№3704

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
**до розрахунково-графічної роботи
з розділу дисципліни**

"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

Частина 1

Харків – 2007

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 26 червня 2006 р., протокол № 8.

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання загальнотехнічних спеціальностей.

Укладачі:

доценти В.І. Храбустовський,
О.А. Осмаєв,
О.І. Удодова

Рецензент

проф. Ю.В. Куліш

ВСТУП

Методичні вказівки присвячені розділу курсу вищої математики: комплексні числа та елементарні функції комплексної змінної. Вони містять теоретичні відомості, зразки розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання РГР або домашніх завдань, список учбової літератури.

Методичні вказівки рекомендовані для студентів загальнотехнічних спеціальностей денної форми навчання спеціальностей АіТ та ТСМ, а також деяких інших, зокрема ЕТ та ЕСК. Вони призначені для виконання розрахунково-графічної роботи або індивідуальних домашніх завдань.

Номери варіантів індивідуальних завдань або розрахунково-графічних робіт видаються викладачем.

ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ З НИМИ

Поняття комплексного числа

Комплексним числом називається виразу вигляду

$$\boxed{z = x + iy},$$

де x, y – дійсні числа ($x, y \in R$), а i – уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$. Множина комплексних чисел позначається $\mathbf{C}$.

Запис комплексного числа у вигляді $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа z. При цьому x зветься *дійною частиною* комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – *уявною частиною* комплексного числа z і позначається $y = \operatorname{Im} z$.

Дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел, а саме, це комплексні числа, у яких уявна частина дорівнює нулю

$$z = x + i0 = x.$$

Комплексне число, у якого дійсна частина дорівнює нулю, називається *уявним числом* $z = 0 + iy = iy$.

Геометричне тлумачення комплексного числа

Комплексне число $z = x + iy$ зображають геометрично вектором або точкою на площині XOY, яка в цьому випадку зветься комплексною (див. рисунок 1).

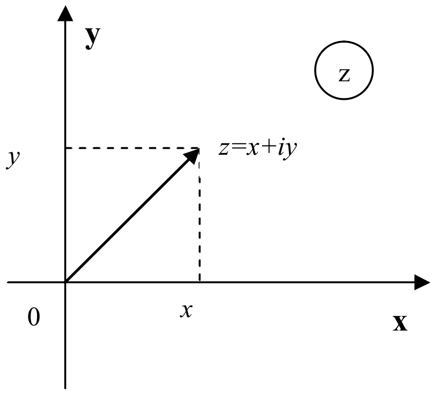


Рисунок 1

Спряженим до комплексного числа $z = x + iy$ зветься комплексне число

$$\overline{z} = z^{*} = x - iy .$$

Комплексні числа z та $\overline{z}$ розташовані на комплексній площині симетрично відповідно дійсної осі (див. рисунок 2).

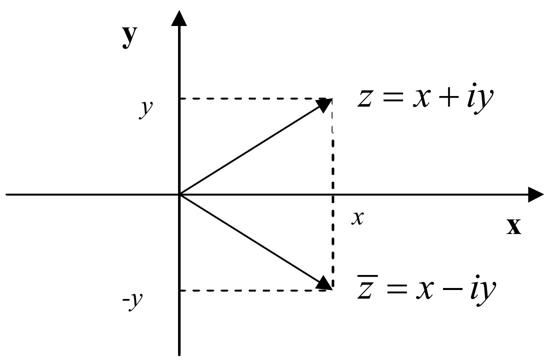


Рисунок 2

Приклад 1

Зобразити множину всіх точок комплексної площини, які задовольняють умові $\left|\operatorname{Im} z\right| \le 1,\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1$.

Розв'язання

Оскільки $z = x + iy$, то $\operatorname{Im} z = y, \operatorname{Re} z = x$. Зображуємо множину $|\,y\,| \le 1,\ 0 \le x \le 1$ (див. рисунок 3).

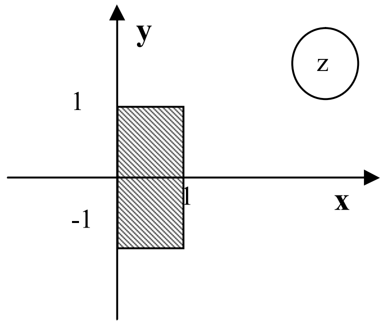


Рисунок 3

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

1 *Додавання комплексних чисел.* Для того, щоб додати комплексні числа, треба відповідно додати їх дійсні та уявні частини.

Приклад 2

Знайти $z = z_1 + z_2$, якщо $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Розв'язання

$$z_1 + z_2 = \left(4 + 5i\right) + \left(2 + 3i\right) = \left(4 + 2\right) + i\left(5 + 3\right) = 6 + 8i.$$

Зауважимо, що при додаванні комплексних чисел відповідні вектори додаються (див. рисунок 4).

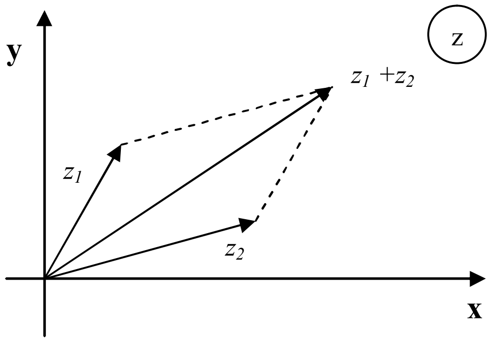


Рисунок 4

2 *Добуток комплексних чисел, що представлені в алгебраїчній формі,* обчислюється за звичайними правилами алгебри з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Приклад 3

Знайти $z = z_1 \cdot z_2$, якщо $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 2 + i$.

Розв'язання

$$z_1 \cdot z_2 = (-4 + 3i) \cdot (2 + i) = -8 - 4i + 6i + 3i^2 = -8 + 2i - 3 = -11 + 2i.$$

3 *Ділення двох комплексних чисел.* Для знаходження частки комплексних чисел потрібно чисельник та знаменник домножити на число спряжене до знаменника.

Приклад 4

Записати в алгебраїчній формі $\dfrac{5 - 3i}{2 + i}$.

Розв'язання

$$\frac{5 - 3i}{2 + i} = \frac{(5 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{10 - 6i - 5i + 3i^2}{4 + 1} = \frac{10 - 11i - 3}{5} = \frac{7}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Приклад 5

Зобразити криву на комплексній площині, яка задається рівнянням

$$\mathrm{Re}\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}.$$

Розв’язання

$$\mathrm{Re}\frac{1}{x+2+iy}=\mathrm{Re}\frac{x+2-iy}{\left(x+2\right)^2+y^2}=\frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+y^2},$$

$$\frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+y^2}=\frac{1}{4},$$

$$4x+8=\left(x+2\right)^2+y^2,$$

$$x^2+4x+4-4x-8+y^2=0,$$

$$x^2+y^2=4.$$

Отримали коло з центром у точці O(0,0) та радіусом 2 (див. рисунок 5).

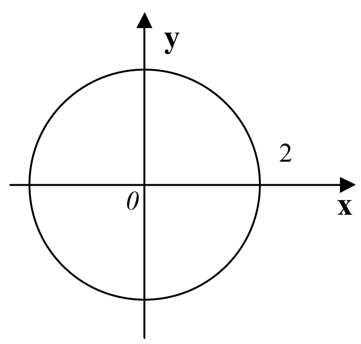


Рисунок 5

Тригонометрична і показникова форма комплексного числа

Для геометричного тлумачення множення і ділення комплексних чисел введемо на комплексній площині полярні координати r, φ (див. рисунок 6).

