УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра «Вища математика»

Р.О.Єфременко, Г.Ю.Глушакова, М.Є.Резуненко

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Конспект лекцій

Харків 2004

Єфременко Р.О., Глушакова Г.Ю., Резуненко М.Є. Елементи теорії марковських ланцюгів: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2004. – 53 с.

Конспект лекцій містить основні теоретичні поняття теорії ланцюгів Маркова. Теоретичний матеріал ілюструють приклади розв'язання задач.

Іл. 17, бібліогр.: 4 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 28 серпня 2003 р., протокол № 1.

ВСТУП

У задачах, які пов'язані з експлуатацією залізниць, дуже часто зустрічаються системи масового обслуговування. Дослідження роботи таких систем тісно пов'язано з теорією ланцюгів Маркова.

Конспект лекцій призначений для студентів 2 курсу факультету "Управління процесами перевезень". Він містить основні теоретичні поняття теорії ланцюгів Маркова. Перший розділ конспекту присвячений марковським ланцюгам з кінцевою кількістю станів та дискретним часом, другий розділ – марковським ланцюгам з кінцевою кількістю станів і неперервним часом, у третьому розділі розглянуті найпростіші марковські ланцюги з лічильними станами, так звані процеси загибелі та розмноження. Теоретичний матеріал ілюструють приклади розв'язання задач.

Конспект надає можливість студентам самостійно працювати над лекційним матеріалом. Він також може бути використаний студентами інших спеціальностей при вивченні відповідного матеріалу.

1 МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

1.1 Загальні поняття

Нехай деяка фізична система може знаходитися у k різних станах E_1, E_2, ..., E_k. Зміна станів відбувається лише в певні моменти часу t_1, t_2, t_3, ..., які назвемо ***кроками***. У проміжок часу від t_n до t_{n+1} стан системи не змінюється. Він називається станом системи через n кроків. Якщо припустити, що переходи системи зі стану в стан на кожному кроці є випадковими, то в системі виникає випадковий процес, який називається ***ланцюгом з дискретним часом***. Такий ланцюг буде ***марковським***, якщо його поведінка після n-го кроку визначається лише тим станом, у якому опинилася система після n-го кроку, і не залежить від того, як і коли вона перейшла в цей стан. Незалежність тут розуміють в імовірнісному сенсі. Нехай маємо три послідовні кроки $t_{n-1}<t_n<t_{n+1}$ і відомі стани, у яких знаходилась система в моменти t_{n-1} і t_n. Тоді ймовірність переходу системи в момент t_{n+1} у деякий стан E_i не повинна залежати від її стану в момент t_{n-1}.

Марковський ланцюг з дискретним часом називається ***стаціонарним*** або ***однорідним***, якщо ймовірності переходу зі стану в стан на будь-якому кроці не залежать від номера цього кроку. Надалі розглядатимемо тільки однорідні марковські ланцюги з дискретним часом.

За розвиненням марковського ланцюга зручно спостерігати за допомогою так званого "розміченого графу станів". Це геометрична схема, на якій усі можливі стани системи зображуються колами (або іншими простими геометричними фігурами), а можливі переходи зі стану в стан – стрілками.

На рисунку 1 зображено граф станів ланцюга з трьома станами. Стрілки-петлі біля першого та другого станів вказують на можливість залишитися системі в цих станах на черговому кроці.

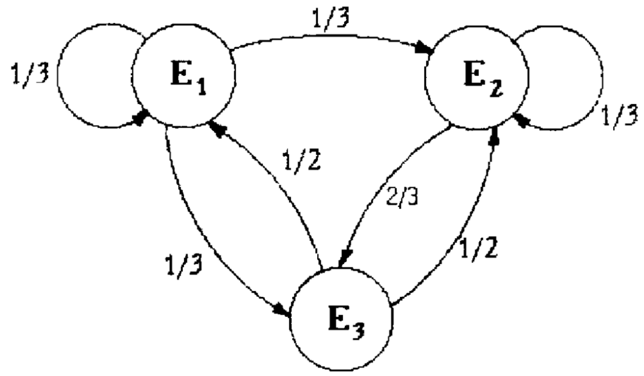

Рисунок 1

1.2 Перехідні ймовірності

Розглянемо однорідний марковський ланцюг із *k* станами. Позначимо через p_{ij} $(i=1,...k;\ j=1,...k)$ ймовірність переходу зі стану E_i у стан E_j за один крок. Імовірності p_{ij} називаються ***перехідними ймовірностями***. Відмітимо, що p_{ii} – це імовірність того, що система залишиться в стані E_i. На графі станів біля стрілок, які вказують на можливі переходи, пишуть імовірності цих переходів (див. рисунок 1). Відсутність стрілки показує неможливість відповідного переходу. Так на рисунку 1 система не може перейти зі стану E_2 у стан E_1 за один крок.

З імовірностей p_{ij} можна скласти квадратну матрицю

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

яка називається ***матрицею перехідних імовірностей***. Її порядок *k* дорівнює числу можливих станів системи. Матриця P має дві властивості:

1 Усі елементи матриці P задовольняють нерівності $0 \le p_{ij} \le 1$, бо p_{ij} – імовірності.

2 Візьмемо будь-який рядок матриці P, наприклад, i-тий. У ньому стоять імовірності $p_{i1}, p_{i2}, ...p_{ik}$ переходів системи за один крок зі стану E_i відповідно у стани E_1, E_2, ..., E_k. Усі ці переходи створюють сукупність єдино можливих і несумісних подій. Тому за теоремою додавання ймовірностей таких подій $p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{ik} = 1$, тобто сума елементів будь-якого рядка матриці P дорівнює одиниці.

Для прикладу випишемо матрицю перехідних імовірностей марковського ланцюга, розмічений граф станів якого зображено на рисунку1:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Матриця перехідних імовірностей через n кроків

Позначимо через $p_{ij}(n)$ ймовірність переходу зі стану E_i у стан E_j за n кроків. Зрозуміло, що $p_{ij}(1) = p_{ij}$. Складемо матрицю

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & ... & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & ... & p_{2k}(n) \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{k1}(n) & p_{k2}(n) & ... & p_{kk}(n) \end{pmatrix}.$$

Ця матриця має ти ж самі властивості, що й матриця P:

1 $0 \le p_{ij}(n) \le 1$.

2 $p_{i1}(n) + p_{i2}(n) + ... + p_{ik}(n) = 1, \quad (i = 1,...k)$.

Знайдемо зв'язок між матрицями P і P(n). Для цього розглянемо ймовірність $p_{ij}(m+n)$ переходу зі стану E_i у стан E_j за (m+n) кроків. Введемо k єдино можливих s несумісних гіпотез:

- через m кроків система перейде зі стану E_i у стан E_1 – це гіпотеза H_1;
- через m кроків система перейде зі стану E_i у стан E_2 – це гіпотеза H_2;
- через m кроків система перейде зі стану E_i у стан E_k – це гіпотеза H_k.

Імовірності цих гіпотез дорівнюють відповідно $p_{i1}(m), p_{i2}(m),..., p_{ik}(m)$.

Якщо через m кроків система опинилася у стані E_r, то з імовірністю $p_{rj}(n)$ вона за n кроків перейде з цього стану в стан E_j. І тоді добуток $p_{ir}(m)\cdot p_{rj}(n)$ є імовірністю переходу системи за (m+n) кроків зі стану E_i у стан E_j за умовою, що через m кроків система опинилася у проміжному стані E_r. Оскільки проміжним станом може бути будь-який зі станів E_1, E_2, ..., E_k, за формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(m+n) = p_{i1}(m)\cdot p_{1j}(n) + p_{i2}(m)\cdot p_{2j}(n) + ... + p_{ik}(m)\cdot p_{kj}(n). \quad (1)$$

Цей результат показує, що добуток i-ого рядка матриці P(m) на j-ий стовпчик матриці P(n) дає елемент $p_{ij}(m+n)$, розташований в i-ому рядку й j-ому стовпчику матриці P(m+n). Тому, вдаючись до правила перемноження матриць, отриманий результат можна записати у більш стислому вигляді

$$P(m+n)=P(m)\cdot P(n). \quad (2)$$

Нехай тут m=1 і n=1. Тоді $P(1+1)=P(1)\cdot P(1)$, тобто $P(2)=P\cdot P$, оскільки P(1)=P. Тобто, $P(2)=P^2$.

При m=2, n=1 матимемо $P(2+1)=P(2)\cdot P(1)$, отже $P(3)=P^2\cdot P$ або $P(3)=P^3$.

Таким чином,

$$P(n)=P^n. \quad (3)$$

За допомогою цієї формули можна визначати перехідні ймовірності за n кроків, якщо відомі ймовірності переходу за один крок.

Приклад 1. Граф станів марковського ланцюга зображено на рисунку 2.

Знайти матрицю перехідних імовірностей за два і три кроки.

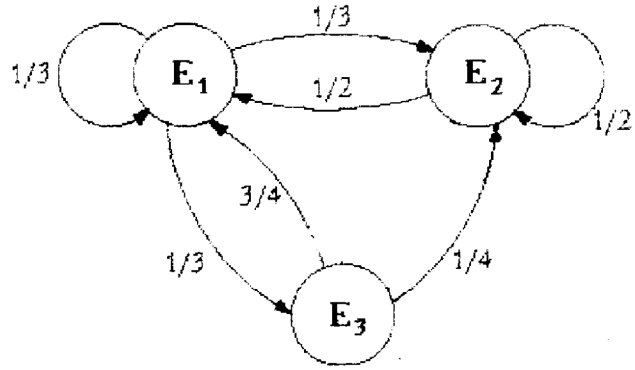

Рисунок 2

Розв'язання.

1 Складаємо матрицю перехідних імовірностей за один крок

$$P=\begin{pmatrix} {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 \\ {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ {}^3\!/_4 & {}^1\!/_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Знаходимо матрицю перехідних імовірностей через два кроки

$$P(2)=P^2=P\cdot P=\begin{pmatrix} {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 \\ {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ {}^3\!/_4 & {}^1\!/_4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 \\ {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ {}^3\!/_4 & {}^1\!/_4 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} & \frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} & \frac{1}{9}+0+0 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+0 & \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+0 & \frac{1}{6}+0+0 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+0 & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+0 & \frac{1}{4}+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{19}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3 Визначаємо матрицю перехідних імовірностей через три кроки

$$P(3)=P^3=P^2\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{19}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 & {}^1\!/_3 \\ {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & 0 \\ {}^3\!/_4 & {}^1\!/_4 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{19}{108}+\frac{13}{72}+\frac{1}{12} & \frac{19}{108}+\frac{13}{72}+\frac{1}{36} & \frac{19}{108}+0+0 \\ \frac{5}{36}+\frac{5}{24}+\frac{1}{8} & \frac{5}{36}+\frac{5}{24}+\frac{1}{24} & \frac{5}{36}+0+0 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16} & \frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16} & \frac{1}{8}+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{95}{216} & \frac{83}{216} & \frac{19}{108} \\ \frac{17}{36} & \frac{7}{18} & \frac{5}{36} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

1.4 Розподіл імовірностей станів

Введемо ймовірність $q_i(n)$ ($i=1, 2, 3, \ldots, k$) того, що через n кроків система опиниться у стані E_i. Набір чисел $q_1(n)$, $q_2(n)$, ..., $q_k(n)$ створює ***розподіл імовірностей станів через n кроків***. Оскільки у будь-який момент система має знаходитися в одному і тільки в одному зі станів E_1, E_2, ..., E_k, за теоремою додавання ймовірностей єдино можливих і несумісних подій

$$q_1(n)+q_2(n)+\ldots+q_k(n)=1.$$

Цю рівність надалі будемо називати ***нормувальною умовою***.

Зазначимо, що нерідко початковий стан системи є невідомим, тому його зручно вважати випадковим і задавати ймовірностями, з якими система в початковий момент перебувала в тому або іншому стані. Ці ймовірності позначимо через $q_1(0)$, $q_2(0)$, ..., $q_k(0)$. Послідовність цих чисел створює ***початковий розподіл імовірностей станів***. Якщо відомо, у якому стані знаходилася система в початковий момент, наприклад, у стані E_i, то належить покласти $q_i(0)=1$, а всі інші ймовірності $q_j(0)=0$ $(j\neq i)$.

