

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ  
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

**Кафедра транспортного зв'язку**

**Н. А. Корольова**

**СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ  
НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ**

*Конспект лекцій*

**Частина 1**

**Харків – 2019**

Корольова Н. А. Системи зв'язку та телекомунікацій на

залізничному транспорті: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2019. – Ч. 1. – 118 с.

У конспекті лекцій викладено детальні відомості про повідомлення, сигнали, завади, спектральний і кореляційний аналіз детермінованих сигналів і випадкових процесів, перетворення сигналів.

Наведено основні характеристики каналів зв'язку з урахуванням підвищення їхньої ефективності. Викладено основи оптимального приймання дискретних і безперервних сигналів, основи теорії інформації та завадостійкого кодування. Наведено принципи розподілу сигналів у багатоканальних системах передачі. Особливу увагу приділено цифровим методам передачі інформації.

Конспект лекцій може використовуватися на практичних заняттях і при виконанні розрахункових робіт.

Призначено для студентів факультету ІКСТ освітньої програми «Системи керування рухом поїздів» всіх форм і термінів навчання, які вивчають дисципліну «Системи зв'язку та телекомунікацій на залізничному транспорті».

Іл. 44, табл. 3, бібліогр.: 7 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри транспортного зв'язку 12 березня 2019 р., протокол № 7.

Рецензент

проф. А. Б. Бойник

Н. А. Корольова

## СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ

*Конспект лекцій*

Частина 1

Відповідальний за випуск Корольова Н. А.

Редактор Ібрагімова Н. В.

---

Підписано до друку 04.04.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 6,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет  
залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

## ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>5</b>
<b>Лекція 1. Загальні відомості про системи передачі інформації.....</b>	<b>5</b>
1.1 Основні характеристики повідомлень і сигналів.....	5
1.2 Загальні відомості про канали передачі інформації.....	10
1.3 Завади і спотворення в каналах зв'язку.....	12
Контрольні питання та задачі.....	14
<b>Лекція 2. Спектральні та кореляційні характеристики електричних сигналів.....</b>	<b>15</b>
2.1 Основи загальної спектральної теорії детермінованих сигналів.....	15
2.2 Основні характеристики випадкових процесів.....	20
Контрольні питання та задачі .....	26
<b>Лекція 3. Математичні моделі випадкових сигналів, завад і каналів зв'язку .....</b>	<b>26</b>
3.1 Математичні моделі сигналів і завад.....	27
3.2 Математичні моделі каналів зв'язку.....	30
3.2.1 Моделі безперервних каналів зв'язку.....	30
3.2.2 Моделі дискретних каналів зв'язку.....	32
Контрольні питання та задачі .....	34
<b>Лекція 4. Методи модуляції сигналів у системах телекомунікацій.....</b>	<b>35</b>
4.1 Методи модуляції сигналів.....	35
4.2 Амплітудна модуляція.....	37
4.3 Кутова модуляція.....	38
4.4 Амплітудно-імпульсна модуляція.....	41
4.5 Амплітудна маніпуляція.....	43
4.6 Частотна і фазова маніпуляції.....	46
Контрольні питання та задачі .....	48
<b>Лекція 5. Способи перетворення безперервних сигналів у цифрову форму.....</b>	<b>49</b>
5.1 Способи перетворення аналогових сигналів у цифрові.....	49

5.2	Принципи функціонування аналого-цифрових і цифро-аналогових перетворювачів.....	55
	Контрольні питання та задачі .....	58
<b>Лекція 6. Завадостійке кодування інформації в системах телекомунікацій.....</b>		
6.1	Класифікація завадостійких кодів.....	59
6.2	Принципи побудови завадостійких кодів.....	64
6.2.1	Код Хеммінга.....	64
6.2.2	Циклічні коди.....	69
6.3	Структурні схеми кодерів і декодерів циклічних кодів.....	74
6.4	Згорткові коди.....	76
	Контрольні питання та задачі .....	80
<b>Лекція 7. Принципи оптимального приймання дискретних сигналів.....</b>		
7.1	Завдання синтезу оптимальних демодуляторів.....	81
7.2	Критерії якості й правила приймання дискретних повідомлень.....	87
7.3	Оптимальні алгоритми приймання при повністю відомих сигналах (когерентне приймання).....	93
7.4	Приймання сигналів на узгоджений фільтр.....	98
	Контрольні питання та задачі.....	105
<b>Лекція 8. Принципи побудови багатоканальних систем передачі інформації.....</b>		
8.1	Принципи побудови багатоканальних систем передачі інформації (БКСП).....	106
8.1.1	Частотний розподіл каналів.....	108
8.1.2	Часовий розподіл каналів.....	110
8.1.3	Розподіл сигналів за формою.....	112
8.1.4	Комбінований розподіл сигналів.....	112
8.2	Особливості цифрових багатоканальних систем передачі інформації.....	113
	Контрольні питання та задачі.....	117
	<b>Список літератури.....</b>	<b>118</b>

## **ВСТУП**

Дисципліна «Системи зв'язку і телекомунікацій на залізничному транспорті» є однією з базових, яка забезпечує підготовку бакалаврів за освітньою програмою «Системи керування рухом поїздів», до програми якої входять два основні розділи: «Основи теорії електричного зв'язку» і «Принципи побудови систем телекомунікацій».

Цей конспект лекцій є першою частиною і складається з матеріалу теоретичного характеру. У ньому послідовно розглядаються основні питання «Теорії електричного зв'язку»: поняття інформації, характеристики повідомлень, сигналів, завад, характеристики і особливості каналів зв'язку, узагальнена структурна схема системи передачі повідомлень, основи теорії модуляції сигналів, характеристики випадкових процесів, інформаційні характеристики каналів зв'язку, основи оптимального приймання дискретних (цифрових) сигналів, основи завадостійкого кодування і декодування, основні принципи багатоканального зв'язку. У кінці кожної лекції наведені контрольні питання і задачі для самостійної роботи.

### **ЛЕКЦІЯ 1. Загальні відомості про системи передачі інформації**

#### **План**

- 1.1 Основні характеристики повідомлень і сигналів.
- 1.2 Загальні відомості про канали передачі інформації.
- 1.3 Завади і спотворення в каналах зв'язку.

**Мета** – надати основні визначення загальних характеристик сигналів, повідомлень і завад; надати поняття про основні перетворення сигналів на передавальній і приймальній частині системи передачі інформації.

#### **1.1 Основні характеристики повідомлень і сигналів**

Передача повідомлень з одного пункту в інший є основним завданням теорії зв'язку. Життя сучасного суспільства немислиме

без всебічно розгалужених систем передачі інформації. Без цих систем не може функціонувати жодна галузь промисловості сучасної держави, у тому числі залізничний транспорт.

Прикладами можуть служити системи телефонного зв'язку, радіомовлення, телебачення, радіозв'язок, системи супутникового зв'язку, сучасні локальні, глобальні та інтегровані мережі зв'язку (типу електронної пошти, Internet) та інші. При цьому зберігання, обробка і передача інформації може мати місце і без використання спеціальних технічних засобів. Усі питання, пов'язані з передачею інформації, охоплює сучасна теорія передачі сигналів.

Загальними поняттями теорії передачі сигналів є інформація, повідомлення і сигнал. У загальному випадку під інформацією розуміють сукупність відомостей про будь-які події, явища або предмети, не відомі одержувачеві.

Для передачі, обробки або зберігання інформації використовуються різні знаки, символи, букви та ін., що дозволяють подати її в тій або іншій формі. Цими знаками можуть бути, наприклад, слова, звуки, рисунки, форма коливань, зображення, математичні символи тощо.

Сукупність знаків, що містять ту або іншу інформацію, називають повідомленням. Так, в електронній пошті повідомленням є смисловий текст, тобто послідовність знаків, букв, цифр і різних символів. При розмові по телефону повідомленням є безперервна зміна в часі звукового сигналу, що відображує не лише зміст, але і тембр, ритм та інші властивості мови конкретної людини.

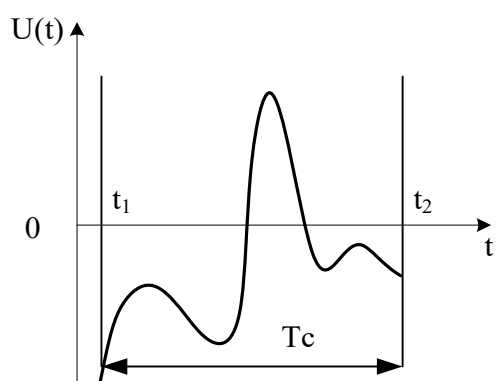
Передача повідомлень на відстань здійснюється за допомогою матеріального носія (папір, дискета) або фізичного процесу (звукові, електромагнітні хвилі, струм, напруга і т. ін.). Фізичний процес, що відображує та переносить повідомлення, називається сигналом.

У якості сигналу може бути використаний будь-який фізичний процес, що змінюється відповідно до повідомлення, що переноситься. Повідомлення можуть бути безперервною або дискретною функцією часу (мовні, телевізійні, повідомлення про стан датчиків, що вимірюють випадкові процеси, та ін.), а можуть не залежати від часу (текст електронної пошти, нерухоме

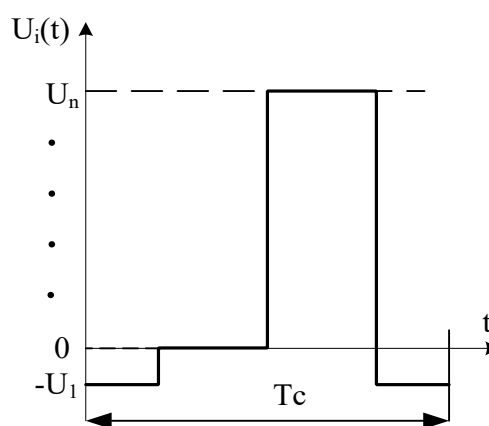
зображення). Сигнал завжди є функцією часу, навіть якщо повідомлення від часу не залежить. Якщо сигнал є функцією часу  $U(t)$ , що набуває тільки певних дискретних значень  $U_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), то його називають дискретним за станами. Якщо сигнал  $U(t)$  може набувати будь-які значення з деякої множини, то його називають безперервним за станами (аналоговим).

Аналогічно, якщо сигнал заданий на всій осі часу  $t$ , то він називається безперервним у часі, а якщо сигнал задається тільки в певні моменти часу  $t_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), то такий сигнал є дискретним за часом.

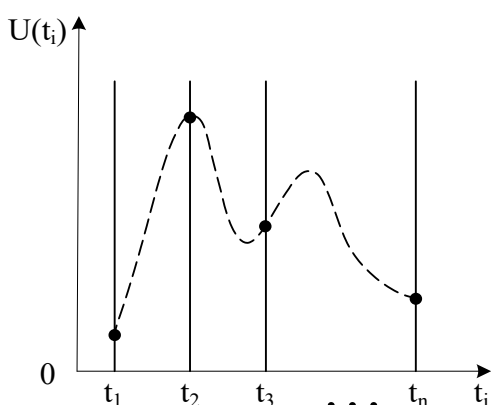
Основні види сигналів залежно від того, як вони змінюються за станами і в часі, зображені на рисунку 1.1.



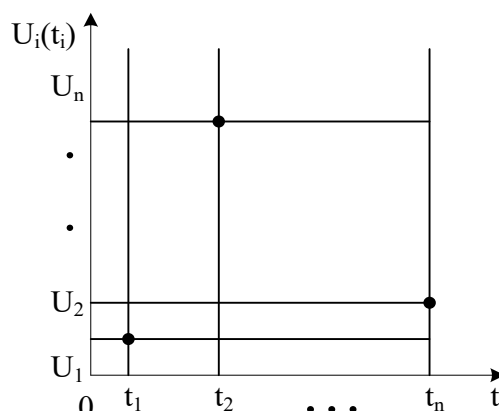
а) Сигнал неперервний за станом і в часі



б) Сигнал дискретний за станом і неперервний в часі



в) Сигнал неперервний за станом і дискретний в часі



г) Сигнал дискретний за станом і в часі

Рисунок 1.1 – Види сигналів залежно від того, як вони змінюються за станами і в часі

Наприклад, розмовний сигнал є безперервним у часі і за станом. Стани (показання) датчика температури, наприклад, через кожні 10 хвилин також є безперервними за станом, але дискретними в часі.

Якби передане повідомлення було заздалегідь відомим з повною достовірністю, тобто детермінованим, то його передача для одержувача не мала б сенсу. Аналогічно і детермінований сигнал безпосередньо не може бути переносником інформації.

Тому в техніці зв'язку повідомлення і сигнали розглядаються як випадкова функція або випадковий процес, що протікає в часі, а його основними параметрами вважаються тривалість сигналу  $T_C$ , динамічний діапазон  $D_C$  і ширина спектра  $F_C$ .

Тривалість сигналу  $T_C$  визначає інтервал часу, у межах якого сигнал існує.

Динамічний діапазон  $D_C$  визначає відношення найбільшої миттєвої потужності сигналу до тієї найменшої потужності при заданій якості передачі. Він вимірюється в децибелах або неперах.

Ширина спектра  $\Delta F_C$  дає уявлення про швидкість зміни сигналу всередині інтервалу його існування. Ефективна ширина спектра визначає діапазон частот, у межах якого зосереджена основна енергія сигналу (зазвичай 90-95 %  $E_C$ ).

Наприклад, при телефонному зв'язку вимагається, щоб мова була розбірлива і абоненти могли упізнавати того, хто говорить, за голосом. Для забезпечення умови спектр мовного сигналу можна обмежити смугою частот від 300 до 3400 Гц. Узагальненою характеристикою сигналу є його об'єм  $V_C = T_C \Delta F_C D_C$ .

Узагальнена структурна схема системи передачі інформації, зображена на рисунку 1.2.

Джерелом повідомлень (ДП) і одержувачем повідомлень (ОП) у різних системах зв'язку можуть бути людина або технічні засоби (кінцеві пристрої).

Передавальний пристрій здійснює перетворення повідомлення  $A(t)$  в сигнал  $U(t)$ , а приймальний пристрій перетворює прийнятий по лінії зв'язку сигнал  $Z(t)$  знову в повідомлення  $\tilde{A}(t)$ .





Рисунок 1.2 – Узагальнена структурна схема системи передачі інформації

За допомогою перетворювача в передавальному пристрої повідомлення  $A(t)$  перетворюється первинний електричний сигнал або первинний код  $V(t)$  (найчастіше низькочастотний). Це перетворення зазвичай робиться з урахуванням тільки фізичних і статистичних особливостей джерела, тому такий перетворювач називають ще кодером джерела. Далі первинний сигнал  $V(t)$  перетворюється у вторинний сигнал  $U(t)$ , придатний для передачі по лінії зв'язку, що використовується.

Кодек включає кодер (К) і декодер (ДК) і забезпечує необхідну завадостійкість дискретного каналу зв'язку. Модем складається з модулятора (М) і демодулятора (ДМ) і забезпечує перенесення (перетворення) спектра інформаційного сигналу на робочу частоту в необхідну смугу частот. Після передачі сигналу  $U(t)$  по лінії зв'язку відбувається зворотне перетворення прийнятого сигналу  $Z(t)$ , яке включає демодуляцію (ДМ), декодування (ДК) і перетворення декодованого сигналу  $\tilde{V}(t)$  у повідомлення  $\tilde{A}(t)$  для одержувача повідомлень (ОП). Відмінність канального кодування від первинного полягає в тому, що в першому випадку мінімальна кодова відстань, за Хеммінгом,  $d_{\min} \geq 2$ , а первинної коди  $d_{\min} = 1$ .

## 1.2 Загальні відомості про канали передачі інформації

Канал зв'язку є частинною узагальненою структурною схемою системи передачі інформації (рисунок 1.2), до складу якої входить модулятор передавача. Лінія зв'язку з завадами і демодулятор приймача називається каналом зв'язку або каналом передачі інформації. Канал зв'язку – це сукупність технічних засобів і ліній зв'язку для передачі інформації між двома віддаленими абонентами. Структурна схема каналу зв'язку показана на рисунку 1.3.

Канали зв'язку класифікують за різними ознаками: за призначенням, характером лінії зв'язку, діапазоном частот, характером сигналів на вході і виході каналу тощо. За призначенням канали поділяються на телефонні, передачі даних, факсимільні, телевізійні, звукового мовлення, телеметричні, змішані та ін. Залежно від того, чи поширюються сигнали у просторі чи напрямними лініями, виділяють канали радіозв'язку і проводового зв'язку (повітряні і кабельні лінії, хвилеводні НВЧ тракти та ін.).



Рисунок 1.3 – Структурна схема каналу зв'язку

Лініями повітряного зв'язку передають сигнали від одиниць до 150÷200 кГц. Кабельними лініями (симетричними і коаксіальними), які менше підпадають під вплив завад, передають сигнали в діапазоні від 12 кГц до сотень мегагерц. Металеві хвилеводи дозволяють передавати сигнали в діапазоні від 35 до 80 ГГц. Найбільш високочастотними є оптичні світловоди, по яких передаються сигнали в діапазоні частот від 322 до 375 ТГц (довжина хвилі 0,8-1,55 мкм).

Різновидом радіорелейних ліній зв'язку є тропосферні та іоносферні, у яких приймаються сигнали, відбиті від неоднорідностей тропосфери та іоносфери. З використанням цих

ліній створюються канали дальнього радіозв'язку з відстанню між ретрансляційними станціями в декілька сотень кілометрів. Ці лінії працюють в діапазоні частот від 0,5 до 6 ГГц.

Супутникові лінії зв'язку є різновидом радіорелейних, ретранслятори яких знаходяться на штучних супутниках Землі (ШСЗ). Їхньою перевагою є необмежена дальність зв'язку. Так, при одному супутнику-ретрансляторі вона досягає 10000 км.

Типи каналів зв'язку залежать від виду сигналів на вході і виході. Якщо сигнали  $V(t)$  і  $\tilde{V}(t)$  на вході і виході каналу (рисунок 1.2) є дискретними, то канал називається дискретним. Якщо вхідні і вихідні сигнали  $V(t)$  і  $\tilde{V}(t)$  безперервні, то канал зв'язку називають безперервним або аналоговим. Якщо на вхід каналу подаються дискретні сигнали, а на виході його існують безперервні, і навпаки, такі канали відповідно називаються дискретно-безперервними і безперервно-дискретними. Тобто в загальному випадку канал може бути дискретним або безперервним незалежно від виду переданих повідомлень.

За аналогією з повідомленнями і сигналами канали характеризуються такими параметрами: час роботи каналу  $T_k$ , динамічний діапазон  $D_k$ , смуга пропускання  $\Delta F_k$  і його об'єм  $V_k = T_k \Delta F_k D_k$ . Для неспотвореної передачі сигналу по каналу зв'язку повинна виконуватись умова  $V_k \geq V_c$ .

Таким чином, для сучасних систем передачі інформації характерний перехід на все вищі частоти. Це пояснюється такими чинниками:

1) на високих частотах можна забезпечити гостро направлену діаграму антени випромінювання при малих розмірах;

2) у високочастотному діапазоні менший вплив атмосферних і промислових завад;

3) для високочастотного діапазону, починаючи з метрового ( $f_c=30-300$  МГц), можна організувати велику кількість широкосмугових каналів для здійснення відеотелефонного зв'язку і телебачення високої чіткості.

### 1.3 Завади і спотворення в каналах зв'язку

У реальному каналі зв'язку за рахунок неідеальності характеристик і виникнення завад сигнали при передачі спотворюються і повідомлення відтворюється з деякою помилкою. Причиною таких помилок є спотворення, що вносяться самим каналом, і завади, що впливають на сигнал.

Частотні і часові характеристики каналу зв'язку визначають так звані лінійні спотворення. Крім того, канал може вносити і нелінійні спотворення, обумовлені нелінійністю амплітудних характеристик каналу. Якщо ці лінійні і нелінійні спотворення обумовлені відомими характеристиками каналу, то їх можна усунути шляхом відповідної корекції.

Завади, на відміну від детермінованих спотворень, мають випадковий характер, вони заздалегідь невідомі і тому не можуть бути повністю усунені. Під завадою розуміється будь-яка дія на корисний сигнал, що призводить до спотворення.

Завади є різноманітними за своїм походженням і фізичними властивостями. Це можуть бути атмосферні завади, обумовлені електричними процесами в атмосфері (грозові розряди та ін.), які найбільше впливають на сигнали в радіоканалах. Енергія цих завад зосереджена в основному в області довгих і середніх хвиль. Мають місце також індустриальні завади, що виникають через різкі зміни струму в електричних колах різних електричних пристроїв промислового призначення (електротранспорт, системи запалювання двигунів, медичні установки і т. ін.). Існують завади від сторонніх радіостанцій і каналів, обумовлені порушенням регламенту розподілу робочих частот, недостатньою стабільністю цих частот і поганою фільтрацією гармонік сигналу на виході передавачів радіостанцій.

У провідних каналах зв'язку основним видом завад є імпульсні шуми і переривання зв'язку. Поява імпульсних завад пов'язана з автоматичною комутацією в приладах АТС і перехресними наведеннями між колами в каналах зв'язку.

Переривання зв'язку – це явище, при якому сигнал в лінії різко загасає або зовсім зникає. Практично в будь-якому діапазоні частот мають місце внутрішні теплові шуми апаратури, обумовлені хаотичним рухом носіїв заряду в різних її елементах. Ці завади особливо проявляються в радіозв'язку в діапазоні

надвисоких частот. У цьому діапазоні мають місце і космічні завади, пов'язані з електромагнітними процесами на Сонці.

У загальному випадку вплив завади  $N(t)$  на сигнал  $U(t)$  можна виразити оператором

$$Z(t) = F[U(t), N(t)]. \quad (1.1)$$

В окремому випадку, коли оператор  $F[\cdot]$  представлено додаванням

$$Z(t) = U(t) + N(t), \quad (1.2)$$

завада  $N(t)$  називається адитивною.