Число $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називають *модулем* комплексного числа $z = x + iy$.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ називають кут $\varphi = Argz$, який утворює вектор z з додатнім напрямком осі Оx. (При цьому вважається, що кут $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$), якщо кут φ відраховується від вказаного напрямку проти (за) годинникової стрілки). Аргумент комплексного числа визначається з точністю до цілого числа повних обертів. Значення аргументу, які задовольняють умові $-\pi < \varphi \le \pi$ (або $0 < \varphi \le 2\pi$), звуться головним значенням аргументу і позначаються $\arg z$.

$$Argz = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Аргумент числа $z = 0$ не визначений, а його модуль дорівнює нулю.

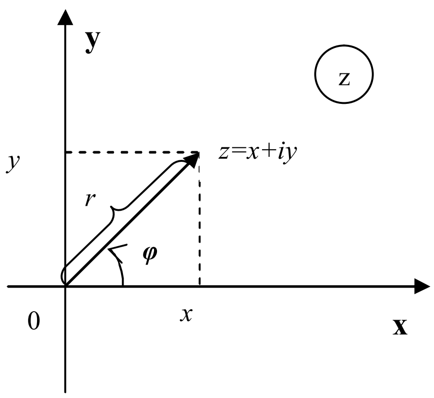


Рисунок 6

За рисунком 6 знаходимо, що

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \tag{1.1}$$

тоді $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ і φ знаходять з урахуванням чверті, в якій міститься кут φ.

Підставивши (1.1) до $z = x + iy$, одержуємо *тригонометричну форму* комплексного числа

$$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}, \text{ де } r = |z|, \text{ а } \varphi = Argz.$$

Позначимо

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}.$$

Ця формула зветься *формулою Ейлера*. Тоді комплексне число z можна записати у *показниковій формі*

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}.$$

Приклад 6

Зобразити множину всіх точок комплексної площини, які задовольняють умові $1 < \left|z - 1\right| < 2$.

Розв’язання

Зауважимо, що $\left|z - z_0\right|$ дорівнює відстані між точками $z = x + iy$ і $z_0 = x_0 + iy_0$: $\left|z - z_0\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Тому умова $1 < \left|z - 1\right| < 2$ задає кільце з центром у точці z_0=1 і радіусами $r_1 = 1$ та $r_2 = 2$ (див. рисунок 7).

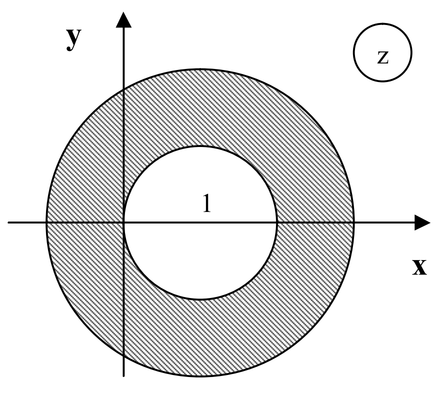


Рисунок 7

Приклад 7

Зобразити множину всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівностям $1<\left|z-i-1\right|<2, -\dfrac{\pi}{6}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання (рисунок 8)

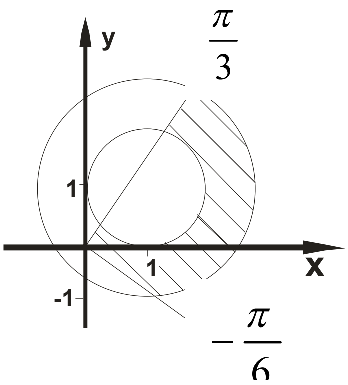


Рисунок 8

Приклад 8

Записати в показниковій формі $z=-3$.

Розв'язання

Зобразимо комплексне число $z=-3$ на площині (рисунок 9).

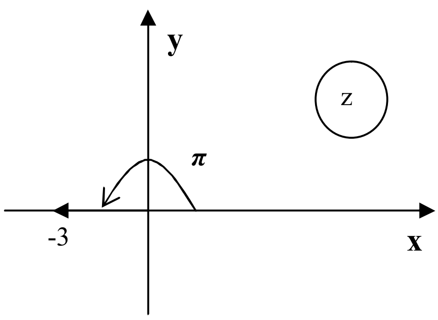


Рисунок 9

За рисунком 9 знайдемо $\arg z=\pi$, а $r=|z|$ дорівнює 3. Отже, $-3=3e^{i\pi}$.

Приклад 9

Записати комплексне число $z=-1+i$ у тригонометричній та показниковій формі.

Розв’язання

$r=\sqrt{\left(-1\right)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\begin{cases} tg\varphi=-1, \\ \varphi\in II\ \textit{чверті} \end{cases} \Rightarrow \arg z=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$ (рисунок 10).

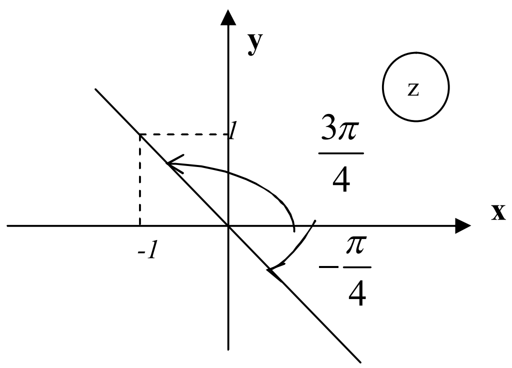


Рисунок 10

У тригонометричній формі комплексне число z має вигляд

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показниковій

$$z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній або показниковій формі

При множенні (діленні) комплексних чисел їх модулі множаться (діляться), а аргументи додаються (віднімаються).

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Наслідок

Формула Муавра

$$\boxed{z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),\, n \in \mathbb{Z}}.$$

Приклад 10

Записати в алгебраїчній формі $z = z_1 \cdot z_2$, якщо $z_1 = 0,5e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Розв’язання

$$z_1 \cdot z_2 = 0,5 \cdot 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Приклад 11

Записати в алгебраїчній формі $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 12e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Розв’язання

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Приклад 12

Записати в алгебраїчній формі $(1+i)^{10}$.

Розв'язання

Запишемо комплексне число $z = 1 + i$ у показниковій формі. Модуль z дорівнює $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (рисунок 11).

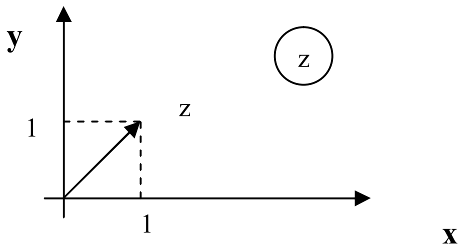


Рисунок 11

$$\begin{cases} tg\varphi = 1 \\ \varphi \in I \text{ чверті} \end{cases} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Комплексне число z у показниковій формі має вигляд

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

За формулою Муавра

$$z^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{i\frac{10\pi}{4}} = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32 e^{i\frac{\pi}{2}} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+i) = 32i.$$

Приклад 13

Записати в алгебраїчній формі $\dfrac{(2+2i)^{10}\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}{\left(4+4\sqrt{3}i\right)^5}$.

Розв’язання

Позначимо $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = 4 + 4\sqrt{3}i$.

Запишемо ці комплексні числа в показниковій формі. Якщо $z_1 = 2 + 2i$, то $r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, а головний аргумент знайдемо за рисунком 12.

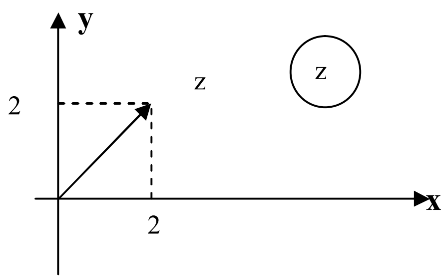


Рисунок 12

$\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$, тоді $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Якщо $z_2 = \sqrt{3} - i$, то $r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1\right)^2} = 2$, а $tg\varphi_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, де φ_2 – кут у IV чверті, тоді $\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{6}$ (див. рисунок 13).