Подію, яка полягає в тому, що через n кроків система опиниться у стані E_i, можна розглядати як складну: початково система перебувала у стані E_1 і з нього за n кроків перейшла у стан E_i, або початково система перебувала у стані E_2 і з нього за n кроків перейшла у стан E_i, або початково система перебувала у стані E_3 і з нього за n кроків перейшла у стан E_i, або, ..., або початково система знаходилася у стані E_k і з нього за n кроків перейшла у стан E_i. Тому за формулою повної ймовірності

$$q_i(n)=q_1(0)\cdot p_{1i}(n)+q_2(0)\cdot p_{2i}(n)+q_3(0)\cdot p_{3i}(n)+\ldots+p_k(0)\cdot p_{ki}(n). \qquad (4)$$

Введемо рядкові матриці

$$Q(0)=(\,q_1(0)\;q_2(0)\;\ldots\;q_k(0))\text{ і }Q(n)=(\,q_1(n)\;q_2(n)\;\ldots\;q_k(n)).$$

Тоді, дотримуючись правила множення матриці на матрицю, формулі (4) можна надати компактний вигляд

$$Q(n)=Q(0)\cdot P(n). \qquad (5)$$

З цієї формули і з формули (1) знайдемо

$$Q(n)=Q(0)\cdot P^n. \qquad (6)$$

Замінимо тут n на (n+1), тоді

$$Q(n+1)=Q(0)\cdot P^{n+1}=Q(0)\cdot P^n\cdot P=Q(n)\cdot P.$$

Отже,

$$Q(n+1)=Q(n)\cdot P. \qquad (7)$$

Приклад 2. Відома матриця перехідних імовірностей марковського ланцюга з дискретним часом

$$P=\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл імовірностей станів через два кроки, якщо початково система знаходилася у другому стані.

Розв'язання.

Оскільки порядок матриці P дорівнює k=2, система має два можливі стани і невідомими є ймовірності $q_1(2)$ та $q_2(2)$. За умовою прикладу другий стан – початковий, тому $q_1(0)=0$, $q_2(0)=1$. Число кроків n=2.

І спосіб розв'язання.

1 За формулою (5) $Q(2)=Q(0)\cdot P(2)$, де $Q(0)=(q_1(0)\ \ q_2(0))=(0\ \ 1)$, а $Q(2)=(q_1(2)\ \ q_2(2))$.

2 Знайдемо матрицю перехідних ймовірностей за два кроки

$$P(2)=P^2=P\cdot P=\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{25}+\frac{3}{5} & \frac{4}{25}+\frac{1}{5} \\ \frac{3}{20}+\frac{3}{16} & \frac{3}{5}+\frac{1}{16} \end{pmatrix};$$

$$P(2)=\begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{9}{25} \\ \frac{27}{80} & \frac{53}{80} \end{pmatrix}.$$

3 Визначимо рядкову матрицю з імовірностей станів через два кроки

$$Q(2)=Q(0)\cdot P(2)=(0\quad 1)\cdot\begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{9}{25} \\ \frac{27}{80} & \frac{52}{80} \end{pmatrix}=\left(0+\frac{27}{80}\quad 0+\frac{53}{80}\right)=\left(\frac{27}{80}\quad \frac{53}{80}\right).$$

Таким чином, $q_1(2)=\frac{27}{80}$, $q_2(2)=\frac{53}{80}$.

II спосіб розв'язання.

1 За робочу формулу візьмемо формулу (7) $Q(n+1)=Q(n)\cdot P$ і підставимо в неї n=0

$$Q(1)=Q(0)\cdot P,$$

де $Q(1)=(q_1(1)\ q_2(1))$, $Q(0)=(0\ 1)$.

Обчислимо $Q(1)=(0\quad 1)\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

2 Тепер у формулу (7) підставимо n=1:

$$Q(2)=Q(1)\cdot P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{20}+\frac{3}{16} & \frac{3}{5}+\frac{1}{16} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{27}{80} & \frac{53}{80} \end{pmatrix}.$$

Звідси $q_1(2)=\dfrac{27}{80}$, $q_2(2)=\dfrac{53}{80}$.

III спосіб розв'язання.

Усі міркування зручно проводити за допомогою розміченого графу станів. Зобразимо цей граф (рисунок 3).

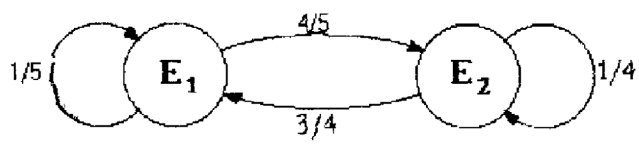

Рисунок 3

За умовою прикладу спочатку система перебувала в стані E_2. Введемо такі події:

- A - за один крок система перейшла зі стану E_2 у стан E_1;
- $\bar{A}$ - за один крок система не вийшла зі стану E_2;
- B - за один крок система перейшла зі стану E_1 у стан E_2.

Розглянемо складену подію $(A \text{ і } B)$ або $(\bar{A} \text{ і } \bar{A})$. Вона означає, що за два кроки система опиниться у стані E_2 за умовою, що спочатку вона знаходилася в цьому ж стані E_2. За відомими теоремами теорії імовірностей імовірність цієї складеної події дорівнює

$$P\left[(A \text{ і } B) \text{ або} (\bar{A} \text{ і } \bar{A})\right] = P(A) \cdot P(B) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{53}{80}.$$

З іншого боку, $P\left[(A \text{ і } B) \text{ або} (\bar{A} \text{ і } \bar{A})\right] = p_{22}(2)$, отже $p_{22}(2) = \frac{53}{80}$ - це ймовірність опинитися системі за два кроки в стані E_2 за умовою, що початково вона теж знаходилась у стані E_2, тобто в нашому разі $p_{22}(2) = q_2(2)$.

Таким чином, $q_2(2) = \frac{53}{80}$, а тоді $q_1(2) = 1 - q_2(2) = 1 - \frac{53}{80} = \frac{27}{80}$ (тут використано нормувальну умову: $q_1(2) + q_2(2) = 1$).

Зазначимо, що III спосіб доцільно застосовувати тоді, коли число кроків n невелике.

1.5 Стаціонарний розподіл імовірностей станів

Розподіл імовірностей станів називається ***стаціонарним***, якщо він не змінюється протягом часу, тобто величини $q_i(n)$ $(i=1,\ldots,k)$ є сталими і незалежними від n:

$$q_i(n) = q_i = \text{const}, \ i=1,2,\ldots,k.$$

Для стаціонарних імовірностей вірна нормувальна умова $q_1+q_2+\ldots+q_k=1$.

Нехай маємо стаціонарний розподіл імовірностей станів. Тоді у формулі (7)

$$Q(n+1)=Q(n)=(q_1 \ q_2 \ \ldots \ q_k)= Q$$

і вона набуває вигляду

$$Q=Q \cdot P, \qquad \textbf{(8)}$$

де P - матриця перехідних імовірностей за один крок.

Зауваження:

1 У формулі (8) не можна скоротити на Q, бо ця дія передбачає ділення обох частин рівняння (8) на Q, але операція ділення на матрицю в матричному численні не існує.

2 При практичному використанні формули (8) її записують у розгорнутому вигляді

$$(q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k)=(q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k)\cdot\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

з якого після перемноження матриць праворуч одержують однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (p_{11}-1)\cdot q_1+p_{21}\cdot q_2+\ldots+p_{k1}\cdot q_k=0\,; \\ p_{12}\cdot q_1+(p_{22}-1)\cdot q_2+\ldots+p_{k2}\cdot q_k=0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \\ p_{1k}\cdot q_1+p_{2k}\cdot q_2+\ldots+(p_{kk}-1)\cdot q_k=0. \end{cases}$$

Важливою особливістю цієї системи є те, що її головний визначник завжди дорівнює нулю. Тому принаймні одне з рівнянь, обов'язково зайве, і, як правило, одне з рівнянь замінюють нормувальною умовою $q_1+q_2+\ldots+q_k=1$.

Приклад 3. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів марковського ланцюга, граф станів якого зображено на рисунку 4.

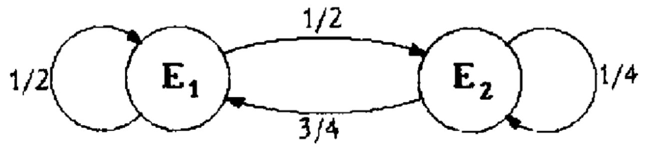

Рисунок 4

Розв'язання.

1 Складемо матрицю перехідних імовірностей

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2 Оскільки ланцюг має два стани E_1 і E_2, невідомими є дві імовірності q_1 і q_2, а $Q=(q_1\ q_2)$.

3 За формулою (8)

$$(q_1 \quad q_2)=(q_1 \quad q_2)\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

4 Перемножимо матриці праворуч і потім прирівняємо відповідні елементи матриць праворуч та ліворуч:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{2}{3}q_2\,; \\ q_2 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{3}q_2\,. \end{cases}$$

5 Перекинемо всі доданки обох рівнянь праворуч і приведемо подібні члени в кожному рівнянні

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}q_1 + \frac{2}{3}q_2 = 0\,; \\ \frac{1}{2}q_1 - \frac{2}{3}q_2 = 0\,. \end{cases}$$

6 Бачимо, що обидва рівняння фактично однакові, бо кожне з них можна отримати з другого множенням на (-1). Тому одне рівняння відкидаємо, а з іншого знаходимо

$$\frac{1}{2}q_1 = \frac{2}{3}q_2\,; \quad q_1 = \frac{4}{3}q_2\,.$$

7 За нормувальною умовою $q_1+q_2=1$. Якщо підставити сюди значення $q_1 = \frac{4}{3}q_2$, то $\frac{4}{3}q_2 + q_2 = 1$. Звідси $\frac{7}{3}q_2 = 1$, $q_2 = \frac{3}{7}$;

$$q_1 = \frac{4}{3}q_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7}\,; \quad q_1 = \frac{4}{7}\,.$$

Відповідь: $q_1 = \frac{4}{7}$; $q_2 = \frac{3}{7}$.

Приклад 4. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів марковського ланцюга, який заданий матрицею перехідних імовірностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1 Оскільки порядок матриці P дорівнює k=3, марковський ланцюг має три можливі стани E_1, E_2, E_3 і невідомими є стаціонарні ймовірності q_1, q_2, q_3, а $Q=(q_1\ q_2\ q_3)$.

2 За формулою (8)

$$(q_1 \quad q_2 \quad q_3)=(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Перемножимо матриці у правій частині цієї рівності й потім прирівняємо відповідні елементи матриць праворуч та ліворуч:

$$\begin{cases} q_1 = q_1\cdot 0 + q_2\cdot 1/4 + q_3\cdot 2/5\ ; \\ q_2 = q_1\cdot 1/2 + q_2\cdot 1/4 + q_3\cdot 3/5; \\ q_3 = q_1\cdot 1/2 + q_2\cdot 1/2 + q_3\cdot 0\ . \end{cases}$$

4 Перенесемо всі доданки в кожному рівнянні цієї системи праворуч і приведемо подібні члени

$$\begin{cases} -q_1 + 1/4\cdot q_2 + 2/5\cdot q_3 = 0\ ; \\ 1/2\cdot q_1 - 1/4\cdot q_2 + 3/5\cdot q_3 = 0; \\ 1/2\cdot q_1 + 1/2\cdot q_2 - q_3 = 0. \end{cases}$$

5 Згідно з другим зауваженням одне з рівнянь цієї системи можна відкинути. Відкинемо друге рівняння, а одному з невідомих q_1, q_2, q_3 надамо значення С. Нехай q_3=С. Тоді

$$\begin{cases} -q_1 + 1/4\cdot q_2 = -2/5\cdot C\ ; \\ 1/2\cdot q_1 + 1/2\cdot q_2 = C\ . \end{cases}$$

6 Розв'яжемо отриману систему рівнянь за формулами Крамера $q_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, де Δ- головний визначник, а визначник Δ_i виходить із визначника Δ заміною його і-ого стовпчика вільними членами системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{5}{8};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{5}\cdot C & \frac{1}{4} \\ C & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\cdot C\cdot\frac{1}{2} - C\cdot\frac{1}{4} = -\frac{9}{20}\cdot C;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{5}\cdot C \\ \frac{1}{2} & C \end{vmatrix} = -C - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\cdot C\right) = -\frac{4}{5}\cdot C;$$

Таким чином, $q_1 = \frac{18}{25} \cdot C$; $q_2 = \frac{32}{25} \cdot C$; $q_3 = C$.

