яких скінченних x та y. Для дослідження залежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\left(4x^3y^3\right)'_y=4x^3\cdot 3y^2=12x^3y^2,$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\left(3x^4y^2\right)'_x=3\cdot 4x^3y^2=12x^3y^2.$$

Ці похідні також неперервні при скінченних x та y. Бачимо,що $\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$. Тому даний криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить тільки від координат точок A і B.

Обчислимо даний інтеграл по лінії L, рівняння якої $y = 2x^7$ задано явно, за формулою:

$$\int\limits_{AB(L)} \vec{F}\vec{dl} = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left\{ F_x\left(x; y(x)\right) + F_y\left(x; y(x)\right) \cdot \frac{dy}{dx} \right\} dx .$$

На лінії L можна виразити компоненти вектора $\vec{F}(x;y)$ через одну змінну (наприклад x).

$$F_x(x;y) = \left| y = y(x) = 2x^7 \right| = F_x\left(x; y(x)\right) = 4x^3\left(2x^7\right)^3 = 32x^{24},$$

$$F_y(x;y) = \left| y = y(x) = 2x^7 \right| = F_y\left(x; y(x)\right) = 3x^4\left(2x^7\right)^2 = 12x^{18},$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = 14x^6.$$

З координат точок $A(0;0)$ та $B(1;2)$ знаходимо, що $x_A = 0$ та $x_B = 1$.

$$\int\limits_{AB(L)} \vec{F}\vec{dl} = \int\limits_0^1 \left[32x^{24} + 12x^{18} \cdot 14x^6 \right] dx = \int\limits_0^1 \left[32x^{24} + 168x^{24} \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 200x^{24} dx = \frac{200}{25} x^{25} \Bigg|_0^1 = \frac{200}{25} = 8$$

Відповідь. $I = 8$.

Завдання 6. Задано векторне поле $\overline{F}(\overline{r})$ і піраміда $OABC$, обмежена координатними площинами і площиною P_{ABC} : $Ax + By + Cz + D = 0$. Обчислити:

а) потік вектора $\overline{F}$ через поверхню піраміди $OABC$ у напрямку зовнішньої нормалі $\overline{n}$;

б) перевірити результат (а) за теоремою Остроградського–Гаусса;

в) обчислити циркуляцію вектора $\overline{F}$ вздовж контура ABC;

г) перевірити результат (в) за формулою Стокса.

Зобразити піраміду $OABC$ та вектори зовнішніх нормалей.

Варіант 31.

$\vec{F} = (7x + 5z)\vec{k}$, P_{ABC} : $3x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання.

Зобразимо область інтегрування. Для цього напишемо рівняння площини P_{ABC} у відрізках: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$, з якого легко знайти точки $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-6)$ перетину площини P_{ABC} з осями Ox, Oy, Oz відповідно (рисунок 4.8).

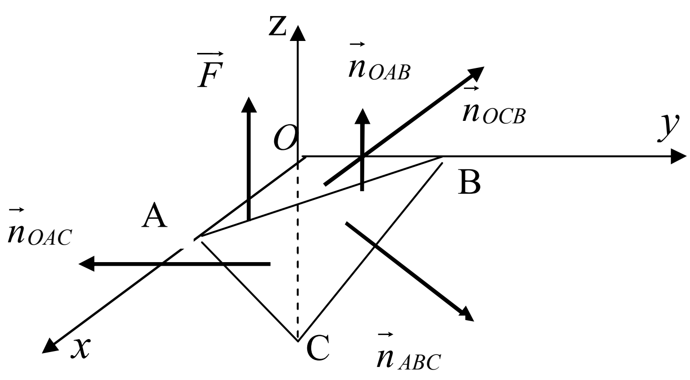

Рисунок 4.8

а) потік векторного поля $\vec{F}$ через поверхню S у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta\ , \cos\gamma)$ до поверхні S обчислюється за формулою:

$$\Pi_S = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left(F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma \ \right) dS .$$

Потік вектора через поверхню піраміди дорівнює сумі потоків через грані піраміди: $\Pi = \Pi_{ABC} + \Pi_{OAB} + \Pi_{OAC} + \Pi_{OBC}$.

Знайдемо вектори зовнішніх нормалей до площин, які обмежують піраміду. З рисунка 4.8 видно, що зовнішні нормалі до площин P_{ABC}, $x = 0$ $y = 0$ повинні мати від'ємні компоненти, відповідні ортам $\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$. Зовнішня нормаль до площини $z = 0$ повинна мати додатний компонент, відповідний орту $\vec{k}$.

Для площини P_{ABC} маємо вектор нормалі $\overrightarrow{N} = (3,\ 2\ -1)$. Нормований на одиницю вектор зовнішньої нормалі $\vec{n}_{ABC} = \dfrac{3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,\ 2, -1)$.

Інші вектори зовнішніх нормалей: $\vec{n}_{OAB} = (0,\ 0,\ 1)$, $\vec{n}_{OAC} = (0,\ -1,\ 0)$, $\vec{n}_{OBC} = (-1,\ 0,\ 0)$. Для вектора $\overrightarrow{F} = (7x + 5z)\vec{k}$ ми маємо $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 7x + 5z$.

Потік через трикутник ABC дорівнює $\Pi_{ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}_{ABC} dS = -\frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_{\Delta ABC} (7x+5z) dS$. Цей інтеграл можна обчислити трьома способами:

I. Для проекції трикутника ABC на площину YOZ $(x=0)$ використаємо рівність (3.15), $\left(\vec{n} = -\vec{n}_{ABC}\right)$ $dS_x = dydz = n_x dS$ і $dS = -\frac{\sqrt{14}}{3} dydz$. При цьому змінну x у векторі $\vec{F}(x,y,z)$ потрібно виразити за допомогою рівняння площини P_{ABC} через y та z. Цей спосіб обчислення поверхневого інтеграла доцільно застосувати у випадку $F_y = F_z = 0$;

II. Для проекції трикутника ABC на площину XOZ $(y=0)$ використовуємо рівність (3.15), $dS_y = dxdz = n_y dS$ і $dS = -\frac{\sqrt{14}}{2} dxdz$. При цьому змінну у $\vec{F}(x,y,z)$ потрібно виразити через x та z. Цей спосіб обчислення доцільно застосовувати у випадку $F_x = F_z = 0$;

III. Для проекції трикутника ABC на площину XOY $(z=0)$ використовуємо рівність (3.15), $dS_z = dxdy = n_z dS$ і в нашому випадку $dS = \sqrt{14} dxdy$. При цьому змінну z у $\vec{F}(x,y,z)$ потрібно виразити через змінні x та y. Цей спосіб інтегрування доцільно застосовувати у випадку $F_x = F_y = 0$.