Коли оператор  $F[\cdot]$  представлений у вигляді  $k$ -променів початкового сигналу, які прийшли в точку приймання різними напрямками, вираз (1.1) набуде вигляду

$$Z(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i U(t - \tau_i), \quad (1.3)$$

де  $\alpha_i$  – коефіцієнт загасання  $i$ -го променя;

$\tau_i$  – час поширення  $i$ -го променя від передавача до приймача, що призводить до «завмирань» сигналу, така завада називається мультиплікативною.

У реальних каналах мають місце обидва види завад.

Серед адитивних завад особливе місце займає флуктуаційна завада або флуктуаційний шум, що є випадковим процесом з нормальним розподілом (гаусівський процес). Ця завада найбільш вивчена і визначена практично в усіх реальних каналах зв'язку. З фізичної точки зору такі завади породжуються випадковими, тобто флуктуаційними, відхиленнями тих або інших фізичних величин від їхніх середніх значень. Так, джерелом шуму в електричних колах можуть бути флуктуації струму, обумовлені дискретною природою носіїв заряду (електронів, іонів).

Мають місце також імпульсні або зосереджені за часом завади (атмосферні, індустриальні), а також завади, зосереджені за спектром, або вузькосмугові (основний вид завад для

короткохвильового зв'язку – це сигнали від сусідніх сторонніх радіостанцій, випромінювання генераторів височастотних коливань у промисловості, медицині і т. д.).

### Контрольні питання та задачі

- 1 Що називається інформацією, повідомленням, сигналом?
- 2 Як класифікуються повідомлення і сигнали?
- 3 Якими параметрами характеризуються повідомлення і сигнали?
- 4 Що таке лінія зв'язку? Що таке канал зв'язку?
- 5 Якими параметрами характеризується канал зв'язку?
- 6 Як класифікуються канали зв'язку?
- 7 За якими ознаками класифікуються завади в каналах зв'язку?
- 8 Назвати види адитивних завад і їхні особливості.
- 9 Що таке модуляція і демодуляція?
- 10 Що таке кодування, декодування?
- 11 У чому відмінність простих кодів від завадостійких?
- 12 Канал зв'язку зі смугою пропускання  $\Delta F_k$  використовується для передачі сигналів протягом часу  $T_k$ . У каналі діє шумова гаусівська завада з рівномірною спектральною щільністю середньої потужності  $G_s(\omega) = N_0$ . Визначити граничну потужність сигналу, що може бути переданий по даному каналу, якщо фізичний об'єм каналу  $V_k$  відомий. Вихідні дані наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані для обчислювання граничної потужності сигналу

Параметр	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta F_k$ , кГц	10	10	15	10	2	5	7	10	3	5
$T_k$ , с	10	5	10	1	10	2	4	10	8	4
$G_s(\omega)$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$V_k$ , дБ	$10^5$	$10^4$	$10^6$	$10^6$	$10^5$	$10^4$	$10^6$	$10^4$	$10^5$	$10^5$

## ЛЕКЦІЯ 2. Спектральні та кореляційні характеристики електричних сигналів

### План

2.1 Основи загальної спектральної теорії детермінованих сигналів.

2.2 Основні характеристики випадкових процесів.

**Мета** – ознайомити з методами спектрального і кореляційного аналізу детермінованих і випадкових сигналів (процесів); навести основні поняття дискретизації; надати поняття функції розподілу а також основних статистичних характеристик системи передачі інформації.

### 2.1 Основи загальної спектральної теорії детермінованих сигналів

Розроблення математичних моделей сигналів і каналів зв'язку спрямовано на визначення структури і параметрів операторів перетворення сигналів у каналах зв'язку, аналіз властивостей каналів і спотворень сигналів під дією завад, синтез каналів з необхідними властивостями.

Математичні моделі сигналів і каналів зв'язку базуються на елементах спектральної теорії сигналів, яка у свою чергу ґрунтується на теоріях функціонального аналізу і випадкових процесів. Розглянемо основні елементи спектральної теорії для математичного опису сигналів, завад і каналів зв'язку у вигляді детермінованих (регулярних) функцій.

На практиці для аналізу реальних, часто дуже складних, сигналів використовується їх подання у вигляді сукупності простіших сигналів. Наприклад, реальний сигнал можна задати у вигляді суми його ортогональних складових, що визначають характер зміни напруги або струму в часі

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(t), t \in (t_1, t_2), \quad (2.1)$$

де  $(t_1, t_2)$  – інтервал задавання сигналу;

$C_n$  – коефіцієнти розкладання сигналу  $S(t)$  незалежні від часу;

$\psi_n(t)$  – ортогональні складові функції  $S(t)$ .

Як правило, система ортогональних функцій  $\psi_n(t)$  апіорі відома, і тоді сигнал  $S(t)$  повністю визначається набором коефіцієнтів  $C_n$ , кількість яких в інженерних розрахунках переважно кінцева. Такий кінцевий набір чисел  $C_n$  називають спектром сигналу. Для детермінованих сигналів найбільшого поширення отримали методи представлення, засновані на перетвореннях Фур'є. Тригонометрична форма запису ряду Фур'є записується у вигляді

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad (2.2)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt; \quad (2.2^*)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (2.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – кутова частота, рад/с.

У виразах (2.2), (2.3), (2.4) вважаємо, що  $\omega t = 2\pi ft$  (будь-яка періодична функція з періодом  $T$  може бути виражена через параметр часу  $t$ , якщо врахувати, що кут  $\Theta$  змінюється впродовж періоду  $T$  відповідно до співвідношення  $\Theta = \frac{2\pi t}{T} = \omega t = 2\pi ft$ ).

Таким чином, використовуючи розкладання в ряд Фур'є, переходимо від представлення функції  $S(t)$  в часі до частотної форми представлення. При цьому залежність  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  від  $n\omega$  є амплітудним спектром функції  $S(t)$ , а залежність  $\psi_n = \arctg(b_n/a_n)$  від  $n\omega$  є фазовим спектром функції  $S(t)$ .



Приклад 1. Періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів зі шпаруватістю  $q = \frac{T}{\tau_u} = 2$ , зображена на рисунку 2.1, може бути представлена рядом Фур'є таким чином:

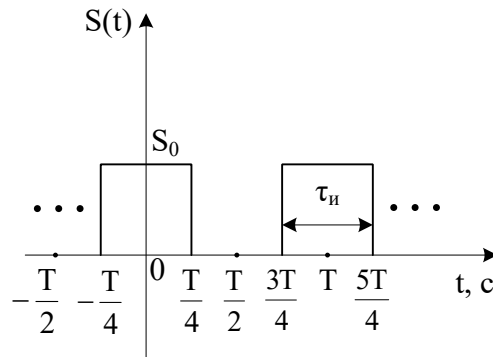


Рисунок 2.1 – Періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів зі шпаруватістю  $q=2$

$$S(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{4} < t < -\frac{T}{2}; \\ S_0, & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4}; \\ 0, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Оскільки функція  $S(t)$  - парна, то коефіцієнти  $b_n$  у виразі (2.4) дорівнюють 0. При  $n=0$  з виразу (2.2\*) маємо  $a_0 = \frac{S_0}{2}$ . Тоді ряд Фур'є для  $S(t)$  відповідно до формули (2.2) матиме вигляд

$$S(t) = \frac{S_0}{2} + \frac{2S_0}{\pi} \left[ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right], \quad (2.6)$$

тобто в спектрі цього сигналу, окрім постійної складової, присутні тільки непарні гармоніки.

Амплітудний спектр сигналу  $S(t)$  зображений на рисунку 2.2.

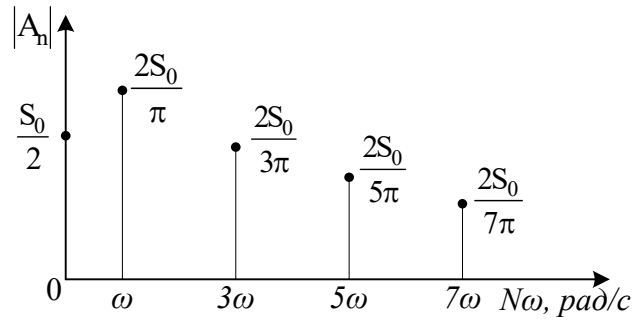


Рисунок 2.2 – Амплітудно-частотний спектр сигналу  $S(t)$

Фазовий спектр  $\psi_n$  сигналу  $S(t)$  змінюється від 0 до  $\pi$  для всіх значень  $n$ , починаючи від 0 (при  $n\omega = 0$ ).

У практичних застосуваннях можуть використовуватися й інші форми запису ряду Фур'є, наприклад

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \psi_n), \quad (2.7)$$

де  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;

$$\psi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right);$$

$$a_n = A_n \cos \psi_n;$$

$$b_n = A_n \sin \psi_n.$$

Коефіцієнти  $a_n, b_n$  утворюють амплітудно-частотний спектр функції  $S(t)$ , а значення  $\psi_n$  визначають її фазочастотний спектр.

Коефіцієнти  $a_n$  – це ефективні значення складових спектра, тому середня потужність сигналу, що виділяється на опорі 1 Ом при проходженні через нього струму  $S(t)$ , дорівнює

$$P_{\text{ср}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2, \quad (2.8)$$

тобто середня потужність сигналу дорівнює сумі потужностей усіх складових його спектра.

Для реальних сигналів завжди можна вказати таке число  $n$ , при якому 80-90 % потужності сигналу зосереджено в гармоніках з відповідними номерами. Взаємні потужність і енергія двох сигналів  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  знаходяться відповідно з виразів

$$P_{12} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t)S_2(t)dt \quad (2.9)$$

та

$$E_{12} = \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t)S_2(t)dt, \quad (2.10)$$

де  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  - інтервал тривалості сигналу.

Формули (2.9) і (2.10) корисні для вивчення взаємозв'язків між різними сигналами. Вони характеризують міру схожості цих сигналів. Якщо, наприклад, два сигнали повністю співпадають, то отримаємо

$$P_{12} = P_{21} = P,$$

а сигнали  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  при цьому називають когерентними. Коли сигнали  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  ортогональні, тобто  $P_{12} = P_{21} = 0$ , вони називаються некогерентними.

Теоретичною основою ортогонального розкладання для безперервних сигналів з обмеженими спектрами служить теорема Котельникова, за якою будь-яка безперервна функція сигналу  $S(t)$ , що не містить частот вищих максимальної  $F_m$ , повністю визначається послідовністю своїх значень (відліків) у моменти часу, віддалених один від одного на інтервал дискретизації  $\Delta t_g = \frac{1}{2F_m}$ . Загальна кількість таких відліків для сигналу тривалістю  $T$  дорівнює  $n = \frac{T}{\Delta t_g} = 2F_m T$ .

Ряд Котельникова для безперервного сигналу, спектр якого (зазвичай частина спектра, де зосереджено 90-95 % енергії сигналу) розташований в інтервалі частот  $\Delta F = F - F_m$ , має вигляд

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \frac{\sin 2\pi F_m(t - n\Delta t_g)}{2\pi F_m(t - n\Delta t_g)}, \quad (2.11)$$

де  $S_n$  – відліки сигналу в моменти часу  $t_n$ .

$$g_n(t) = \frac{\sin 2\pi F_M (t - n\Delta t_g)}{2\pi F_M (t - n\Delta t_g)} - \text{функції відліків}; \quad (2.12)$$

$$F_g = 2F_M = \frac{1}{\Delta t_g} - \text{частота дискретизації.}$$

Енергія безперервного сигналу з обмеженим спектром визначається через відліки сигналу за формулою

$$E_c = \frac{1}{2F_M} \sum_{n=0}^n S_n^2. \quad (2.13)$$

Таким чином, знаючи тривалість сигналу  $T$  і його граничну частоту  $F_M$ , можна визначити необхідну кількість відліків (кількість ступенів свободи), інтервал між ними, що дозволяє будь-який безперервний сигнал  $S(t)$  подати у вигляді імпульсної послідовності (2.11). Тому ортогональні розкладання сигналу в ряд Котельникова є теоретичною основою методів дискретної передачі безперервних повідомлень.

Наприклад, телефонні безперервні сигнали мають 95 % енергії в смузі частот від 300 до 3400 Гц. Якщо вважати верхньою частотою  $F=3400$  Гц, то дискретизацію таких безперервних сигналів можна здійснювати з частотою  $F_g=2F_M=6800$  Гц.

## 2.2 Основні характеристики випадкових процесів

Викладені вище результати належать до математичного подання сигналів як детермінованих функцій від параметрів часу або частоти. Реальні сигнали завжди носять випадковий характер. Тому розглянемо основні елементи математичного опису сигналів як випадкових процесів.

Детерміновані сигнали повністю задані, і про них є вичерпна інформація про те, що вони собою являють і як вони поведуться в часовій або частотній області. На відміну від них, для випадкових сигналів нема повної інформації про їхні характеристики і властивості. Проте для таких сигналів можуть бути отримані досить певні і передбачувані характеристики в процесі спостереження за ними досить тривалий період часу.

Такими характеристиками є різні середні значення: математичне очікування, дисперсія, кореляційна функція, спектральні щільності потужності сигналу та ін. Розробленням методів отримання середніх характеристик випадкових сигналів займається теорія випадкових процесів. Розглянемо найважливіші елементи цієї теорії.

Кожне повідомлення і відповідний йому сигнал, який передається по каналу зв'язку, – це елемент з деякої множини повідомлень. Кожне повідомлення  $A_i$  (сигнал) виникає з певною ймовірністю  $P_i$ . Множину сигналів, на якій задана ймовірнісна міра їх появи, називають ансамблем сигналів.

Ансамбль  $\{X(t)\}$  безперервних функцій часу є випадковим процесом. Кожна функція  $X_r(t)$ , що входить у такий ансамбль, є вибірковою детермінованою функцією або реалізацією процесу. Наявність різних реалізацій дозволяє повідомленню і сигналу переносити інформацію. Якщо випадковий процес заданий на дискретній множині значень  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то він називається випадковою дискретною послідовністю. Випадковий процес  $X(t)$  повністю заданий, якщо для будь-якого набору моментів часу  $t_1, \dots, t_n$  і будь-яких значень  $x_1, \dots, x_n$  можна обчислити ймовірність того, що функція  $X(t)$  набуває у вказані моменти часу значення, що не перевищують  $x_1, \dots, x_n$ :

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}, \quad (2.14)$$

де  $X(t_r)$  – випадкова величина, що називається перерізом випадкового процесу  $X(t)$  у момент часу  $t_r$ ;  $r=1, 2, \dots, n$ .

Функція  $F_n$  –  $n$ -мірна функція розподілу ймовірності випадкового процесу.

Таким чином, випадковий процес повністю заданий, якщо для будь-якого  $n$  і будь-яких моментів часу  $t_1, \dots, t_n$  можна знайти його функцію розподілу ймовірностей  $F_n$ .

Якщо існують часткові похідні функції розподілу ймовірностей  $F_n$

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.15)$$

для будь-якого числа  $n$  і будь-яких моментів часу  $t_n$ , то вони визначають  $n$ -мірну щільність розподілу ймовірності, а також повністю визначають випадковий процес.

Спочатку розглянемо основні характеристики для нестационарних випадкових процесів.

Середнє значення випадкового процесу за ансамблем в момент часу  $t_1$  або його математичне очікування визначається з виразу

$$\bar{X}(t_1) = M\{X(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x, t_1) dx, \quad (2.16)$$

де  $\bar{X}(t_1)$  – функція часу.

Різниця між випадковим процесом  $X(t)$  і його математичним очікуванням  $\bar{X}(t_1)$  називається центрованим процесом:

$$\dot{X}(t) = X(t) - \bar{X}(t_1). \quad (2.17)$$

Математичне очікування квадрата центрованого процесу називається дисперсією випадкового процесу  $X(t)$ :

$$M[\dot{X}(t_1)]^2 = D[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{X}(t_1)]^2 w(x, t_1) dx, \quad (2.18)$$

яка також є функцією часу.

Кореляційна функція  $R(t_1, t_2)$  визначається як математичне очікування добутку двох перерізів  $x_1$  і  $x_2$  центрованого випадкового стаціонарного процесу (у моменти часу  $\tau = t_2 - t_1$ )

$$R(\tau) = R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{X}(t_1)] \cdot [x_2 - \bar{X}(t_2)] w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.19)$$

і визначає взаємозв'язок (кореляцію) значень  $x_1$  і  $x_2$  одного випадкового процесу  $X(t)$  в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ . Тому цю функцію ще називають автокореляційною  $R_x(t_1, t_2)$ , тобто функцією двох моментів часу.

Взаємозв'язок значень  $x_1$  і  $x_2$  двох різних випадкових процесів  $X_1(t)$  і  $X_2(t)$  в моменти  $t_1$  і  $t_2$  визначається функцією взаємної кореляції:

$$R_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{X}(t_1)] \cdot [x_2 - \bar{X}_2(t_2)] w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2.20)$$

Випадковий процес, у якому математичне очікування і дисперсія не залежать від часу, а функція кореляції залежить від різниці  $\tau = t_1 - t_2$ , але не від самих значень  $t_1$  і  $t_2$ , називається стаціонарним у широкому розумінні. Такі процеси, що розглядаються впродовж не надто тривалого часу, широко використовуються на практиці як математичні моделі реальних сигналів і завад, а також суми сигналів і завад.

При експериментальних дослідженнях характеристики стаціонарних ергодичних випадкових процесів отримують найчастіше усереднюванням не за ансамблем, а в часі. Тоді оцінка математичного очікування випадкового процесу  $X(t)$  за його  $i$ -ю реалізацією  $x_i(t)$  тривалістю  $T$  визначається з виразу

$$\tilde{X}_i(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) dt. \quad (2.21)$$

Оцінка дисперсії знаходиться за формулою

$$D[\tilde{X}(t)] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \tilde{X}(t)]^2 dt. \quad (2.22)$$

Кореляційна функція для ергодичного процесу визначається з виразу

$$R_i(\tau, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_i(t) - \tilde{X}_i(t)] \cdot [x_i(t + \tau) - \tilde{X}_i(t)] dt. \quad (2.23)$$

Характеристики  $\tilde{X}_i(t)$ ,  $D[\tilde{X}(t)]$  і  $R_i(\tau, t)$  не залежать від часу, але є випадковими величинами, залежними від  $i$ -ї реалізації і тривалості інтервалу  $T$  спостереження випадкового процесу.

Стаціонарні випадкові процеси, у яких числові характеристики, розраховані за часом, співпадають з аналогічними характеристиками, розрахованими за ансамблем, називають ергодичними. Ці процеси мають важливе практичне значення, оскільки спостереження за великою кількістю реалізацій випадкового процесу можна замінити спостереженням за однією, але досить тривалою реалізацією.

Так само, як і для детермінованих сигналів, на практиці буває корисно зробити перехід з часової в частотну область.

Проте застосування перетворення Фур'є для випадкових процесів пов'язане з певними труднощами. Щоб їх вирішити, необхідно скористатися функцією, що характеризує розподіл енергії випадкового процесу по осі частот. Такою функцією є спектральна щільність енергії випадкового процесу. Відомо, що для кожної реалізації  $x_i(t)$  випадкового процесу існує випадкова спектральна щільність розподілу

$$S_x(i2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) e^{-i2\pi f t} dt.$$

Кожна реалізація цієї щільності має енергію

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(i2\pi f)|^2 dt,$$

де  $|S_x(i2\pi f)|^2$  характеризує розподіл енергії реалізації випадкового процесу по осі частот  $f$ , тобто спектральну щільність енергії реалізації.

Усереднюючи цю функцію по всіх реалізаціях, отримаємо спектральну щільність розподілу енергії усього випадкового процесу  $M\{|S_x(i2\pi f)|^2\} = S_x^2(\omega)$ .

Крива, що зображує функцію спектральної щільності розподілу енергії процесу (СЩЕ), обмежує площу, що дорівнює математичному очікуванню енергії випадкового процесу.

Слід зазначити, що знання розглянутих середніх характеристик сигналу  $X(t)$  як випадкового процесу в загальному випадку ще не дозволяє однозначно визначити цей сигнал. У той же час, навіть якщо знання цих середніх не дозволяє повністю описати сигнал на вході каналу зв'язку, їх може бути достатньо для обчислення аналогічних середніх параметрів сигналу на виході каналу.

Спектральна щільність потужності (СЩП) випадкового процесу пов'язана з його кореляційною функцією  $R_x(\tau)$  співвідношеннями Вінера-Хинчина:

$$S_x^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad (2.24)$$



$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.25)$$

Інтегральна характеристика спектральної щільності випадкового процесу визначає ширину спектра випадкового процесу:

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega = \frac{\pi D_x}{S_m^2}, \quad (2.26)$$

де  $D_x$  – дисперсія;

$S_m^2$  – максимальне значення  $S_x^2(\omega)$  випадкового процесу.

### Контрольні питання та задачі

1 Як визначається похибка подання сигналу  $x(t)$  як елемента простору  $L_2(T)$  усіченим узагальненим рядом Фур'є?

2 Задані на інтервалі  $(-T/2; T/2)$  сигнали  $x(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi t/T)$  і  $y(t) = \sqrt{2}\cos(4\pi t/T)$  трактуються як елементи простору Гілберта  $L_2(T)$ . Довести, що: а) норми цих сигналів дорівнюють 1; б) їхній скалярний добуток дорівнює 0; в) відстань між ними дорівнює  $\sqrt{2}$ .

3 Знайти спектральні компоненти періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів тривалістю  $\tau$  з періодом проходження  $T=2\tau$  за спектральною щільністю Фур'є одиночного імпульсу.

4 Користуючись визначенням  $\delta$ -функції, знайти спектральну щільність, за Фур'є, постійної складової  $x(t)=a$ .