7 Для визначення сталої C підставимо ці значення q_1, q_2, q_3 в нормувальну умову $q_1+q_2+q_3=1$. Отримаємо

$$\frac{18}{25} \cdot C + \frac{32}{25} \cdot C + C = 1.$$

Звідси $C = \frac{1}{3}$ і тому $q_1 = \frac{18}{25} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{25}$; $q_2 = \frac{32}{25} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{75}$; $q_3 = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $q_1 = \frac{6}{25}$; $q_2 = \frac{32}{75}$ $q_3 = \frac{1}{3}$.

1.6 Фінальні ймовірності станів. Регулярність ланцюга

Марковський ланцюг називається ***регулярним***, якщо для будь-якого його стану E_i існує $\lim\limits_{n \to \infty} q_i(n)$, і ця границя не залежить від початкового розподілу $q_1(0)$, $q_2(0)$, ..., $q_k(0)$ імовірностей станів. Значення цієї границі називається ***фінальною імовірністю*** стану E_i. Припустимо, що ланцюг – регулярний і нехай $\lim\limits_{n \to \infty} q_i(n) = q_i$; $(i = 1,2,...)$ - фінальні ймовірності. Оскільки $q_1(n)+q_2(n)+...+q_k(n)=1$, здійснивши перехід до границі в цій рівності при $n \to \infty$, отримаємо $q_1+q_2+...+q_k=1$. Отже, набір фінальних імовірностей q_1, q_2, ..., q_k задовольняє нормувальній умові та умові $0 \leq q_i \leq 1$ і створює деякий розподіл імовірностей станів системи, який називається ***фінальним розподілом***.

Щоб сформулювати умови, при яких ланцюг буде регулярним, треба ввести кілька понять.

Стан E_i називається ***несуттєвим***, якщо існує такий стан E_j, у якому $p_{ij}(m)>0$ для деякого числа кроків m і $p_{ji}(n)=0$ для усіх значень n. Іншими словами, зі стану E_i у стан E_j попасти можна, а зі стану E_j у стан E_i перейти взагалі неможливо. Таким чином, якщо система, виходячи зі стану E_i, опиниться у стані E_j, то вона у стан E_i ніколи вже не повернеться.

Якщо стан не є несуттєвим, то він називається ***суттєвим***. Іноді суттєвий стан називають ***зворотним***, а несуттєвий – ***незворотним***.

Нехай E_i і E_j – суттєві стани, тоді за певну кількість кроків можна попасти із E_i в E_j і навпаки. Такі два стани називаються ***сполученими***.

На рисунку 5, а і б зображено графи станів таких ланцюгів, у яких усі стани суттєві і сполучаються. На рисунку 5, в стани E_2 і E_3 – суттєві і сполучаються, стан E_1 – несуттєвий. На рисунку 5, г стани E_1 і E_2 – суттєві і сполучаються, стани E_3 і E_4 сполучаються, але є несуттєвими, стани E_1 і E_2 не сполучаються зі станами E_4 і E_3. На рисунку 5, д стан E_1 – несуттєвий, інші стани суттєві. Приймемо без доведення твердження, що для несуттєвого стану E_r

$$\lim_{n\to\infty} q_r(n) = 0.$$

Його наочний зміст полягає в тому, що рано чи пізно система вийде зі стану E_r і більш ніколи в нього не повернеться.

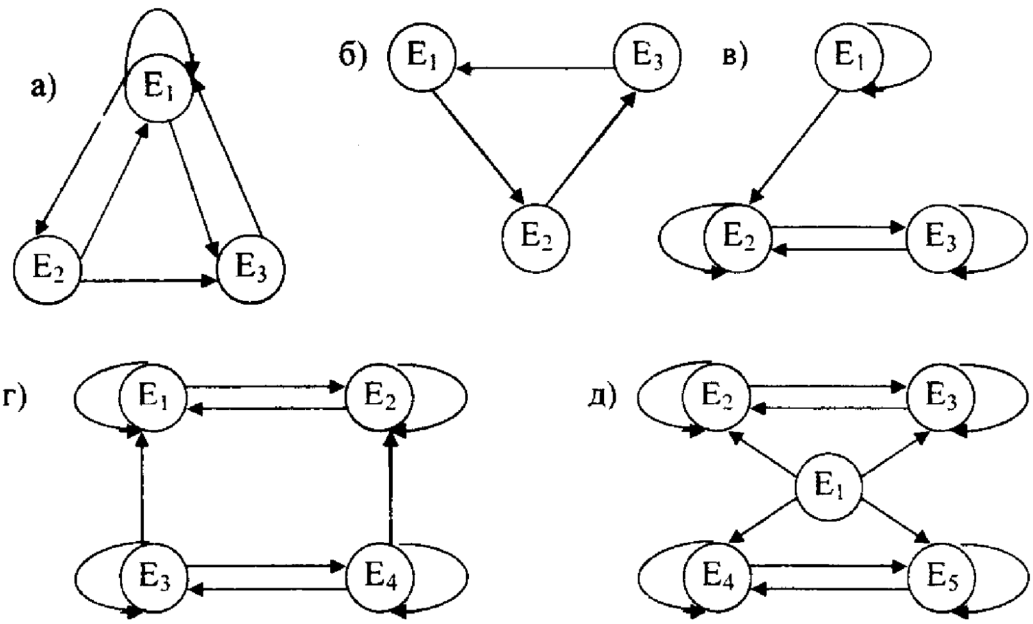

Рисунок 5

Сформулюємо теореми про умови регулярності ланцюга.

Теорема 1. Для регулярності ланцюга необхідно й достатньо, щоб для будь-яких двох суттєвих станів E_i та E_j існувало таке число m кроків, при якому виконується нерівність $p_{ij}(m)>0$, при цьому невиключно, що i=j, тобто для будь-якого суттєвого стану E_i має виконуватись умова $p_{ii}(m)>0$.

На рисунку 5, а, в, г зображено графи регулярних ланцюгів. На рисунку 5, б – граф нерегулярного ланцюга. Дійсно, згідно з графом і за формулою (1) знайдемо

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix};\ P(2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};\ P(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\ P(4)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=P;$$

$$P(5)=P(2),\ P(6)=P(3),\ P(7)=P,\ ....$$

Виявляється, що в усіх матрицях діагональні елементи $p_{ii}(m)>0$, лише якщо n ділиться на 3, при цьому інші елементи $p_{ij}(n)=0$, $i\neq j$. Отже, не існує жодного значення n, при якому задовольнялася би умова $p_{ij}(n)>0$ для всіх i та j (адже всі стани ланцюга – суттєві). Цей випадок свідчить, що для регулярності ланцюга необхідно, але недостатньо, щоб усі суттєві стани сполучалися поміж собою.

На питання, як знайти фінальні ймовірності станів регулярного ланцюга, відповідає наступна теорема.

Теорема 2. Якщо ланцюг є регулярним, то він має єдиний стаціонарний розподіл імовірностей станів і цей розподіл збігається з фінальним.

Доведемо цю теорему.

За самим визначенням, фінальні ймовірності станів є стаціонарними, тому що вони сталі й не змінюються з часом. Крім того, якщо формулу (7) записати в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix}q_1(n+1) & q_2(n+1) & \dots & q_k(n+1)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}q_1(n) & q_2(n) & \dots & q_k(n)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1k}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2k}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\p_{k1}&p_{k2}&\cdots&p_{kk}\end{pmatrix}$$

і потім перейти до границі при $n\to\infty$, то, маючи на увазі визначення фінальних імовірностей $q_i=\lim\limits_{n\to\infty}q_i(n)$, отримаємо

$$\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \dots & q_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \dots & q_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1k}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2k}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\p_{k1}&p_{k2}&\cdots&p_{kk}\end{pmatrix}.$$

Ця рівність вказує, що фінальні ймовірності задовольняють формулі (8). Це також означає стаціонарність розподілу фінальних імовірностей.

Тепер розглянемо стаціонарний розподіл регулярного ланцюга q_1, q_2, …, q_k і приймемо його за початковий. Тоді, за його визначенням, $q_i(n)=q_i=const$ для всіх значень n і тому $\lim_{n\to\infty} q_i(n)=q_i$. З іншого боку, через регулярність ланцюга границя $\lim_{n\to\infty} q_i(n)$, незалежно від початкового розподілу, дорівнює фінальній імовірності. Отже, стаціонарний розподіл збігається з фінальним. Теорему доведено.

Ця теорема і визначення регулярності ланцюга показують, що вплив початкового стану регулярного ланцюга на його поведінку зі збільшенням часу зникає, і кажуть, що система виходить на стаціонарний режим. На практиці всі реальні фізичні системи функціонують звичайно досить тривалий час і імовірності $q_i(n)$ достатньо наближаються до фінальних імовірностей.

Приклад 5. Переконатися, що ланцюг, граф якого зображено на рисунку 2, є регулярним, і знайти для нього фінальні ймовірності станів.

Розв'язання.

1 Для того, щоб переконатися у регулярності марковського ланцюга, треба, по-перше, перевірити, чи сполучаються між собою всі його суттєві стани; по-друге, знайти принаймні одне значення n, при якому для всіх суттєвих станів перехідні ймовірності $p_{ij}(n)>0$ (тут i, j – номери суттєвих станів).

З рисунка 2 очевидно, що всі стани ланцюга є суттєвими і вони сполучаються. У прикладі 1 були отримані матриці для даного ланцюга:

$$P=P(1)=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } P(2)=\begin{pmatrix} 19/36 & 13/36 & 1/9 \\ 5/12 & 5/12 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що при n=2 всі елементи $p_{ij}(2)>0$, отже, ланцюг регулярний. Зазначимо, що при n=1 цього ще не можна стверджувати, бо в матриці P елементи $p_{23}=0$ і $p_{33}=0$.

2 Для знаходження фінальних імовірностей q_1, q_2, q_3 застосуємо формулу (8). Згідно з нею

$$(q_1 \quad q_2 \quad q_3)=(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\cdot\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Зведемо це матричне рівняння до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{3}{4}q_3 \ ; \\ q_2 = \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{4}q_3 \ ; \\ q_3 = \frac{1}{3}q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 \ ; \end{cases}$$

або
$$\begin{cases} -\frac{2}{3}q_1 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{3}{4}q_3 = 0 \ ; \\ \frac{1}{3}q_1 - \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{4}q_3 = 0 \ ; \\ \frac{1}{3}q_1 \qquad - \qquad q_3 = 0 \ . \end{cases}$$

4 Одне з рівнянь, наприклад друге, відкинемо і порівняємо q_3=C, тоді

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}q_1 + \frac{1}{2}q_2 = -\frac{3}{4}C \ ; \\ \frac{1}{3}q_1 \qquad\qquad = C \ . \end{cases}$$

5 Розв'яжемо цю систему рівнянь: q_1=3C; $q_2=\frac{5}{2}C$.

6 За нормувальною умовою $q_1+q_2+q_3=1$ одержимо

$$3C+\frac{5}{2}C+C=1; \text{ звідси } C=\frac{2}{13}.$$

7 Рахуємо фінальні ймовірності:

$$q_1 = 3 \cdot \frac{2}{13} = \frac{6}{13};$$

$$q_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{5}{13};$$

$$q_3 \frac{2}{13}.$$

Наприкінці відмітимо, що на рисунку 5, д зображено граф нерегулярного ланцюга, бо він має суттєві стани, які не сполучаються, наприклад, E_2 і E_4 ($p_{24}(n)=0$ при всіх n).