В нашому випадку для потоку через трикутник ABC маємо:

$$\Pi_{ABC} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_{\Delta ABC} F_x\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dS = \left| \begin{array}{l} z\left(x, y\right) = 3x + 2y - 6 \\ F_x\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) = \\ = 7x + 5\left(3x + 2y - 6\right) \\ dS = \sqrt{14} dxdy \end{array} \right| =$$

$$= -\iint\limits_{\Delta OAB} \left(22x + 10y - 30\right) dxdy \boxed{=}$$

Для того щоб розставити границі у $\iint\limits_{\Delta OAB} \left(22x + 10y - 30\right) dxdy$, зробимо рисунок (рисунок 4.9)

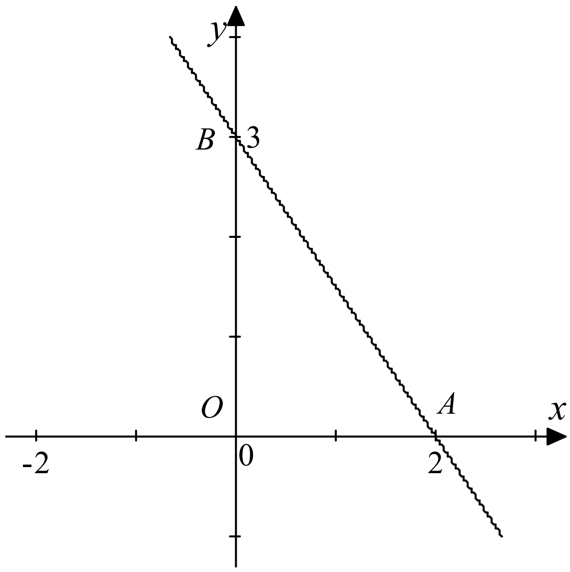

Рисунок 4.9

З рисунка 4.9 бачимо, що $0 \le x \le 2$, а значення y змінюється від 0 до значень y на відрізку прямої AB : $y = \frac{3}{2}\left(2 - x\right)$, яка є лінією перетину площин P_{ABC} та $z=0$. Трикутник OAB є правильна область.

$$\boxed{=}-\int_0^2 dx\int_0^{\frac{3}{2}(2-x)}\left((22x-30)+10y\right)dy=$$

$$=-\int_0^2\left\{\left((22x-30)\,y+5y^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}(2-x)}\right\}dx=-\int_0^2\left((22x-30)\frac{3}{2}(2-x)+\right.$$

$$\left.+\frac{45}{4}(2-x)^2\right)dx=-\int_0^2(2-x)\left(3(11x-15)+\frac{45}{4}(2-x)\right)dx=$$

$$=-\int_0^2(2-x)\left(33x-45+\frac{45}{2}-\frac{45}{4}x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_0^2(2-x)(29x-30)\,dx=$$

$$=-\frac{3}{4}\int_0^2\left(-29x^2+88x-60\right)dx=-\frac{3}{4}\left(-\frac{29x^3}{3}+44x^2-60x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{232}{3}+176-120\right)=-\frac{3}{4}\left(-\frac{64}{3}\right)=16$$

Тепер знайдемо Π_{OAB} – потік через грань піраміди AOB, яка є частиною площини xOy, рівняння якої $z=0$, і напрямок зовнішньої нормалі збігається з $\vec{k}$

$$\Pi_{OAB} = \iint\limits_{\Delta OAB} F_z\left(x,y,z\right)\Big|_{z=0} dS_z = \iint\limits_{\Delta OAB} \left(7x + 5\cdot 0\right)dxdy =$$

$$= 7\int_0^2 xdx \int_0^{\frac{3}{2}(2-x)} dy = 7\int_0^2 x\cdot\left(y \Big|_0^{\frac{3}{2}(2-x)} \right)dx = \frac{21}{2}\int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{21}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{21}{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 14$$

Потік через грань OAC Π_{OAC}, як і потік Π_{OBC} дорівнює нулю, оскільки $\vec{F}\cdot\vec{n}_{OAC} = \vec{F}\cdot\vec{n}_{OBC} = 0$.

Таким чином, повний потік через поверхню піраміди

$$\Pi = \Pi_{ABC} + \Pi_{OAB} + \Pi_{OAC} + \Pi_{OBC} = 16 + 14 = 30;$$

б) тепер обчислимо повний потік за допомогою формули Остроградського – Гаусса

$$\Pi = \oiint\limits_{(S)} \vec{F}\vec{n}ds = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{F}dxdydz,$$

$$div\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 + 0 + \left(7x + 5z\right)'_z = 0 + 0 + 5 = 5.$$

Тому ми маємо

$$\Pi = 5\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = 5\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{3}{2}(2-x)} dy \int\limits_{3x+2y-6}^{0} dz =$$

$$= -5\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{3}{2}(2-x)} \left(3x-6+2y\right)dy = -5\int\limits_0^2 \left(\left(-3\left(2-x\right)y + y^2\right) \Big|_0^{\frac{3}{2}(2-x)} \right) dx =$$

$$= -5\int\limits_0^2 \left(-\frac{9}{2}\left(2-x\right)^2 + \frac{9}{4}\left(2-x\right)^2 \right) dx = \frac{45}{4}\int\limits_0^2 \left(2-x\right)^2 dx = -\frac{45}{4}\frac{\left(2-x\right)^3}{3}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{15}{4}\left(0-8\right) = 30$$

Зауважимо, що результат обчислення потоку за формулою Остроградського – Гаусса в даному випадку сталої дивергенції можна одержати простіше. Дійсно,

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{F}dxdydz = div\vec{F}\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = div\vec{F}\cdot V_{\text{пір}} = 5\cdot\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 30,$$

де OA, OB, OC – довжини відповідних відрізків на осях $Ox,\ Oy,\ Oz$.