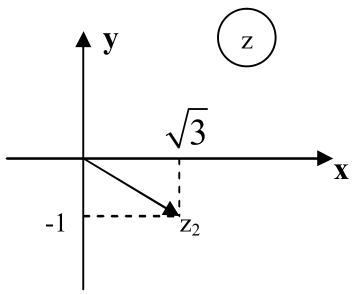


Рисунок 13

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$,

$z_3 = 4 + 4\sqrt{3}i$, тоді $r_3 = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 8$, а головне значення аргументу

$$tg\varphi_3 = \sqrt{3},\ \varphi_3 - \text{кут I чверті},\ \arg z_3 = \frac{\pi}{3},$$

$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (рисунок 14).

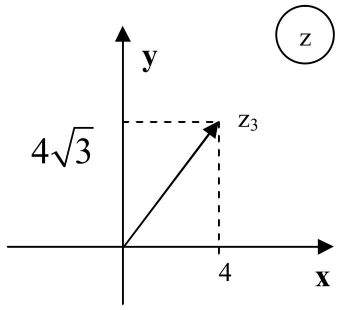


Рисунок 14

$$\frac{z_1^{10} z_2^{12}}{z_3^{5}} = \frac{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}}{\left(8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{5}} = \frac{2^{10}2^{5}e^{i\frac{10\pi}{4}}2^{12}e^{-i\frac{12\pi}{6}}}{2^{15}e^{i\frac{5}{3}}} =$$

$$= 2^{12}e^{i\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi - \frac{5\pi}{3}\right)} = 2^{12}e^{-i\frac{7\pi}{3}} = 2^{12}e^{-i\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 2^{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4096\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2048 - 2048\sqrt{3}i.$$

Основні елементарні функції комлексної змінної

1 *Окремі випадки лінійної функції.*

а) Функція $w = z + a + bi$ здійснює зсув фігури на вектор з координатами (a, b).

Приклад 14

Функція $w = z + i$ зсуває півплощину на вектор (0,1) (рисунки 15, 16).

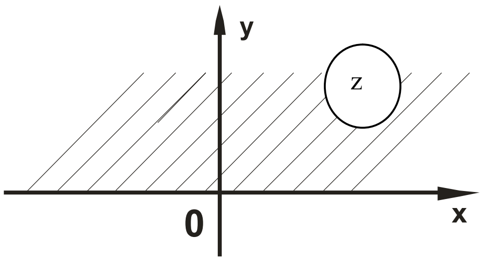


Рисунок 15

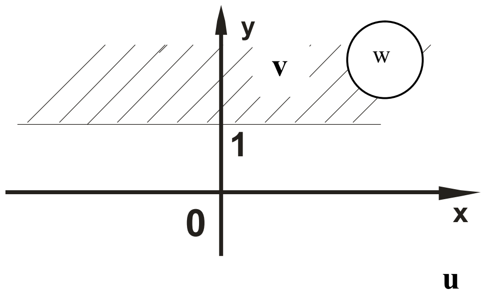


Рисунок 16

б) Функція $w = az$.

Якщо $a = |a|e^{i\psi}$, то функція $w = |a|re^{i(\varphi+\psi)}$ усі фігури розтягує у $|a|$ раз та повертає на кут ψ навколо початку координат проти годинникової стрілки.

Приклад 15

Функція $w = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ повертає будь-яку фігуру (див. рисунок 17) на кут $\dfrac{\pi}{2}$ (див. рисунок 18).

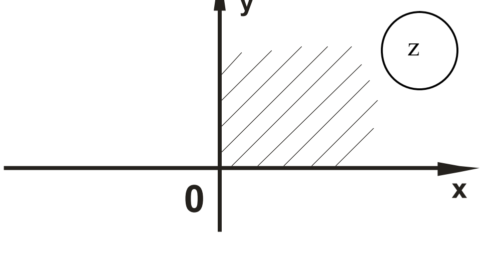


Рисунок 17

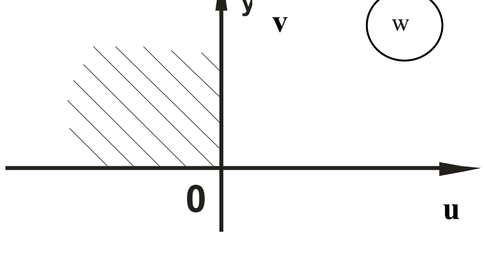


Рисунок 18

2 *Окремі випадки степеневої функції з цілим показником.*

а) Функція $w = z^2$.

Приклад 16

Функція $w = z^2$ відображує першу чверть у верхню півплощину (див. рисунки 19 та 20).

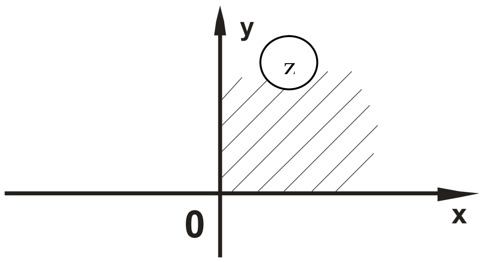


Рисунок 19

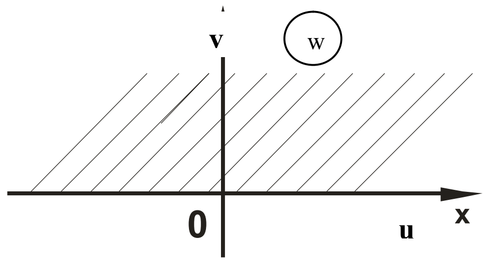


Рисунок 20

Якщо перейти до показникової форми $z = re^{i\varphi}$, то $w = r^2 e^{i2\varphi}$.

б) Функція $w = \dfrac{1}{z}$.

Запишемо в показниковій формі $z = re^{i\varphi}$, тоді $w = \rho e^{i\psi} = \dfrac{1}{r} e^{-i\varphi}$,

тобто $\arg w = -\arg z$, $|w| = \dfrac{1}{|z|}$.

3 *Корінь степеня n з комплексного числа z.*

Коренем степеня n з комплексного числа z називається таке комплексне число w, що задовольняє рівності $w^n = z$.

Для натурального n існує рівно n різних коренів, які знаходяться за формулою

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0,1,...,n-1}.$$

Корені степеня n з комплексного числа z знаходяться у вершинах правильного $n-$кутника, вписаного у коло з центром у точці O(0,0) та радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Приклад 17

Знайти всі значення $\sqrt[3]{-8i}$.

Розв’язання

Щоб обчислити корінь з комплексного числа, треба записати це число у показниковій формі

$$z=-8i,$$

$$r=\sqrt{0^2+\left(-8\right)^2}=8,$$

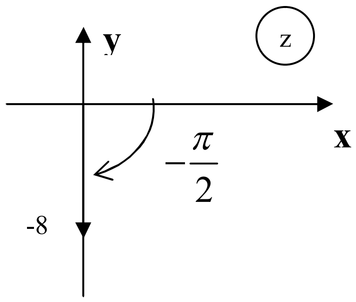


Рисунок 21

$\arg z=-\frac{\pi}{2}$ (див. рисунок 21), $z=8e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

$$\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8}e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}},\ k=0,1,2.$$

При $k=0$, отримаємо

$$w_0=2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}-i,$$

$$k=1,\ w_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i,$$

$$k=2,\ w_2=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=-\sqrt{3}-i.$$

Зобразимо корені третього степеня з $z=-8i$ на площині. Корені w_0, w_1, w_2 знаходяться у вершинах правильного трикутника, вписаного в коло радіусом 2 та центром у нулі (див. рисунок 22).