2 МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

2.1 Загальні поняття

Знов розглянемо фізичну систему, яка може знаходитися в k станах E_1, E_2, ..., E_k. Змінювання станів випадкові й відбуваються миттєво (стрибками) і в довільний момент часу. Випадковий процес, що виникає при цьому, називається ***ланцюгом з неперервним часом***, а будь-яке змінювання стану – стрибком у його еволюції. Якщо поведінка ланцюга після будь-якого моменту часу t залежить лише від того стану, у якому система знаходиться в момент t, і не залежить від того, як і коли вона в цей стан потрапила, то ланцюг називається ***марковським***. Залежність і незалежність тут слід розуміти в імовірнісному сенсі. Нехай маємо три моменти часу $t_1<t_2<t_3$ і відомі стани системи в моменти t_1 і t_2. Тоді ймовірність опинитися системі в момент t_3 у деякому стані E_i не має залежати від того, у якому стані перебувала вона в момент t_1.

Припустимо, що в якийсь момент t система знаходиться у стані E_i. Якщо ймовірність того, що через деякий час система опиниться у стані E_j не залежить від моменту t, то ланцюг називається ***стаціонарним*** або ***однорідним***. Властивість однорідності можна подати і так: якщо імовірнісні характеристики ланцюга на будь-якому проміжку часу не залежать від початку його відліку, то ланцюг – однорідний. Зміст однорідності ланцюга полягає в тому, що причини, які викликають змінювання його станів, не змінюються протягом часу.

Поставимо вимогу, щоб ланцюг з неперервним часом задовольняв умові ***ординарності стрибків***. Зміст цієї умови полягає в тому, що в один і той же момент часу система не може змінити свій стан більш ніж один раз. Математично це можна сформулювати так: імовірність того, що за короткий проміжок часу система змінить свій стан не менш двох разів, є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж цей проміжок, при його прямуванні до нуля.

Надалі розглядатимемо тільки однорідні й ординарні марковські ланцюги з неперервним часом.

2.2 Перехідні ймовірності

Розглянемо однорідний марковський ланцюг із неперервним часом. Позначимо через $p_{ij}(t)$ ймовірність того, що за час t система перейде зі стану E_i у стан E_j. Імовірності $p_{ij}(t)$ називаються перехідними імовірностями за час t. З цих імовірностей можна скласти квадратну матрицю

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \dots & p_{kk}(t) \end{pmatrix},$$

яка називається ***матрицею перехідних імовірностей***. Її порядок k дорівнює кількості можливих станів системи.

Властивості матриці P(t):

Усі елементи матриці задовольняють умові $0 \le p_{ij}(t) \le 1$, бо $p_{ij}(t)$ – імовірності.

Якщо в якийсь момент часу система знаходиться у стані E_i, то через час t вона має опинитися в одному зі станів E_1, E_2, ..., E_k. Звідси за теоремою додавання ймовірностей єдино можливих і несумісних подій

$$p_{i1}(t)+p_{i2}(t)+\dots+p_{ik}(t)=1. \qquad \textbf{(9)}$$

Має місце очевидна формула

$$p_{ij}(0)=p_{ij}(t)\Big|_{t=0}=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \ne j \\ 1 & \text{при} \quad i = j \end{cases}. \qquad \textbf{(10)}$$

Формула (10) означає, що при t =0 матриця P(t) перетворюється в одиничну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно тому, як були отримані формули (1) і (2) у розділі 1, можна вивести, що

$$p_{ij}(t+\tau)=p_{i1}(t)\cdot p_{1j}(\tau)+p_{i2}(t)\cdot p_{2j}(\tau)+\dots+p_{ik}(t)\cdot p_{kj}(\tau); \qquad \textbf{(11)}$$

$$P(t+\tau)=P(t)\cdot P(\tau). \qquad \textbf{(12)}$$

2.3 Інтенсивності переходів

Припустимо, що перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ однорідного марковського ланцюга є диференційованими функціями змінної t при будь-якому $t \geq 0$. Позначимо через λ_{ij} значення похідних цих функцій у точці t=0:

$$p_{ij}^{/}(0) = p_{ij}^{/}(t)\big|_{t=0} = \lambda_{ij} \quad ; \qquad i = 1,2,\ldots,k \quad ; \qquad j = 1,2,\ldots,k\,.$$

Вияснимо імовірнісний зміст величин λ_{ij}. За визначенням похідної функції.

$$p_{ij}^{/}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}.$$

При малих значеннях Δt ($\Delta t > 0$) можна вважати, що

$$p_{ij}^{/}(t) \approx \frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}.$$

Звідси

$$p_{ij}(t+\Delta t) \approx p_{ij}^{/}(t) \cdot \Delta t + p_{ij}(t)\,.$$

При t=0, враховуючи, що $p_{ij}^{/}(0) = \lambda_{ij}$, одержимо

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda \cdot \Delta t + p_{ij}(0)\,. \tag{13}$$

Нехай спочатку $i \neq j$. Тоді за першою з формул (10) $p_{ij}(0) = 0$ і згідно з (13) маємо

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t\,. \tag{14}$$

Ця наближена рівність буде тим точнішою, чим менше Δt. Вона показує, що ймовірність переходу $p_{ij}(\Delta t)$ за короткий час Δt пропорційна часу Δt й коефіцієнт цієї пропорційності дорівнює λ_{ij}. Тому величину λ_{ij} називають ***інтенсивністю переходу*** зі стану E_i у стан E_j.

Зазначимо, що $p_{ij}(\Delta t)$ є ймовірністю опинитися системі через час Δt у стані E_j за умовою, що в початковий момент вона знаходилася у стані E_i. Потрапити з E_i в E_j система може і більш ніж за один стрибок, наприклад так $E_i \to E_r \to E_j$. Але через ординарність процесу за короткий час це практично неможливо. Отже, добуток $\lambda_{ij} \cdot \Delta t$ при малому Δt збігається з імовірністю того, що система за час Δt перейде з E_i в E_j тільки за один стрибок.

Нехай тепер i=j. За другою з формул (10) $p_{ii}(0)=1$ і з формули (13) на цей раз отримаємо

$$p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii} \cdot \Delta t + 1.$$

Звідси
$$1 - p_{ii}(\Delta t) \approx -\lambda_{ii} \cdot \Delta t, \tag{15}$$

де $p_{ii}(\Delta t)$ - це ймовірність того, що через час Δt система буде у стані E_i за умовою, що в початковий момент вона теж у ньому знаходилася. Вираз $1-p_{ii}(\Delta t)$ є ймовірністю протилежної події, тобто ймовірність опинитися системі через час Δt в деякому іншому стані. Завдяки ординарності за короткий час Δt практично відбувається не більше одного стрибка. Тому вираз $1-p_{ii}(\Delta t)$ збігається з імовірністю виходу системи зі стану E_i за малий час Δt. Згідно з формулою (15) ця ймовірність пропорційна часу Δt, а коефіцієнт пропорційності дорівнює $(-\lambda_{ii})$. Тому величину $(-\lambda_{ii})$ назвемо ***інтенсивністю виходу*** системи зі стану E_{ii}.

Створимо з величин λ_{ij} квадратну матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix},$$

яку називають ***матрицею інтенсивностей переходів***. Встановимо її важливі властивості. Оскільки $p_{ij}(\Delta t) \geq 0$, бо це ймовірності, легко бачити з формули(14), що $\lambda_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ (адже ж Δt>0). У формулі (15) $p_{ii}(\Delta t) \leq 1$ і $1-p_{ii}(\Delta t) \geq 0$, тому й $\lambda_{ii} \cdot \Delta t \geq 0$. Звідси $-\lambda_{ii} \geq 0$, а $\lambda_{ii} \leq 0$. Таким чином, можна сформулювати першу властивість матриці Λ: усі елементи матриці Λ, крім діагональних, додатні, а діагональні – від'ємні.

Продиференціюємо рівність (9)

$$p_{i1}'(t) + p_{i2}'(t) + \dots + p_{ik}'(t) = 0.$$

Звідси при t=0 і, враховуючи визначення інтенсивностей λ_{ij}, матимемо

$$\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{ik} = 0.$$

Отже, отримали другу властивість матриці Λ: сума елементів будь-якого рядка матриці інтенсивностей переходів дорівнює 0.

Марковський ланцюг з неперервним часом, як правило, задається матрицею Λ, тобто шляхом завдання інтенсивностей переходів. Друга властивість матриці Λ дозволяє обмежитися завданням лише її недіагональних елементів λ_{ij} при $i \neq j$. Діагональні елементи λ_{ii} визначаються за допомогою другої властивості. На графі станів марковського ланцюга з неперервним часом біля стрілок, які вказують на можливі переходи, ставлять відповідні інтенсивності λ_{ij}, при цьому, як правило, не вказуються інтенсивності виходів і відповідні стрілки не зображаються.

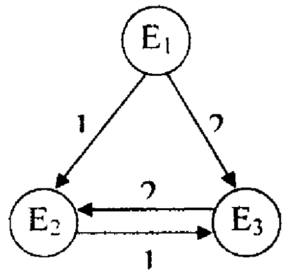

Рисунок 6

Так на рисунку 6 зображено граф станів марковського ланцюга з неперервним часом. Матриця інтенсивностей переходів має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. На станції працюють два вантажопідйомні козлові крани, які при виході із ладу обслуговуються однією бригадою ремонтників. Час безаварійної роботи кожного з них випадковий, випадковий і час ремонту кранів. Побудувати граф станів і написати матрицю інтенсивностей переходів, якщо кожний кран виходить з ладу з інтенсивністю λ, а ремонтується з інтенсивністю μ. Усі випадкові процеси (виходів з ладу й ремонтів), що виникають, вважаються марковськими.

Розв'язання.

1 Позначимо через E_n такий стан системи, у якому рівно n кранів несправні, n=0, 1, 2.

2 Будуємо граф станів (рисунок 7).

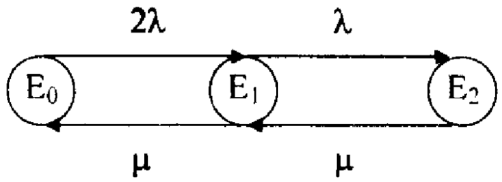

Рисунок 7

На рисунку переходи праворуч здійснюються в моменти виходу з ладу кранів, а переходи ліворуч – у моменти закінчення ремонту. Інтенсивність переходу з E_0 в E_1 дорівнює 2λ, оскільки у стані E_0 працюють два крани і кожний з них може вийти з ладу незалежно один від одного. Дійсно, якщо події A_1 і A_2 полягають у тому, що відповідний кран за час Δt вийде з ладу, то з точністю до нескінченно малих вищого порядку ймовірності цих подій дорівнюють:

$$P(A_1)=\lambda\cdot\Delta t; \qquad P(A_2)=\lambda\cdot\Delta t.$$

Імовірності того, що хоча б один кран за час Δt вийде з ладу, за теоремою додавання ймовірностей сумісних подій

$$P(A_1 \text{ або } A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 \text{ і } A_2).$$

Оскільки крани виходять з ладу незалежно один від одного,

$$P(A_1 \text{ і } A_2)=P(A_1)\,P(A_2)=(\lambda\,\Delta t)^2.$$

Величина $(\lambda\,\Delta t)^2$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з Δt. Отже, з точністю до такої величини

$$P(A_1 \text{ або } A_2)=\lambda\cdot\Delta t+\lambda\cdot\Delta t=2\lambda\cdot\Delta t,$$

де 2λ - коефіцієнт пропорційності, тому 2λ - інтенсивність переходу зі стану E_0 у стан E_1.

3 З рисунка 7 записуємо матрицю інтенсивностей переходів

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02}\\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\lambda & 2\lambda & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda\\ 0 & \mu & -\mu\end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що при складанні матриці Λ в першу чергу в кожному її рядку пишуть недіагональні елементи λ_{ij}, а діагональні елементи λ_{ii} визначають за допомогою другої властивості матриці Λ.

Приклад 7. На станції метрополітену паралельно працюють 3 монітори. Моменти виходу з ладу моніторів – випадкові і незалежні. Випадковий і час ремонту моніторів. Процеси виходів із ладу і ремонтів вважаються марковськими. Інтенсивності виходів з ладу моніторів однакові і дорівнюють λ, інтенсивність ремонту кожного монітора дорівнює μ. При виході з ладу кожного монітора його одразу починають ремонтувати. Побудувати граф станів і написати матрицю інтенсивностей.