Бачимо, що результати обчислення потоку двома способами збігаються;

в) знайдемо циркуляцію вектора $\overline{F}\left(\overline{r}\right)$ по сторонам ΔABC (рисунок 4.10).

$$\ddot{O} = \oint\limits_{\Delta ABC} \vec{F}\left(\vec{r}\right) d\vec{r} = \int\limits_{\Delta ABC} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int\limits_{\Delta ABC} F_z dz\,.$$

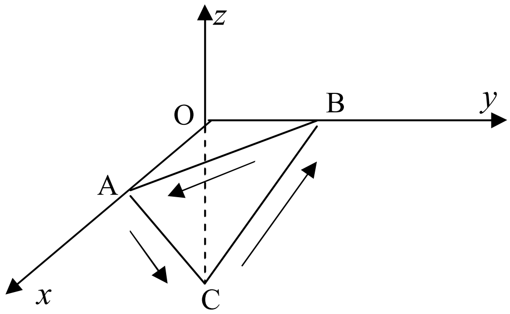

Рисунок 4.10

$$\ddot{O} = \int\limits_{\Delta ABC} F_z dz = \int\limits_{AC} F_z dz + \int\limits_{CB} F_z dz + \int\limits_{BA} F_z dz = \ddot{O}_{\grave{A}\tilde{N}} + \ddot{O}_{\tilde{N}\hat{A}} + \ddot{O}_{\hat{A}\grave{A}}\,.$$

$$AC\ :\quad y = 0,\quad 3x - z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6+z}{3},\ -6 \le z \le 0$$

$$\ddot{O}_{\grave{A}\tilde{N}} = \int\limits_{0}^{-6} \left(7 \cdot \frac{z+6}{3} + 5z\right) dz = -\int\limits_{-6}^{0} \left(\frac{22}{3} z + 14\right) dz = -\left(\frac{11}{3} z^2 + 14z\right)\Bigg|_{-6}^{0} =$$
$$= 132 - 84 = 48$$

$$CB\ :\quad x = 0 \qquad 2y - z - 6 = 0,$$

$$\ddot{O}_{CB} = \int\limits_{-6}^{0} \left(7 \cdot 0 + 5z\right) dz = \frac{5}{2} z^2 \Bigg|_{-6}^{0} = \frac{5}{2}\left(0 - 36\right) = -90$$

$$BA\ :\quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad dz = 0, \quad 3x + 2y - 6 = 0, \ \Rightarrow \quad \ddot{O}_{\hat{A}\grave{A}} = 0$$
$$\ddot{O} = 48 - 90 = -42$$

г) при обчисленні циркуляції за формулою Стокса нам потрібно знайти нормаль до поверхні (тобто трикутника ABC), узгоджену з обраним нами напрямком обходу контуру (трикутника ABC). З точки A переносимо нормаль у точку C,

потім у точку B і після цього повертаємось у точку A. В нашому випадку ця нормаль збігається із зовнішньою нормаллю $\vec{n}_{ABC}$. Щоб побачити це, достатньо розглянути перенос нормалі з точки B у точку A. Під час руху при виборі нормалі $\vec{n}_{ABC}$ трикутник ABC (наприклад відрізки AC та BC) розташовані ліворуч.
Таким чином, можна написати $\text{Ö} = \oint\limits_{ABC} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_{\Delta ABC} rot\vec{F} \cdot \vec{n}_{ABC}\, dS$.

Знаходимо $rot\vec{F}$:

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 7x+5z \end{vmatrix} = \vec{i}\left((7x+5z)'_y - (0)'_z \right) - $$

$$- \vec{j}\left((7x+5z)'_x - (0)'_z \right) + \vec{k}\left((0)'_x - (0)'_y \right) = -7\vec{j}$$

Тоді $$\text{Ö} = -\frac{7}{\sqrt{14}}\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{j}\right) \iint\limits_{\Delta ABC} dS = -\sqrt{14} \iint\limits_{\Delta ABC} dS$$

Цей інтеграл можна обчислити різними способами. Ми розглянемо проекцію трикутника ABC на площину $y = 0$. В цьому випадку $dS_y = dxdz = \frac{2}{\sqrt{14}} dS$. Тому можна записати

$$\text{Ö} = -\sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \iint\limits_{\Delta OAC} dxdz = -7\int\limits_0^2 dx \int\limits_{3(x-2)}^{0} dz = 7 \cdot 3 \int\limits_0^2 (x-2)\, dx =$$

$$= 21 \cdot \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_0^2 = \frac{21}{2}(0-4) = -42$$

Бачимо, що результат обчислення циркуляції вектора $\vec{F}$ за формулою Стокса збігається з результатом безпосереднього обчислення.

Завдання 7. Перевірити, чи буде векторне поле $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ соленоїдальним або потенціальним. Якщо векторне поле $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ виявиться потенціальним, знайти його потенціал. Перевірити результат за визначенням.

Варіант 31.

$$\vec{F}=\left(2x+7yz\right)\vec{i}+\left(3y^4+7xz+2\right)\vec{j}+\left(4z^6+7xy+3\right)\vec{k}\ .$$

Розв'язання.

Поле соленоїдальне (тобто не має джерел та стоків), якщо $div\vec{F}=0$. Знайдемо дивергенцію:

$$div\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\left(2x+7yz\right)_x^{'}+\left(3y^4+7xz+2\right)_y^{'}+$$

$$+\left(4z^6+7xy+3\right)_z^{'}=2+12y^3+24z^5.$$

Ця величина при довільних $x,\ y,\ z$ відмінна від нуля. Тому поле $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ не соленоїдальне.

Векторне поле $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ потенціальне, якщо $rot\vec{F}=0$.

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x+7yz & 3y^4+7xz & 4z^6+7xy+3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y^4+7xz & 4z^6+7xy+3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x+7yz & 4z^6+7xy+3\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2x+7yz & 3y^4+7xz \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\left(4z^6+7xy+3\right)'_y - \left(3y^4+7xz\right)'_z\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\left(4z^6+7xy+3\right)'_x - \left(2x+7yz\right)'_z\right) + \vec{k}\left(\left(3y^4+7xz\right)'_x - \left(2x+7yz\right)'_y\right) =$$

$$=\vec{i}\left(7x-7x\right) - \vec{j}\left(7y-7y\right) + \vec{k}\left(7z-7z\right) = \vec{0}$$

Таким чином, поле $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ потенціальне.

Знайдемо потенціал U в довільній точці $B\left(x, yz\right)$. Зобразимо $U\left(B\right)$ у вигляді $U\left(B\right) = \Delta U + U_0$, де $U_0 = U\left(A\right)$ – потенціал у точці A, $\Delta U = \int\limits_{AB(L)} \overline{F}d\overline{r} = U\left(B\right) - U\left(A\right)$ різниця потенціалів у точках $A\left(0,0,0\right)$ та $B\left(x, yz\right)$.

Внаслідок того, що поле потенціальне, то криволінійний інтеграл другого роду не залежить від форми шляху інтегрування. Зручно обчислювати цей інтеграл вздовж відрізків, паралельних координатним осям. Оберемо ламану AA_1B_1B з точками $A_1\left(x\ ,0,0\right)$, $B_1\left(x\ ,y\ ,0\right)$ із ланками, паралельними координатним осям (рисунок 4.11).