5 Дано прямокутний імпульс  $x(t)=A$ ,  $t \in [-\tau_u/2; \tau_u/2]$ . Знайти його ФК  $B_E(\tau)$  (з розмірністю енергії) і  $B(\tau)$  (з розмірністю потужності), а також СЩЕ  $W_x(f)$  і СЩП  $G_x(f)$ .

6 Чому дорівнює максимальний інтервал дискретизації мовного і телевізійного сигналу, якщо верхню частоту в спектрі сигналу прийняти рівною відповідно 4 кГц і 6,5 МГц?

7 З яких міркувань інтервал дискретизації  $\Delta t_0$  безперервної функції часу з фінітним спектром на відрізку  $[-F_B; +F_B]$  часто вибирають менше, ніж  $1/2F_B$ ?

## ЛЕКЦІЯ 3. Математичні моделі випадкових сигналів, завад і каналів зв'язку

### План

3.1 Математичні моделі сигналів і завад.

3.2 Математичні моделі каналів зв'язку.

3.2.1 Моделі безперервних каналів зв'язку.

3.2.2 Моделі дискретних каналів зв'язку.

**Мета** – дати поняття математичних моделей випадкових сигналів, завад і каналів зв'язку; розглянути особливості передачі по каналу зв'язку з лінійними і нелінійними параметрами; навести математичні моделі безперервних каналів зв'язку і графі дискретних каналів зв'язку.

### 3.1 Математичні моделі сигналів і завад

Оскільки реальні сигнали завжди мають випадковий характер, найпоширенішими моделями випадкових сигналів і завад є стандартний дискретний сигнал, «білий» шум, гаусівський випадковий процес, гаусівський «білий» шум.

Стандартним дискретним сигналом називають випадкову послідовність прямокутних різнополярних імпульсів з випадковою тривалістю  $\tau_1$  і  $\tau_2$  і детермінованими амплітудами  $\pm \sigma$ .

Якщо тривалість імпульсів у такому сигналі розподілена за експоненціальними законами  $S_1(\tau_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_1}$ ;  $S_2(\tau_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_2}$  з параметрами  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , то такий сигнал є стаціонарним випадковим процесом, кореляційна функція якого має такий вигляд:

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)|\tau|} = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (3.1)$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія процесу;

$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$  – параметр, що повністю визначає кореляційні і спектральні властивості дискретного сигналу. З виразу (3.1) випливає, що за допомогою параметра можна в широкому діапазоні змінювати кореляційні і спектральні характеристики випадкового процесу.

Інтервал кореляції знаходиться з виразу

$$\Delta\tau = 2 \int_0^{\infty} \frac{K(\tau)}{\sigma^2} d\tau = \frac{2}{\alpha}. \quad (3.2)$$

Звідси видно, що чим менший параметр  $\alpha$ , тим більший час кореляції, і навпаки. При  $\alpha \rightarrow 0, \Delta\tau \rightarrow \infty$  процес вироджується в детермінований. При  $\alpha \rightarrow \infty, \Delta\tau \rightarrow 0$  процес вироджується в «білий» шум, у якого всі перетини некорельовані.

Спектральна щільність стандартного дискретного сигналу відповідно до виразу Вінера-Хинчина записується у вигляді

$$S^2(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (3.3)$$

Тоді ширина спектра цього сигналу визначиться за формулою

$$\Delta\omega = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \alpha\pi. \quad (3.4)$$

Звідси видно, що при  $\alpha \rightarrow 0, \Delta\omega \rightarrow 0$  процес вироджується в детермінований, а при  $\alpha \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow \infty$  процес вироджується в «білий» шум з постійною спектральною щільністю.

Поняття «білий» шум використовується як модель найзагальнішого випадку флуктуаційної завади в каналах зв'язку. Він є стаціонарним випадковим процесом з постійною спектральною щільністю потужності  $S^2(\omega) = N_0$ , Вт/Гц.

Визначимо основні його характеристики. Введемо спектральну щільність потужності  $N_0 = \frac{2\sigma^2}{\alpha}$  (тут виходимо з того факту, що «білий» шум – це граничний стан при  $\alpha \rightarrow \infty$  стандартного дискретного сигналу). Тоді з урахуванням виразу (3.3) отримаємо

$$S^2(\omega) = \frac{N_0\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{N_0}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)}. \quad (3.5)$$

Вираження з урахуванням виразу (3.4) набуде вигляду через параметр  $\alpha$  дисперсію «білого» шуму:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0 \alpha = N_0 \Delta F, \quad (3.6)$$

де  $\Delta F = \Delta\omega/2\pi$ .

Звідси видно, що при  $\alpha \rightarrow \infty$  дисперсія «білого» шуму нескінченна. За фізичним смислом спектральна щільність – це потужність процесу, яка припадає на 1 Гц смуги частот, тобто

$$N_0 = \frac{2\sigma^2}{\Delta F}. \quad (3.7)$$

Звідси випливає, що  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma^2 \rightarrow \infty$ , тобто потужність «білого» шуму не обмежена.

Таким чином, «білого» шум – це випадковий процес з постійною спектральною щільністю  $N_0$ , значення «білого» шуму при будь-яких інтервалах кореляції  $\tau \neq 0$  некорельовані, а дисперсія і потужність нескінченні.

Гаусівський випадковий процес, що має  $n$ -мірну щільність розподілу ймовірності з нульовим математичним очікуванням ( $M=0$ ), можна записати в такому вигляді:

$$w_n \rightarrow \omega(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n A}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 A} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} X_i X_k\right), \quad (3.8)$$

де  $A = \begin{vmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$  – визначник  $n$ -порядку;

$\sigma^2$  – дисперсія;

$R_{ik} = K(t_i, t_k)$  – один з елементів масиву  $A$ ;

$A_{ik}$  – алгебраїчні доповнення  $R_{ik}$  в  $A$ .

Для стаціонарного процесу  $R_{ik} = R_{ki} = K(\tau)$ ,  $\tau = t_k - t_i$ . Тому для гаусівського процесу за кореляційною функцією можна визначити з виразу Вінера-Хинчина щільність розподілу будь-якого порядку.

Гаусівський процес, який є «білого» шумом, має всі  $n$  перерізів некорельованими і  $A_{ik} = 1; A = 1; R_{ik} = R_{ki} = \delta_{ik}$ , де  $\delta_{ik}$  символ Кронекера. Тому щільність розподілу вірогідності  $n$ -го порядку гаусівського «білого» шуму визначається як добуток з  $n$  одномірних щільностей розподілу:

$$W \rightarrow \omega(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2\right). \quad (3.9)$$

Слід зазначити, що розподілене за законом Гауса коливання утворюється в результаті додавання великої кількості незалежних або слабо корельованих випадкових коливань відповідно до граничної теореми В. Ляпунова [3].

### 3.2 Математичні моделі каналів зв'язку

Щоб дати математичний опис каналу зв'язку, необхідно і достатньо задати множину сигналів на його вході і для будь-якого допустимого з цієї множини сигналу побудувати розподіл імовірності випадкового сигналу на виході каналу. На практиці точний математичний опис реального каналу виконати досить складно. Тому користуються спрощеними математичними моделями каналів. Найбільшого поширення набули математичні моделі таких видів: безперервних і дискретних каналів.

#### 3.2.1 Моделі безперервних каналів зв'язку

Ідеальний канал зв'язку без завад – лінійне коло з постійною передатною функцією, зосередженою в обмеженій смузі частот. Допустимі будь-які вхідні сигнали, що мають обмежену середню потужність  $P_c$  і спектр яких лежить в обмеженій смузі частот  $\Delta F$ . Вихідний сигнал у такому каналі при заданому вхідному сигналі є детермінованим. Ця модель іноді використовується для описування кабельних каналів зв'язку. Проте, строго кажучи, вона непридатна для реальних каналів, у яких завжди присутні, хоча і дуже слабкі, адитивні завади.

Сигнал на виході каналу з адитивним гаусівським шумом записується у вигляді

$$Z(t) = kU(t - \tau) + N(t), \quad (3.10)$$

де  $U(t)$  – вхідний сигнал;

$k$  і  $\tau$  – постійні, що виражають коефіцієнт передачі і час затримки сигналу відповідно;

$N(t)$  – гаусівський адитивний шум з нульовим математичним очікуванням і заданою кореляційною функцією.

Як правило, запізнювання сигналу на вході приймача  $\tau$  не враховується. Випадковий процес  $N(t)$  – найчастіше гаусівський «білого» шум з постійною щільністю розподілу в смузі спектра вхідного сигналу  $U(t)$ . У цій моделі можуть використовуватися задані функції часу величин  $k(t)$  і  $\tau(t)$ , тобто коефіцієнт передачі каналу  $k(t)$  і час запізнювання  $\tau(t)$ . Така модель задовільно описує багато провідних каналів зв'язку, радіоканали при зв'язку в межах прямої видимості, радіоканали з повільними замираннями, коли можна надійно передбачити значення  $k$  і  $\tau$ .

Канал з невизначеною фазою сигналу відрізняється від попереднього тим, що параметр  $\tau$  - випадкова величина. Для вузькосмугових сигналів при  $k = \text{const}$  і випадкових  $\tau(t)$  маємо

$$Z(t) = k[U(t)\cos\Theta_k + \tilde{U}(t)\sin\Theta_k] + N(t), \quad (3.11)$$

де  $\tilde{U}(t)$  – перетворення Гільберта від  $U(t)$ ;

$\Theta_k = \omega_0\tau$  – випадкова початкова фаза.

Припускається, що розподіл імовірності  $\Theta_k$  заданий і найчастіше є рівномірним на інтервалі  $(0, 2\pi)$ . Ця модель описує ті самі канали, що і попередня, якщо фаза сигналу в них флюктує внаслідок зміни протяжності каналу, властивостей середовища, у якому проходить сигнал.

**Гаусівський однопроменевий канал із загальними замираннями** (флюктуаціями амплітуд і фаз сигналу). Використовується вираз (3.11), тільки вводяться параметри  $k$  і  $\Theta_k$  як випадкові процеси. Тобто випадковими будуть квадратурні компоненти  $X = k\cos\Theta_k$ ;  $Y = k\sin\Theta_k$ .

Якщо ці компоненти залежать від часу, то з виразу (3.11) отримаємо

$$Z(t) = \text{л}(t) [U(t) \cos \Theta_k(t) + \tilde{U}(t) \sin \Theta_k(t)] + N(t). \quad (3.12)$$

Ця модель досить добре описує багато радіоканалів у різних діапазонах хвиль. Існують і інші моделі безперервних каналів.

### 3.2.2 Моделі дискретних каналів зв'язку

Розглядаючи моделі дискретних каналів, зазначимо, що такий канал часто поєднується з безперервним каналом, що містить модем (модулятор, демодулятор). Тому в принципі модель дискретного каналу можна побудувати з урахуванням моделі безперервного каналу і характеристик модема. Проте в ряді випадків такий шлях дуже складний. Тому застосовують простіші моделі, що подаються у вигляді умовної перехідної ймовірності станів на вході і виході каналу.

Вважається, що модель дискретного каналу задана, якщо відомі алфавіт об'ємом  $m$  і апіорні ймовірності  $P(B_k)$ , поява символів алфавіту  $\{B_k\}$  повідомлень ( $k=1,2,\dots,m$ ); технічна швидкість передачі символів  $V = \frac{1}{T_c}$  Бод, де  $T_c$  тривалість передачі одного символу;  $\{\tilde{B}_i\}$  - алфавіт символів на виході ( $i=1,2,\dots,m$ );  $P(\tilde{B}_i/B_k)$  - апіорна умовна ймовірність появи символу  $\tilde{B}_i$  за умови, що був переданий символ  $B_k$ . Результатом аналізу дискретного каналу є визначення апостеріорної умовної імовірності  $P(B_k/\tilde{B}_i)$  того, що при отриманні символу  $\{\tilde{B}_i\}$  передавався символ  $B_k$ . За допомогою цих апостеріорних і апіорних імовірностей  $P(B_k)$  розраховують повну ймовірність появи помилки в каналі, імовірність правильного приймання, імовірність появи символів на виході, швидкість передачі інформації, пропускну спроможність каналу, кількість прийнятої інформації і т. ін.

Симетричний канал без пам'яті визначається як дискретний канал, у якому кожен переданий символ  $B_k$  може бути прийнятий помилково з фіксованою ймовірністю  $p$  і правильно з ймовірністю  $q=(1-p)$ , причому в разі помилки замість переданого символу  $B_k$  може бути прийнятий з рівною ймовірністю будь-який інший символ. Таким чином, умовна ймовірність того, що прийнято символ  $\{\tilde{B}_i\}$ , якщо був переданий символ  $B_k$ , дорівнює

$$P(B_k/\tilde{B}_i) = \begin{cases} P/(m-1) & \text{при } k \neq i; \\ q=1-P & \text{при } k = i. \end{cases} \quad (3.13)$$

Термін «без пам'яті» означає, що ймовірність помилкового приймання не залежить від передісторії (тобто від того, які раніше передавалися символи і як вони були прийняті). Перехідна ймовірність для такої моделі двійкового каналу може бути подана у вигляді графа станів, зображеного на рисунку 3.1.

Симетричний канал без пам'яті зі «стиранням» відрізняється від попереднього тим, що алфавіт на виході містить додатковий  $(m+1)$  символ «?», що з'являється, коли демодулятор не може надійно розпізнати переданий символ  $B_k$ . Ймовірність такої відмови від рішення  $P_c$ , тобто «стирання» символу, є постійною величиною і не залежить від переданого символу. Ймовірність переходів для цієї моделі зображена на рисунку 3.2.

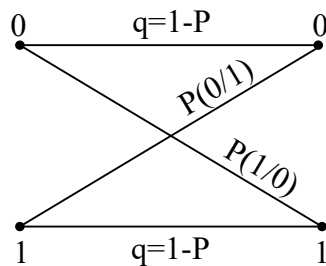


Рисунок 3.1 – Граф станів двійкового симетричного каналу

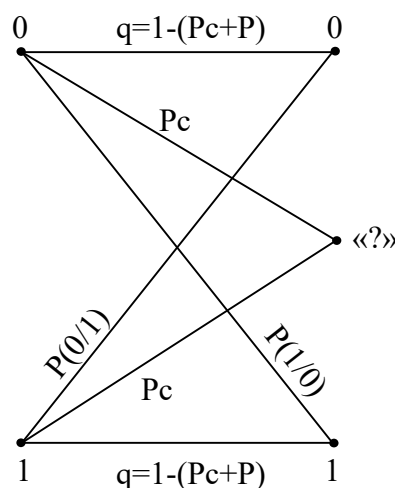


Рисунок 3.2 – Граф станів двійкового каналу з «стиранням»



Несиметричний канал без пам'яті характеризується тим, що ймовірності помилки не залежать одна від одної, проте залежать від того, який символ передається. Тобто ймовірність  $P(1/0) \neq P(0/1)$  для двійкового каналу. Для цієї моделі перехідні ймовірності показані на рисунку 3.3.

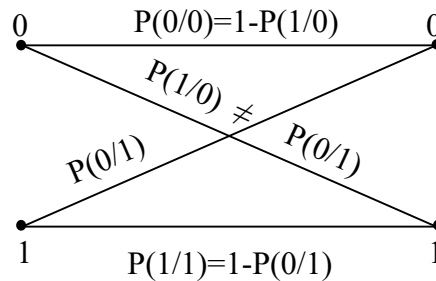


Рисунок 3.3 - Граф станів двійкового несиметричного каналу

Марківський канал можна подати у вигляді найпростішої моделі дискретного каналу з пам'яттю. При цьому ймовірність помилки визначається відповідно до простого кола Маркова, тобто залежить від того, правильно чи помилково прийнятий попередній символ, але не залежить від того, який символ передавався.

**Канал з неадитивним шумом і пам'яттю.** Імовірність помилки в ньому залежить від переданих символів, як у моделі несиметричного каналу без пам'яті, але не від того символу, для якого визначається ймовірність помилки, а від символів, які передавалися до нього.

### Контрольні питання та задачі

- 1 За якими ознаками можна класифікувати канали зв'язку?
- 2 Який канал називається безперервним, дискретним і дискретно-безперервним?
- 3 Які два типи завдань вирішуються при розгляді проходження випадкових впливів через канал зв'язку і його ланки?
- 4 На вхід нелінійної схеми з характеристикою  $y = x^2$  поступає стаціонарний стандартний гаусівський процес з

коефіцієнтом кореляції  $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ . Знайти одновимірний розподіл вихідного процесу, його математичне очікування, дисперсію, функцію кореляції і спектральну щільність потужності.

5 На вхід перемножника з випадковою передавальною функцією  $K(t)$  і функцією кореляції  $\overline{K(t)K(t+\tau)} = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$  поступає стаціонарний «квазібілий» (у межах смуги частот  $-F_c, F_c$ ) низькочастотний шум зі спектральною щільністю  $N_0$ . Знайти функцію кореляції вихідного процесу, його дисперсію і порівняти з дисперсією вхідного шуму.

## ЛЕКЦІЯ 4. Методи модуляції сигналів у системах телекомунікації

### План

- 4.1 Методи модуляції сигналів.
- 4.2 Амплітудна модуляція.
- 4.3 Кутова модуляція.
- 4.4 Амплітудно-імпульсна модуляція.
- 4.5 Амплітудна маніпуляція.
- 4.6 Частотна і фазова маніпуляції.

**Мета** – навести класифікацію основних видів модуляції; пояснити суть модуляції, маніпуляції, багаторівневої модуляції та імпульсно-кодової модуляції; їхні основні параметри, характеристики, часові діаграми та спектри.

### 4.1 Методи модуляції сигналів

Модуляція – це перетворення первинного сигналу  $V(t)$ , що відображує повідомлення, у сигнал  $U(t)$ , придатний для передачі по лінії зв'язку (канальний сигнал). При цьому перетворенні здійснюється узгодження джерела повідомлень з каналом зв'язку.

Для передачі інформації потрібно, щоб канальні сигнали мали два види параметрів: параметри селекції (відбору) та інформаційні параметри. Параметри селекції дозволяють виділити корисний сигнал з суміші сигналів і завад. Інформаційні параметри служать для перенесення інформації, тобто в зміні цих параметрів відображуються повідомлення.

Відповідно до функції зміни переданого сигналу, що відображує повідомлення, управління інформаційними параметрами сигналу-переносника називають модуляцією і записують цей процес у вигляді

$$U(t) = M[X(t), B(t)], \quad (4.1)$$

де  $B(t)$  – інформаційний сигнал;  
 $X(t)$  – сигнал переносника.

Для отримання переданого сигналу  $B(t)$  з  $U(t)$  на приймальному боці необхідно виконати перетворення, зворотне модуляції на передавальному боці, тобто демодуляцію:

$$\tilde{B}(t) = D[U(t)] = M^{-1}[U(t)]. \quad (4.2)$$

Якщо під впливом переданого сигналу  $B(t)$  інформаційний параметр сигналу-переносника  $X(t)$  змінюється безперервно, то всі можливі види модуляції є безперервними. До них відносять амплітудну, фазову і частотну модуляції та їх комбінації. Так, якщо сигнал-переносник - це гармонійне коливання, то маємо амплітудну, фазову і частотну модуляції гармонійного коливання. Якщо в ролі переносника використовують періодичну послідовність імпульсів, то модуляція є імпульсною: амплітудно-імпульсна, частотно-імпульсна, широтно-імпульсна, фазо-імпульсна і т. ін. Якщо при модуляції інформаційний параметр переносника  $X(t)$  приймає кінцеву кількість значень, то модуляцію називають дискретною або маніпуляцією. До неї відносять амплітудну, частотну, фазову і відносно-фазову маніпуляції.

Якщо рахункові значення інформаційного параметра нумерують і у вигляді цифр передають по лінії зв'язку, то говорять про цифрову модуляцію наприклад імпульсно-кодова модуляція, дельта-модуляція, диференціально-імпульсно-кодова та ін.

У цілому залежно від характеру переданого сигналу  $B(t)$  і переносника  $X(t)$  (випадковий стаціонарний процес, випадковий нестаціонарний процес), виду цих сигналів (безперервні,

дискретні, цифрові) і виду інформаційного параметра (амплітуда, частота, фаза, форма, тривалість, період і т. д.) може бути запропонована безліч різних методів модуляції. Проте перелічені вище методи безперервної і дискретної амплітудної, частотної і фазової модуляції, а також цифрової модуляції найбільш досліджені і знайшли широке практичне застосування. Розглянемо детальніше деякі з них.

## 4.2 Амплітудна модуляція

Розглянемо амплітудну аналогову модуляцію (АМ) на прикладі. Нехай переданий сигнал  $B(t)$ , а сигнал-переносник  $X(t) = \cos 2\pi f_c t$ . Тоді модульований сигнал записується у вигляді  $U(t) = B(t)X(t) = B(t)\cos 2\pi f_c t$ .

Якщо  $B(t)$  має спектр, обмежений смугою частот  $\Delta F$ , і якщо обмежити величиною меншою або рівнішою  $f_c$ , то спектри  $B(f_c - \Delta F)$  і  $B(f_c + \Delta F)$  не перекриваються і  $U(t)$  буде смуговим процесом, спектр якого обмежений смугою, що визначається нерівністю

$$(f_c - \Delta F) < f < (f_c + \Delta F). \quad (4.3)$$

Залежно від співвідношення ширини спектра  $\Delta F$  і його центральної (несучої) частоти  $f_c$  розрізняють вузькосмугові ( $\Delta F \ll f_c$ ) і широкосмугові ( $\Delta F \approx f_c$ ) процеси. Розглянемо на прикладі ( $\Delta F \ll f_c$ ). Тоді модульований сигнал можна записати у вигляді

$$U(t) = B(t)\cos 2\pi f_c t. \quad (4.4)$$

Він матиме форму косинусоїди з несучою частотою  $f_c$ , амплітуда якої модульована і повільно змінюється відповідно до обвідної  $B(t)$ , як показано на рисунку 4.1.