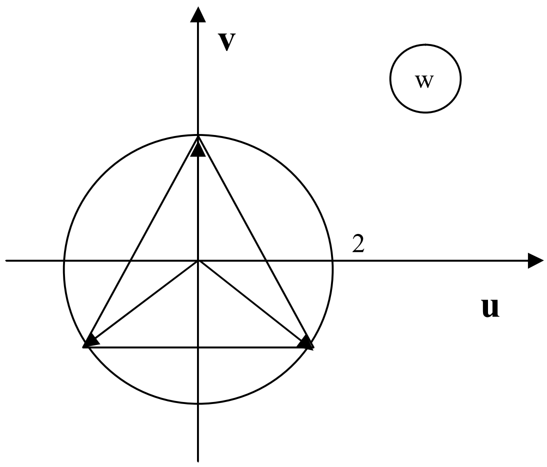


Рисунок 22

Приклад 18

Знайти всі значення $\sqrt[5]{-1+i}$.

Розв’язання

Запишемо комплексне число $z=-1+i$ у показниковій формі
$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} tg\varphi=-1 \\ \varphi - \text{кут у III чверті} \end{cases} \Rightarrow \arg z = \frac{5\pi}{4},$$

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Тоді корені з комплексного числа z мають вигляд

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{5}}, k=0,1,2,3,4.$$

$$w_0 = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \approx \quad ,$$

$$\approx 1,07\left(0,707 + i0,707\right) = 0,758 + 0,758i,$$

$$w_1 = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20} + i\sin\frac{13\pi}{20}\right) \approx$$

$$\approx 1,07\left(-0,454 + i0,891\right) = -0,487 + 0,955i,$$

$$w_2 = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+4\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20} + i\sin\frac{21\pi}{20}\right) \approx$$

$$\approx 1,07\left(-0,988 - i0,156\right) = -1,059 - 0,167i,$$

$$w_3 = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+6\pi k}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20} + i\sin\frac{29\pi}{20}\right) \approx$$

$$\approx 1,07\left(-0,156 - i0,988\right) = -0,167 - 1,059i,$$

$$w_4 = \sqrt[10]{2} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+8\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{20} + i\sin\frac{37\pi}{20}\right) \approx$$

$$\approx 1,07\left(0,891 - i0,454\right) = 0,955 - i \cdot 0,487.$$

Зобразимо корені на рисунку 23.

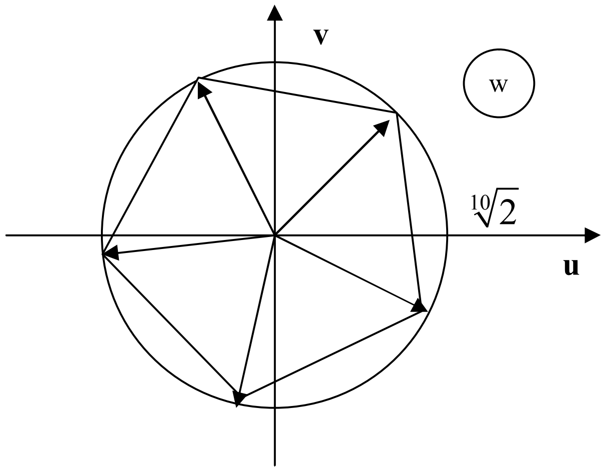


Рисунок 23

4 *Показникова функція*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Показникова функція має тільки уявний період $2\pi i$

$$e^{z+2\pi ki} = e^z.$$

Функцію $w = e^z$ прямі, що паралельні дійсній осі, переводять у промені, які виходять з початку координат, а прямі, що паралельні уявній осі, переводять у кола з центром у початку координат

$$z = re^{i\varphi},\ w = e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Приклад 19

$w = e^z$

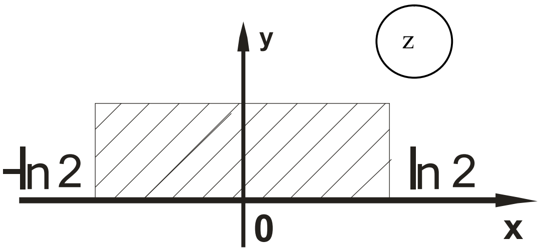


Рисунок 24

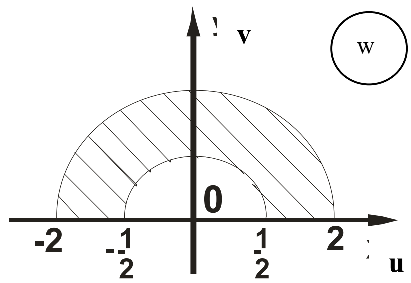


Рисунок 25

5 *Гіперболічні функції*

$$\boxed{\begin{gathered} chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ thz = \frac{shz}{chz},\ cthz = \frac{chz}{shz}. \end{gathered}}$$

Приклад 20

Записати в алгебраїчній формі $sh\left(-2 - \dfrac{\pi i}{6}\right)$.

Розв’язання

$$sh\left(-2-\frac{\pi i}{6}\right)=\frac{e^{-2-\frac{\pi i}{6}}-e^{-\left(-2-\frac{\pi i}{6}\right)}}{2}=\frac{e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)-e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2}=$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}sh2-i\frac{1}{2}ch2.$$

6 *Тригонометричні функції*

$$\boxed{\begin{gathered}\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\\ tgz=\frac{\sin z}{\cos z},\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.\end{gathered}}$$

Між тригонометричними та гіперболічними функціями існують такі співвідношення:

$$\cos iz=chz,\ chiz=\cos z,\ shiz=i\sin z, \sin iz=ishz\,.$$

7 *Логарифмічною функцією* називається функція, обернена до показникової, тобто функція $w=w(z)$ така, що $e^{w}=z$, $z\neq 0$. Логарифмічна функція має нескінченно багато значень (функція e^{z} має період $2\pi i$). Вони дорівнюють

$$Lnz=\ln z+2\pi ki\,,$$

де $\ln z$ називається головним значенням логарифмічної функції.

$$\ln z=\ln|z|+iargz\,.$$

Функцію $w=\ln z$ прямі, що паралельні дійсній осі, переводять у кола з центром у початку координат, а прямі, що паралельні уявній осі, переводять у промені, які виходять з початку координат.

Приклад 21

Функція $w = \ln z$ переводить область з рисунка 26 у півполосу (див. рисунок 27).

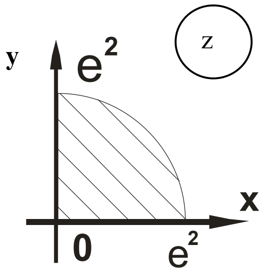


Рисунок 26

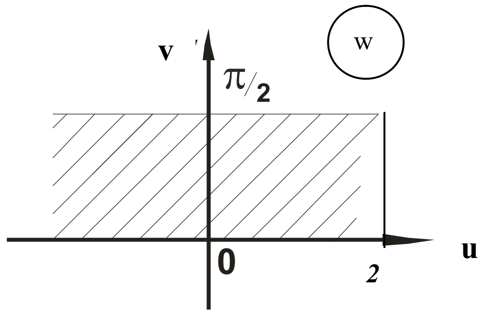


Рисунок 27

8 *Загальна степенева функція* комплексної змінної $z^\alpha, \alpha \in \mathbf{C}$ визначається за допомогою показникової та логарифмічної функції таким чином:

$$z^\alpha = e^{Lnz^\alpha} = e^{\alpha Lnz}, \alpha \in \mathbf{C}$$

Приклад 22

Записати в алгебраїчній формі $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2i}$.