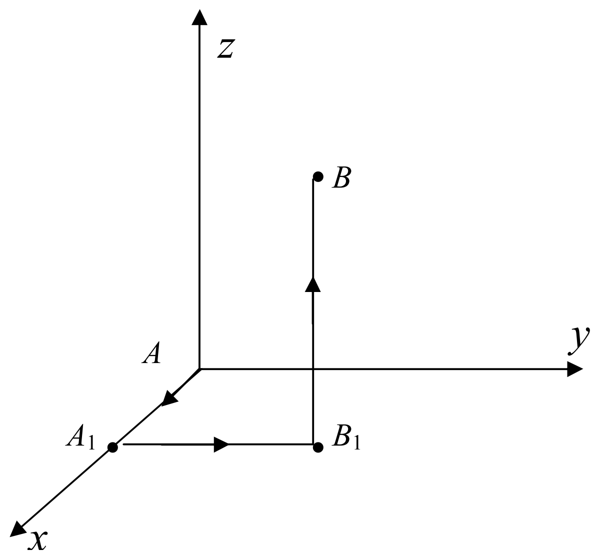

Рисунок 4.11

Тоді вздовж AA_1 маємо $y = z = 0 \Rightarrow dy = dz = 0$
$\vec{F}\left(\vec{r}\right)\Big|_{AA_1} = 2x\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$;

вздовж A_1B_1 маємо $x = const, z = 0 \Rightarrow dx = dz = 0$
$\vec{F}\left(\vec{r}\right)\Big|_{A_1B_1} = 2x\vec{i} + \left(3y^4 + 2\right)\vec{j} + \left(7xy + 3\right)\vec{k}$;

вздовж B_1B маємо $x = const, y = const \Rightarrow dx = dy = 0$
$\vec{F}\left(\vec{r}\right)\Big|_{B_1B} = \left(2x + 7yz\right)\vec{i} + \left(3y^4 + 7xz + 2\right)\vec{j} + \left(4z^6 + 7xy + 3\right)\vec{k}$.

Одержуємо:

$$\Delta U\left(x, y, z\right) = \int\limits_{AA_1} \overline{F}d\overline{r} + \int\limits_{A_1B_1} \overline{F}d\overline{r} + \int\limits_{B_1B} \overline{F}d\overline{r} = \int\limits_{AA_1} F_x dx + \int\limits_{A_1B_1} F_y dy +$$

$$+ \int\limits_{B_1B} F_z dz = \int\limits_0^x 2xdx + \int\limits_0^y (3y^4 + 2)dy + \int\limits_0^z \left(4z^6 + 7xy + 3\right)dz =$$

$$= x^2 + \frac{3}{5}y^5 + 2y + \frac{4}{7}z^7 + 7xyz + 3z.$$

Потенціал

$$U\left(x, y, z\right) = \Delta U + U_0 = x^2 + \frac{3}{5}y^5 + 2y + \frac{4}{7}z^7 + 7xyz + 3z + U_0.$$

Для перевірки правильності одержаного результату перевіримо, що виконується рівність $\vec{F} = grad\, U$, яка є визначенням потенціалу (4.30). За визначенням,

$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Маємо:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \left(x^2 + \frac{3}{5} y^5 + 2y + \frac{4}{7} z^7 + 7xyz + 3z + U_0 \right)'_x = 2x + 7yz$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \left(x^2 + \frac{3}{5} y^5 + 2y + \frac{4}{7} z^7 + 7xyz + 3z + U_0 \right)'_y = 3y^4 + 7xz + 2$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \left(x^2 + \frac{3}{5} y^5 + 2y + \frac{4}{7} z^7 + 7xyz + 3z + U_0 \right)'_z = 4z^6 + 7xy + 3$$

Таким чином, потенціал знайдено правильно.

Варіанти завдань

Завдання 1

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями, заданими своїми рівняннями.

№	a)	b)
1	$\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $D: y = x^3, x = 1, y = 0$	$\iint\limits_D (x + y^2) dxdy$, $D: y = -x + 1, y = -x + 2,$ $x = 0, x = 1$
2	$\iint\limits_D x^2 y dxdy$, $D: y = x^2, x = 0, y = 1, x > 0$	$\iint\limits_D (x + y) dxdy$, $D: y = x^3, y = -x + 2, y = 0$
3	$\iint\limits_D (x + 2y) dxdy$, $D: y = x, x = 0, y = 1$	$\iint\limits_D xy dxdy$, $D: y = -x + 2, y = x, y = 0$
4	$\iint\limits_D x^3 y dxdy$,	$\iint\limits_D (x + xy) dxdy$,

	$D: y = x^2, y = x^3$	$D: y = x^3, y = -x+2, x = 0$
5	$\iint\limits_D xy^3 dxdy$, $D: y = x\ \ , y = x^3, x > 0$	$\iint\limits_D (y+xy)dxdy$, $D: y = x^2, y = -x+2, y = 0$
6	$\iint\limits_D (x-3y)dxdy\ D: y = -x^2, y = x$	$\iint\limits_D x^2 ydxdy$, $D: y = 1-x^2, y = 0$
7	$\iint\limits_D (3x-y)dxdy$, $D: y = x^3, x = 1, y = 0$	$\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $D: y = x, y = x-2,$ $y = 0, y = 2$
8	$\iint\limits_D x^4 y^2 dxdy$, $D: y = \sqrt{x}, y = x^3$	$\iint\limits_D (x+3y)dxdy$, $D: y = x, y = -x+2, x = 0$
9	$\iint\limits_D x^2 y^4 dxdy$, $D: y = 2x,\ y = 2x^2$	$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, $D: y = -x, y = x+2, y = 0$
10	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D: y = \sqrt{x}, x = 1, y = 0$	$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, $D: xy = 2,\ y = x+1, x = 2$
11	$\iint\limits_D xydxdy$, $D: y = x+1, x = 0, y = 0$	$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, $D: y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$
12	$\iint\limits_D x^2 y^2 dxdy$, $D: y = -x, x = 0, y = 1$	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, $D: y = -x+1, y = x-1, x = 0$
13	$\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy$, $D: y = -x, x = 1, y = 0$	$\iint\limits_D x^2 y^2 dxdy$, $D: y = x^2, y = -x+2,$ $x = 0, x > 0$
14	$\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy$, $D: y = -x, x = 1, y = 0$	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$; $D: x^2+y^2 = 1,\ y = 0,\ y > 0.$
15	$\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$,	$\iint\limits_D (x-3y)dxdy$;