Розв'язання.

1 Скажимо, що система знаходиться у стані E_n (n=0,1,2,3), якщо рівно n моніторів несправні. Зі стану E_0 у стан E_1 система переходить з інтенсивністю $\lambda_{01}=3\lambda$, тому що у стані E_0 працюють всі 3 монітори й кожен з них незалежно один від одного виходить з ладу. У стані E_1 один монітор ремонтується, а два монітори працюють. Тому інтенсивність переходу у стан E_2 дорівнює $\lambda_{12}=2\lambda$. У стані E_2 працює лише один монітор, тому інтенсивність $\lambda_{23}=\lambda$. У стані E_3 всі три монітори ремонтуються, тому $\lambda_{32}=3\mu$. У стані E_2 ремонтуються два монітори, тому $\lambda_{21}=2\mu$. Інтенсивність $\lambda_{10}=\lambda$, оскільки у стані E_1 ремонтується лише один монітор. Граф станів зображено на рисунку 8.

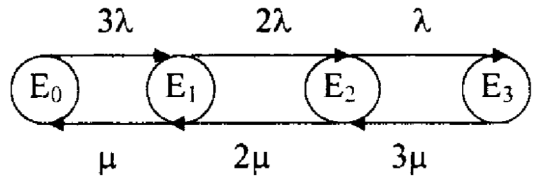

Рисунок 8

2 Відповідно до рисунка 8 складаємо матрицю інтенсивностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(2\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}.$$

2.4 Розподіл імовірностей станів

Розглянемо однорідний марковський ланцюг з k можливими станами E_1, E_2, ..., E_k. Приймемо деякий момент часу за початковий і позначимо через $q_i(t)$ ймовірність того, що через час t система опиниться у стані E_i, i=1, 2, ..., k. Впорядковані ймовірності $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$ у сукупності створюють ***розподіл імовірностей станів*** системи через час t. При t=0 вони збігаються з імовірностями початкового стану системи: $q_1(0)$, $q_2(0)$, ..., $q_k(0)$. Цей набір імовірностей називається ***початковим розподілом імовірностей станів***. Якщо початковий стан відомий, наприклад це стан E_r, то треба прийняти ймовірність системи знаходитися в початковий момент в E_r рівною одиниці, а всі інші ймовірності вважати нульовими: $q_r(0)=1$, $q_i(0)=0$ при $i\neq r$. Ясно, що ймовірності $q_i(t)$ аналогічні імовірностям $q_i(n)$ з розділу 1 і подібно їм задовольняють нормувальну умову $q_1(t)+q_2(t)+...+q_k(t)=1$ і нерівність $0\leq q_i(t)\leq 1$. Введемо матриці:

$$Q(t)=(q_1(t)\ q_2(t)\ \ldots\ q_k(t));\quad Q(0)=(q_1(0)\ q_2(0)\ \ldots\ q_k(0)).$$

Цілком аналогічно тому, як у розділі 1 була отримана формула (5), можна вивести

$$Q(t)=Q(0)\cdot P(t), \tag{16}$$

де, нагадаємо, P(t) – матриця перехідних імовірностей за час t.

Замінимо в цій формулі t на $t+\tau$:

$$Q(t+\tau)=Q(0)\cdot P(t+\tau).$$

Використаємо формулу (12), тоді

$$Q(t+\tau)=Q(0)\cdot P(t)\cdot P(\tau).$$

І, застосовуючи (16), одержимо

$$Q(t+\tau)=Q(t)\cdot P(\tau). \tag{17}$$

2.5 Диференціальні рівняння О. М. Колмогорова

Нехай початковий розподіл імовірностей станів $Q(0)=(q_1(0)\ q_2(0)\ \ldots\ q_k(0))$ й матриця перехідних імовірностей

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \ldots & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \ldots & p_{2k}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \ldots & p_{kk}(t) \end{pmatrix}$$

однорідного марковського ланцюга є відомими. Поставимо мету визначити ймовірності станів через час t $q_1(t)$, $q_2(t)$, …, $q_k(t)$.

Для цього у формулі (17) перейдемо від матричного запису до звичайного. Це можна зробити, якщо перемножити матриці праворуч у (17) і потім прирівняти відповідні елементи матриць:

$$q_i(t+\tau)=q_1(t)\cdot p_{1i}(\tau)+q_2(t)\cdot p_{2i}(\tau)+\ldots+q_k(t)\cdot p_{ki}(\tau); \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Візьмемо частинні похідні по τ від обох частин отриманої рівності і потім підставимо $\tau=0$:

$$q_i'(t)=q_1(t)\cdot p_{1i}'(0)+q_2(t)\cdot p_{2i}'(0)+\ldots+q_k(t)\cdot p_{ki}'(0); \qquad i=1,2,\ldots,k.$$

Використовуючи означення інтенсивностей $\lambda_{ji}=p_{ji}'(0)$, отримаємо

$$q_i'(t)=q_1(t)\cdot\lambda_{1i}+q_2(t)\cdot\lambda_{2i}+\ldots+q_k(t)\cdot\lambda_{ki}; \qquad i=1,2,\ldots,k. \tag{18}$$

Ці рівності створюють систему лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно невідомих функцій $q_i(t)$, i=1, 2, …, k. Оскільки початковий розподіл імовірностей станів вважається відомим, то задача відшукання функцій $q_i(t)$ зводиться до розв'язання цієї системи при початкових умовах $q_i(t)\big|_{t=0}=q_i(0),\quad i=1,2,\ldots,k$.

Рівняння (18) простіше запам'ятати в матричному вигляді. Оскільки $Q(t)=(q_1(t)\,q_2(t)\ldots q_k(t))$, доцільно позначити $Q'(t)=(q_1'(t)\,q_2'(t)\ldots q_k'(t))$. За формулою (18) і-тий елемент цієї рядкової матриці дорівнює добутку рядкової матриці Q(t) на і-тий стовпчик матриці інтенсивностей переходів:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \ldots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}.$$

Тому, згадуючи правило перемноження матриць, можна написати

$$Q'(t) = Q(t) \cdot \Lambda \tag{19}$$

- це матричний запис системи диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова.

Зауваження. Перехідну ймовірність $p_{ij}(t)$ можна тлумачити як імовірність опинитися системі через час t у стані E_j за припущенням, що в початковий момент вона знаходилась у стані E_i. У цьому разі $q_i(0)=1$, а інші ймовірності $q_r(0)=0$ $(r \neq i)$. Тоді ймовірність $q_i(t)$, очевидно, збігається з перехідною ймовірністю $p_{ij}(t)$. Отже, якщо розв'язати систему диференційних рівнянь за початковими умовами

$$q_j(0) = q_j(t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq i; \\ 1 & \text{при} \quad j = i, \end{cases}$$

то одержимо перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$.

Приклад 8. Знайти розподіл імовірностей станів через час t для марковського ланцюга, заданого матрицею інтенсивностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

якщо початково система перебувала у стані E_1.

Розв'язання.

1 Невідомими є функції $q_1(t)$ і $q_2(t)$, тому

$$Q(t) = (q_1(t)\, q_2(t)), \quad Q'(t) = \left(q_1'(t) \quad q_2'(t)\right)$$

і за формулою (19)

$$(q_1'(t)\, q_2'(t)) = (q_1(t)\, q_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

2 Перемножимо матриці праворуч і потім прирівняємо відповідні елементи обох матриць:

$$\begin{cases} q_1'(t) = -2q_1(t) + 4q_2(t); \\ q_2'(t) = 2q_1(t) - 4q_2(t). \end{cases}$$

Отримали систему диференційних рівнянь Колмогорова. Її можна розв'язати кількома способами. Ми це зробимо таким чином.

3 Замінимо одне з рівнянь системи (нехай, друге) нормувальною умовою, одержимо

$$\begin{cases} q_1'(t) = -2q_1(t) + 4q_2(t); \\ 1 = q_1(t) + q_2(t). \end{cases}$$

4 Значення $q_2(t)$ з другого рівняння $q_2(t)=1-q_1(t)$ підставимо в перше рівняння

$$q_1'(t) = -2q_1(t) + 4[1 - q_1(t)].$$

5 Перетворимо отриманий результат:

$$q_1'(t) = -6q_1(t) + 4. \qquad (20)$$

6 Розв'яжемо це диференційне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = -6q_1(t) + 4.$$

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dq_1(t)}{-6q_1(t) + 4} = dt.$$

7 Інтегруємо

$$\int \frac{dq_1(t)}{-6q_1(t) + 4} = \int dt.$$

Ліва частина

$$\int \frac{dq_1(t)}{-6q_1(t) + 4} = -\frac{1}{6}\ln\left|-6q_1(t) + 4\right| + C_1.$$

Права частина

$$\int dt = t + C_2$$ (C_1 і C_2 – сталі інтегрування).

Отже,

$$-\frac{1}{6}\ln\left|-6q_1(t)+4\right| = t + C \qquad (C=C_2-C_1).$$

8 Виразимо звідси $q_1(t)$:

$$\ln\left|-6q_1(t)+4\right| = -6t-6C;$$

$$-6q_1(t)+4 = e^{-6t-C} = e^{-6t}\cdot e^{-6C};$$

$$q_1(t) = -\frac{1}{6}\cdot e^{-6C}\cdot e^{-6C}+\frac{2}{3}.$$

Це загальний розв'язок диференційного рівняння (20).

Оскільки C – довільна стала, вираз $-\frac{1}{6}\cdot e^{-6C}$ також є довільною сталою. Зберігаючи за довільною сталою її символ C, запишемо загальний розв'язок рівняння (20) в остаточному вигляді:

$$q_1(t) = C\cdot e^{-6t}+\frac{2}{3}.$$

9 За умовою прикладу в початковий момент система знаходилась у стані E_1, тому $q_1(0)=1$. За допомогою цієї початкової умови знайдемо частинний розв'язок, поклавши в загальному розв'язку t=0:

$q_1(0) = C\cdot e^{-6\cdot 0}+\frac{2}{3}$, тобто $1 = C+\frac{2}{3}$, звідси $C=\frac{1}{3}$.

Отже, частинний розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$q_1(t) = \frac{1}{3}\cdot e^{-6t}+\frac{2}{3}.$$

10 З нормувальної умови знаходимо $q_2(t) = 1-q_1(t) = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot e^{-6t}$.

11 Таким чином, розподіл імовірностей станів через час t такий:

$$Q(t) = \left(\frac{1}{3}\cdot e^{-6t}+\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3}\cdot e^{-6t}+\frac{1}{3}\right).$$

Приклад 9. Дано матрицю інтенсивностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл імовірностей станів системи, якщо початковим є стан E_2.

Розв'язання.

1 Порядок матриці Λ дорівнює k=3, тому система має три можливі стани E_1, E_2 і E_3. Імовірності цих станів $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ – невідомі функції. Отже, $Q(t) = (q_1(t)\, q_2(t)\, q_3(t))$; $Q'(t) = (q_1'(t)\, q_2'(t)\, q_3'(t))$ і за формулою (19)

$$(q_1'(t)\, q_2'(t)\, q_3'(t)) = (q_1(t)\, q_2(t)\, q_3(t)) \cdot \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2 Перейдемо від цього матричного рівняння до системи рівнянь:

$$\begin{cases} q_1'(t) = -12 \cdot q_1(t) + 0 \cdot q_2(t) + 1 \cdot q_3(t)\,; \\ q_2'(t) = 0 \cdot q_1(t) - 6 \cdot q_2(t) + 4 \cdot q_3(t)\,; \\ q_3'(t) = 12 \cdot q_1(t) + 6 \cdot q_2(t) - 5 \cdot q_3(t)\,. \end{cases}$$

3 Одне з рівнянь, наприклад третє, замінимо нормувальною умовою, тоді

$$\begin{cases} q_1'(t) = -12 \cdot q_1(t) + 1 \cdot q_3(t)\,; \\ q_2'(t) = -6 \cdot q_2(t) + 4 \cdot q_3(t)\,; \\ q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) = 1\,. \end{cases}$$

4 З нормувальної умови виразимо $q_3(t) = 1 - q_1(t) - q_2(t)$ і підставимо це значення $q_3(t)$ в перше та друге рівняння, одержимо

$$\begin{cases} q_1'(t) = -12 \cdot q_1(t) + 1 - q_1(t) - q_2(t)\,; \\ q_2'(t) = -6 \cdot q_2(t) + 4 \cdot [1 - q_1(t) - q_2(t)]\,. \end{cases}$$

після приведення подібних членів

$$\begin{cases} q_1'(t) = -13 \cdot q_1(t) - q_2(t) + 1\ ; \\ q_2'(t) = -4q_1(t) - 10 \cdot q_2(t) + 4\ , \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

Зведемо цю систему диференційних рівнянь першого порядку до одного диференційного рівняння другого порядку.