Розв'язання

Позначимо $z = 1+\sqrt{3}i$. Тоді $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $tg\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi \in I$ *чверті*, $Argz = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$z^{2i} = e^{2iLnz} = e^{2i(\ln z + 2\pi k i)} = e^{2i(\ln r + iargz + 2\pi k i)} = e^{-2argz - 2\pi k + 2i\ln r} =$$

$$= e^{\frac{-2\pi}{3} - 2\pi k + 2i\ln 2} = e^{-\frac{2\pi}{3} - 2\pi k}\left(\cos\left(2\ln 2\right) + i\sin\left(2\ln 2\right)\right).$$

Умови Коші-Рімана

Похідною функції $f(z)$ у точці $z_0 \in \mathbf{C}$ називається границя

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Якщо ця границя існує, то вона не залежить від того, яким чином $z \to z_0$.

Функція, яка має похідну у точці z_0, називається *диференційовною у точці* z_0.

Теорема (**умови Коші-Рімана для декартової системи координат).** Нехай в околі точки z_0 задана функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, а функції u і v мають у цьому околі неперервні частинні похідні. Тоді необхідною і достатньою умовою диференційовності функції у точці z_0 є виконання у цій точці умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема (**умови Коші-Рімана для полярної системи координат).** Нехай в околі точки z_0 функція $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ задана в полярній системі координат, а функції u і v мають у цьому околі неперервні частинні похідні. Тоді необхідною і достатньою умовою диференційовності функції у точці z_0 є виконання у цій точці умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \; \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Можна довести, що $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ або для полярної системи координат $f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

Для функції комплексної змінної зберігаються правила диференціювання і таблиця похідних, як у випадку функції дійсної змінної.

Приклад 23

З'ясувати, при яких z функція $f(z)=z^2$ диференційовна, і знайти її похідні в цих точках.

Розв'язання

Знайдемо функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$.

$$f(z)=(x+iy)^2=x^2+2ixy+\left(iy\right)^2=\left(x^2-y^2\right)+i\left(2xy\right).$$

Перевіримо умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

і знайдемо точки, в яких ця умова виконується.

У нашому випадку функція $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$.

Частинні похідні цих функцій дорівнюють

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Умови Коші-Рімана виконуються у всіх точках.

Похідна функції дорівнює $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2z$.

Завдання № 1

Записати в алгебраїчній формі

1. $\frac{(2i-5)(1+2i)}{1-i}+5i+2$	16. $\frac{(4-2i)(2-i)}{7+i}+3i-1$
2. $\frac{(i+3)(1-i)}{2i-5}+2i-6$	17. $\frac{(-1+2i)(3-i)}{1+i}-1-2i$
3. $\frac{(1+i)(i-4)}{4-3i}+2i+8$	18. $\frac{(2i-2)(1+2i)}{2-i}+2i-1$
4. $\frac{(2i+3)(1-2i)}{6-i}+2i-2$	19. $\frac{(3-i)(2i-1)}{1-4i}-3+2i$
5. $\frac{(1+i)(2i-3)}{2-i}+i-3$	20. $\frac{(4i-1)(i-2)}{4-i}-2+i$
6. $\frac{(4-i)(2i-1)}{1-3i}-1+2i$	21. $\frac{(5-i)(2-i)}{1-2i}+5i-2$
7. $\frac{(2i-1)(i+2)}{4-i}-2+2i$	22. $\frac{(5-2i)(1-6i)}{3-i}+4i-3$
8. $\frac{(1-i)(3+2i)}{1-2i}+2+3i$	23. $\frac{(2+i)(2+i)}{1-4i}+2i+5$
9. $\frac{(2-5i)(6-i)}{3i-1}+4+3i$	24. $\frac{(4i+5)(2-5i)}{3-4i}-2-3i$
10. $\frac{(2-2i)(1+2i)}{5-i}+2+5i$	25. $\frac{(-3+i)(2+i)}{2-3i}+i-1$
11. $\frac{(4+3i)(5-4i)}{3-4i}-(4+5i)$	26. $\frac{(5+i)(2-2i)}{2-i}+3+i$
12. $\frac{(-1+3i)(2+3i)}{\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}}+5i-1$	27. $\frac{(5i-4)(2-i)}{3+2i}+1-i$
13. $\frac{(1+i)(3+i)}{2-i}+2-2i$	28. $\frac{(3i+2)(3+i)}{3+2i}+2-3i$
14. $\frac{(1-i)(2-i)}{3+i}+5i-4$	29. $\frac{(4-i)(2-i)}{3i-1}+7i-2$
15. $\frac{(2-3i)(3+5i)}{3+2i}+3i+2$	$\frac{(1+2i)(3-5i)}{1+5i}+1-2i$

Завдання № 2

Зобразити криву на комплексній площині, яка задається рівнянням

1. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+0,5}=\dfrac{1}{3}$
2. $|z|^2-3z-3\bar{z}+5=0$
3. $\left|\dfrac{z}{z-3i}\right|=\dfrac{1}{2}$
4. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4}$
5. $\left|\dfrac{3z}{z+8i}\right|=1$
6. $|z|^2-2z-2\bar{z}+1=0$
7. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+0,6}=1$
8. $(z+2)(\bar{z}+2)=3,24$
9. $\operatorname{Re}\dfrac{8}{8z+3}=1$
10. $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$
11. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{2z+2+i}=\dfrac{1}{4}$
12. $\operatorname{Re}\dfrac{z(1+3i)-1+3i}{z+1}=0$
13. $\operatorname{Re}\dfrac{4}{z+4-i}=1$
14. $\operatorname{Re}\dfrac{z-5+i}{z+1+i}=0$
15. $\operatorname{Re}\dfrac{2}{z+4+i}=\dfrac{1}{2}$
16. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2-i}{z+2-i}=0$
17. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{2}$
18. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+2}=0$
19. $(z-1)(\bar{z}-1)=4$
20. $\operatorname{Re}\dfrac{z-5-i}{z+5-i}=0$
21. $\left|\dfrac{z+3+3i}{z}\right|=2$
22. $\operatorname{Re}\dfrac{z-0,3}{z+0,3}=0$
23. $9|z|^2+3z+3\bar{z}-3=0$
24. $(z-1-i)(\bar{z}-1+i)=4$
25. $\left|\dfrac{z+4+4i}{z}\right|=3$
26. $(z+3-i)(\bar{z}+3-i)=9$
27. $\left|\dfrac{z+4i}{z}\right|=3$
28. $(z+4+i)(\bar{z}+4-i)=4$
29. $\left|\dfrac{z}{z+6+3i}\right|=\dfrac{1}{2}$

$(z-3+i)(\bar{z}-3-i)=9$

Завдання № 3

Зобразити область комплексної площини, яка задається системою нерівностей

1. $1 < |z+1| < 2,\ z\bar{z} < 1, \quad \operatorname{Re} z > 0$;
2. $|z-1| < 1, \quad |z+1| > 2,\ \operatorname{Im} z < 0$;
3. $1 < |z-i| < 2, \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$;
4. $1 < |z-1-i| \le 4, \quad \operatorname{Re} z \ge 1, \quad \operatorname{Im} z > 1$;
5. $|z-2-i| \le 2, \quad z\bar{z} < 5, \quad \operatorname{Im} z < 0$;
6. $|z+i| \ge 1, \quad |z| < 2, \quad \operatorname{Im} z < 0$;
7. $|z+1| \ge 1, \quad |z+i| < 1, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$;
8. $|z+i| < 2, \quad 0 < \operatorname{Re} z \le 1$;
9. $1 < |z-i| \le 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2$;
10. $2 < |z-i| \le 4, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;
11. $1 < |z+i| < 2, \quad -\frac{\pi}{4} \le \arg z < 0$;
12. $|z-1-i| < 1, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{4,} \quad \operatorname{Re} z < 1{,}5$;
13. $|z| \le 2, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{4,} \quad \operatorname{Re} z > 1,$
14. $|z-1| \le 2, \quad |\operatorname{Re} z| \le 1, \quad |\operatorname{Im} z| < 2$;
15. $z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z \le 1, \quad \operatorname{Im} z > -1$;
16. $z\bar{z} \le 2, \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad \operatorname{Im} z < -1$;
17. $1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 1$;
18. $|z-2i| \le 1{,}5, \quad -2 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad 2 < \operatorname{Im} z < 3$;
19. $z\bar{z} > 1, \quad \operatorname{Re} z \le 0, \quad \operatorname{Im} z > 0$;
20. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2,} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 1$;