	$D: y=x^2, x=-1, y=0$	$D: y=\sqrt{x}, y=-x+2, x=0$
16	$\iint_D x^3 y dxdy$, $D: y=-x, x=0, y=-1$	$\iint_D (x+y)dxdy$, $D: y=x^2+1, y=2$
17	$\iint_D (x+y^2)dxdy$, $D: y=-x^3, x=1, y=0$	$\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$, $D: xy=1, y=x, x=0, y=2$
18	$\iint_D (x^2+y)dxdy$, $D: y=\sqrt{x}, x=0, y=1$	$\iint_D xydxdy$, $D: y=x^2, y=2-x^2,$ $x=0, x>0$
19	$\iint_D xy^2 dxdy$, $D: y=-\sqrt{x}, x=0, y=-1$	$\iint_D (x+y^2)dxdy$, $D: y=-x+1, y=-x+2,$ $y=0, y=1.$
20	$\iint_D x^2y^2dxdy$, $D: y=-x-1, x=0, y=0$	$\iint_D (x^2+y)dxdy$, $D: y=x-1, y=-x-1, y=0$
21	$\iint_D (\sqrt{x}+y)dxdy$, $D: y=\sqrt{x}, y=x^2$	$\iint_D xydxdy$, $D: y=x^3, y=2-x^2, x=0$
22	$\iint_D xy^4dxdy$, $D: y=x-1, x=0, y=0$	$\iint_D (3x+y)dxdy$, $D: y=x^2+1, y=1-x, x=1$
23	$\iint_D x^4 y dxdy$, $D: y=1-x^3, x=0, y=0$	$\iint_D (x+2y)dxdy$, $D: y=x+1, y=x+2,$ $x=0, x=1$
24	$\iint_D (x+xy)dxdy$, $D: y=x, x=-1, y=0$	$\iint_D xydxdy$, $D: y=x+1, y=-x+1, y=0$
25	$\iint_D (y+xy)dxdy$,	$\iint_D xy^2dxdy$,

	$D: y=-x, x=-1, y=0$	$D: y=x,\ y=x+2,\ y=0, y=2$
26	$\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy,\ D: y=x^2+1, y=x+1$	$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, $D: y=x+1, y=-x+1, x=1$
27	$\iint\limits_D \sqrt{x}y^2dxdy$, $D: y=-x^2,\ y=-x$	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, $D: y=x^3+1, y=-x+1, x=1$
28	$\iint\limits_D x^3ydxdy$, $D: y=(x-1)^2, x=0, y=0$	$\iint\limits_D (y-x)dxdy$, $D: y=x+1, y=x, x=0, x=1$
29	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, $D: y=-x^3, x=-1,\ y=0$	$\iint\limits_D 2xydxdy$, $D: y=x^2+1, y=1-x^2, x=1$
30	$\iint\limits_D x^4ydxdy$, $D: y=\sqrt{x}, x=1, y=0$	$\iint\limits_D (4x+3y)dxdy$, $D: y=x+1, y=1-x^2, x=1$
31	$\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D: y=x^2,\ y=x;$	$\iint\limits_D (3x-y)dxdy,$ $D: y=\sqrt{x},\ y=-x+2,\ y=0.$

Завдання 2.

Задана піраміда, яка обмежена координатними площинами і площиною P, визначеною рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$ (таблиця 4.1). Зобразити цю піраміду і знайти її об’єм за допомогою потрійного інтеграла.

Таблиця 4.1

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1	1	2	1	-2
2	2	-1	2	-2
3	2	1	1	-4
4	-1	2	2	-4
5	2	-3	2	-6
6	3	2	3	-6
7	-1	2	1	-4
8	1	1	2	-4
9	1	1	3	-3
10	-1	1	2	-4
11	2	2	-1	-2
12	2	1	-2	-2
13	2	1	1	-4
14	2	-2	-1	-4
15	2	3	-2	-6
16	1	2	-1	-2
17	3	2	3	-6
18	1	2	-1	-4
19	3	1	-1	-3
20	-1	2	1	-4
21	2	2	-1	-4
22	-3	2	2	-6
23	2	3	-3	-6
24	-1	2	1	-2
25	2	-1	2	-4
26	3	-4	2	-12
27	2	3	-1	-6
28	3	-1	2	-6
29	-2	1	-2	-2
30	2	-3	1	-6
31	14	-21	-6	-42

Завдання 3

Знайти масу циліндра, обмеженого циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами P_1 і P_2, з лінією перетину площин, яка не проходить через циліндр. Обчислення виконати в циліндрічній системі координат. Густина (щільність) матеріалу $\rho(x, y, z) = \rho_0 (x^2 + y^2)^n$, де ρ_0 – стала (таблиця 4.2).

Таблиця 4.2

№	R	n	P_1	P_2
1	2	3	4	5
1	3	2	$x+3y+z+12=0$	$2x-y+z-12=0$
2	2	3	$x-2y+z+5=0$	$3x-y+z-5=0$
3	4	1	$3x-4y+x+11=0$	$x+2y+z-11=0$
4	3	$\frac{3}{2}$	$2x+y+z+12=0$	$4x+5y+z-12=0$
5	2	$\frac{1}{2}$	$4x-y+z+10=0$	$x+3y+z-10=0$
6	4	$\frac{5}{2}$	$5x-y+z+14=0$	$3x+2y+z-14=0$
7	3	4	$6x-2y+z+15=0$	$x-5y+z-15=0$
8	5	$\frac{1}{2}$	$x+2y+z+16=0$	$3x+5y+z-16=0$
9	2	5	$-3x+2y+z+9=0$	$x+4y+z-9=0$
10	3	$\frac{3}{2}$	$2x-3y+z+12=0$	$3x+5y+z-12=0$
11	4	2	$3x-y+z+10=0$	$-2x+5y+z-10=0$
12	5	$\frac{5}{2}$	$2x-4y+z+14=0$	$5x-6y+z-14=0$
13	2	3	$x-3y+z+5=0$	$4x+3y+z-5=0$
14	3	$\frac{1}{2}$	$4x-2y+z+11=0$	$-3x+5y+z-11=0$
15	4	2	$5x-y+z+12=0$	$2x+y+z-12=0$
16	5	$\frac{3}{2}$	$3x-2y+z+20=0$	$-x+4y+z-20=0$

Продовження таблиця 4.1

1	2	3	4	5
17	4	5	$4x-3y+z+14=0$	$2x+5y+z-14=0$
18	3	$\frac{5}{2}$	$3x+2y+z+15=0$	$4x-y+z-15=0$
19	2	3	$2x+4y+z+11=0$	$-3x+5y+z-11=0$
20	4	$\frac{1}{2}$	$3x+y+z+10=0$	$5x+2y+z-10=0$
21	5	3	$2x+4y+z+16=0$	$3x+2y+z-16=0$
22	2	$\frac{3}{2}$	$3x-y+z+15=0$	$4x+3y+z-15=0$
23	3	4	$-2x+3y+z+8=0$	$x-2y+z-8=0$
24	4	$\frac{5}{2}$	$x-3y+z+15=0$	$2x+y+z-15=0$
25	5	2	$4x-3y+z+16=0$	$3x+5y+z-16=0$
26	4	$\frac{1}{2}$	$3x-5y+z+20=0$	$-x+4y+z-20=0$
27	3	4	$-4x-y+z+10=0$	$3x+y+z-10=0$
28	2	$\frac{3}{2}$	$3x+y+z+8=0$	$-2x+2y+z-8=0$
29	4	3	$5x-4y+z+20=0$	$-3x-5y+z-20=0$
30	3	$\frac{5}{2}$	$4x+3y+z+10=0$	$2x-5y+z-10=0$
31	2	$\frac{7}{2}$	$7x-2y+z+7=0$	$6x+5y+z-7=0$

Завдання 4

Задано криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{AB} F_x dx + F_y dy$, де AB дуга кривої L, заданої параметричними рівняннями.