5 Продиференціюємо одне з рівнянь, нехай друге, системи (21):

$$q_2''(t) = -4 \cdot q_1'(t) - 10 \cdot q_2'(t).$$

6 Підставимо сюди значення $q_1'(t)$ з першого рівняння системи (21):

$$q_2''(t) = -4 \cdot (-13q_1(t) - q_2(t) + 1) - 10 \cdot q_2'(t)$$

і після перетворень у правій частині одержимо:

$$q_2''(t) = 52 \cdot q_1(t) + 4 \cdot q_2(t) - 4 - 10 \cdot q_2'(t). \qquad (22)$$

7 З другого рівняння системи (21) виразимо $q_1(t)$:

$$q_1(t) = \frac{1}{4} \cdot \left[-q_2'(t) - 10 \cdot q_2(t) + 4\right]. \qquad (23)$$

8 Підставимо це значення $q_1(t)$ в (22), тоді

$$q_2''(t) = 52 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[-q_2'(t) - 10 \cdot q_2(t) + 4\right] + 4 \cdot q_2(t) - 4 - 10 \cdot q_2'(t)$$

і після спрощень матимемо

$$q_2''(t) = -23 \cdot q_2'(t) - 126 \cdot q_2(t) + 48.$$

9 Якщо всі члени перенести в ліву частину рівняння, то

$$q_2''(t) + 23 \cdot q_2'(t) + 126 \cdot q_2(t) - 48 = 0.$$

10 Два останні члени поєднаємо дужками і винесемо поза них коефіцієнт при $q_2(t)$, тоді

$$q_2''(t) + 23 \cdot q_2'(t) + 126 \cdot \left[q_2(t) - \frac{24}{63}\right] = 0. \qquad \textbf{(24)}$$

11 Позначимо

$$y(t)=q_2(t)-\frac{24}{63}, \tag{25}$$

тоді $y'(t)=q_2'(t)$; $y''(t)=q_2''(t)$ і рівняння (24) набуватиме вигляду

$$y''(t)+23\cdot y'(t)+126\cdot y(t)=0. \tag{26}$$

Отримали лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, спосіб його розв'язання нам відомий.

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2+23\cdot k+126=0$$

і знайдемо його корені:

$$k_{1,2}=\frac{-23\pm\sqrt{23^2-4\cdot 126}}{2}=\frac{-23\pm 5}{2};$$

$$k_1=-14; \qquad k_2=-9.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 дійсні та різні, загальний розв'язок диференційного рівняння (26) запишемо за формулою

$$y(t)=C_1\cdot e^{k_1\cdot t}+C_2\cdot e^{k_2\cdot t},$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Отже,

$$y(t)=C_1\cdot e^{-14\cdot t}+C_2\cdot e^{-9\cdot t}.$$

12 З рівності (25) $q_2(t)=y(t)+\frac{24}{63}$, тобто

$$q_2(t)=C_1\cdot e^{-14\cdot t}+C_2\cdot e^{-9\cdot t}+\frac{8}{21}. \tag{27}$$

13 Невідому функцію $q_1(t)$ знайдемо за формулою (23). Попередньо обчислимо похідну

$$q_2'(t)=-14\cdot C_1\cdot e^{-14\cdot t}-9\cdot C_2\cdot e^{-9\cdot t}$$

і її значення та значення $q_2(t)$ з (27) підставимо в (23).

Тоді

$$q_1(t)=\frac{1}{4}\cdot\left[14\cdot C_1\cdot e^{-14t}+9\cdot C_2\cdot e^{-9t}-10\cdot C_1\cdot e^{-14t}-10\cdot C_2\cdot e^{-9t}-\frac{80}{21}+4\right].$$

Після спрощень одержимо

$$q_1(t)=C_1\cdot e^{-14t}-\frac{1}{4}\cdot C_2\cdot e^{-9t}+\frac{1}{21}. \qquad (28)$$

14 Обидві формули (27) і (28) містять сталі C_1 і C_2. Визначимо їх за допомогою початкових умов: оскільки початково система знаходилася у стані E_2,

$$q_1(0)=q_1(t)\big|_{t=0}=0; \qquad q_2(0)=q_2(t)\big|_{t=0}=1.$$

Тому, якщо у формулах (27) і (28) підставити t=0, то завдяки цим умовам отримаємо

$$\begin{cases} 1=C_1+C_2+\dfrac{24}{63}\ ; \\ 0=C_1-\dfrac{1}{4}C_2+\dfrac{1}{21}\ . \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $C_1=\frac{3}{35}$; $C_2=\frac{8}{15}$.

15 Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 у формули (27) і (28):

$$\begin{aligned} q_1(t)&=\frac{3}{35}\cdot e^{-14t}-\frac{2}{15}\cdot e^{-9t}+\frac{1}{21}\ ; \\ q_2(t)&=\frac{3}{35}\cdot e^{-14t}+\frac{8}{15}\cdot e^{-9t}+\frac{8}{21}\ . \end{aligned} \qquad (29)$$

16 Залишилося знайти $q_3(t)$. З нормувальної умови

$$q_3(t)=1-q_1(t)-q_2(t).$$

Згідно з формулами (29) остаточно дістанемо

$$q_3(t)=-\frac{6}{35}\cdot e^{-14t}-\frac{2}{5}\cdot e^{-9t}+\frac{4}{7}. \qquad (30)$$

Таким чином, розподіл імовірностей станів через довільний час t $Q(t)=(q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t))$ знайдено.

Приклад 10. Для марковського ланцюга з матрицею інтенсивностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

знайти перехідні імовірності $p_{ij}(t)$, $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$.

Розв'язання.

Зазначимо, що матриця Λ така ж сама, як і в прикладі 7. Тому використаємо отримані в ньому результати, а саме формули (27) і (28).

1 Спробуємо спочатку визначити ймовірності $p_{11}(t)$, $p_{12}(t)$ і $p_{13}(t)$, які стоять у першому рядку матриці

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Усі вони фактично є ймовірностями того, що система через час t опиниться у відповідному стані E_1 або E_2, або E_3 за спільним припущенням, що початково система знаходилася у стані E_1. Останню обставину математично можна записати у вигляді початкових умов:

$$q_1(0) = q_1(t)\big|_{t=0} = 1; \quad q_2(0) = q_2(t)\big|_{t=0} = 0; \quad q_3(0) = q_3(t)\big|_{t=0} = 0. \qquad (31)$$

І в цьому разі ймовірності станів збігаються з перехідними ймовірностями:

$$q_1(t) = p_{11}(t); \quad q_2(t) = p_{12}(t); \quad q_3(t) = p_{13}(t).$$

Тому нехай у формулах (27) і (28) t=0. Тоді, враховуючи (31), отримаємо

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + \dfrac{8}{21}; \\ 1 = C_1 - \dfrac{1}{4}C_2 + \dfrac{1}{21}. \end{cases}$$

Із цієї системи $C_1 = \frac{24}{35}$; $C_2 = -\frac{16}{15}$ і тоді

$$p_{11}(t) = q_1(t) = \frac{24}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{4}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21};$$

$$p_{12}(t) = q_2(t) = \frac{24}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{16}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21}.$$

Імовірність $p_{13}(t)$ знайдемо з нормувальної умови:

$$p_{13}(t) = 1 - p_{11}(t) - p_{12}(t).$$

Виявляється, що

$$p_{13}(t) = -\frac{48}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{4}{5} \cdot e^{-9t} + \frac{4}{7}.$$

2 Аналогічно, якщо в початковий момент система була у стані E_2, то

$$q_1(t) = p_{21}(t); \quad q_2(t) = p_{22}(t); \quad q_3(t) = p_{23}(t).$$

Але за таким припущенням у прикладі 7 були знайдені $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ (див. (29) і (30)). Тому

$$p_{21}(t) = q_1(t) = \frac{3}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{2}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21};$$

$$p_{22}(t) = q_2(t) = \frac{3}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{8}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21};$$

$$p_{23}(t) = q_3(t) = -\frac{6}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{2}{5} \cdot e^{-9t} + \frac{4}{7}.$$

3 Для визначення перехідних імовірностей $p_{31}(t)$, $p_{32}(t)$ і $p_{33}(t)$ у третьому рядку матриці $P(t)$ треба припустити, що в початковий момент система перебувала у стані E_3 і підставити

$$q_1(0) = q_1(t)\big|_{t=0} = 0; \quad q_2(0) = q_2(t)\big|_{t=0} = 0; \quad q_3(0) = q_3(t)\big|_{t=0} = 1.$$

З формул (27) і (28) згідно з такими умовами при t=0 одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{8}{21} = 0\ ; \\ C_1 - \dfrac{1}{4} C_2 + \dfrac{1}{21} = 0\ , \end{cases}$$

з якої знайдемо $C_1 = -\dfrac{3}{35};\quad C_2 = -\dfrac{4}{15}$ і тоді

$$q_1(t) = -\frac{3}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{1}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21} = p_{31}(t);$$

$$q_2(t) = -\frac{3}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{4}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21} = p_{32}(t);$$

$$p_{33}(t) = 1 - p_{31}(t) - p_{32}(t).$$

Отже

$$p_{33}(t) = \frac{6}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{1}{5}\ e^{-9t} + \frac{4}{7}.$$

Таким чином, усі перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ знайдено і можна записати матрицю P(t):

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{24}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{4}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21} & \frac{24}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{16}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21} & -\frac{48}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{4}{5} \cdot e^{-9t} + \frac{4}{7} \\ \frac{3}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{2}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21} & \frac{3}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{8}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21} & -\frac{6}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{2}{5} \cdot e^{-9t} + \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{1}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{1}{21} & -\frac{3}{35} \cdot e^{-14t} - \frac{4}{15} \cdot e^{-9t} + \frac{8}{21} & \frac{6}{35} \cdot e^{-14t} + \frac{1}{5} \cdot e^{-9t} + \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

2.6 Розподіл часу перебування системи у стані до першого виходу з нього

Припустимо, що в якийсь момент часу система перейшла в новий стан, який ми позначимо через E. Момент переходу в цей стан вважатимемо початковим. Нехай у момент T (тобто через час T) система вийшла зі стану E, λ - інтенсивність виходу з нього. Величина T – випадкова. Треба визначити закон її розподілу.

Введемо ймовірність p(t) того, що за час t система жодного разу не вийде зі стану E: p(t)=P(t<T). Розглянемо зараз імовірність p(t+Δt) того, що за час (t+Δt) система залишиться у стані E (рисунок 9).

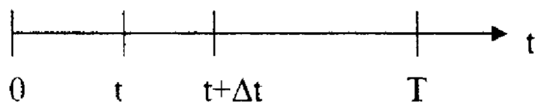

Рисунок 9

Для цього потрібно, щоб протягом часу t система знаходилася у стані E і за додатній час Δt з нього не вийшла. Імовірність залишитися системі час t у стані E, очевидно, дорівнює p(t). За імовірнісним сенсом інтенсивності λ ймовірність виходу системи за малий проміжок часу Δt зі стану E наближено дорівнює $\lambda\cdot\Delta$t, а ймовірність протилежної події дорівнює (1-$\lambda\cdot\Delta$t). Це наближене значення ймовірності того, що за короткий час Δt система не вийде зі стану E. За теоремою множення ймовірностей

$$p(t+\Delta t) \approx p(t)\cdot(1-\lambda\cdot\Delta t) = p(t) - \lambda\cdot p(t)\cdot\Delta t.$$

Звідси

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} \approx -\lambda\cdot p(t).$$

Ця наближена рівність буде тим точнішою, чим менше Δt (Δt>0). Переходячи в неї до границі при $\Delta t \to 0$, одержимо точну рівність

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(-\lambda\cdot p(t)\right).$$

Праворуч стоїть границя сталої величини, незалежної від Δt, і тому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\lambda\cdot p(t)\right) = -\lambda\cdot p(t).$$

Ліворуч маємо похідну $p^{/}(t)$ функції $p\ (t)$ за визначенням похідної. Отже,

$$p^{/}(t) = -\lambda\cdot p(t)$$

- це диференційне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $p(t)$. Відокремлюючи в ньому змінні, отримаємо

$$\frac{dp(t)}{p(t)} = -\lambda \cdot dt.$$

Якщо проінтегрувати, то

$$\ln p(t) = -\lambda t + C.$$

Звідси

$$p(t) = e^{-\lambda t} \cdot C,$$

де С – стала.