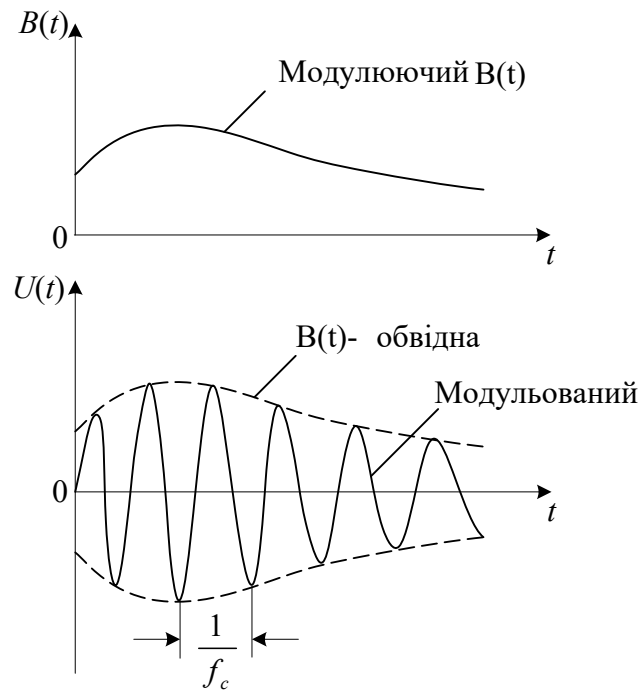


Рисунок 4.1 – Форми сигналів при амплітудній модуляції

Однією з основних властивостей амплітудно-модульованих сигналів  $U(t)$  є те, що вони зберігають усі деталі низькочастотного модулюючого сигналу, а це дозволяє, за відсутності завад, шляхом демодуляції процесу  $U(t)$  повністю відновити початковий переданий сигнал  $B(t)$ . Смуговий амплітудно-модульований сигнал  $U(t)$  повністю еквівалентний переданому сигналу  $B(t)$  відносно інформації, що міститься в ньому, незважаючи на те, що вони знаходяться в різних частотних діапазонах. Ця відмінність дозволяє здійснювати частотне ущільнення (розподіл) каналів, коли по одній лінії зв'язку на різних несучих частотах (вибраних так, щоб частотні смуги сигналів різних джерел повідомлень не перекривались), передається безліч повідомлень.

### 4.3 Кутова модуляція

Під кутовою модуляцією розуміють зміну фази і частоти несучого високочастотного коливання.

Можна показати, що будь-яке вузькосмугове коливання  $X(t)$  можна подати як

$$X(t) = X_c(t)\cos 2\pi f_0 t + X_s(t)\sin 2\pi f_0 t, \quad (4.5)$$

де  $X_c(t)$  і  $X_s(t)$  – низькочастотні коливання, що називаються квадратурними компонентами  $X(t)$ .

Тоді узагальнений вузькосмуговий сигнал можна записати як

$$X(t) = E(t)\cos[2\pi f_0 t + \psi(t)], \quad (4.6)$$

де  $E(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$  – обвідна;

$\psi(t) = -\arctg \frac{X_s(t)}{X_c(t)}$  – поточна фаза сигналу.

Фазомодульований (ФМ) сигнал можна отримати з виразу (4.6) якщо забезпечити обвідну  $E(t)$  постійною і рівною амплітуді  $A$ , а фазу  $\psi(t)$  змінювати пропорційно модулюючому сигналу  $B(t)$ . Тоді отримаємо

$$U(t) = A\cos[2\pi f_0 t + m_{\text{фм}} B(t)], \quad (4.7)$$

де  $m_{\text{фм}}$  – індекс фазової модуляції;

$$A = E(t) = \text{const}.$$

Оскільки в цьому випадку модулюється не амплітуда, а фазовий кут косинусоїди, то фазову і частотну модуляції називають кутовою.

Принцип фазової модуляції полягає в такому. Нехай  $B(t) = \cos 2\pi f_m t$  і  $m_{\text{фм}} \ll 1$ , тоді, урахувавши вираз (4.7), отримаємо

$$\begin{aligned} U(t) &= A\cos[2\pi f_c t + m_{\text{фм}} \cos 2\pi f_m t] \approx \\ &\approx A\cos 2\pi f_c t - \frac{A \cdot m_{\text{фм}}}{2} \sin 2\pi(f_c + f_m)t + \frac{A \cdot m_{\text{фм}}}{2} \sin 2\pi(f_c - f_m)t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Якщо кожен складову виразу (4.8) записати в експоненціальній формі, то видно, що спектр фазомодульованого сигналу  $U(t)$  при  $m_{\text{фм}} \ll 1$  виглядає аналогічно спектру АМ-коливання (рисунк 4.2).

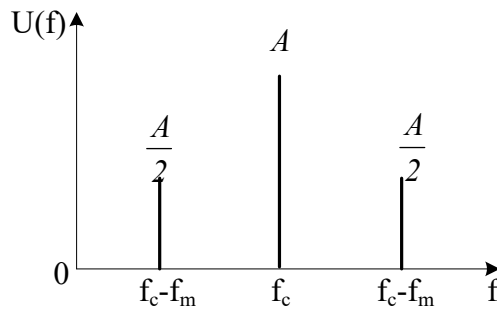


Рисунок 4.2 – Спектр фазомодульованого сигналу при  $m_{\text{фм}} \ll 1$

Фазові співвідношення між несучою і бічними складовими спектра зображені на рисунку 4.3. Тут менші вектори зі значенням  $\frac{A \cdot m_{\text{фм}}}{2}$  обертаються в протилежних напрямках навколо кінця великого вектора зі значенням  $A$ , який також обертається зі швидкістю,  $\omega_c t$ , а  $U(t)$  є проекцією суми цих векторів на горизонтальну вісь.

При фазовій модуляції в коливанні  $U(t) = A \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$  несуча модулюється по фазі за допомогою функції  $\psi(t)$ . Можна визначити миттєву частоту сигналу  $U(t)$  як похідну від аргументу косинуса за допомогою виразу

$$\frac{d}{dt}[2\pi f_c t + \psi(t)] = 2\pi f_c + \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

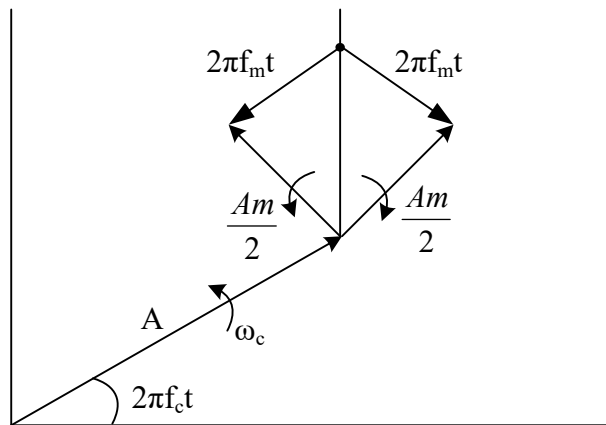


Рисунок 4.3 – Векторна діаграма ФМ-коливання при  $m_{\text{фм}} \ll 1$

Принцип частотної модуляції (ЧМ) ґрунтується на взаємозв'язку фази і частоти сигналу.

Вважаючи  $\frac{d\psi(t)}{dt} = \omega(t)$  або  $\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau$ , отримаємо вираз для несучого коливання, що модулюється по частоті

$$U(t) = A \cos \left[ 2\pi f_0 t + \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau \right]. \quad (4.9)$$

Якщо  $\omega(t) = \Delta\omega_g \sin 2\pi f_m t$  (випадок синусоїдальної частотної модуляції), то вираз для  $\psi(t)$  визначиться за формулою

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau = \frac{\Delta\omega_g}{2\pi f_m} \cos 2\pi f_m t = m_{\text{чМ}} \cos 2\pi f_m t, \quad (4.10)$$

де  $m_{\text{чМ}} = \frac{\Delta\omega_g}{2\pi f_m}$  – індекс частотної модуляції або коефіцієнт девіації частоти, тобто відношення максимальної девіації миттєвої частоти (кутової) до частоти модуляції  $f_m$ ;

$\Delta\omega_g = 2\pi f_g$  – девіація частоти.

#### 4.4 Амплітудно-імпульсна модуляція

При амплітудно-імпульсній модуляції (АІМ) переносником інформаційного сигналу є періодична послідовність імпульсів вигляду

$$X(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(t - kT_n, \tau), \quad (4.11)$$

де  $A_0$  – амплітуда імпульсів;

$X_1(t)$  – функція, що виражає поодинокий імпульс;

$T_n$  – період повторення імпульсів;

$\tau$  – тривалість імпульсу.

Аналітичний запис АІМ-сигналу має вигляд

$$U_{\text{АІМ}}(t) = A_0 [1 + m_I \cdot B(t)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(t - kT_I, \tau), \quad (4.12)$$

де  $m_I$  – коефіцієнт глибини модуляції.

Приклад амплітудної модуляції послідовності прямокутних відеоімпульсів довільним безперервним інформаційним сигналом зображений на рисунку 4.4.



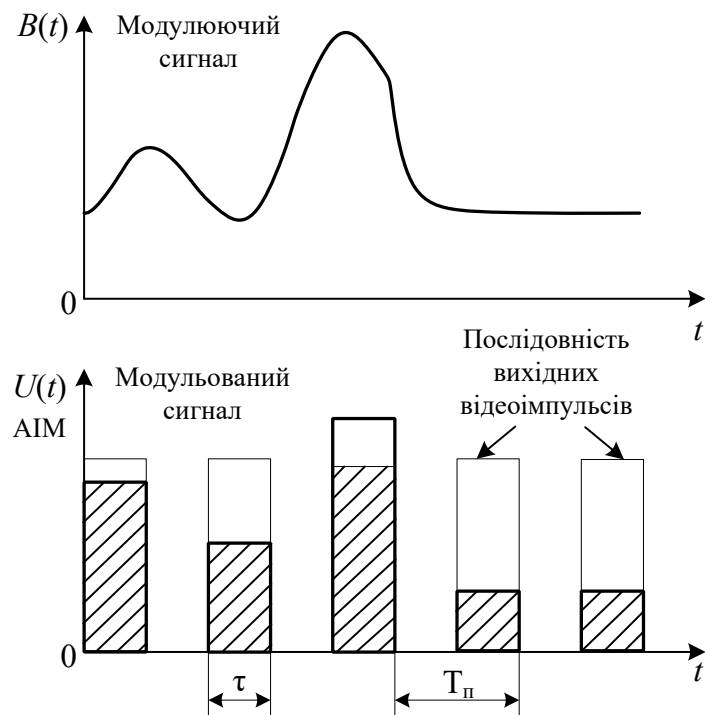


Рисунок 4.4 – Приклад амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ-II)

Для знаходження спектра сигналу  $U_{AIM}(t)$  можна подати функцію  $X_I(t)$  у вигляді ряду Фур'є

$$X_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk\omega_n t}, \quad (4.13)$$

де  $\omega_n = \frac{2\pi}{T_I}$  – кругова (кутова) частота повторення імпульсів.

Підставимо вираз (4.13) у вираз (4.12) і, використовуючи пряме перетворення Фур'є, отримаємо вираз для спектра сигналу  $U_{AIM}(t)$

$$S_{AIM}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C \delta(\omega_I - k\omega_n) + m_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{-j(\omega_I - k\omega_n)t} dt. \quad (4.14)$$

Тут  $\delta(\omega)$  – дельта-функція; перша сума виражає спектр немодульованого сигналу; друга сума показує, що амплітудно-імпульсна модуляція викликає появу біля кожної складової цього спектра бічних смуг, що повторюють спектр модулюючого сигналу. Тому спектр АІМ-сигналу є впорядкованим набором

спектрів звичайних АМ-коливань, у яких роль несучих виконують гармоніки частоти проходження імпульсної послідовності. Частоту повторення  $\omega_n$  імпульсів при АІМ-модуляції слід вибрати з умови

$$\omega_n \geq 2\omega_1, \quad (4.15)$$

де  $\omega_1$  – перша (основна) частота вузькосмугового модулюючого сигналу  $V(t)$ .

Тоді не відбудуватиметься накладення спектрів сусідніх бічних частот на спектр модулюючого сигналу. Частоті  $\omega_n$  відповідає період  $T_{\max}$ . Вибираючи  $T_{\max}$  достатньо великим, можна здійснювати по одній лінії зв'язку багатоканальну передачу сигналів з часовим ущільненням.

#### 4.5 Амплітудна маніпуляція

При передачі дискретних (цифрових) сигналів широко використовуються різні види маніпуляції (амплітудна, частотна, фазова та ін.).

Так, при амплітудній дискретній модуляції інформаційним параметром є амплітуда переносника, яка змінюється дискретно. Як переносник інформації використовується високочастотний гармонійний сигнал вигляду

$$X(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \varphi_0), \quad (4.16)$$

а модулюючим сигналом  $V(t)$  є періодична (або випадкова) послідовність імпульсів (дискретний або цифровий сигнал):

$$V(t) = \begin{cases} 1 & 2i\tau_n < t < (2i+1)\tau_n & i = 0,1,2,\dots; \\ -1 & (2i+1)\tau_n < t < 2(i+1)\tau_n & i = 0,1,2,\dots, \end{cases} \quad (4.17)$$

де  $T_1 = 2\tau_1$  – період послідовності імпульсів.

Амплітуда маніпулюючого сигналу визначається з умови

$$A = \begin{cases} 0,5A_0(1+m) & \text{при } 2i\tau < t < (2i+1)\tau & i = 0,1,2,\dots; \\ 0,5A_0(1-m) & \text{при } (2i+1)\tau < t < 2(i+1)\tau & i = 0,1,2,\dots \end{cases} \quad (4.18)$$

Коефіцієнт амплітудної маніпуляції (АМн) зазвичай вибирають рівним  $m=1$ . Тому амплітуда маніпульованого сигналу змінюється стрибком у моменти часу  $t=i\tau_1$  і набуває двох значень  $A_0$  і  $0$ , як зображено на рисунку 4.5.

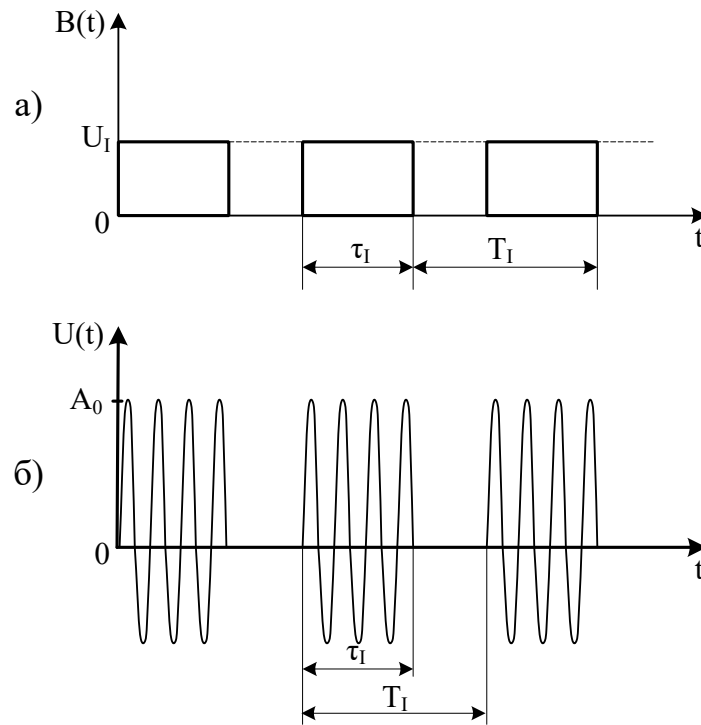


Рисунок 4.5 – Інформаційний дискретний (цифровий) сигнал (а) і амплітудно-маніпульований сигнал (б)

АМн-сигнал  $U_{\text{АМн}}(t)$  при  $m=1$  за аналогією з виразом (4.4) можна записати в такому вигляді:

$$U_{\text{АМн}}(t) = 0,5A_0[1+B(t)]\sin(\omega_{\text{н}}t + \varphi_0). \quad (4.19)$$

Подавши функцію  $B(t)$  у вигляді ряду Фур'є, визначимо спектр АМн-сигналу таким чином:

$$S_{\text{АМн}}(\omega) = \frac{1}{2}A_0\sin(\omega_{\text{н}}t + \varphi_0) + \frac{A_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k} \cos(\omega_{\text{н}}t - k\omega_1t + \varphi_0) - \frac{A_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k} \cos(\omega_{\text{н}}t + k\omega_1t + \varphi_0). \quad (4.20)$$

За цією формулою можна побудувати спектр АМн-сигналу  $q = \frac{T_n}{\tau_n} = 2$ , який зображений на рисунку 4.6.

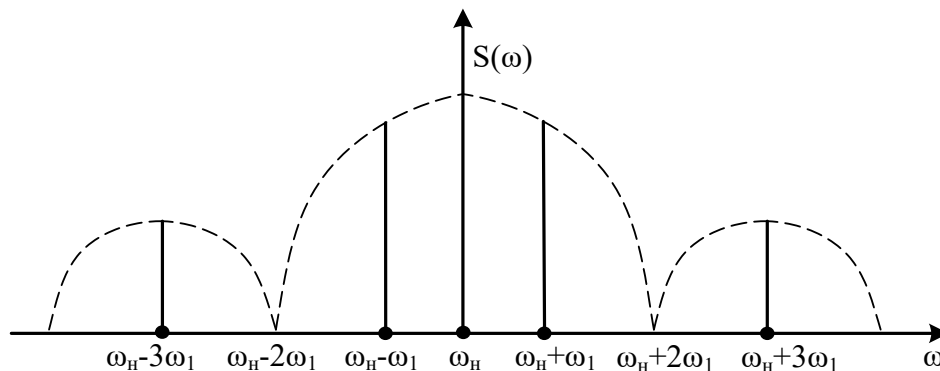


Рисунок 4.6 – Амплітудно-частотний спектр АМн-сигналу для  $q=2$

Обвідна спектра АМн-сигналу являє собою зсунутий на несучу частоту  $\omega_n$  спектр одиночного імпульсу  $B(t)$ . При такому виді модуляції спектр модульованого сигналу  $U_{AMn}(t)$  отримуємо перенесенням спектра сигналу у вигляді імпульсів у смугу частот, визначувану несучою частотою  $\omega_n$ .

Фазова і частотна імпульсні модуляції, а також фазова і частотна маніпуляції визначаються аналогічно розглянутим раніше фазовій і частотній модуляціям.

Слід зазначити, що основними недоліками амплітудної модуляції, АІМ і АМн є неефективне використання потужності несучого сигналу і чутливість до нелінійних спотворень типу насичення, при яких зменшується різниця між амплітудами сусідніх гармонік. Ці недоліки відсутні при кутовій (фазовій або частотній) модуляції, оскільки в цьому випадку використовуються сигнали з постійною амплітудою (несучої), а інформація в цьому випадку обумовлена або зміною частоти, або ж зміною фази сигналу.

#### 4.6 Частотна і фазова маніпуляції

При частотній маніпуляції (ЧМн) безперервний гармонійний періодичний сигнал-переносник типу  $X(t) = A \cos(\omega_n t + \varphi_0)$

модулюється по частоті послідовністю імпульсів  $B(t)$ , як показано на рисунку 4.7, тобто «посилці» відповідає частота  $f_2$ , а «паузі» частота  $f_1$ , причому  $f_1 > f_2$ .

При фазовій маніпуляції (ФМн) інформаційним змінюваним параметром переносника є фаза сигналу. У техніці зв'язку використовуються різні способи фазової маніпуляції, такі як ФМн-2, ФМн-4, ФМн-8 (2-рівнева, 4-рівнева, 8-рівнева ФМн) та ін.

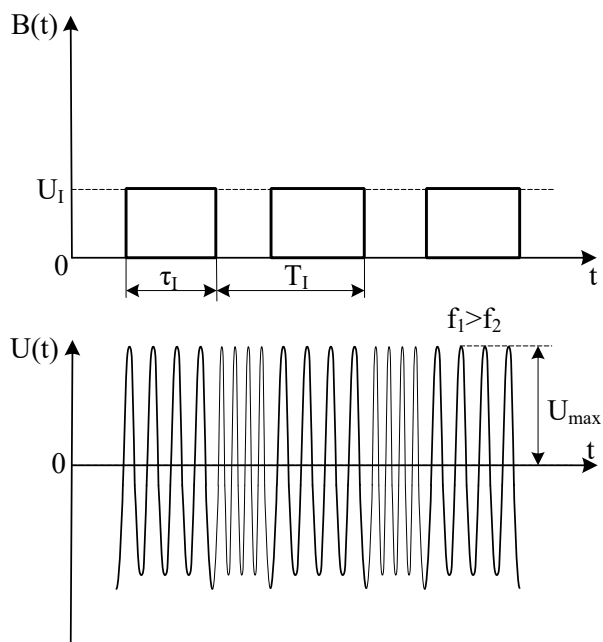


Рисунок 4.7 – Часова діаграма частотно-маніпульованого сигналу

Часова діаграма сигналу ФМн-2 показана на рисунку 4.8. При цьому посилці «1» відповідає фаза переносника, що дорівнює  $0$ , а посилці «0» відповідає фаза переносника, що дорівнює  $180^\circ$ .