Потрібно перевірити, чи залежить цей інтеграл від форми шляху інтегрування, і обчислити його.

1. $F_x = x^2 + 2xy,\ \ F_y = y^2 + 2xy;$	$(L)\begin{cases} x = t, \\ y = t^2; \end{cases}$	$A(0,0),\ B(2,4)$
2. $F_x = x^2 + y^2,\ \ F_y = y^2 + 2xy;$	$(L)\begin{cases} x = t, \\ y = t^3; \end{cases}$	$A(0,0),\ B(3,27)$
3. $F_x = x^3 - 3xy^2\ ,\ \ F_y = 2x^3;$	$(L)\begin{cases} x = t^2, \\ y = t; \end{cases}$	$A(1,1),\ B(4,2)$
4. $F_x = \dfrac{y}{x},\ \ F_y = x^3\ ;$	$(L)\begin{cases} x = t, \\ y = \ln t; \end{cases}$	$A(1,0),\ B(e,1)$
5. $F_x = x^2 + 2xy,\ \ F_y = -y^2 - 2xy;$	$(L)\begin{cases} x = 2t, \\ y = 4t^2; \end{cases}$	$A(0,0),\ B(2,4)$
6. $F_x = x^2 + y^2,\ \ F_y = y;$	$(L)\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$	$A(3,0),\ B(0,3)$
7. $F_x = xy - 3y,\ \ F_y = 2xy + 4y;$	$(L)\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3; \end{cases}$	$A(1,1),\ B(4,8)$
8. $F_x = y^2,\ \ F_y = \dfrac{x}{y};$	$(L)\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t; \end{cases}$	$A(0,1),\ B(1,e)$
9. $F_x = \dfrac{3x}{x^2 + y^2},\ \ F_y = \dfrac{4y}{x^2 + y^2};$	$(L)\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$	$A(2,0),\ B(0,2)$
10. $F_x = \dfrac{y + x}{x},\ \ F_y = x^4;$	$(L)\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t; \end{cases}$	$A(0,1),\ B(1,e)$
11. $F_x = -3y + 2x,\ F_y = 3x + 5y;$	$(L)\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$	$A(5,0), B(0,3)$
12. $F_x = x,\ \ F_y = x^2 + y^2;$	$(L)\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t; \end{cases}$	$A(5,0),\ B(0,5)$
13. $F_x = x^2 - y,\ \ F_y = -x + y^2;$	$(L)\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t; \end{cases}$	$A(0,5),\ B(-5,0)$
14. $F_x = \dfrac{y+1}{y},\ \ F_y = -\dfrac{x}{y},$	$(L)\begin{cases} x = t, \\ y = 2t; \end{cases}$	$A(1,2),\ B(2,4)$

15. $F_x = x^2 - 2xy, \quad F_y = y^2 - 2xy; \quad (L)\begin{cases} x = t, \\ y = t^2; \end{cases} \quad A(-1,1), \; B(1,1)$	
16. $F_x = x^2 - y, \quad F_y = xy; \quad (L)\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t; \end{cases} \quad A(R,0), \; B(0,R)$	
17. $F_x = x + y, \; F_y = x^2 - y^2; \quad (L)\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 5t; \end{cases} \quad A(1,0), \; B(5,10)$	
18. $F_x = x^2 y - 3x, \quad F_y = y^2 x + 2y; \quad (L)\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad A(1,0), \; B(0,1)$	
19. $F_x = y, \quad F_y = \dfrac{x}{y}; \quad (L)\begin{cases} x = t, \\ y = e^{-t}; \end{cases} \quad A(0,1), \; B(1, e^{-1})$	
20. $F_x = x + y, \; F_y = -x + y; \quad (L)\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 2; \end{cases} \quad A(0,2), \; B(4,10)$	
21. $F_x = y, \quad F_y = -x; \quad (L)\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases} \quad A(3,0), \; B(0,2)$	
22. $F_x = x^2 y - 2x, \quad F_y = 4xy^2 + 3y; \quad (L)\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases} \quad A(4,0), \; B(0,2)$	
23. $F_x = x^2 - y^2, \quad F_y = 2(x + y); \quad (L)\begin{cases} x = t^3, \\ y = 3t + 1; \end{cases} \quad A(0,1), \; B(8,7)$	
24. $F_x = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}, \; F_y = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}; \quad (L)\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases} \quad A(4,0), \; B(0,4)$	
25. $F_x = x^2 y - 2x, \; F_y = 9xy^2 + 3y; \quad (L)\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad A(3,0), \; B(0,1)$	
26. $F_x = x^2 y, \quad F_y = -y^2 x; \quad (L)\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y = \sqrt{\sin t}; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$	
27. $F_x = x^2 - y, \quad F_y = -x + y^2; \quad (L)\begin{cases} x = t^3, \\ y = 3t + 1; \end{cases} \quad A(0,1), \; B(1,4)$	
28. $F_x = (x - y)^2, \quad F_y = (x + y)^2; \quad (L)\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2 + 1; \end{cases} \quad A(-1,1), \; B(0,2)$	

29. $F_x = xy - x^2$, $F_y = x$;	$(L)\begin{cases} x = t, \\ y = 2t^2; \end{cases}$ $A(0,0)$, $B(1,2)$
30. $F_x = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $F_y = -\dfrac{2}{x^2 + y^2}$;	$(L)\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$
31. $F_x = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$, $F_y = \dfrac{3x}{x^2 + y^2}$;	$(L)\begin{cases} x = 7\cos t, \\ y = 7\sin t; \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

Завдання 5

Задано криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r}$,

де AB – дуга кривої L, заданої рівнянням $y = y(x)$, між точками $A(0,0)$ і $B(x_0, y_0)$. Перевірити, чи залежить інтеграл від форми шляху, і обчислити його.