21. $|z-i|\ge 2,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Im} z<5;$

22. $0<\arg z<\pi,\quad 1<z\bar{z}<3,\quad \operatorname{Re} z>0;$

23. $-\frac{\pi}{2}<\arg z<0,\quad 4<z\bar{z}<9,\quad \operatorname{Im} z<-1;$

24. $-\pi<\arg z\le\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re} z<1,\quad \operatorname{Im}\bar{z}\ge 2;$

25. $|z|<5,\quad |\operatorname{Re} z|>3,\quad |\operatorname{Im} z|<3;$

26. $2\le|z+i|\le 4,\quad \frac{\pi}{4}\le\arg z<\pi,\quad |\operatorname{Im} z|<3;$

27. $(z+i)(\bar{z}-i)>1,\quad -\frac{3}{4}\pi<\arg z<-\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{Im} z>-1{,}5;$

28. $\left|z-e^{i\pi/4}\right|<1,\quad \operatorname{Re} z<0,\quad \operatorname{Im} z\ge\frac{1}{\sqrt{2}};$

29. $\frac{3}{4}\pi\ge|\arg z|\ge\frac{\pi}{4},\quad 1<z\bar{z}<2,\quad |\operatorname{Im} z|<\sqrt{2};$

30. $|z|\ge 2,\quad |\arg z|\le\frac{3}{4}\pi,\quad \operatorname{Re} z\le 3.$

Завданння №4

Записати в алгебраїчній формі

1. $\frac{(1+i)^{13}\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}{(-2i)^{25}},\quad \sqrt[3]{-i},\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}-2i\right),\quad \left(-\sqrt{3}+i\right)^{\sqrt{2}};$

2. $\frac{(2-2i)^{13}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{20}},\quad \sqrt{2\sqrt{3}-2i},\quad sh\left(5+\frac{\pi}{3}i\right),\quad (-1)^{i};$

3. $\frac{(2+2i)^{5}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{9}},\quad \sqrt[6]{64},\quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}+3i\right),\quad (-1-i)^{\sqrt{3}};$

4. $\dfrac{(4-4i)^{11}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{13}\left(\sqrt{3}-i\right)^{9}}$, $\sqrt{-2-2i,}$ $ch\left(7-\dfrac{\pi}{4}i\right)$, $(-i)^{2i+2}$;

5. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}(-1+i)^{21}}{(2-2i)^{25}}$, $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+5i\right)$, $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{5}}$;

6. $\dfrac{\left(2e^{i\pi}\right)^{11}\left(3+\sqrt{3}i\right)^{15}}{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^{17}(2-2i)^{13}}$, $\sqrt[3]{27i}$, $sh\left(-10+\dfrac{\pi}{4}i\right)$, $(-5)^{2i}$;

7. $\dfrac{(1-i)^{29}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{17}}{\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{16}(2i)^{11}}$, $\sqrt{-9i}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}+7i\right)$, $\left(8-8\sqrt{3}i\right)^{i}$;

8. $\dfrac{(2+2i)^{10}\left(\sqrt{3}-3i\right)^{8}}{\left(4\sqrt{3}-4i\right)^{9}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$, $ch\left(3+\dfrac{\pi}{2}i\right)$, $(-4)^{3i}$;

9. $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{31}}{(-2+2i)^{11}\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}}$, $\sqrt[4]{8-8i}$, $\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi+2i\right)$, $(i)^{\sqrt{3}+i}$;

10. $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{7}\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{11}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$, $\sqrt[5]{-32i}$, $sh\left(-2-\dfrac{7}{2}\pi i\right)$, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i+2}$;

11. $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{20}(1+i)^{21}}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^{20}}$, $\sqrt[3]{-4-4\sqrt{3}i}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-3i\right)$, $\left(3-i\sqrt{3}\right)^{i+2}$;

12. $\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{20}(2-2i)^{9}}{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{17}}$, $\sqrt[5]{-32}$, $ch(1+9\pi i)$, $(-5)^{2+2i}$;

13. $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{13}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{9}}{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{11}}$, $\sqrt{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$, $\sin\left(\dfrac{7}{6}\pi-2i\right)$, $(-i)^{5i}$;

14. $\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{15}\left(3-\sqrt{3}i\right)^{20}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{16}(2i)^{27}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{16}}$, $sh\left(-2+\dfrac{16\pi}{3}i\right)$, $(2-2i)^{i+1}$;

15. $\dfrac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)^{40}}{(-3+3i)^{13}\left(\sqrt{3}-i\right)^{27}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{-81+81i}{32}}$, $\cos\left(\dfrac{9}{4}\pi+3i\right)$, $\left(\sqrt{3}-i\right)^{\sqrt{3}+i}$;

16. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{5}(-2-2i)^{7}}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{11}}$, $\sqrt[5]{-i}$, $ch\left(\dfrac{4}{3}\pi i-2\right)$, $(-i/2)^{2i+1}$;

17. $\dfrac{(24i)^{4}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{5}}{(1+i)^{5}\left(-3-\sqrt{3}i\right)^{5}}$, $\sqrt[5]{16-16i}$, $\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-3i\right)$, $(-4)^{0,5+i}$;

18. $\dfrac{(-4i)^{4}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{9}}{(1+i)^{12}\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}$, $\sqrt[6]{-64}$, $sh\left(1-\dfrac{7}{6}\pi i\right)$, $(-3)^{1-3i}$;

19. $\dfrac{(2+2i)^{17}\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{9}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{39}}$, $\sqrt[3]{-4+4\sqrt{3}i}$, $\cos\left(4i-\dfrac{4}{3}\pi\right)$, $(1+i)^{4-2i}$;

20. $\dfrac{(2+2i)^{21}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{19}}$, $\sqrt{-5-5i}$, $ch\left(-2-\dfrac{25\pi}{6}i\right)$, $\left(\sqrt{3}-i\right)^{i}$

21. $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{12}(1-i)^{15}}{(2+2i)^{14}}$, $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$, $\sin\left(\dfrac{7}{6}\pi-i\right)$, $(-2i)^{2i}$;

22. $\dfrac{\left(4e^{i\pi}\right)^{11}\left(3-\sqrt{3}i\right)^{12}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{10}(2+2i)^{13}}$, $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}-8i}$, $sh\left(5+\dfrac{7}{2}\pi i\right)$, $(-49)^{(1+i)/2}$;

23. $\dfrac{(-1+i)^{9}\left(\sqrt{3}-i\right)^{7}}{\left(2-2\sqrt{3}i\right)^{10}(2i)^{-5}}$, $\sqrt[6]{-8i}$, $\cos\left(\dfrac{25\pi}{6}-3i\right)$, $\left(-4\sqrt{3}-4i\right)^{(2+i)/3}$;