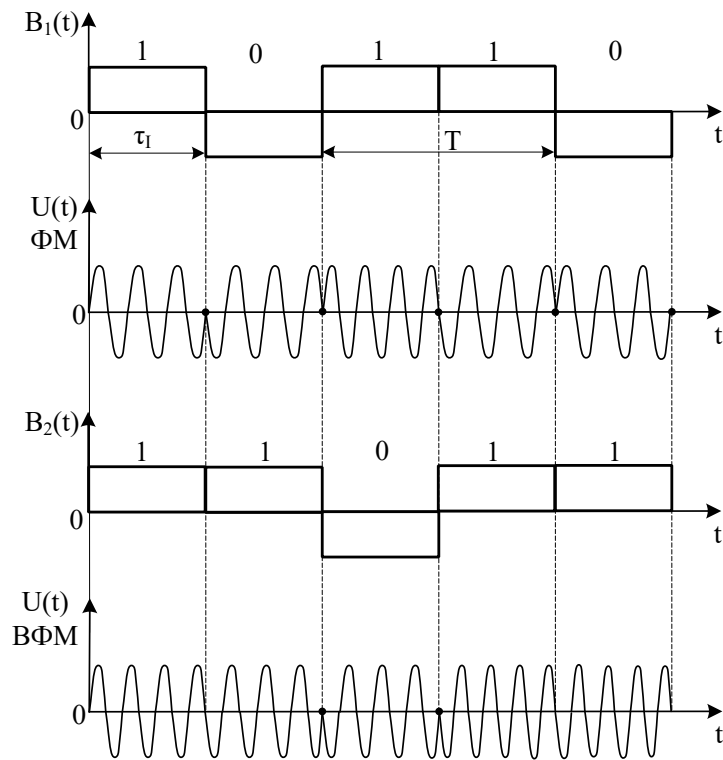


Рисунок 4.8 – Часові діаграми ФМ і ВФМ-сигналів

Таким чином, фаза маніпульованого сигналу  $X(t)$  при зміні інформаційного сигналу  $B(t)$  змінюється на  $180^\circ$ . Фазова маніпуляція ФМ-2 забезпечує максимальну завадостійкість каналу зв'язку. На практиці використовується відносна фазова маніпуляція (ВФМ) для усунення «зворотної» роботи, що виникає при ФМн, коли через нестабільність роботи опорного генератора у фазовому демодуляторі замість переданого символу «1» фіксується символ «0» і навпаки, тобто виникають помилки. При використанні відносного кодування «зворотна» робота усувається. Існують також багатоступінчасті методи модуляції: ФМ-АМ, ЧМ-АМ, АІМ-АМ, ІКМ-АМ, ІКМ-ЧМ та ін.

### Контрольні питання та задачі

1 На нелінійний елемент з ВАХ апроксимованою ламаною лінією подається (при кутовому значенні  $\pi/2$ ) гармонійний сигнал з амплітудою 2 В. Крутість ВАХ  $S = 10 \text{ мА/В}$ . Знайти амплітуди постійної складової струму  $I_0$ , першої і другої

гармонік  $I_1$  і  $I_2$ . Для порівняння знайти величини  $I_0, I_1, I_2$  методом трьох ординат.

2 Прямокутний імпульс тривалістю 1 мс модулює за амплітудою гармонійну несучу частоти  $f_0 = 1$  МГц і амплітуди 1 В. Знайти спектр первинного і вторинного модульованого сигналу.

3 На лінійний детектор при куті відсічки  $\theta = \pi/2$  подається АМ-сигнал 
$$U_{AM} = [1 + 0.5 \cos(5 \times 10^3 t)] \times \cos(5 \times 10^6 t).$$
 Крутість характеристики нелінійного елемента  $S = 10 \text{ мА/В}$ . Знайти напругу на навантаженні, утворену паралельним з'єднанням опору  $R = 10$  кОм і ємності  $C$ , що задовольняє необхідні умови роботи детектора.

4 У чому різниця між двома різновидами кутової модуляції: фазовою і частотною?

5 У якості імпульсної несучої використовується періодична послідовність прямокутних імпульсів тривалістю  $\tau = 10$  мкс і періодом  $T = 125$  мкс. Несуча модулюється за амплітудою мовним сигналом з верхньою частотою спектра  $F_B = 3400$  Гц. Яку ширину спектра займає сигнал АІМ? Скільки мовних сигналів можна передати на імпульсній несучій шляхом часового розподілу каналів?

6 Двійкова частотна модуляція реалізується шляхом почергового вибору одного з двох незалежних гармонійних сигналів з частотами  $f_0$  і  $f_1$ . Модель первинного сигналу – випадкова стаціонарна двійкова синхронна послідовність. Знайти функцію кореляції і спектральну щільність середньої потужності ЧМ-сигналу.

## **ЛЕКЦІЯ 5. Способи перетворення безперервних сигналів у цифрову форму**

### **План**

5.1 Способи перетворення аналогових сигналів у цифрові.

5.2 Принципи функціонування аналого-цифрових і цифро-аналогових перетворювачів.

**Мета** – ознайомити з основними принципами перетворення безперервних сигналів у цифрову форму; розглянути принципи імпульсно-кової модуляції (ІКМ), дискретної модуляції, кодування з передбаченням.

## **5.1 Способи перетворення аналогових сигналів у цифрові**

Сучасні системи зв'язку характеризуються все більшим впровадженням цифрових методів передачі інформації. У таких системах повідомлення, яке необхідно передати, складається з послідовності дискретних символів, що обираються з кінцевого алфавіту, наприклад двійкового коду. Таке подання є цілком природним для текстових повідомлень, цифрових даних або коду. Якщо ж початкове повідомлення є мовою, музикою або зображенням яких-небудь предметів, подій та ін. (тобто повідомлення безперервне в часі і за рівнем), то сигнал, що його відображує, можна подати в цифровій формі. Передача сигналів у цифровій формі порівняно з передачею в аналоговій формі має такі переваги:

а) менший вплив неідеальності характеристик функціональних елементів апаратури системи зв'язку і їхньої нестабільності на якість передачі інформації;

б) можливість використання кодів, що виявляють і виправляють помилки, а це забезпечує більш високу завадостійкість системи передачі навіть за наявності великого рівня шумів і завад;

в) можливість відновлення форми сигналів у регенераторах і вузлах мережі зв'язку, завдяки чому помилки і шуми не накопичуються при передачі сигналів на великі відстані;

г) універсальна форма подання сигналів різних повідомлень (мова, телезображення, дискретні дані і т. д.) і, отже, можливість уніфікації апаратури зв'язку і можливість інтеграції пристроїв комутації і мультиплексування;

д) низька чутливість до нелінійних спотворень, що дає можливість передавати інформацію по групових трактах багатоканальних систем з меншими спотвореннями;



е) просте узгодження з ЕОМ і електронними автоматичними телефонними станціями, що дає можливість створювати інтегральні мережі зв'язку, використовуючи автоматизацію процедур передачі і обробки інформації за допомогою ЕОМ;

ж) можливість засекречування інформації.

До основного недоліку цифрових систем передачі інформації слід віднести високі вимоги до пристроїв синхронізації на передавальному і приймальному боках.

Дискретизація безперервних сигналів у часі здійснюється на основі теореми Котельникова і теореми відліків Найквіста.

На рисунку 5.1 зображений безперервний сигнал  $X(t)$  з обмеженим спектром, тобто  $X(f) = 0$  при  $|f_c| \geq f_{\max}$ .

Тоді згідно з цією теоремою інтервал дискретизації  $\Delta t_g$  вибирається зі співвідношення  $\Delta t_g < \frac{\pi}{\omega_g} = \frac{1}{2f_{\max}}$  щоб можна було відновити сигнал на виході каналу зв'язку з якою завгодно заданою точністю.

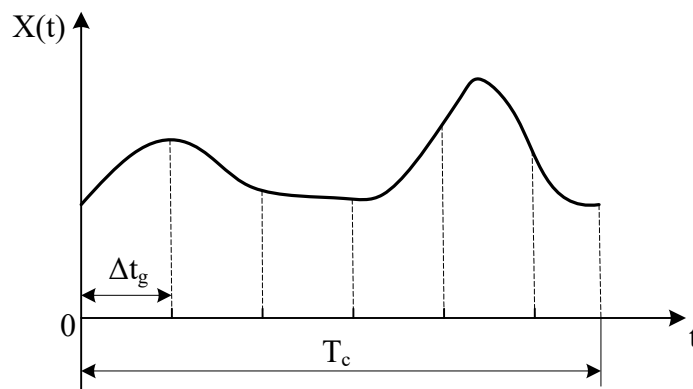


Рисунок 5.1 – Часова характеристика сигналу  $X(t)$

Як видно з рисунка 5.2, відліки  $\tilde{X}(t_k)$ , узяті в моменти часу  $t_k = k\Delta t_g$ , повністю визначають сигнал  $X(t)$ . Якщо тривалість сигналу дорівнює  $T_c$ , то кількість відліків сигналу дорівнюватиме  $k = T_c / \Delta t_g$ .

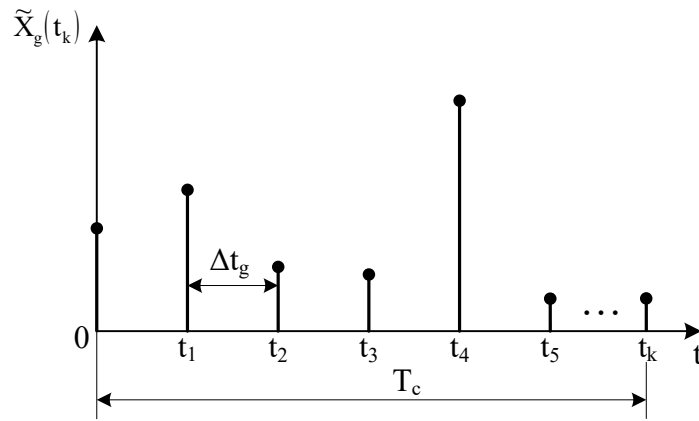


Рисунок 5.2 – Послідовність відліків дискретизованого сигналу

Далі здійснюється квантування сигналу за рівнем. Сенс цієї процедури полягає в тому, що вибирається кінцева кількість рівнів квантування, яка дорівнює цілочисельним значенням дискретизованого сигналу (наприклад від  $-4$  В до  $+4$  В з рівним кроком квантування  $\Delta U_{\text{кв}} = 1$  В, тобто 8 рівнів), і кожне істинне значення рівня квантування відліку замінюється найближчим цілим числом від  $-4$  В до  $+4$  В. На рисунку 5.3 показаний результат квантування сигналу, наведеного на рисунку 5.2.

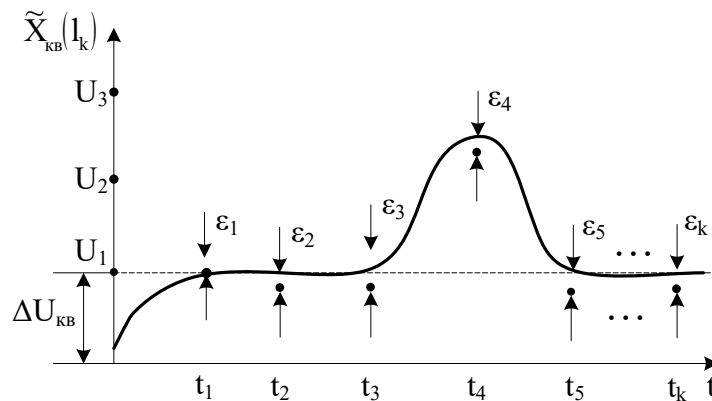


Рисунок 5.3 – Абсолютна похибка (шум квантування) при квантуванні сигналу

Як видно з рисунка 5.3, процес квантування сигналу за рівнем вносить помилку квантування, і відновлений сигнал  $\tilde{X}(t)$  відрізняється від початкового сигналу  $X(t)$  на величину помилки квантування  $\epsilon(t)$ , тобто

$$\tilde{X}(t) = X(t) \pm \epsilon(t). \quad (5.1)$$

Якщо квантування виконується з рівномірним кроком  $\Delta U_{\text{кв}}$ , то область зміни миттєвих значень шуму квантування (абсолютна похибка квантування)  $\varepsilon_{\text{кв}}(t)$  знаходитиметься в межах від  $-\frac{\Delta U_{\text{кв}}}{2}$  до  $+\frac{\Delta U_{\text{кв}}}{2}$ . На рисунку 5.3 показані абсолютні похибки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ , у моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_5$ . Зазвичай помилку квантування вважають рівномірно розподіленою в інтервалі  $\left[-\frac{\Delta U}{2}; +\frac{\Delta U}{2}\right]$ , тому математичне очікування і дисперсія помилки будуть відповідно дорівнювати

$$M[\varepsilon(t)] = 0;$$

$$D[\varepsilon(t)] = \int_{-\frac{\Delta U}{2}}^{\frac{\Delta U}{2}} \varepsilon^2 \frac{d\varepsilon}{\Delta t_g} = \frac{\Delta U_{\text{кв}}^2}{12}. \quad (5.2)$$

Дисперсією називають середню змінну потужність шумів квантування. Вона зменшується зі зростанням кількості рівнів квантування і при правильному виборі цієї кількості може стати істотно малою порівняно з потужністю адитивних завад. Наприклад, 32 рівні вважаються достатніми для якісної передачі мовних сигналів. На практиці в ряді випадків рівномірне квантування не застосовують, особливо в тих випадках, коли динамічний діапазон сигналів, що передаються, істотно змінюється. У цих випадках для зниження похибки квантування зменшують динамічний діапазон інформаційних сигналів.

Такий процес називають компресією динамічного діапазону сигналу і пов'язана вона зі зменшенням інтервалу квантування інформаційного сигналу і, отже, зменшенням потужності шумів квантування. Таку компресію можна робити перед рівномірним квантуванням корисного сигналу. Після декодування і відновлення сигналу на приймальному боці виконується зворотна операція, що називається експандуванням.

Таким чином, вплив шумів квантування і завад можна зменшити, оптимально вибираючи параметри квантування і штучно змінюючи динамічний діапазон корисних сигналів (компандування).

Цифрові методи передачі безперервної інформації по каналах зв'язку засновані на таких основних перетвореннях: дискретизації, квантуванні, кодуванні і модуляції. Розглянемо цифрову модуляцію. Її суть полягає в такому: безперервний сигнал квантується в часі і за рівнями; отримані після цього відліки сигналу в дискретні моменти часу розглядаються як числа в тій або іншій системі числення, які потім кодуються для перетворення їх у кодові комбінації електричних сигналів.

Отриманою кодовою послідовністю сигналів аналоговим або дискретним способом модулюється високочастотний сигнал-переносник. Останнє перетворення виконується, як правило, для багатоканальних систем. У решті випадків виконують операції квантування, дискретизації і кодування. Найбільше застосування на практиці отримали такі цифрові методи модуляції, як імпульсно-кодова модуляція (ІКМ) і дельта-модуляція (ДМ). На рисунку 5.4 зображені часові діаграми сигналів для ІКМ.

Тут  $V(t)$  – безперервний сигнал, який методом ІКМ перетворюється в кодову послідовність  $U(t)$ . Інтервал відліків вибирається за теоремою відліків, тобто  $\Delta t_g = \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ , де  $\omega_{\max}$  – верхня кутова частота спектра інформаційного сигналу  $V(t)$ .

Простішим порівняно з ІКМ є метод дельта-модуляції (ДМ). Суть цього методу полягає в тому, що в кожен дискретний момент часу  $t_k$  відліку передається позитивний імпульс постійної амплітуди і тривалості, якщо похідна сигналу в цій точці позитивна, і негативний імпульс, якщо похідна негативна (рисунок 5.5).

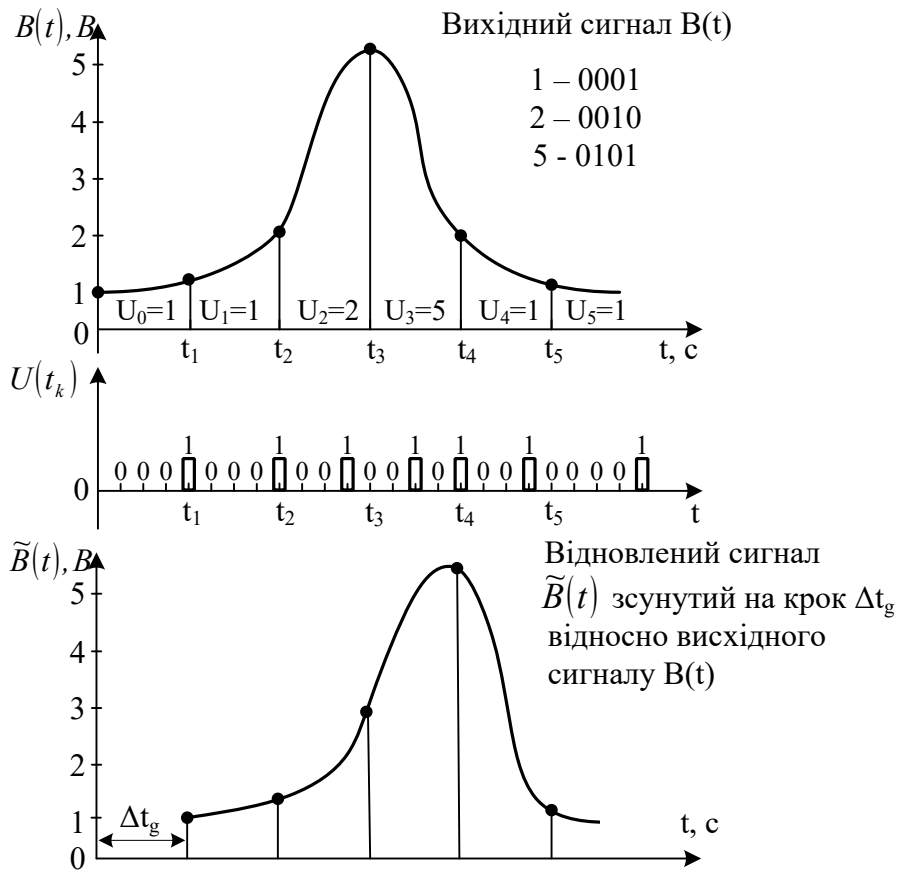


Рисунок 5.4 – Часові діаграми сигналів для ІКМ

У результаті кодування в дельта-модуляторі початкове повідомлення  $B(t)$  у вигляді безперервного сигналу перетвориться в послідовність позитивних і негативних імпульсів.

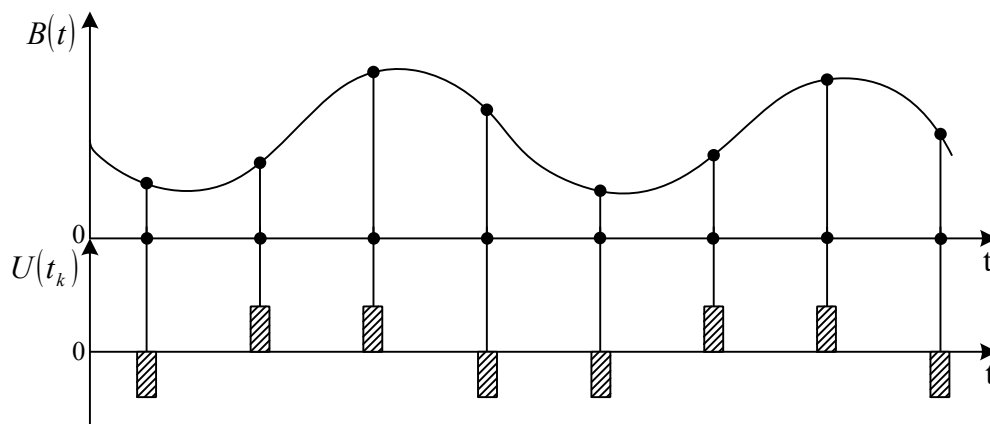


Рисунок 5.5 – Часові діаграми сигналів для ДМ

Для перетворення безперервних сигналів у цифровий код і навпаки в системах зв'язку використовують спеціальні пристрої: аналого-цифровий (АЦП) і цифро-аналоговий (ЦАП) перетворювачі. По суті АЦП здійснює метод ІКМ, тобто виконує такі операції: дискретизацію безперервного сигналу в часі, квантування за рівнем, а отримана послідовність квантованих значень за допомогою кодування подається у вигляді послідовності  $m$ -х кодових комбінацій (чисел). Найчастіше кодування тут використовується двійкове, тобто робиться запис номера рівня квантування у двійковому коді.

## 5.2 Принципи функціонування аналого-цифрових і цифро-аналогових перетворювачів

Спрощена структурна схема АЦП може бути подана у вигляді, зображеному на рисунку 5.6.

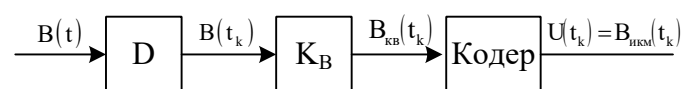
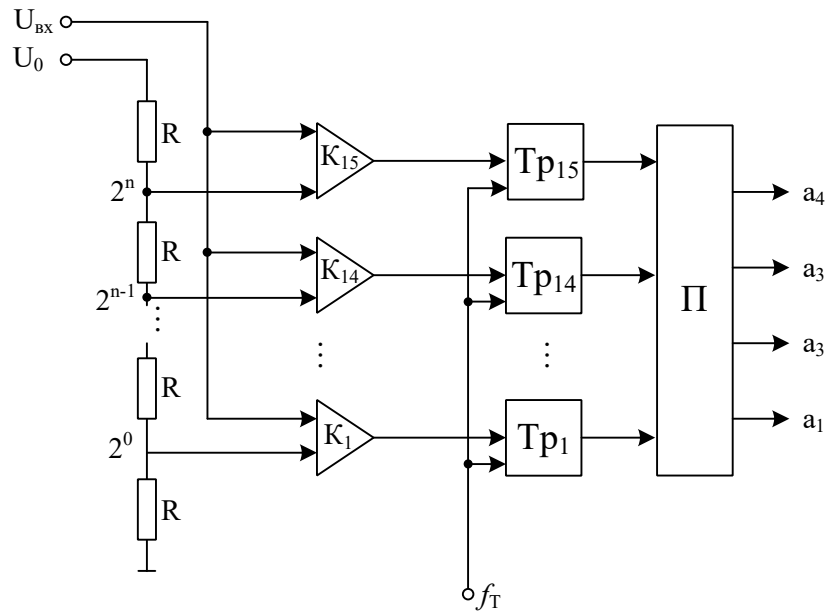


Рисунок 5.6 – Спрощена схема АЦП

Принцип його роботи полягає в тому, що спочатку безперервне повідомлення  $V(t)$  дискретизується в часі через інтервали  $\Delta t_g$ , далі отримані відліки  $V(t_k)$  квантуються за рівнями  $V_{кв}(t_k)$ , і кожне квантоване значення  $V_{кв}(t_k)$  у момент часу  $t_k = \Delta t_g k$  кодується відповідним двійковим числом  $V_{икм}(t_k)$ .