1. $\vec{F} = x^3 y\vec{i} - x^2 y^4 \vec{j}$,	$y = 2x$,	$B(1,2)$
2. $\vec{F} = 5x^4 y^2 \vec{i} + 2x^5 y\vec{j}$,	$y = \dfrac{x}{2}$,	$B(2,1)$
3. $\vec{F} = x^5 y^2 \vec{i} + xy^2 \vec{j}$,	$y = -2x^2$,	$B(1,-2)$
4. $\vec{F} = 3x^2 y^2 \vec{i} + 2x^3 y\vec{j}$,	$y = 3x^2$,	$B(1,3)$
5. $\vec{F} = x^4 y\vec{i} + 3x^2 y^3 \vec{j}$,	$y = 2\sqrt{x}$,	$B(1,2)$
6. $\vec{F} = 3x^2 y^4 \vec{i} + 4x^3 y^3 \vec{j}$,	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$,	$B(4,1)$
7. $\vec{F} = x^2 y^5 \vec{i} + 3x^2 y\vec{j}$,	$y = \sqrt{x}$,	$B(1,1)$
8. $\vec{F} = 5x^4 y^3 \vec{i} + 3x^5 y^2 \vec{j}$,	$y = x^2$,	$B(1,1)$
9. $\vec{F} = 3xy^4 \vec{i} + 2x^4 y^2 \vec{j}$,	$y = 2x^3$,	$B(1,2)$
10. $\vec{F} = 2xy^4 \vec{i} + 4x^2 y^3 \vec{j}$,	$y = x^3$,	$B(1,1)$
11. $\vec{F} = 3x^4 y^2 \vec{i} - 5x^2 y\vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(1,-1)$
12. $\vec{F} = 3x^2 y^5 \vec{i} + 5x^3 y^4 \vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(1,-1)$
13. $\vec{F} = 4x^2 y\vec{i} + 3xy^3 \vec{j}$,	$y = -2x$,	$B(-1,2)$
14. $\vec{F} = 4x^3 y^3 \vec{i} + 3x^4 y^2 \vec{j}$,	$y = -\sqrt{x}$,	$B(1,-1)$
15. $\vec{F} = xy^3 \vec{i} + 2x^3 y^4 \vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(1,-1)$
16. $\vec{F} = 4x^3 y^5 \vec{i} + 5x^4 y^4 \vec{j}$,	$y = -2\sqrt{x}$,	$B(1,-2)$

17. $\vec{F} = x^5y^3\vec{i} + xy^4\vec{j}$,	$y = -\dfrac{x}{2}$,	$B(-2,1)$
18. $\vec{F} = 2xy^5\vec{i} + 5x^2y^4\vec{j}$,	$y = -2x^2$,	$B(-1,-2)$
19. $\vec{F} = 2x^3y^2\vec{i} + 3x^2y\vec{j}$,	$y = -2x^2$,	$B(1,-2)$
20. $\vec{F} = 6x^5y^4\vec{i} + 4x^6y^3\vec{j}$,	$y = -\dfrac{x}{2}$,	$B(-2,1)$
21. $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^4y^3\vec{j}$,	$y = x^3$,	$B(-1,-1)$
22. $\vec{F} = 4x^3y^3\vec{i} + 3x^4y^2\vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(-1,-1)$
23. $\vec{F} = 2x^4y^4\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$,	$y = 2x$,	$B(-1,-2)$
24. $\vec{F} = 6x^5y^5\vec{i} + 5x^6y^4\vec{j}$,	$y = \dfrac{x^2}{2}$,	$B(-2,2)$
25. $\vec{F} = x^5y\vec{i} + 2x^4y^3\vec{j}$,	$y = x^3$,	$B(-1,-1)$
26. $\vec{F} = 2xy^5\vec{i} + 5x^2y^4\vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(1,-1)$
27. $\vec{F} = 3x^2y^4\vec{i} + 2xy^5\vec{j}$,	$y = -x^3$,	$B(-1,1)$
28. $\vec{F} = 4x^3y^5\vec{i} + 5x^4y^4\vec{j}$,	$y = \sqrt[3]{x}$,	$B(1,1)$
29. $\vec{F} = -2x^3y^2\vec{i} + 3xy^4\vec{j}$,	$y = -x^2$,	$B(1,-1)$
30. $\vec{F} = 5x^4y^4\vec{i} + 4x^5y^3\vec{j}$,	$y = -\sqrt{x}$,	$B(1,-1)$
31. $\vec{F} = 4x^3y^3\vec{i} + 3x^4y^2\vec{j}$,	$y = 2x^7$,	$B(1,2)$

Завдання 6

Задане векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ і піраміда OABC, обмежена координатними площинами XOY (z=0), YOZ (x=0), XOZ (y=0) і похилою площиною $P_{ABC}: \ Ax + By + Cz + D = 0$. Обчислити:

а) потік вектора $\vec{F}$ через поверхню піраміди OABC у напрямі зовнішньої нормалі;

б) перевірити результат (а) за теоремою Остроградського – Гаусса;

в) обчислити циркуляцію вектора $\vec{F}$ вздовж контуру ABC;

г) перевірити результат (в) за формулою Стокса.

Зобразити піраміду OABC та вектори зовнішніх нормалей.

1. $\vec{F}=(2x-3z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: x+2y+z-2=0$
2. $\vec{F}=(3y-2x)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x-y+2z-2=0$
3. $\vec{F}=(4x+5z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 2x+y+z-4=0$
4. $\vec{F}=(-3x+2y)\vec{i}$,	$P_{ABC}: -x+2y+2z-4=0$
5. $\vec{F}=(3y-2z)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x-3y+2z-6=0$
6. $\vec{F}=(2y+3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 3x+2y+3z-6=0$
7. $\vec{F}=(2x-4z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: -x+2y+z-4=0$
8. $\vec{F}=(3x+4y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: x+y+2z-4=0$
9. $\vec{F}=(5x-3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: x+y+3z-3=0$
10. $\vec{F}=(2x+6z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: -x+y+2z-4=0$
11. $\vec{F}=(3x-5y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x+2y-z-2=0$
12. $\vec{F}=(4x-2z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 2x+y-2z-2=0$
13. $\vec{F}=(2x+3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 2x+y+z-4=0$
14. $\vec{F}=(2z-3x)\vec{i}$,	$P_{ABC}: 2x-2y-z-4=0$
15. $\vec{F}=(2x-3y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x+3y-2z-6=0$
16. $\vec{F}=(2y+3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: x+2y-z-2=0$
17. $\vec{F}=(4x-2z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: 3x+2y+3z-6=0$
18. $\vec{F}=(5x-3y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: x+2y-z-4=0$
19. $\vec{F}=(3x+5z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 3x+y-z-3=0$
20. $\vec{F}=(2x+6z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: -x+2y+z-4=0$
21. $\vec{F}=(3x+2y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x+2y-z-4=0$
22. $\vec{F}=(5x-3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: -3x+2y+2z-6=0$
23. $\vec{F}=(4x+3z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: 2x+3y-3z-6=0$
24. $\vec{F}=(3x-5y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: -x+2y+z-2=0$
25. $\vec{F}=(2x+3z)\vec{k}$,	$P_{ABC}: 2x-y+2z-4=0$
26. $\vec{F}=(5x-4z)\vec{i}$,	$P_{ABC}: 3x-4y+2z-12=0$
27. $\vec{F}=(-3x+4y)\vec{j}$,	$P_{ABC}: 2x+3y-z-6=0$