Сталу С можна знайти з умови $p(0) = p(t)\big|_{t=0} = 1$, яка є наслідком того, що в момент t=0 система знаходилася у стані Е. Очевидно, $p(0) = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot C$, тобто 1=С. Отже,

$$p(t) = e^{-\lambda t} = P(t < T).$$

Для інтегральної функції F(t) випадкової величини Т маємо

$$F(t)=P(T<t)=1-P(t<T).$$

Отже,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Але це формула для інтегральної функції показникового розподілу. Таким чином, час Т перебування системи в якомусь стані до першого виходу з нього розподілений за показниковим законом з параметром λ. У такому разі математичне сподівання

$$M(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad (32)$$

- це середнє значення зазначеного часу Т.

2.7 Стаціонарний розподіл імовірностей станів

Визначення стаціонарного розподілу ймовірностей станів марковського ланцюга з неперервним часом те ж саме, як і в розділі 1, а саме, розподіл імовірностей станів $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$,... називається ***стаціонарним***, якщо він не змінюється з часом, тобто

$$q_i(t)=q_i=const; \quad i=1, 2, 3, \ldots, k.$$

Стаціонарні ймовірності повинні задовольняти нормувальній умові: $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$. Якщо прийняти стаціонарний розподіл за початковий, то похідні $q_i^{/}(t)=0$ для усіх станів і будь-якого часу t. Тому у формулі (19):

$$Q^{/}(t)=\left(q_1^{/}(t) \quad q_2^{/}(t) \quad \ldots \quad q_k^{/}(t)\right)=\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right)=0 \ ;$$

$$Q(t)=\left(q_1(t) \quad q_2(t) \quad \ldots \quad q_k(t)\right)=\left(q_1 \quad q_2 \quad \ldots \quad q_k\right)=Q \, ;$$

і вона набуває вигляду

$$Q \cdot \Lambda = 0. \qquad \textbf{(33)}$$

Це матричний запис системи рівнянь відносно стаціонарних імовірностей $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$. Нагадаємо, що Λ - матриця інтенсивностей переходів. На практиці систему рівнянь (33) звичайно записують у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} &\lambda_{11} \cdot q_1 + \lambda_{21} \cdot q_2 + \ldots + \lambda_{k1} \cdot q_k = 0 \, ; \\ &\lambda_{12} \cdot q_1 + \lambda_{22} \cdot q_2 + \ldots + \lambda_{k2} \cdot q_k = 0 \, ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda_{1k} \cdot q_1 + \lambda_{2k} \cdot q_2 + \ldots + \lambda_{kk} \cdot q_k = 0 \, . \end{aligned} \qquad (34)$$

Зазначимо, що головний визначник цієї системи Δ повинен дорівнювати нулю, і тому хоча б одне з рівнянь системи виявляється зайвим. При розв'язанні системи обов'язково треба мати на увазі нормувальну умову $q_1+q_2+\ldots+q_k=1$.

Рівняння (34) зручно складати безпосередньо з розглядання графу станів. Нехай маємо граф (рисунок 10).

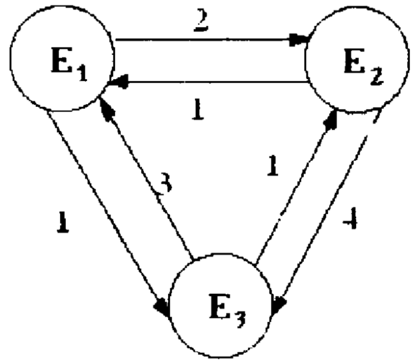

Рисунок 10

На ньому зображено три стани. Їх стаціонарні ймовірності q_1, q_2 і q_3. Зі стану E_1 виходять дві стрілки з сумарною інтенсивністю (1+2), тому перший доданок у першому рівнянні від'ємний і дорівнює $-(1+2)\cdot q_1$. До стану E_1 зі стану E_2 надходить стрілка з інтенсивністю $\lambda_{21}=1$ і їй відповідає доданок $1\cdot q_2$. Зі стану E_3 до E_1 надходить стрілка з інтенсивністю $\lambda_{31}=3$, їй відповідає доданок $3\cdot q_3$. Підсумуємо всі три доданки $-(1+2)\cdot q_1+1\cdot q_2+3\cdot q_3$ і одержимо ліву частину першого рівняння системи (34):

$$-3q_1+q_2+3q_3=0.$$

Аналогічні міркування проводимо відносно стану E_2. З нього виходять дві стрілки з сумарною інтенсивністю (1+4), і відповідний доданок у другому рівнянні системи від'ємний: $-(1+4)\cdot q_2$. До стану E_2 надходить стрілка з E_1 з інтенсивністю $\lambda_{12}=2$ (відповідний доданок $2\cdot q_1$) і стрілка зі стану E_3 з інтенсивністю $\lambda_{32}=1$ (відповідний доданок $1\cdot q_3$). Додаємо всі доданки, прирівняємо цю суму до нуля і дістанемо друге рівняння системи:

$$2\cdot q_1-(1+4)\cdot q_2+1\cdot q_3=0.$$

Повторюючи аналогічні міркування відносно стану E_3, запишемо третє рівняння

$$1\cdot q_1+4\cdot q_2-(3+1)\cdot q_3=0.$$

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -3q_1+q_2+3q_3=0\ ; \\ 2q_1-5q_2+q_3=0\ ; \\ q_1+4q_2-4q_3=0\ . \end{cases}$$

Приклад 11. Знайти стаціонарний розподіл імовірностей станів для марковського ланцюга, граф станів якого зображено на рисунку 10.

Розв'язання.

1 Система рівнянь для стаціонарних імовірностей q_1, q_2 і q_3 була складена вище:

$$\begin{cases} -3q_1+q_2+3q_3=0\,; \\ 2q_1-5q_2+q_3=0\,; \\ q_1+4q_2-4q_3=0\,. \end{cases}$$

2 Згідно з зазначеним вище одне з рівнянь системи є зайвим. Відкинемо, наприклад, перше рівняння і невідомій q_3 надамо значення С:

$$\begin{cases} 2q_1-5q_2+C=0\,; \\ q_1+4q_2-4C=0\,; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2q_1-5q_2=-C\,; \\ q_1+4q_2=4C. \end{cases}$$

3 Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$q_1=\frac{\begin{vmatrix} -C & -5 \\ 4C & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{16}{13}C; \qquad q_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -C \\ 1 & 4C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{9}{13}C.$$

Таким чином,

$$q_1=\frac{16}{13}C; \quad q_2=\frac{9}{13}C; \quad q_3=C.$$

4 Величину С визначимо з нормувальної умови:

$$q_1+q_2+q_3=1;$$

$$\frac{16}{13}C+\frac{9}{13}C+C=1;$$

$$C=\frac{13}{38}.$$

5 Отже,

$$q_1 = \frac{16}{13} \cdot \frac{13}{38} = \frac{8}{19};$$

$$q_2 = \frac{9}{13} \cdot \frac{13}{38} = \frac{9}{38};$$

$$q_3 = \frac{13}{38}.$$

Стаціонарний розподіл імовірностей станів знайдено.

2.8 Регулярність. Фінальні ймовірності станів

Нехай маємо марковський ланцюг з неперервним часом. Його стан E_i назвемо ***несуттєвим***, якщо існує такий стан E_j, що з E_i в E_j можливо здійснити перехід, а з E_j в E_i – ні.

Стан називають ***суттєвим***, якщо він не є несуттєвим. Як і у випадку ланцюгів з дискретним часом, суттєві стани іноді називають ***зворотними***, а несуттєві – ***незворотними***.

Якщо стани E_i і E_j суттєві і з E_i можна попасти в E_j, то і з E_j можна перейти в E_i. Такі стани називають ***сполученими.***

Якщо E_r – несуттєвий стан, то

$$\lim_{t \to \infty} q_r(t) = 0.$$

Визначення регулярності ланцюга і фінальних імовірностей станів аналогічне наданому в розділі 1.

Ланцюг називають ***регулярним***, якщо для усіх його станів існують границі: $\lim\limits_{t \to \infty} q_i(t)$, i=1, 2, ..., k. І ці границі не залежать від початкового розподілу ймовірностей станів. Значення цих границь називають ***фінальними ймовірностями станів***.

Набір усіх фінальних імовірностей створює ***фінальний розподіл.***

Необхідні та достатні умови регулярності ланцюга з неперервним часом формулюються простіше, ніж для ланцюгів з дискретним часом.

Теорема 3. Для регулярності ланцюга з неперервним часом необхідно і достатньо, щоб усі його суттєві стани сполучалися між собою.

Зазначимо, що зміст теореми 2 з розділу 1 повністю зберігається для неперервного часу. Повторимо її для зручності.

Теорема 4. Якщо ланцюг є регулярним, то він має єдиний стаціонарний розподіл імовірностей станів, і цей розподіл збігається з фінальним.

Приклад 12. Переконатися, що ланцюг, граф якого зображено на рисунку 10, є регулярним і знайти фінальні ймовірності станів.

Розв'язання.

1 Ланцюг має три стани E_1, E_2 і E_3. Усі вони – суттєві й сполучаються між собою. Тому ланцюг – регулярний.

2 Оскільки ланцюг є регулярним, стаціонарний розподіл імовірностей його станів збігається з фінальним розподілом. У прикладі 9 ми знайшли стаціонарні ймовірності:

$$q_1 = \frac{8}{19}; \quad q_2 = \frac{9}{38}; \quad q_3 = \frac{13}{38}.$$

Вони й створюють фінальний розподіл.

Приклад 13. Визначити, чи регулярний ланцюг, зображений на рисунку 11, і якщо так, знайти фінальний розподіл імовірностей його станів.

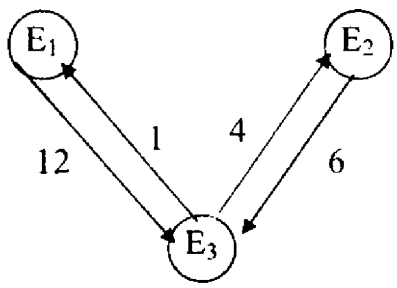

Рисунок 11

Розв'язання.

1 Усі три стани E_1, E_2 і E_3 ланцюга суттєві й вони сполучаються один з одним. Тому ланцюг – регулярний.

2 У прикладі 7 був знайдений розподіл імовірностей станів через час t для такого ланцюга (якщо скласти матрицю інтенсивностей переходів Λ в даному разі, то вона буде такою ж самою, як й у прикладі 7):

$$q_1(t) = \frac{3}{35}e^{-14t} - \frac{2}{15}e^{-9t} + \frac{1}{21};$$
$$q_2(t) = \frac{3}{35}e^{-14t} + \frac{8}{15}e^{-9t} + \frac{8}{21};$$
$$q_3(t) = -\frac{6}{35}e^{-14t} - \frac{2}{5}e^{-9t} + \frac{4}{7}.$$

Переходячи до границі в цих рівностях при $t \to \infty$, одержимо

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) = \frac{1}{21}; \quad \lim_{t\to\infty} q_2(t) = \frac{8}{21}; \quad \lim_{t\to\infty} q_3(t) = \frac{4}{7}.$$

Отже, фінальний розподіл такий:

$$q_1 = \frac{1}{21}; \quad q_2 = \frac{8}{21}; \quad q_3 = \frac{4}{7}.$$

Але на практиці не бажано таким шляхом знаходити фінальні ймовірності через громіздкість обчислень. Треба одразу застосовувати формули (33) або (34).