Функціональна схема АЦП подана на рисунку 5.7.



$U_{\text{вх}}$  – вхідний аналоговий сигнал;  $U_0$  – опорна напруга;  
 $K_j$  – компаратор (порівняння); Тр – тригер;  
 П – перетворювач у двійковий код;  
 $f_T$  – тактова частота, що задає частоту дискретизації

Рисунок 5.7 – Функціональна схема АЦП

### ***Принцип роботи АЦП***

Вхідний аналоговий сигнал  $U_{\text{вх}}$  надходить на всі компаратори  $K_1, K_2, \dots, K_{15}$  і порівнюється з опорною напругою  $U_0$ , яка дільником, що складається з резисторів  $R$ , ділиться на  $2^n$  рівнів квантування. Кожен  $i$ -й компаратор видає сигнал «0», якщо вхідний сигнал  $U_{\text{вх}} < U_{0i}$  опорної напруги на цьому компараторі, і сигнал «1», якщо вхідний сигнал зрівняється з  $U_{0i}$  або перевищить його. Наприклад, якщо опорна напруга має значення у вольтах  $K_1 U_{01} = 1, K_2 U_{02} = 2, \dots, K_{15} U_{015} = 15$ , а на вхід подається рівень сигналу  $U_{\text{вх}} = 12$  В, то компаратори  $K_1, \dots, K_{12}$  перейдуть у стан «1», а компаратори  $K_{13} = K_{14} = K_{15}$  – у стан «0». Цей двійковий код записується в Т-тригери і потім перетворюється в перетворювачі П в паралельний код з 4-х розрядів. (Для 16 рівнів квантування досить 4-розрядного двійкового коду, оскільки  $2^4 = 16$ .)

Тепер розглянемо паралельний 4-розрядний ЦАП, зображений на рисунку 5.8.

Числові значення кодових посилок, що поступають на ЦАП, можна записати у вигляді

$$n = \frac{1}{2^n} (a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_n 2^0).$$

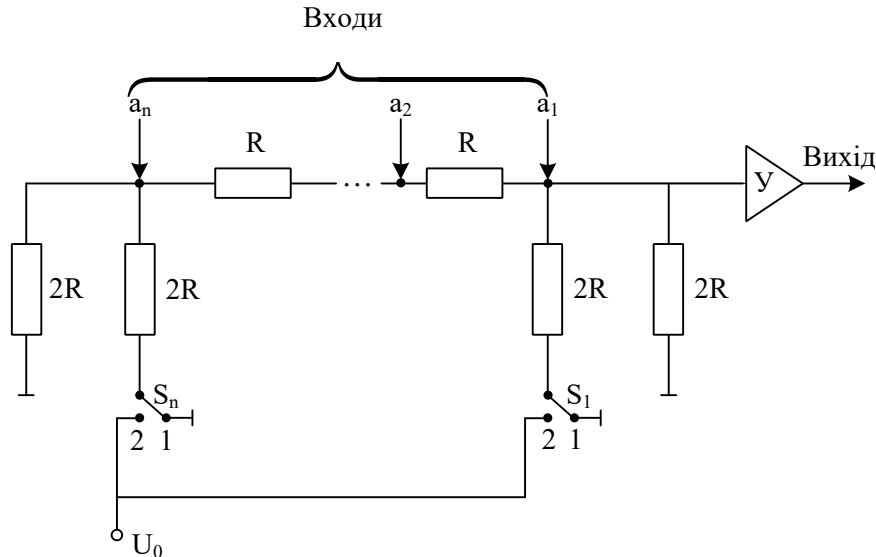


Рисунок 5.8 – Функціональна схема ЦАП

При надходженні сигналу, що відповідає символу «1», ключ  $S_i$  переходить у положення 2, а при надходженні символу «0» ключ  $S_i$  переходить у положення 1. Коефіцієнт передачі вихідного підсилювача  $У$  дорівнює  $3/2$ . Тут  $a_1$  – старший розряд,  $a_n$  – молодший. Якщо в положенні 2 (тобто  $a_1 = 1$ ) знаходиться тільки перемикач першого розряду, то вихідна напруга буде дорівнювати  $U_{\text{вих}} = \frac{U_0}{3}$ , В. Якщо  $a_2 = 1$  і  $a_1 = 0$ , то  $U_{\text{вих}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_0}{3 \cdot 2} = \frac{U_0}{4}$ , В. Якщо на вхід ЦАП поступає кілька одиничних символів, то напруга на опорах  $R$  підсумовується за формулою, В,

$$U_{\text{вих}} = U_0 \cdot 2^{-n} \sum_{i=1}^n a_i 2^{n-i}.$$

Наприклад, якщо код має вигляд 1010, то отримаємо, В,

$$U_{\text{вих}} = \frac{10}{16} U_0.$$



Розглянуті вище методи перетворення аналогових сигналів призначені для відтворення форми цих сигналів з максимальною точністю. Ці методи не враховують апріорних даних про сигнал і по суті можуть бути застосовані для будь-яких безперервних сигналів.

Розглянемо тепер спеціальну групу пристроїв перетворення безперервних сигналів у цифрову форму. Ці пристрої в основному орієнтовані на перетворення тільки мовних безперервних сигналів і отримали назву вокодери (кодери голосу). Способи перетворення мовних сигналів у цифрову форму, використовувані у вокодерах, дуже специфічні і тому не використовуються в телефонних мережах загального призначення, де разом з мовними сигналами має бути забезпечена передача і інших аналогових сигналів.

Крім того, вокодери, як правило, створюють ненатуральне або синтетичне звучання мови. Основним призначенням вокодерів є кодування тільки важливих для сприйняття параметрів мови зі зменшеною кількістю символів порівняно з їхньою загальною кількістю, які забезпечують необхідний рівень якості сприйняття мови. Тому вокодери можуть бути використані для передачі мови в обмеженій смузі, чого не можуть забезпечити інші засоби. Основним їх застосуванням є передача сигналів типу «неправильно набраний номер», передача засекречених сигналів, формування мовного сигналу на виході ЕОМ та ін.

### **Контрольні питання та задачі**

- 1 Пояснити процеси перетворення безперервного сигналу в цифровій.
- 2 Пояснити суть квантування дискретизованого сигналу.
- 3 Що називається помилкою квантування і як вона визначається для рівномірного квантувача?
- 4 Що називається шумом квантування і як він визначається для рівномірного квантувача?
- 5 Що називається компандуванням сигналу, з яких перетворень воно складається?

6 Що називається дельта – перетворенням (ДП) сигналів? Пояснити графічно часові діаграми формування кодованих сигналів за способом ДП.

7 Навести структурні схеми кодера і декодера при ІКМ і ДП.

8 Пояснити способи кодування при перетворенні сигналів.

## **ЛЕКЦІЯ 6. Завадостійке кодування інформації в системах телекомунікацій**

### **План**

6.1 Класифікація завадостійких кодів.

6.2 Принципи побудови завадостійких кодів.

6.2.1 Код Хеммінга.

6.2.2 Циклічні коди.

6.3 Структурні схеми кодерів і декодерів циклічних кодів.

6.4 Згорткові коди.

**Мета** – ознайомити з принципами кодування джерел повідомлення; навести класифікацію завадостійких кодів і розглянути принцип побудови циклічних і згорткових код.

### **6.1 Класифікація завадостійких кодів**

Використання цифрових методів передачі повідомлень і сигналів дає цілий ряд переваг системам зв'язку. Однією з таких переваг є можливість використання завадостійкого кодування сигналів на основі використання спеціальних кодів для підвищення правильності передачі інформації.

У техніці передачі дискретних повідомлень найбільшого поширення набули двійкові коди з основою  $m=2$ . Тому надалі вважатимемо, що кодові комбінації, що відображують початкове повідомлення, це  $n$ -розрядні двійкові коди. Тривалість передачі одного одиничного елемента кодової комбінації (у даному випадку 0 або 1) називають одиничним часовим інтервалом  $\tau_0$ . Тоді швидкість передачі одиничних елементів запишеться у вигляді, Бод,

$$V = \frac{1}{\tau_0}. \quad (6.1)$$

Звичайний натуральний код з основою  $m=2$  має низьку ефективність, тому при аналого-цифровому перетворенні застосовують двійковий код Грея, у якому кодові послідовності формуються зі звичайного натурального (симетричного або несиметричного) коду за таким правилом:

$$\oplus \begin{array}{r} 1101 \\ 1101 \\ \hline 1011 \end{array} .$$

Первинні коди джерел повідомлень можна поділити на дві групи: нерівномірні і рівномірні. Нерівномірні коди характеризуються тим, що кодові комбінації складаються з різної кількості  $n$  одиничних елементів. Прикладом такого коду є радіотелеграфний код Морзе, де точка – це 1, тире – 111, 0 – розділяє точки і тире, 000 – розділяє кодові комбінації (букви, цифри). При такому кодуванні тривалість кодової комбінації, що відповідає букві Е, дорівнює  $4\tau_0$ , букві Т дорівнює  $6\tau_0$ , а цифрі 0 дорівнює  $22\tau_0$ .

Нерівномірність коду при його застосуванні ускладнює декодування кодових комбінацій, оскільки приймач не лише повинен відрізнити одиничні елементи 0 від 1, але і реагувати на тривалість кодової комбінації. Тому на практиці в основному використовують рівномірні первинні коди з постійною кількістю  $n$  одиничних елементів в усіх кодових комбінаціях. Загальна кількість  $n$ -елементних кодових комбінацій двійкового рівномірного коду дорівнює  $K=2^n$ . Прикладом такого коду є стандартний 5-елементний код МТК-2, прийнятий як міжнародний стандарт.

Таким чином, як первинні коди  $V(t)$  надалі розглядатимемо рівномірні двійкові коди (натуральні або коди Грея) з кількістю розрядів  $n$ . Для підвищення правильності передачі таких кодів каналами зв'язку використовується додаткове їх перетворення в кодері каналу, що називається завадостійким кодуванням.

Суть завадостійкого кодування полягає у введенні в первинні коди  $V(t)$  деякої надмірності. Тому завадостійкі коди називають надмірними. Завдання завадостійкого кодування полягає в такому додаванні до інформаційних символів

первинних кодів додаткових символів, які називаються перевірними або контрольними, щоб каналним декодером могли бути виявлені або виправлені помилки, що виникають під дією завад при передачі кодових послідовностей каналами зв'язку.

Існує безліч різних способів введення надмірності в коди. Надмірні коди поділяються на блокові і безперервні. У блокових кодах передавана інформація розбивається на окремі блоки – кодові комбінації, які кодуються і декодуються незалежно. Якщо кількість елементів первинного коду дорівнює  $k$ , а додаткових перевірних елементів коду, що вводяться, дорівнює  $r$ , то загальна кількість елементів у кодовій комбінації блокового надмірного коду дорівнює  $n = k + r$ .

У безперервних кодах передавана інформаційна послідовність не розділяється на блоки, а перевірні елементи розміщуються в певному порядку між інформаційними. На практиці найчастіше використовуються блокові коди. Блокові коди можуть бути рівномірними і нерівномірними. У рівномірних кодів тривалості всіх кодових комбінацій однакові, тобто  $n = \text{const}$ . Блокові коди також поділяються на роздільні і нероздільні. У роздільних кодах інформаційні і перевірні елементи в усіх кодових комбінаціях займають строго певні позиції. Тому роздільні коди позначають як  $(n, k)$ -коди. У нероздільних кодах інформаційні і перевірні елементи можуть знаходитися в різних кодових комбінаціях на різних позиціях.

Роздільні коди поділяються на лінійні (систематичні) і нелінійні (несистематичні). Перші названі так тому, що їхні перевірні елементи отримують на основі розв'язання лінійних рівнянь, які складаються з певних комбінацій інформаційних елементів. Велику і важливу групу лінійних кодів утворюють циклічні коди. Нелінійні коди характеризуються наявністю двох і більше перевірок усередині кожної кодової комбінації. Класифікацію завадостійких кодів подано на рисунку 6.1.

Наявність у кодових комбінаціях завідомо більшої кількості одиничних елементів  $n > k$ , ніж це мінімально необхідно для первинного кодування, призводить до того, що з загальної кількості  $N = 2^n$  кодових комбінацій  $(n, k)$  тільки  $N_p = 2^k$  є дозволеними, а інші  $N_s = (N - N_p)$  є забороненими і для кодування

повідомлень не використовуються. Надмірність завадостійких кодів оцінюється коефіцієнтом надмірності

$$K_u = \frac{\log 2^k}{\log 2^n} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n}. \quad (6.2)$$

За своїми коригувальними властивостями надмірні коди поділяються на коди, що виявляють помилки, що виправляють помилки, і такі, що частково виявляють і виправляють помилки. Очевидно, що чим більша надмірність коду, тим кращі його коригувальні властивості. Це пояснюється тим, що чим більша величина  $r$ , і отже  $n$ , при заданому  $k$ , тим легше з загальної кількості кодових комбінацій  $N_0$  вибрати  $N_p$  дозволених кодових комбінацій, що помітно розрізняються між собою.

Міра відмінності кодових комбінацій характеризується кодовою відстанню  $d$ , яка визначається як кількість позицій одиничних елементів, якими одна кодова комбінація відрізняється від іншої.

Наприклад, кодова відстань  $d$  між комбінаціями 100001 і 011100 буде дорівнювати  $d=4$ . Вагою  $W_k$  кодової комбінації є кількість одиниць, що входять у неї. Так, вага комбінації 100001 дорівнює  $W_{k1} = 2$ , а вага комбінації 011100 дорівнює  $W_{k2} = 3$ .

$$\oplus \begin{array}{r} 100001 \\ 011100 \\ \hline 111101 \end{array}.$$

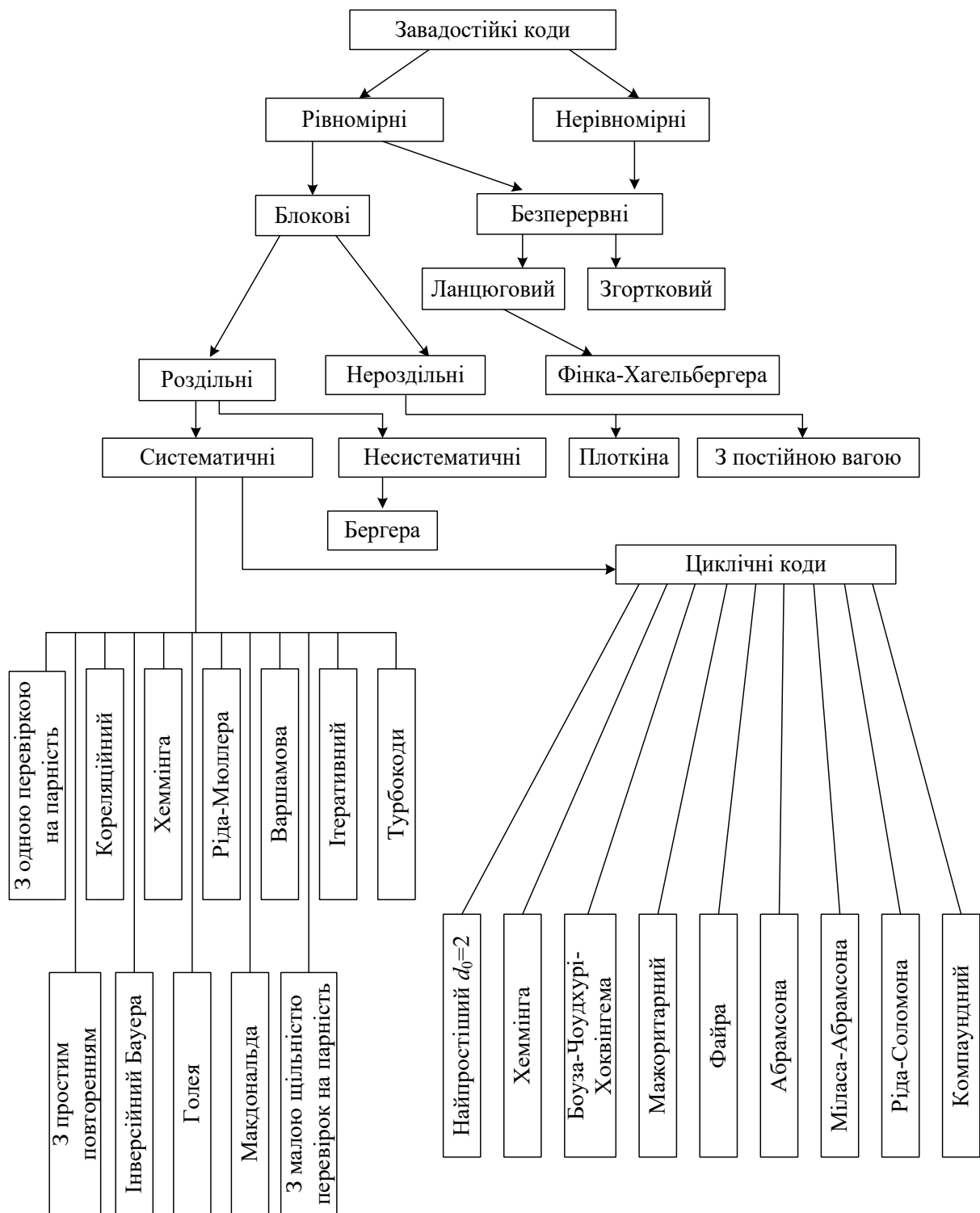


Рисунок 6.1 – Класифікація завадостійких кодів

З іншого боку, сума цих кодових комбінацій за модулем 2 дає сумарну комбінацію, що дорівнює 111101, вага якої становить  $W_k = 5$  і дорівнює кодовій відстані між комбінаціями-доданками 100001 і 011100.

Коригувальні властивості коду визначаються мінімальною кодовою відстанню  $d_0$  (відстань Хеммінга) між будь-якими двома кодовими комбінаціями з усієї кодової таблиці. Так, наприклад, для первинного коду МТК-2 усі кодові комбінації дозволені і відстань Хеммінга  $d_0=1$ . Це означає, що спотворення хоча б одного одиничного елемента будь-якої кодової комбінації коду МТК-2 призводить до заміни цієї кодової комбінації на іншу, тобто помилки при цьому не можуть бути виявлені. Для виявлення помилок необхідно, щоб  $d_0 \geq t_0 + 1$ , де  $t_0$  - кратність виявлених кодом помилок.

Для виправлення виникаючих помилок необхідно, щоб відстань від забороненої кодової комбінації, що приймається з помилками, до переданої дозволеної комбінації була меншою, ніж до будь-якої іншої дозволеної комбінації. Іншими словами, необхідно, щоб кратність помилки не перевищувала половини кодової відстані  $d_0 \geq 2t_u + 1$ , де  $t_u$  - кратність помилок, що виправляються. Визначувані з вказаних виразів значення  $t_0$  і  $t_u$  дають кількість помилок, що гарантовано виявляються і виправляються. З цих виразів також випливає, що коди, які виправляють помилки, можна використати для гарантованого виявлення помилок кратністю  $t_0 = 2t_u$ . Щоб код виявляв помилки кратністю  $t_0$  і виправляв помилки кратністю  $t_u$ , кодова відстань має бути  $d_0 \geq t_0 + t_u + 1$ .

## **6.2 Принципи побудови завадостійких кодів**

### **6.2.1 Код Хеммінга**

Введення в коди надмірності можна здійснювати за різними правилами. Одним із найчастіше використовуваних правил є правило перевірки на парність або непарність кількості одиниць у кодовій комбінації (дозволеній). Комбінації цього коду утворюються додаванням до інформаційних  $k$ -елементів (бітів у разі двійкового коду) одного перевірного  $(k+1)$  біта, так щоб повна кількість одиниць у кодовій комбінації була парною, якщо код перевіряється на парність.

Якщо  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  – одиничні елементи первинного коду, а у випадку коду з перевіркою на парність  $b$  – перевірний елемент, то для забезпечення парної кількості одиниць необхідно, щоб

$$b = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k$$

або

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k + b = 0,$$

де  $\oplus$  – сума за модулем 2.

Наприклад, для  $k=4$  код з перевіркою на парність матиме вигляд

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
 \hline
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b & .
 \end{array}$$

Такий код має  $d_0 = 2$ , і отже він не може виправити жодної помилки. Такий код може виявити одну помилку, а код з перевіркою на парність може виявляти всі помилки непарної кратності (поодинокі, потрійні і т. д.).

До найпростіших завадостійких лінійних блокових кодів належить також код Хеммінга, що має  $d_0 = 3$  і дозволяє виправити одну помилку. Цей код будується таким чином (для прикладу розглянемо код (7,4)). До чотирьох інформаційних бітів  $a_1 a_2 a_3 a_4$  додаємо три перевірних  $b_1 b_2 b_3$  біти, задаючи їх рівністю вигляду

$$\begin{aligned}
 a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 &= b_1, \\
 a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 &= b_2, \\
 a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 &= b_3.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

(при формуванні цих правил кожен інформаційний елемент  $a_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) повинен брати участь як мінімум у  $(r-1)$  перевірках на парність із загальної їхньої кількості  $r$ ).