24. $\dfrac{(-2+2i)^{16}\left(\sqrt{3}+3i\right)^{12}}{\left(4\sqrt{3}+4i\right)^{15}}$, $\sqrt[4]{-8\sqrt{2}-8\sqrt{2}i}$, $ch\left(3-\dfrac{13\pi}{3}i\right)$, $(-1-i)^{3i}$;

25. $\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{37}}{(2+2i)^{11}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$, $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}+2i\right)$, $(-9)^{i/2}$;

26. $\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{17}\left(-\sqrt{3}-3i\right)^{6}}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$, $\sqrt{16/\left(1+i\sqrt{3}\right)}$, $sh\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}i\right)$, $(2+2i)^{-i}$;

27. $\dfrac{\left(-3+\sqrt{3}i\right)^{17}(-1+i)^{12}}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^{28}(3i)^{7}}$, $\sqrt[5]{32/i}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-10i\right)$, $(1+i)^{1+i}$;

28. $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{11}(-2+2i)^{9}}{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{21}}$, $\sqrt{1/(8-8i)}$, $ch\left(\dfrac{8+9\pi i}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\sqrt{2}-i}$;

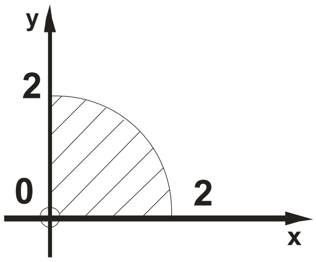
29. $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{13}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{11}}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{15}}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sin\left(\dfrac{9}{4}\pi+3i\right)$, $(-8)^{i/3}$

30. $\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{27}}{(2-2i)^{11}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{7}}$, $\sqrt[5]{1/(-16+16i)}$, $sh\left(-2-\dfrac{\pi}{6}i\right)$, $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2i}$;

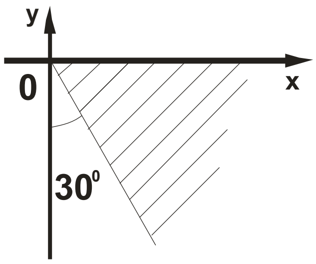
Завдання №5

Знайти та зобразити область, в яку функція $w=f(z)$ переводить закреслену область.

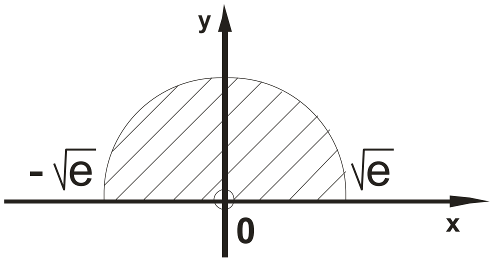
1. $w=\dfrac{i}{z^2}$



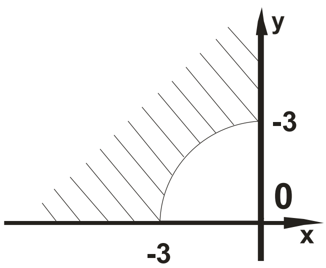
2. $w=(1-i)\overline{z}+e^{i\frac{\pi}{2}}$



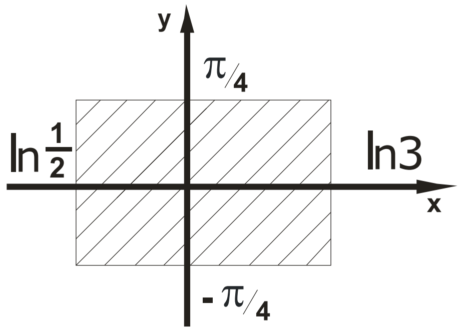
3. $w=\ln z$



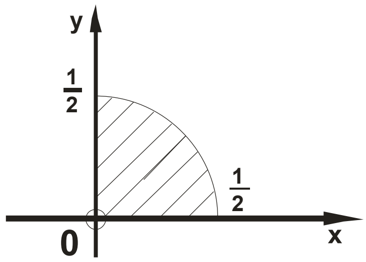
4. $w=\dfrac{-i}{\overline{z}}$



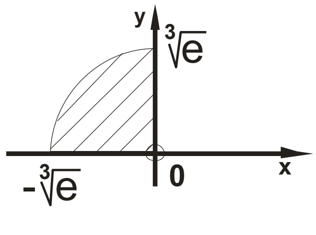
16. $w=(1-i)e^{2z}$



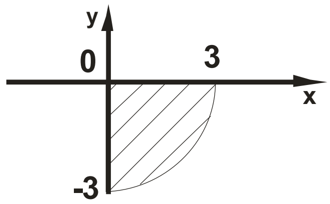
17. $w=\dfrac{i}{\overline{z}^3}$



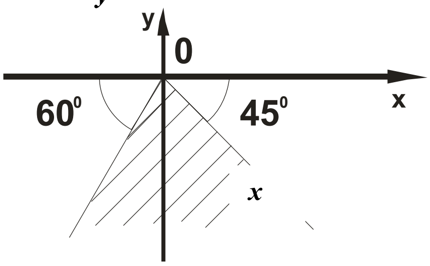
18. $w=\ln\overline{z}$



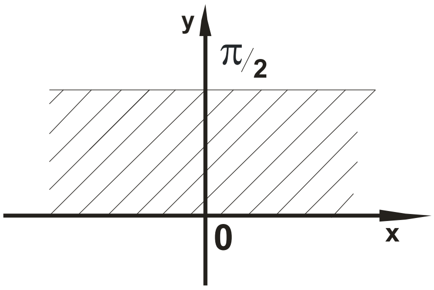
19. $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{z}^2-i$



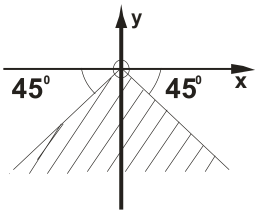
5. $w \; _y \; \overline{z}-2$



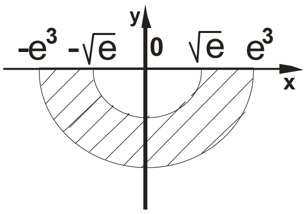
6. $w=\left(1-i\sqrt{3}\right)e^{\frac{z}{2}}$



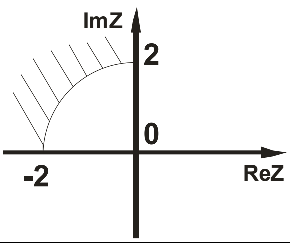
7. $w=\dfrac{-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{z}^{2}}$



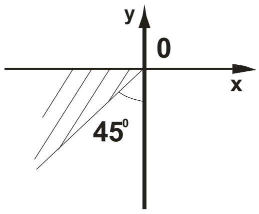
8. $w=\overline{\ln z}$



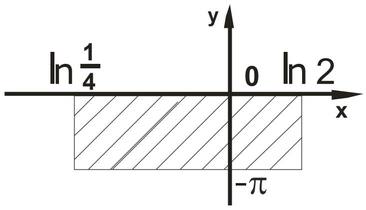
9. $w=i\overline{z}^{3}+e^{i\frac{\pi}{2}}$



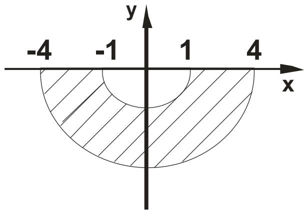
20. $w=\left(\sqrt{3}-i\right)\overline{z}^{3}+e^{i\frac{\pi}{4}}$



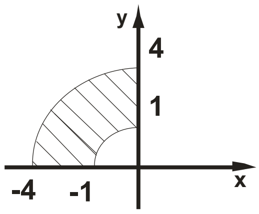
21. $w=\left(1-i\right)e^{\overline{z}}$