Приклад 14. Дослідити на регулярність ланцюг, зображений на рисунку 12 і, якщо він регулярний, визначити фінальний розподіл імовірностей станів.

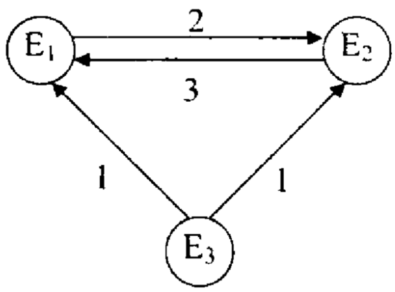

Рисунок 12

Розв'язання.

1 У ланцюзі стан E_3 – несуттєвий. Стани E_1 та E_2 – суттєві й сполучаються. Отже, ланцюг – регулярний.

2 Оскільки стан E_3 – несуттєвий, $q_3 = 0$. Для фінальних імовірностей q_1 і q_2 складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2q_1 + 3q_2 = 0; \\ 2q_1 - 3q_2 = 0. \end{cases}$$

3 З першого рівняння (або з другого) маємо $q_1 = \frac{3}{2}q_2$.

4 За нормувальною умовою $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ отримаємо $\frac{3}{2}q_2 + q_2 + 0 = 1$.

Звідси $q_2 = \frac{2}{5}$. Тоді $q_1 = \frac{3}{5}$.

Таким чином,

$$q_1 = \frac{3}{5}; \qquad q_2 = \frac{2}{5}; \qquad q_3 = 0.$$

Приклад 15. Чи є регулярним ланцюг, граф станів якого зображено на рисунку 13?

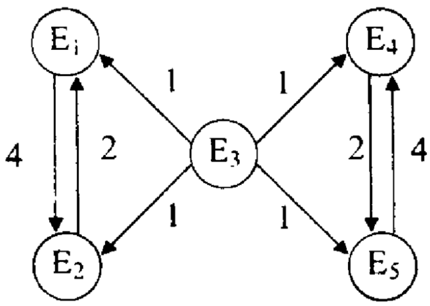

Рисунок 13

Розв'язання.

Стан E_3, очевидно, несуттєвий, інші стани E_1, E_2, E_4 і E_5 є суттєвими. Але стани E_1 і E_2 не сполучаються зі станами E_4 і E_5, тому ланцюг – нерегулярний і фінальний розподіл його станів не існує.

3 ПРОЦЕСИ ЗАГИБЕЛІ ТА РОЗМНОЖЕННЯ

У попередніх розділах ми розглядали марковські ланцюги з кінцевим числом станів. Теорія ланцюгів із нескінченим числом станів виявляється надто складною. Ми обмежимося лише окремим видом таких ланцюгів, а саме, процесами загибелі та розмноження.

3.1 Процес чистого розмноження

Процесом чистого розмноження називається такий марковський ланцюг, граф станів якого зображено на рисунку 14, де λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ... означають інтенсивності відповідних переходів.

$$E_0 \xrightarrow{\lambda_0} E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E_3 \xrightarrow{\lambda_3} \ldots$$

Рисунок 14

Якщо в деякий момент система знаходиться у стані E_i, то з імовірністю $\lambda_i \cdot \Delta t$ вона за малий час Δt перейде у стан E_{i+1}, а з імовірністю $(1-\lambda_i \cdot \Delta t)$ залишиться у стані E_i. Система (18) диференційних рівнянь для імовірностей станів $q_i(t)$ має вигляд

$$\begin{cases} q_0'(t) = -\lambda_0 \cdot q_0(t)\ ; \\ q_1'(t) = \lambda_0 \cdot q_0(t) - \lambda_1 \cdot q_1(t); \\ q_2'(t) = \lambda_1 \cdot q_1(t) - \lambda_2 \cdot q_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases} \qquad (35)$$

Цю систему можна розв'язувати послідовно. Спочатку розв'язати перше рівняння і знайти функцію $q_0(t)$. Її значення підставити у друге рівняння і знайти функцію $q_1(t)$ і так далі.

3.2 Процес Пуассона

Процес Пуассона – це окремий випадок процесу чистого розмноження, у якому всі інтенсивності λ_i однакові. Граф станів для процесу Пуассона зображено на рисунку 15.

$$E_0 \xrightarrow{\lambda} E_1 \xrightarrow{\lambda} E_2 \xrightarrow{\lambda} E_3 \xrightarrow{\lambda} \ldots$$

Рисунок 15

Отже, якщо у процесі Пуассона в якийсь момент часу система знаходиться у стані E_i, то з імовірністю $\lambda \cdot \Delta t$ вона за короткий час Δt перейде у стан E_{i+1}, а з імовірністю $(1 - \lambda \cdot \Delta t)$ залишиться у стані E_i. Система рівнянь (35) перетвориться на систему

$$\begin{cases} q_0'(t) = -\lambda \cdot q_0(t) \;; \\ q_1'(t) = \lambda \cdot q_0(t) - \lambda \cdot q_1(t) \;; \\ q_2'(t) = \lambda \cdot q_1(t) - \lambda \cdot q_2(t) \;, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases} \qquad (36)$$

Припустимо, що в початковий момент система перебувала у стані E_0. Тоді

$$q_0(0) = q_0(t)\big|_{t=0} = 1; \quad q_1(0) = q_1(t)\big|_{t=0} = 0; \quad q_2(0) = q_2(t)\big|_{t=0} = 0 \ldots \quad (37)$$

Розв'яжемо перше рівняння системи (36). Воно з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи в ньому змінні, одержимо

$$\frac{dq_0(t)}{q_0(t)} = -\lambda \cdot dt$$

і після інтегрування матимемо загальний розв'язок

$$q_0(t) = C \cdot e^{-\lambda t}.$$

Звідси при t=0, згідно з початковою умовою (37), знайдемо C=1. Отже,

$$q_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Підставимо це значення $q_0(t)$ у друге рівняння системи (36):

$$q_1'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} - \lambda \cdot q_1(t) \quad \text{або} \quad q_1'(t) + \lambda \cdot q_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язок якого, як відомо, шукають у вигляді добутку $U(t) \cdot V(t) = q_1(t)$ двох функцій

$U(t)$ і $V(t)$, одна з яких, нехай $V(t)$, є частинним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння $V'(t)+\lambda\cdot V(t)=0$ і має вигляд $V(t)=e^{-\lambda t}$, а інша $U(t)$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $U(t)=\lambda\cdot t+C$. Отже,

$$q_1(t)=(\lambda\cdot t+C)\cdot e^{-\lambda t}. \qquad (38)$$

Сталу C можна визначити, застосовуючи початкову умову (37) $q_1(0)=0$ і підставивши в (38) t=0. Тоді C=1 і

$$q_1(t)=\lambda\cdot t\cdot e^{-\lambda t}.$$

Знайдене значення $q_1(t)$ підставимо у третє рівняння системи (35) і, при цьому знов отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$q_2'(t)=\lambda^2\cdot t\cdot e^{-\lambda t}-\lambda\cdot q_2(t),$$

розв'язавши яке, знайдемо функцію $q_2(t)$:

$$q_2(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^2}{2}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно можна визначити інші функції $q_m(t)$, унаслідок чого одержимо

$$q_m(t)=\frac{(\lambda\cdot t)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda t}. \qquad (39)$$

Зрозуміло, якщо в момент t система знаходиться у стані E_m, то це означає, що за час t в системі відбулися m стрибків. Тому формулу (39) можна тлумачити так: імовірність того, що за час t у процесі Пуассона відбулися m стрибків, дорівнює $\frac{(\lambda\cdot t)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda t}$. Отже, число стрибків у цьому процесі розподілене за відомим законом Пуассона.

Позначимо через T інтервал часу між двома послідовними стрибками. Величина T – випадкова, вона збігається з часом перебування системи в якомусь стані до першого виходу з нього. Тому за формулою (32) середній час між двома стрибками дорівнює

$$M(T)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (40)$$

3.3 Процеси загибелі та розмноження

Процесом загибелі та розмноження називається такий марковський ланцюг, граф станів якого зображено на рисунку 16.

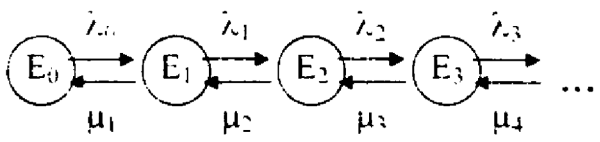

Рисунок 16

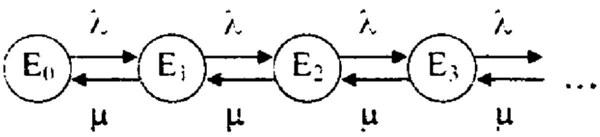

Рисунок 17

У найпростішому випадку всі інтенсивності λ_i рівні між собою і всі інтенсивності μ_i теж однакові. Граф такого ланцюга зображено на рисунку 17. Знайдемо стаціонарний розподіл імовірностей станів для ланцюга. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -\lambda q_0 + \mu q_1 = 0\,; \\ -(\lambda+\mu)q_1 + \lambda q_0 + \mu q_2 = 0\,; \\ -(\lambda+\mu)q_2 + \lambda q_1 + \mu q_3 = 0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases} \tag{41}$$

З першого рівняння встановимо $q_1 = \frac{\lambda}{\mu}\cdot q_0$. Підставимо це значення q_1 у друге рівняння системи (41):

$$-(\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu}\cdot q_0 + \lambda\cdot q_0 + \mu\cdot q_2 = 0\,.$$

Звідси

$$\frac{\lambda^2}{\mu}\cdot q_0 + \mu\cdot q_2 = 0\,,$$

отже,

$$q_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot q_0 .$$

Знайдені значення q_1 і q_2 підставимо у третє рівняння системи (41) й потім виразимо з нього $q_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0$ і так далі.

Аналогічно отримаємо

$$q_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot q_0; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{42}$$

Сума всіх імовірностей повинна дорівнювати одиниці:

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \dots = 1$$

або, вдаючись до формули (42),

$$q_0 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot q_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot q_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot q_0 + \dots = 1 .$$

Ліва частина – сума членів геометричної прогресії зі знаменником $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. При $\rho < 1$ прогресія, як відомо, збігається, а її сума дорівнює

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot q_0 = \frac{q_0}{1-\rho} .$$

Отже, $\frac{q_0}{1-\rho} = 1$, звідси $q_0 = 1 - \rho$ і, остаточно, за формулою (42) маємо

$$q_n = \rho^n \cdot (1-\rho); \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{43}$$

Таким чином, при $\rho < 1$ ланцюг має стаціонарний розподіл імовірностей станів. У такому разі кажуть, що ланцюг виходить на стаціонарний режим. Формула (43) дає вираз і для фінальних імовірностей станів цього ланцюга.

При $\rho \geq 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot q_0 = q_0 + \rho \cdot q_0 + \rho^2 \cdot q_0 + \ldots$ збігається тільки, якщо $q_0 = 0$, і звідси всі $q_n = \rho^n \cdot q_0 = 0$, але цього не може бути. Отже, у цьому випадку стаціонарний розподіл не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2000.

2 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Высшая школа, 2000.

3 Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969.

4 Платонов Г.А., Файнберг М.А., Штильман М.С. Поезда, пассажиры и ... математика. – М.: Транспорт,1977.

[illegible]

[illegible]

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 199[illegible].
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969.
4. Платонов Г.А., Файнберг М.А., Штильман М.С. Поезда, пассажиры и ... математика. – М.: Транспорт, 1977.

Р.О.Єфременко, Г.Ю.Глушакова, М.Є.Резуненко

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ
МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Глушакова Г.Ю.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 01.12.03 р.

Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,25. Обл.-вид.арк. 3,5.

Замовлення № 15 Тираж 300 Ціна

ТОВ „Енергозберігаючі технології"

61050, Харків, Харківська набережна, 8,

Свідоцтво про реєстрацію ДК № 1360 від 19.05.03 р.