Виконання умови (6.3) означає, що помилка відсутня. Невиконання першої і третьої рівності свідчить про помилкове



приймання  $a_1$ ; першого і другого – про помилку  $a_3$ ; першого, другого і третього – про помилку  $a_2$ ; другого і третього – про помилку  $a_4$ . Наведене вище правило формування перевірних елементів  $b_1b_2b_3$  коду Хеммінга дозволяє перевіркою на парність кожної кодової комбінації визначити порядковий номер спотвореного елемента. Результат перевірки на парність зручно представити  $r=3$  розрядним перевірним двійковим числом, що називається синдромом помилки ( $S_1, S_2, S_3$ ):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus b_1, \\ s_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus b_2, \\ s_3 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus b_3. \end{aligned} \quad (6.4)$$

З виразу (6.4) можна зробити висновок, що є лише вісім можливих синдромів помилки: один – для випадку відсутності помилки  $s=(0,0,0)$  і сім для кожної з помилок (за кількістю позицій коду  $n=7$ ). Кожна з помилок має свій єдиний синдром. Отже, за цим синдромом можна виявити помилку і вказати її позицію:  $(s_1, s_2, s_3) : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ .

Приклад. Первинний код  $A=(a_1a_2a_3a_4)=0001$ . Тоді у відповідності з виразом (6.4) можна записати

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0, \\ b_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1, \\ b_3 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1. \end{aligned}$$

Звідси початкова кодова комбінація, представлена в кодї Хеммінга, матиме вигляд

$$a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3 = 0001011.$$

Ця кодова комбінація передається каналом зв'язку з адитивними завадами, під дією яких відбувається спотворення, припустимо, одного  $a_2$ -символу. Тоді спотворена кодова комбінація матиме вигляд

$$a'_1a'_2a'_3a'_4b'_1b'_2b'_3 = 0101011.$$

Відповідно до виразу (6.4) обчислюємо синдром помилки  $S=S_1S_2S_3$ .

$$s_1 = a'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_3 \oplus b'_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$$

$$s_2 = a'_2 \oplus a'_3 \oplus a'_4 \oplus b'_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$s_3 = a'_1 \oplus a'_2 \oplus a'_4 \oplus b'_3 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Синдром 111 вказує на спотворення шостого за номером символу кодової комбінації при відліку справа наліво. Незавжди бачити, що якщо кодова комбінація коду Хеммінга прийнята правильно або стався перехід з однієї дозволеної комбінації в іншу, то синдром  $s=000$ , тобто помилка відсутня в будь-якому з семи символів.

Якби помилка була в символі  $a_4$ , то синдром набрав би вигляду  $s=011$ . Таким чином, він вказує на спотворення символу  $a_4$ . А якщо відоме місце спотвореного символу, то його можна відновити, тобто виправити поодинокую помилку.

Схемна реалізація кодера і декодера лінійного блокового коду Хеммінга показана на рисунках 6.2, 6.3.

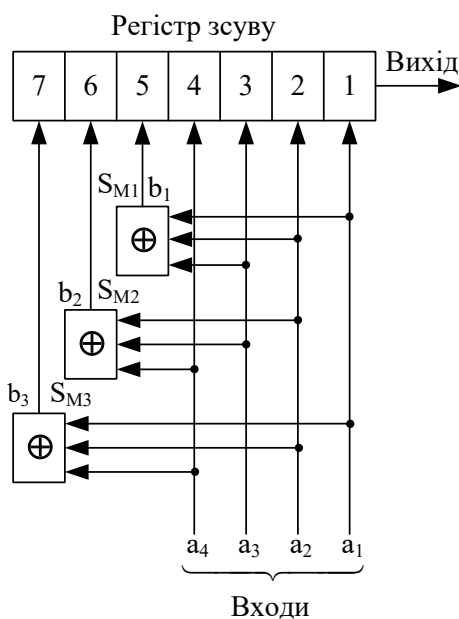


Рисунок 6.2 – Структурна схема кодера коду Хеммінга (7,4)

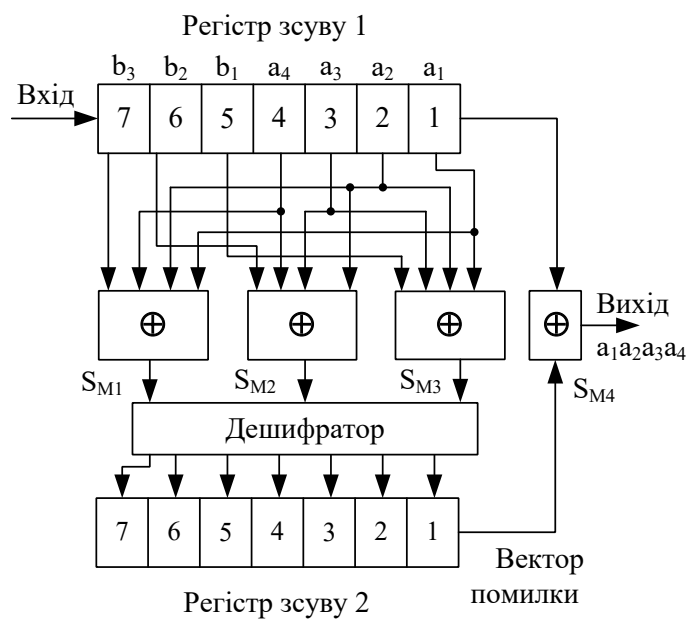


Рисунок 6.3 – Структурна схема декодера коду Хеммінга (7,4)

Основним завданням при побудові лінійних (систематичних) рівномірних блокових кодів, як і будь-яких інших завадостійких кодів, є розроблення правил (алгоритмів) формування перевірних елементів. Нагадаємо, що ці правила полягають у тому, щоб у результаті перевірок на парність

кількості одиниць у передаваній кодовій комбінації можна було вказати позиції (номери) спотворених елементів.

Послідовність кодових комбінацій первинного  $k$ -розрядного коду повідомлення можна записати у вигляді матриці розміром  $n \times k$ .

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Щоб не записувати всі кодові комбінації цієї матриці, можна записати одиничну первинну матрицю розміром  $k \times k$  у вигляді

$$I_k = \begin{pmatrix} 100 & \dots & 0 \\ 010 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 000 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

а всі кодові комбінації матриці  $A_{n,k}$  отримати за допомогою поелементного додавання за модулем 2 рядків одиничної матриці  $I$  в усіх можливих поєднаннях. Загальну кількість таких додавань запишемо у вигляді

$$N_0 = C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = 2^k - 1.$$

Взагалі  $N_0 = 2^k$  і зменшення на одиницю пов'язано з відсутністю комбінації  $000\dots 0$ .

Щоб задати надмірний код, необхідно побудувати утворювальну матрицю  $H_{n,k}$ , лівою частиною якої є одинична матриця  $I_k$  первинного коду, а правою  $R_{r,k}$  – матриця перевірних елементів. Розмірність такої матриці  $n \times k$ .

$$H_{n,k} = I_k \times R_{r,k} = \begin{pmatrix} 10 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 01 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 1 & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kr} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Тепер на основі утворювальної матриці  $H_{n,k}$  можна побудувати перевірну матрицю  $H_{n,r}$  розмірністю  $n \times r$ , ліва частина якої – це транспонована матриця перевірних елементів розмірністю  $k \times r$ , а права – одинична матриця розмірністю  $r \times r$ .

$$H_{n,r} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} & 10 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} & 01 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1r} & b_{2r} & \dots & b_{kr} & 00 & \dots & 1 \end{vmatrix}}{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k \quad b_1 b_2 \quad \dots \quad b_r} \quad (6.8)$$

Одиниці в рядках матриці  $H_{n,r}$  стоять на позиціях елементів, що беруть участь у перевірці на парність при формуванні відповідних  $b_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ). Таким чином, якщо задана утворювальна матриця  $M_{n,k}$ , то, побудувавши за нею перевірну матрицю  $H_{n,r}$ , можна знайти правила формування перевірних груп елементів. Такий матричний підхід зручний при побудові лінійних блокових кодів з великою кількістю розрядів  $k$  і  $r$ .

### 6.2.2 Циклічні коди

Циклічні коди – це різновид лінійних рівномірних і розподільних блокових кодів. Вони призначені для виявлення і виправлення помилок і називаються циклічними тому, що дозволена кодова комбінація може бути отримана з будь-якої іншої дозвільної способом циклічного зсуву старшого розряду на місце молодшого.

Будь-яке  $k$ -розрядне число можна подати у вигляді багаточлена

$$F(x) = a_{k-1}m^{k-1} + a_{k-2}m^{k-2} + \dots + a_1m^1 + a_0m^0. \quad (6.9)$$

Тут  $m$  – основа коду, а коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  можуть набувати значення 0 або 1.

Для двійкових кодів ( $m=2$ ) вираз (6.4) матиме вигляд

$$F(x) = a_{k-1}2^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2} + \dots + a_12^1 + a_02^0. \quad (6.10)$$

Наприклад, кодову комбінацію 1111 можна записати так:

$$F_1 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

а комбінацію 1001 можна подати як

$$F_2 = x^3 + 1.$$

Таке представлення двійкових чисел компактніше. Над багаточленами можна виконувати будь-які алгебраїчні операції (множення, ділення і т. д.) за винятком додавання і віднімання, які замінюються на підсумовування за модулем два, наприклад

$$F_1(x) \oplus F_2(x) = x^2 + x.$$

В основі побудови циклічних кодів лежить представлення їх у вигляді вказаних вище багаточленів. Широке застосування таких кодів обумовлене їхньою здатністю виявляти і виправляти помилки різної конфігурації, зручністю математичного апарату для опису і порівняльною простотою технічної реалізації кодерів і декодерів.

Побудова циклічних кодів заснована на представленні первинного коду у вигляді багаточлена  $f(x)$  у степені  $k-1$ , помноженого на степінь утворювального багаточлена, і додавання до цього добутку залишку  $R(x)$  від ділення вказаного добутку на утворювальний багаточлен. Тоді багаточлен циклічного коду запишеться у вигляді

$$F(x) = f(x)x^r \oplus R(x). \quad (6.11)$$

Множення  $f(x)$  на  $x^r$  потрібно, щоб зсунути інформаційні елементи на  $r$  розрядів вліво і тим самим звільнити справа  $r$  розрядів для запису  $r$  перевірних елементів.

Побудований таким чином багаточлен  $F(x)$  повинен ділитися без залишку на утворювальний багаточлен  $M(x)$  степеня  $r$ , тобто

$$\frac{F(x)}{M(x)} = \frac{f(x)x^r + R(x)}{M(x)} = Q(x), \quad (6.12)$$

або, врахувавши правила алгебри двійкових чисел,

$$\frac{f(x)x^r}{M(x)} = Q(x) \oplus \frac{R(x)}{M(x)}, \quad (6.13)$$

де  $Q(x)$  – частка від ділення багаточленів.

Звідси видно, що багаточлен перевірних елементів  $R(x)$  є залишком від ділення добутку  $f(x)x^r$  на  $M(x)$ . Оскільки максимальний степінь залишку завжди хоча б на одиницю менший степеня дільника, стає зрозуміло, чому степінь утворювального багаточлена вибирається рівним  $r$ .

Приклад. Нехай задана п'ятиелементна комбінація  $k=5$  первинного коду  $10000 = f(x) = x^4$ . Необхідно побудувати циклічний код, маючи на увазі можливість виправлення одноразових помилок (тобто  $d_0=3$ ). Цю умову задовольняє  $r=4$ . Виберемо утворювальний багаточлен вигляду  $M(x) = x^4 + x + 1$  і розділимо добуток  $f(x) \cdot x^r$ , що відповідає двійковому числу 100000000, на  $M(x) = x^4 + x + 1$ :

$$\begin{array}{r|l}
 x^8 & x^4+x+1 \\
 \hline
 x^8+x^5+x^4 & x^4+x+1 \\
 \hline
 x^5+x^4 & \\
 x^5 & +x^2+x \\
 \hline
 & x^4+x^2+x \\
 & x^4 & +x+1 \\
 \hline
 & x^2 & +1
 \end{array}$$

Таким чином, частка від ділення дорівнює  $R(x) = x^2 + 1$  або у двійковому коді 0101.

Тоді кодова комбінація циклічного коду запишеться у вигляді  $F(x) = f(x)x^r + R(x)$  або у двійковій формі 100000101.

При прийманні комбінації циклічного коду  $F(x)$  її належність до дозволеної або забороненої визначається відсутністю або наявністю частки від ділення на утворювальний багаточлен  $M(x)$ . Для виправлення помилок треба, щоб частка від ділення  $R(x)$  служила синдромом помилки. Тобто кожному варіанту помилкової кодової комбінації повинна однозначно відповідати своя частка. Для цього необхідно правильно вибрати утворювальний багаточлен  $M(x)$ . Зазвичай у якості  $M(x)$  вибирають неприведені багаточлени, які можуть бути представлені у вигляді добутку багаточленів нижчих степенів.

Приклад таких багаточленів для деяких значень перевірних символів  $r$  зведений у таблицю 6.1.

Таблиця 6.1 – Неприведені багаточлени для  $r=1;2;3;4$

$r$	Види багаточленів $M(x)$
1	$x+1$
2	$x^2+x+1$
3	$x^3+x+1$ $x^3+x^2+1$
4	$x^4+x+1$ $x^4+x^3+1$ $x^4+x^3+x^2+x+1$

Проте не завжди неприведений багаточлен зможе бути утворювальним багаточленом. Це можна продемонструвати на прикладі.

Розглянемо приклад побудови циклічного коду (9.5) для комбінації первинного коду  $x^4 = 10000 = f(x)$ . Кількість перевірних елементів  $r=4$  має бути при  $k=5$  і  $d_0=3$ . Отже, утворювальний багаточлен  $M(x)$  має степінь  $r=4$ . Для  $r=4$  в таблиці 6.1 є три неприведені багаточлени. Побудуємо для кожного з них комбінації в циклічному коді. Так, для першого утворювального багаточлена  $x^4 + x + 1$  маємо

$$\begin{array}{r}
 \oplus \begin{array}{r} x^8 \\ x^8+x^5+x^4 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} x^4+x+1 \\ x^4+x+1 \end{array} \\
 \hline
 \oplus \begin{array}{r} x^5+x^4 \\ x^5 \quad +x^2+x \end{array} \\
 \oplus \begin{array}{r} x^4+x^2+x \\ x^4 \quad +x+1 \end{array} \\
 \hline
 x^2 + 1 \quad \text{або у двійковому вигляді } 0101 .
 \end{array}$$

Тоді перша кодова комбінація запишеться у вигляді  $F_1(x) = f(x)x^r + r(x) = 100000101$ .

$$\begin{array}{r}
\oplus \frac{x^8}{x^8+x^7+x^4} \left| \frac{x^4+x^3+1}{x^4+x^3+x^2+x} \right. \\
\oplus \frac{x^7+x^4}{x^7+x^6+x^3} \\
\oplus \frac{x^6+x^4+x^3}{x^6+x^5+x^2} \\
\oplus \frac{x^5+x^4+x^3+x^2}{x^5+x^4+x} \\
\hline
x^3+x^2+x \quad \text{або у двійковому вигляді 1110} \cdot
\end{array}$$

Тоді друга кодова комбінація матиме вигляд  $F_2(x) = 100001110$ .

Для третього утворювального багаточлена  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  маємо

$$\begin{array}{r}
\oplus \frac{x^8}{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4} \left| \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4+x^3} \right. \\
\oplus \frac{x^7+x^6+x^5+x^4}{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3} \\
\hline
x^3 \quad \text{або у двійковому вигляді 1000.}
\end{array}$$

А третя кодова комбінація запишеться у вигляді  $F_3(x) = 100001000$ .

Як видно з прикладу, вага першої кодової комбінації  $w_1 = 3 = d_0$ , другої —  $w_2 = 4 > d_0$ , а третьої —  $w_3 = 2 < d_0$ . Це означає, що третій неприведений багаточлен  $M_3(x)$  не може бути використаний як утворювальний для циклічного коду, що виправляє поодинокі помилки з мінімальною кодовою відстанню  $d_0 = 3$ .

### 6.3 Структурні схеми кодерів і декодерів циклічних кодів

Для побудови кодувального пристрою циклічного коду необхідно мати схему, що обчислює частку  $R(x)$  від ділення добутку  $F(x)x^r$  на утворювальний багаточлен  $M(x)$ . Таку схему можна реалізувати на регістрі зсуву зі зворотними зв'язками і суматорах за модулем 2. Ділення добутку  $f(x)x^r$  на багаточлен  $M(x)$ , тобто дільник зводиться до додавання за модулем 2 числа,



що відповідає багаточлену дільника, спочатку зі старшими розрядами діленого, а потім з проміжними частками.

Це може бути реалізовано на основі регістра зсуву, кількість комірок (Д-тригерів) якого дорівнює степеню утворювального багаточлена  $M(x)$ , а в колах зворотних зв'язків включені суматори за модулем 2, кількість і місце яких визначається ненульовими коефіцієнтами утворювального багаточлена  $M(x)$ . Наприклад, кодуєчий пристрій циклічного коду (7,4), побудований за утворювальним багаточленом ( $r=3$ )  $M(x)=x^3+x+1$ , має вигляд, зображений на рисунку 6.4.

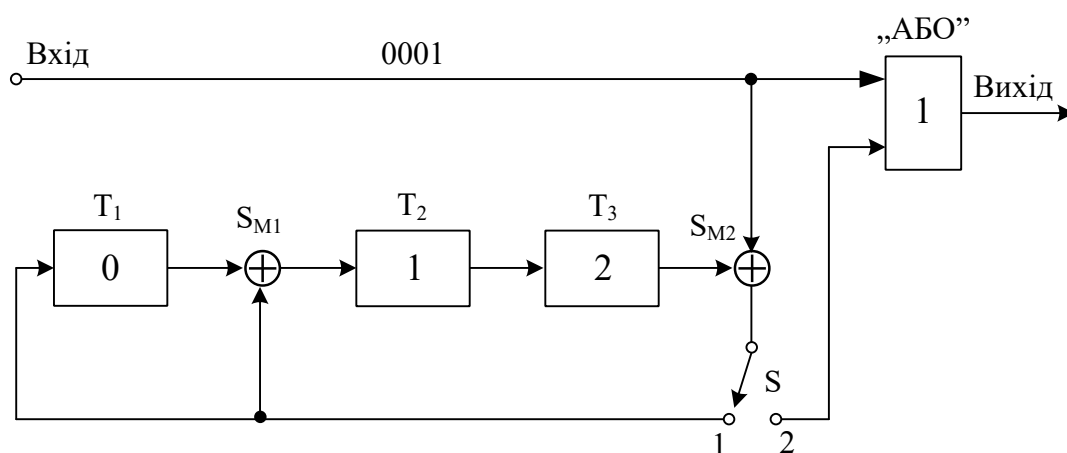


Рисунок 6.4 – Структурна схема кодера циклічного коду (7,4)

Правило заповнення комірок регістра зсуву полягає в такому. Якщо на вході комірки (Д-тригера) включений суматор за модулем 2 (комірки 0 і 1), результат записується в цю комірку як сума за модулем 2 сигналу з сусідньої комірки (передуючої) і сигналу зворотного зв'язку в даному такті.

Нехай  $f(x)=x^3$  або у двійковому коді 1000. Цей сигнал послідовно старшими розрядами поступає в комірки регістра і одночасно з'являється на виході через схему «АБО» (ключ S у положенні 1). У результаті за перші  $k=4$  такти на виході з'явиться послідовність  $f(x)$ , а в регістрі сформується частка  $R(x)$  від ділення добутку  $f(x)x^r$  на  $M(x)$ . Тоді ключ S переводиться в положення 2 і на виході з'являється частка  $R(x)$ . Тобто за  $k+r$  тактів на виході формується кодова комбінація  $F(x)$  в циклічному коді, як показано в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Значення символів на виходах комірок регістра зсуву

Такт	f(x)	Символ у комірці	Положення ключа S	Виходи комірок		
1	1	1	1	0	1	1
2	0	0	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	0
4	0	1	0	1	1	0
5	-	0	1	0	2	1
6	-	0	0	1	2	0
7	-	0	0	0	2	1

Структурна схема декодера циклічного коду (7,4) зображена на рисунку 6.5.

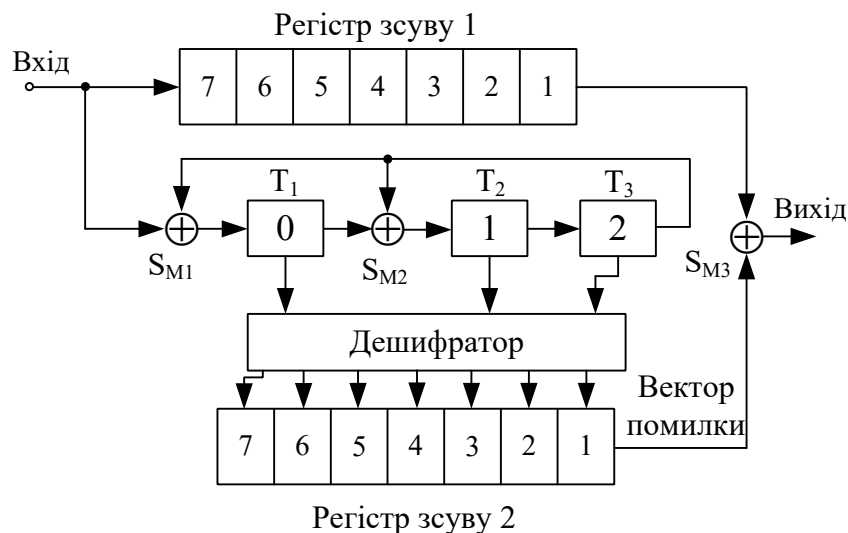


Рисунок 6.5 – Структурна схема декодера циклічного коду (7,4)

Тут кодова послідовність подається на вхід регістра зсуву 1 починаючи із старшого розряду, таким чином вона ділиться на утворювальний багаточлен за аналогією з тим, як було розглянуто в структурній схемі кодера.

Частка від ділення  $R(x)$  вказує на синдром помилки. Дешифратор налаштований на виправлення помилки при кожному вигляді синдрому, як і в раніше наведеному коді Хеммінга.

Разом з розглянутими вище останнім часом отримали практичне застосування згорткові коди і цілий ряд інших кодів.