28. $\vec{F} = (-5y + 3z)\vec{k}$, $P_{ABC} : 3x - y + 2z - 6 = 0$	
29. $\vec{F} = (3x - 2z)\vec{i}$, $P_{ABC} : -2x + y - 2z - 2 = 0$	
30. $\vec{F} = (5y - 2z)\vec{j}$, $P_{ABC} : 2x - 3y + z - 6 = 0$	
31. $\vec{F} = (7x + 5z)\vec{k}$, $P_{ABC} : 3x + 2y - z - 6 = 0$	

Завдання 7

Перевірити, чи буде векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ соленоїдальним або потенціальним. Якщо векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ виявиться потенціальним, знайти його потенціал. Перевірити результат за визначенням.

1. $\vec{F} = (6x + 8yx)\vec{i} + (6y + 8xz)\vec{j} + (6z + 8xy)\vec{k}$
2. $\vec{F} = (8x + 5zy)\vec{i} + (8y + 5xz)\vec{j} + (8z + 5xy)\vec{k}$
3. $\vec{F} = (10x^2 - 3yz)\vec{i} + (10y^2 - 3xz)\vec{j} + (10z^2 - 3xy)\vec{k}$
4. $\vec{F} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$
5. $\vec{F} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$
6. $\vec{F} = (3x + 2yz)\vec{i} + (3y + 2xz)\vec{j} + (3z + 2xy)\vec{k}$
7. $\vec{F} = (5x - 2yz)\vec{i} + (5y - 2xz)\vec{j} + (5z - 2xy)\vec{k}$
8. $\vec{F} = (3x + 4yz)\vec{i} + (3y + 4xz)\vec{j} + (3z + 4xy)\vec{k}$
9. $\vec{F} = (-2x + 3yz)\vec{i} + (-2y + 3xz)\vec{j} + (-2z + 3xy)\vec{k}$
10. $\vec{F} = (3x^2 + 5yz)\vec{i} + (3y^2 + 5xz)\vec{j} + (3z^2 + 5xy)\vec{k}$
11. $\vec{F} = (8x^3 + 2yz)\vec{i} + (8y^3 + 2xz)\vec{j} + (8z^3 + 2xy)\vec{k}$
12. $\vec{F} = (4x^3 + 3yz)\vec{i} + (y^2 + 3yz)\vec{j} + (2z^4 + 3xy)\vec{k}$
13. $\vec{F} = (x^3 + 3yz)\vec{i} + (y^4 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$
14. $\vec{F} = (-5x + 4yz)\vec{i} + (-5y + 4xz)\vec{j} + (-5z + 4xy)\vec{k}$
15. $\vec{F} = (2x^2 + 5yz)\vec{i} + (3y^2 + 5xz)\vec{j} + (2z + 5xy)\vec{k}$
16. $\vec{F} = (-3z + 4yz)\vec{i} + (y^2 + 4xz)\vec{j} + (-z^4 + 4xy)\vec{k}$
17. $\vec{F} = 2xy^3z^4\vec{i} + 3x^2y^2z^4\vec{j} + 4x^2y^3z^3\vec{k}$
18. $\vec{F} = (5x + 4xyz)\vec{i} + 2x^2z\vec{j} + 2x^2y\vec{k}$

19. $\vec{F}=(2x+y^3z^2)\vec{i}+(y^2+3xy^2z^2)\vec{j}+(3z+2xy^3z)\vec{k}$
20. $\vec{F}=(6x^2+3yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(2z+3xy)\vec{k}$
21. $\vec{F}=(2x+4yz)\vec{i}+(-6y+4xz)\vec{j}+(z^2+4xy)\vec{k}$
22. $\vec{F}=(-2x+3yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(6z+3xy)\vec{k}$
23. $\vec{F}=(-6x+5yz)\vec{i}+(4y+5xz)\vec{j}+(-3z+5xy)\vec{k}$
24. $\vec{F}=(3x^2+4x^3yz^2)\vec{i}+(2y+x^4z^2)\vec{j}+(-4z+2x^4yz)\vec{k}$
25. $\vec{F}=(-2x+4yz)\vec{i}+(-2y+4xz)\vec{j}+(-z^2+4xy)\vec{k}$
26. $\vec{F}=(10x-8yz)\vec{i}+(-6y-8xz)\vec{j}+(8z-8xy)\vec{k}$
27. $\vec{F}=(3y+3x^2yz^2)\vec{i}+(3x+x^3z^2)\vec{j}+2x^3yz\vec{k}$
28. $\vec{F}=(2x+3x^2y^2z)\vec{i}+(y^2+2x^3yz)\vec{j}+(2z+x^3y^2)\vec{k}$
29. $\vec{F}=(4x^2+5yz)\vec{i}+(y^3+5xy)\vec{j}+(4z+5xy)\vec{k}$
30. $\vec{F}=(-4x+3yz)\vec{i}+(y^2+3xz)\vec{j}+(-z^3+3xy)\vec{k}$
31. $\vec{F}=(2x+7yz)\vec{i}+(3y^4+7xz+2)\vec{j}+(4z^6+7xy+3)\vec{k}$

Список літератури

1 Дубовик, В.П. Вища математика [Текст]: Навч. посіб. для вищих навчальних закладів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А. С. К., 2006. – 648 с.

2 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

3 Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1985. – 464 с.

4 Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2002. – Ч. 2. – 416 с.

5 Сборник задач по математике для втузов:Специальные разделы математического анализа [Текст] / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – Ч.2. – 416 с.

6 Ковалішина, І.В. Елементи математичного аналізу. Кратні та криволінійні інтеграли [Текст]: конспект лекцій з вищої математики / І.В.Ковалішина. – Харків : УкрДАЗТ, 2009. – Ч.8. – 30 с.

7 Ковалішина, І.В. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли; елементи теорії векторних полів [Текст]: методичні вказівки / І.В.Ковалішина. – Харків : УкрДАЗТ, 2000. – № 437 – 56 с.

8 Макаренко, Л.И. / Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля [Текст]: методические указания / Л.И. Макаренко, Н.И. Волохова, Н.С. Юрчак. – Харьков : УкрГАЖТ, 1992. – 23 с.

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання з дисципліни

"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

Відповідальний за випуск Рибачук О.В.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 15.08.12 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.