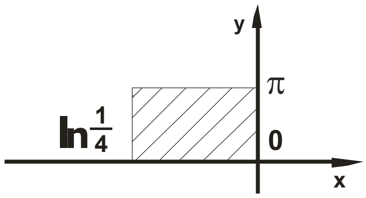
22. $w=\overline{\left(1+i\right)z^{2}}-2i$



23. $w=\dfrac{1-i}{\overline{z}^{2}}$

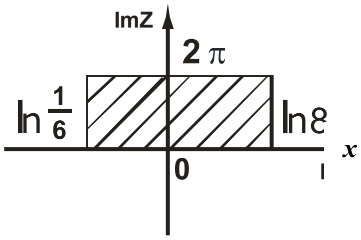


24. $w=\left(2+2i\right)e^{z+i\frac{\pi}{2}}$

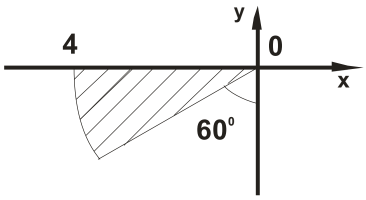


25. $w=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\overline{z}}+i$

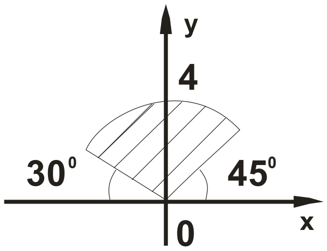
10. $\quad v\ ^{y}\ \ 2ie^{-\frac{\overline{z}}{2}}$



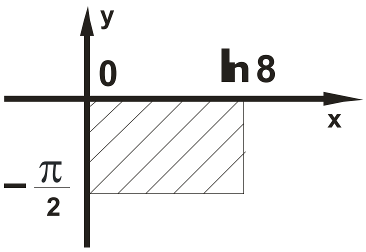
11. $\quad w=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\overline{z}^{3}}$



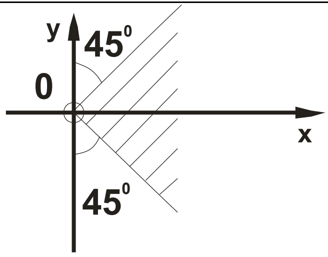
12. $\quad w=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)z^{2}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}$



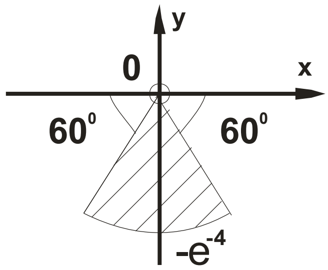
13. $\quad w=\left(4-4i\right)e^{\overline{z}+2i\pi}$



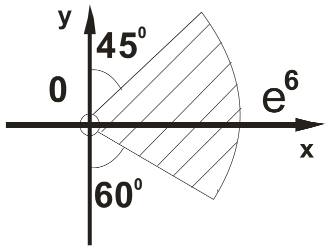
14. $\quad w=\overline{\left(-\dfrac{i}{z^{3}}\right)}+2-i$



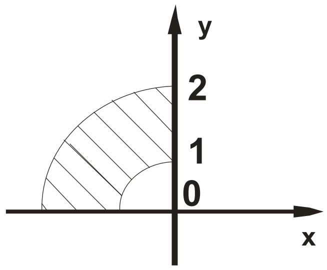
26. $\quad w=\ln z^{2}-3i$



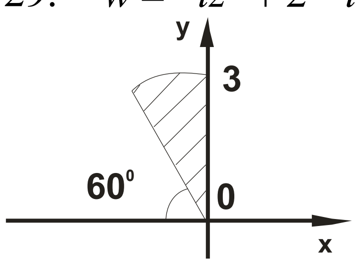
27. $\quad w=i\ln\overline{z}-1+i$

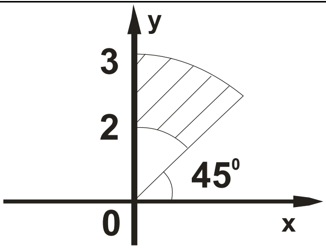
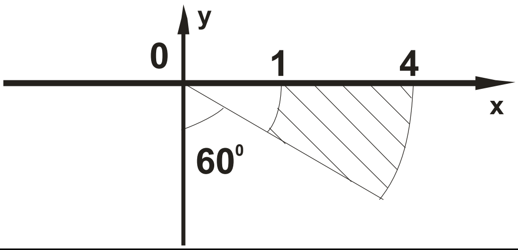
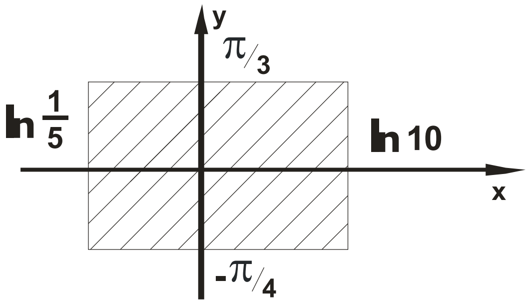


28. $\quad w=\overline{\left(\dfrac{-2+2i}{z^{2}}\right)}+3i$



29. $\quad w=-iz^{4}+2-i$



 15. $w=\overline{-iz^2-4+i}$ 	30. $w=\overline{-2e^{z+2i\frac{\pi}{3}}}$ 

Завдання № 6

З’ясувати, при яких z задані функції диференційовні, і знайти їх похідні в цих точках.

1. $f(z)=\operatorname{Re} z$	16. $f(z)=e^{5-6z}$
2. $f(z)=z\operatorname{Re} z$	17. $f(z)=\bar z$
3. $f(z)=z\,\lvert z\rvert$	18. $f(z)=\operatorname{Re} z^2$
4. $f(z)=\lvert z\rvert^2+2z$	19. $f(z)=\bar z^2$
5. $f(z)=\lvert z\rvert+z$	20. $f(z)=z\bar z^2$
6. $f(z)=\lvert z\rvert\operatorname{Re} z$	21. $f(z)=e^{2z}$
7. $f(z)=\operatorname{Im} z$	22. $f(z)=z^5$
8. $f(z)=z\operatorname{Im} z$	23. $f(z)=\lvert z\rvert^2$
9. $f(z)=\lvert z\rvert\operatorname{Im} z$	24. $f(z)=\sin 2z$
10. $f(z)=\dfrac{1}{z}$	25. $f(z)=\cos 3z$
11. $f(z)=z^3+6iz$	26. $f(z)=ze^z$
12. $f(z)=5z^3+iz$	27. $f(z)=e^{z^2}$
13. $f(z)=z^2+5z+6$	28. $f(z)=e^{-z^2}$
14. $f(z)=z^3+5iz+1$	29. $f(z)=\cos z-2i$
15. $f(z)=e^{iz}$	$f(z)=\ln z$

СПИСОК ЛТЕРАТУРИ

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды, функции комплексного переменного. М.: Наука, 1989. - 464 с.

2 Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М., 1970.

3 Гольдберг А. А. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2002. - 203 с.

4 Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. - М.: Просвещение, 1977. - 320 с.

5 Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы теории функций комплексного переменного» / Р.Н. Давыдов, В.Н. Храбустовский - Харьков, ХИИТ, 1993. - 30 с.

6 Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1969. - 640 с.

7 Сборник задач по теории аналитических функций / Под. ред. М. А. Евграфова. - М., 1972.

8 Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. - М.:Наука, 1979. - 304 с.

9 Эйдерман В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. - М.: Физматлит, 2002. - 256 с.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
до розрахунково-графічної роботи
з розділу дисципліни

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Частина 1

Відповідальний за випуск Удодова О.І.

Редактор Губарева К.А.

Підписано до друку 18.09.06 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,25. Обл.-вид.арк. 2,5.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 112 від 06.07.2000 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7