## 6.4 Згорткові коди

Згорткові коди належать до безперервних кодів. Ці коди мають велику надмірність, характеризуються простотою реалізації кодуєчих пристроїв і найбільш придатні для виправлення пакетів помилок.

Згортковими коди називають тому, що кодове слово можна розглядати як відгук (згортку) кодера, який є лінійною системою, на вхідну інформаційну послідовність.

Згорткові коди поділяються на систематичні і несистематичні. У систематичних кодах за інформаційними символами ідуть перевірні. Такий розподіл символів дозволяє спростити формування оцінок інформаційних символів на приймальній станції. У систематичних згорткових кодах кодове слово складається з  $N$  блоків завдовжки  $n_0$  з  $k$  інформаційними символами, що визначає швидкість коду  $k/n_0$ . Перевірний символ блока залежить від інформаційних символів з блоків  $N$ . Це визначає основну відмінність згорткових кодів від блокових. Якщо  $N=1$ , згортковий код перетворюється на блоковий. Добуток  $N n_0$  називають кодовим обмеженням.

Для отримання кодового слова систематичного згорткового коду потрібно за відомими інформаційними символами знайти перевірні і розташувати їх на певних позиціях блока  $n_0$ .

Згортковий код може бути заданий декількома способами:

а) застосуванням  $n_0 - 1$  рекурентних співвідношень, що визначають перевірні символи за відомими інформаційними;

б) за допомогою утворювального багаточлена  $g(x) = g_0 \oplus g_1 x \oplus \dots \oplus g_m x^m$  при кодуванні однієї інформаційної послідовності  $k=1$ . Степінь  $g(x)$  визначає кількість блоків, перевірні символи яких залежать від інформаційних, тобто  $N = m + 1$ . При кодуванні  $k$  інформаційних послідовностей згортковий код задається за допомогою  $k(n_0 - k)$  утворювальних багаточленів;

в) з використанням графа і кодових решіток, а також утворювальної і перевірної матриць.

Розглянемо приклад найпростішого згорткового коду, у якому кожному інформаційному символу  $a_i$  відповідає один перевірний  $b_i$ . Для такого коду  $k = 1$ ,  $n_0 = 2$ ,  $N = 2$ , швидкість коду  $k/n_0 = 1/2$ . Кодове слово є напівнескінченною послідовністю символів  $a_0b_0, a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_ib_i, \dots$

Перевірний символ слова визначається через інформаційні лінійним рекурентним співвідношенням

$$b_i = a_i \oplus a_{i-1}. \quad (6.14)$$

Породжувальний багаточлен коду  $g(x) = g_0 \oplus g_1x = 1 + x$ . При відомій інформаційній послідовності  $l$  і  $g(x)$  визначаються перевірні символи згорткового коду. Наприклад, інформаційна послідовність має вигляд  $l=101100$ , де  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = 0$ . Їй відповідає багаточлен  $l(x) = 1 + x^2 + x^3 + \dots$ . Тоді перевірні символи утворюються таким чином:

$$b(x) = l(x)g(x) = l(x)(1 + x) = 1 + x + x^2 + x^4.$$

Цьому багаточлену відповідає послідовність  $b=11101$ , де  $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 1$  – перевірні символи. Кодова послідовність  $U=1101111001$ . Граф згорткового коду показаний на рисунку 6.6.

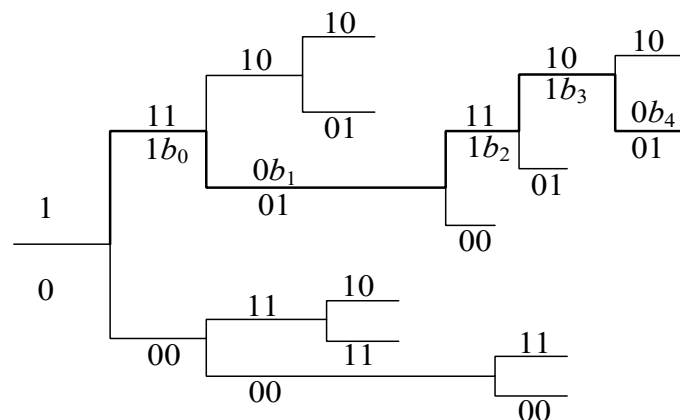


Рисунок 6.6 – Граф згорткового коду

Використовуючи рекурентне співвідношення (6.14), можна скласти систему перевірок для символів, що з'являються на виході кодера,

$$\left. \begin{aligned} a_0 \oplus b_0 &= 0 \\ a_0 \oplus a_1 \oplus b_1 &= 0 \\ a_1 \oplus a_2 \oplus b_2 &= 0 \\ a_2 \oplus a_3 \oplus b_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Використовуючи перевірки як рядки перевіркої матриці, складемо перевірку матрицю коду:

$$H = \begin{pmatrix} 11000 \dots \\ 1011000 \dots \\ 001011 \dots \\ 00001011 \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Для декодування комбінацій згорткових кодів розроблено алгебраїчні та імовірнісні методи. До алгебраїчних методів належать порогове (мажоритарне) декодування, до імовірнісних – послідовне декодування і декодування за максимумом правдоподібності (алгоритм Вітербі) [5].

Алгебраїчні методи засновані на виконанні рівнянь перевірок, що зв'язують інформаційні і перевірні символи. Імовірнісні методи засновані на пошуку шляху за графом (кодовим деревом), найближчим до прийнятої послідовності.

При пороговому декодуванні для кожного блока  $n_0$  обчислюється синдром. Наприклад, для коду, розглянутого вище, відповідно до рекурентного співвідношення  $b_i = a_i \oplus a_{i+1}$

$$\begin{aligned} c_i &= b_i \oplus a_i \oplus a_{i-1} = e_i^b \oplus e_i^a \oplus e_{i-1}^a; \quad i = 1, 2, 3, \dots; \\ c_{i+1} &= b_{i+1} \oplus a_{i+1} \oplus a_i = e_{i+1}^b \oplus e_{i+1}^a \oplus e_i^a, \end{aligned}$$

де  $e_i^b, e_i^a, e_{i+1}^a, e_{i+1}^b$  – компоненти вектора помилки  $i$ -го блока на позиціях інформаційних і перевірних символів.

Якщо  $c_i=1$ , то фіксується наявність помилки. У разі  $c_i=0$  найімовірніше, що символи  $a_i, b_i, a_{i-1}$  неспотворені, проте при спотворенні двох символів з трьох  $c_i=0$ .

Правило оцінювання компонента вектора помилки визначається співвідношенням

$$e_i^a = (c_i \oplus e_{i-1}^a) \oplus c_{i+1}. \quad (6.15)$$

Оцінювання інформаційного символу здійснюється за правилом

$$\hat{a} = a_i \oplus e_i^a. \quad (6.16)$$

Компонент вектора помилки  $e_{i-1}^a$  може бути оцінений неправильно, тоді його підставлення у вираз для  $c_i$  збільшує імовірність неправильного розв'язання при оцінці  $a_i$ , яка використовується для оцінювання  $a_{i+1}$  і т. д., тобто виникає ефект розмноження помилок. Для підвищення достовірності декодованих символів необхідно аналізувати достатньо довгу послідовність синдромів  $c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+k}$ , що зазвичай виконується в алгоритмах імовірнісного декодування, які забезпечують кращу завадостійкість.

Структурна схема декодера, побудована відповідно до правил (6.15), (6.16) для згорткового коду  $1/2, k=1, n_0=2$ , наведена на рисунку 6.7.

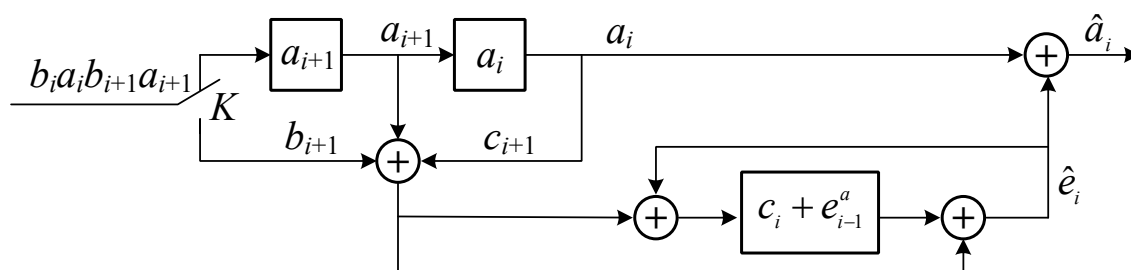


Рисунок 6.7 – Структурна схема декодера згорткового коду

При декодуванні комбінацій згорткових кодів з більшою надмірністю і більш великим кодовим обмеженням, ніж розглянутий код, застосовується послідовне декодування і декодування за максимумом правдоподібності. Відмінність між ними полягає в тому, що при послідовному декодуванні визначення правильного шляху за кодовим деревом на кожному кроці здійснюється з урахуванням всіх попередніх. Ухвалення рішення при декодуванні за максимумом правдоподібності (алгоритм Вітербі) здійснюється на кожному кроці з урахуванням попереднього. Мірою схожості прийнятої послідовності на передану є відстань Хеммінга.

## Контрольні питання та задачі

- 1 Які класи кодів (за призначенням) ви знаєте?
- 2 Пояснити відмінність між рівномірним і нерівномірним кодуванням.
- 3 Пояснити відмінність між лінійним і нелінійним кодом.
- 4 Дати визначення систематичного коду.
- 5 Що таке надмірність завадостійкого коду?
- 6 Закодувати кодом із загальною перевіркою на парність повідомлення дискретного джерела з об'ємом алфавіту  $K=8$ .
- 7 Закодувати кодом Хеммінга повідомлення дискретного джерела з об'ємом алфавіту  $K=16$ .
- 8 Довести, що код із загальною перевіркою на парність і код Хеммінга є лінійними.
- 9 Що таке відстань, за Хеммінгом, і вага кодової комбінації?
- 10 Чому дорівнює надмірність і відносна швидкість коду з загальною перевіркою на парність (4, 3) і коду Хеммінга (7, 4)?
- 11 Як зв'язані мінімальна відстань коду, кількість виправлених і кількість виявлених помилок?

## ЛЕКЦІЯ 7. Принципи оптимального приймання дискретних сигналів

### План

- 7.1 Завдання синтезу оптимальних демодуляторів.
- 7.2 Критерії якості й правила приймання дискретних повідомлень.
- 7.3 Оптимальні алгоритми приймання при повністю відомих сигналах (когерентне приймання).
- 7.4 Приймання сигналів на узгоджений фільтр.

**Мета** – дати поняття оптимального приймання дискретного сигналу; навести критерії оптимального приймання; пояснити суть кореляційного приймання з відомими параметрами сигналів і приймання сигналів на узгоджений фільтр.

### 7.1 Завдання синтезу оптимальних демодуляторів

Системи й методи передачі дискретних повідомлень займають основне місце в сучасних системах електричного зв'язку, що пояснюється не тільки наявністю безлічі джерел дискретних повідомлень, таких як дані з виходу ЕОМ, телеграфні джерела й ін., але й передачею повідомлень безперервних джерел (мова, музика, телебачення, факсимільна передача та ін.) більш завадостійкими дискретними цифровими методами.

На виході модулятора в цифрових системах передачі відбувається перетворення цифрового сигналу  $b_u(t)$  на послідовність  $u(t)$  безперервних елементарних сигналів несучої  $f(t - kT, b_k)$  заданої форми

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(t - kT, b_k), \quad (7.1)$$

де  $T$  – тактовий інтервал передачі в каналі, що визначає швидкість маніпуляції (технічну швидкість передачі)  $V_M = 1/T$ , Бод;

$b_k$  – безліч елементів коду.

Елементарний сигнал  $U(t - kT, b_k)$  може формуватися по-різному. Так, залежно від того, чи виконуються модуляція й кодування послідовно один за одним або спільно, він може мати різні частотно-часові властивості. Найбільш просту форму набуває вираз (7.1) при лінійній (багаторівневій) модуляції:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k U(t - kT, b_k). \quad (7.2)$$

Для стиску сигналу  $U(t - kT, b_k)$  у часі та одночасно зменшення пік-фактора сигналу  $u(t)$  (відношення пікової й середньої потужності) можна в якості  $U(t - kT, b_k)$  обрати прямокутні радіоімпульси тривалістю  $T$ . Але тоді ширина смуги частот сигналу теоретично не обмежена. Якщо ж формувати сигнали  $U(t - kT, b_k)$  з рівномірним спектром у гранично вузькій смузі частот, то зростає пік-фактор сигналу  $u(t)$  і, крім того, сигнали  $U(t - kT, b_k)$  теоретично не обмежені в часі. У цьому випадку елементарні сигнали, що відповідають різним символам  $b_k$ , накладаються один на одний, тобто має місце міжсимвольна



інтерференція (МСІ) вже на передачі. Однак ця обставина не перешкоджає безпомилковому виділенню інформації  $b_k$  з сигналу  $u(t)$ , якщо виконуються властивості сигналу  $U(t-kT, b_k)$ .

На практиці є розумний компроміс між двома зазначеними граничними подіями формування елементарних сигналів  $U(t-kT, b_k)$ .

На вхід демодулятора при передачі сигналу (відповідно до виразу (7.2)) надходить коливання (сигнал – шум)

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S(t-kT, b_k) + n(t), \quad (7.3)$$

де  $S(t-kT, b_k)$  – відгук каналу на елементарний сигнал  $U(t-kT, b_k)$ ;  
 $n(t)$  – адитивний шум у каналі зв'язку.

При лінійній (багаторівневій) модуляції маємо

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k S(t-kT) + n(t), \quad (7.4)$$

де  $S(t)$  – відгук каналу на несучу  $f(t)$ .

Для спрощення подальшого аналізу будемо вважати, що елементарний сигнал на передачі  $U(t-kT, b_k)$  локалізований у межах тактового інтервалу.

Спочатку будемо аналізувати демодулятор для каналу «без пам'яті», а далі будемо обговорювати демодулятор у каналі з міжсимвольною інтерференцією (МСІ).

Позначимо аналізований елемент коливання (сигнал + шум) на вході демодулятора в каналі без МСІ:

$$z(t) = S(t, b_i) + n(t),$$

де  $S(t, b_i)$  — сигнал, що відповідає символу  $b_i$ ,  $i \in \overline{0, m-1}$ .

На виході демодулятора виникає дискретний сигнал, тобто послідовність кодових символів. Найчастіше елемент тривалістю  $T$  безперервного сигналу перетворюється демодулятором на один кодовий символ (поелементне приймання). Якби цей кодовий

символ завжди збігався з переданим (який поступив на вхід модулятора), то зв'язок був би безпомилковим. Але, як відомо, завади призводять до неможливості повністю відновити за прийнятим сигналом переданий кодовий символ.

Кожен демодулятор описується законом, за яким безперервний сигнал, який надійшов на його вхід, перетворюється на кодовий символ. Цей закон називається правилом вирішення, а реалізуюча його схема — вирішальною. Демодулятори з різними правилами вирішення будуть видавати взагалі різні рішення, з яких одні правильні, а інших - помилкові.

Сучасна статистична теорія зв'язку дозволяє відшукати найкращу операцію обробки вхідного сигналу  $z(t)$ , що забезпечує максимальну якість оцінки  $b_i$ . Будемо вважати, що властивості джерела повідомлення й кодера відомі. Крім того, задано модулятор, а також відомо, яка реалізація елемента сигналу відповідає тому або іншому кодовому символу, а також задана математична модель безперервного каналу. Слід визначити, яким має бути оптимальний демодулятор (правило вирішення), щоб забезпечити найкращу якість приймання. Таке завдання було вперше поставлено й вирішено (для гаусівського неспотворювального каналу з білого гаусівського шуму (БГШ)) Котельниковим.

У цій постановці якість оцінювалася ймовірністю правильного приймання символу. Максимум цієї ймовірності при заданому виді модуляції Котельников назвав потенційною завадостійкістю, а демодулятор, що забезпечує цей максимум, — ідеальним приймачем. Із цього визначення випливає, що в жодному реальному демодуляторі середня ймовірність правильного приймання символу не може бути більше, ніж в ідеальному приймачі.

На перший погляд, принцип оцінювання якості приймання ймовірністю правильного приймання символу здається цілком природним і навіть єдино можливим. Далі буде показано, що це не завжди так і що існують й інші критерії якості, які можуть бути застосовані в тих або інших окремих випадках.

Припустимо, що при передачі дискретних повідомлень, закодованих кодом із основою  $m$ , у місці приймання очікуються сигнали  $S_i(t), t \in [0, T]$ , що відповідають кодовим символам  $b_i$

( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$ ). На відрізку часу  $[0, T]$  на вхід приймального пристрою надходить коливання  $z(t)$ , що внаслідок перекручувань і завад у каналі не збігається повністю з жодним із елементів сигналу на передачі  $u_i(t)$ . Отже, у цьому випадку приймальний пристрій повинен вибрати одну з  $m$  можливих взаємовиключних (альтернативних) гіпотез: передавався кодовий символ  $b_0$ , тобто очікується сигнал  $S_0(t)$ ; передавався кодовий символ  $b_1$ , тобто очікується сигнал  $S_1(t)$ ; передавався кодовий символ  $b_{m-1}$ , тобто очікується сигнал  $S_{m-1}(t)$ . Для двійкової системи ( $m = 2$ ) приймальний пристрій обирає одну з двох альтернативних гіпотез про передачу символу 1 або символу 0.

Сукупність всіх можливих реалізацій  $z(t)$  можна інтерпретувати точками в просторі  $Z$  прийнятих фінітних сигналів. Він є безкінечномірним простором Гілберта або, з деякими прийнятними для практики застереженнями, багатомірним простором Евкліда. Графічно зображення реалізації прийнятих сигналів  $S_i(t)$  і завад  $n(t)$  (тривалістю  $T$ ) приймають точками на площині (рисунок 7.1) або відповідними векторами на площині, що відкладають від початку координат  $0$ . Якщо правило вирішення обрано, то це означає, що кожній точці простору прийнятих коливань (кінцю вектора  $z = s + n$ ) приписується одна з  $m$  гіпотез, тобто певний переданий кодовий символ  $b_i$ . Простір прийнятих сигналів виявиться при цьому розбитим на  $m$  непересічних областей  $\hat{B}_i$ , кожна з яких відповідає прийняттю певної гіпотези. У такому трактуванні різні приймальні пристрої відрізняються один від одного способом розподілу простору сигналів на області  $\hat{B}_i$ , тобто правилом прийняття рішення. Можливий розподіл простору коливань, що приймаються на непересічні області, схематично показаний на рисунку 7.1.

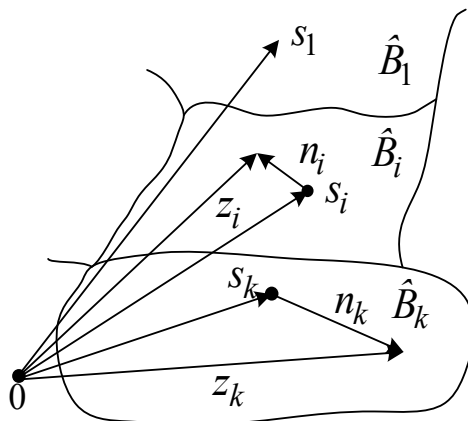


Рисунок 7.1 – Розподіл простору коливань, що приймаються, на непересічні області

У двійковій системі простір  $Z$  розбивають на дві непересічні області  $\hat{B}_0$  і  $\hat{B}_1$ . Припустимо, на відрізку  $[0, T]$  приймається коливання

$$z(t) = S_i(t) + n(t),$$

де  $S_i(t)$  — корисний сигнал у місці приймання, що пройшов канал зв'язку;

$n(t)$  – реалізація адитивної завади.

Якщо завади відсутні, можливі значення  $z(t)$  зображуються точками  $S_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$ ). За наявності завади й передачі сигналу з номером кінець вектора прийнятого коливання  $z$  відхиляється від точки. На рисунку 7.1 це показано для сигналів  $S_i(t)$  і  $S_k(t)$ . Область  $\hat{B}_i$  містить точку  $S_i(t)$ . У тих випадках, коли завада не виводить точку  $z$  за межі області  $\hat{B}_i$ , рішення виявляється правильним при сигналі  $S_i(t)$ . В іншому випадку виникає помилка. Очевидно, змінюючи границі між областями, можна впливати на ймовірність помилкового приймання окремих переданих символів. Наприклад, якщо в розподілі, показаному на рисунку 7.1, розширити область  $\hat{B}_i$  за рахунок області  $\hat{B}_k$ , то зменшиться ймовірність помилкового приймання символу  $\hat{b}_k$  замість переданого символу  $b_i$ . Однак у цьому випадку зростає ймовірність помилкового приймання  $\hat{b}_i$  при переданому  $b_k$ . Очевидно, завжди існує таке розташування областей, що в певному розумінні краще за будь-яке інше.

Якщо задано критерій якості, то найкращий розподіл простору прийнятих сигналів (оптимальна вирішальна схема приймального пристрою) досягається методами теорії статистичних рішень.

## 7.2 Критерії якості й правила приймання дискретних повідомлень

Розглянемо спочатку широко розповсюджений критерій Котельникова або критерій ідеального спостерігача, відповідно до якого якість демодулятора оцінюють безумовною (середньою) імовірністю правильного приймання символу. Будемо спочатку припускати, що простір переданих і прийнятих сигналів є кінцевомірним евклідовим. Це може бути, наприклад, простір фінітних сигналів, що представляють кінцевою тригонометричною сумою. Надалі це обмеження буде знято.

У  $n$ -мірному просторі випадковий сигнал  $z(t)$  характеризується  $n$ -мірною щільністю ймовірностей вектора  $\omega_n(z)$ . Її можна розглядати як щільність імовірності коефіцієнтів розкладання  $z(t)$  за будь-яким ортонормованим базисом. Якщо передається деякий символ  $b_i(t)$ , тобто приймається сигнал  $S_i(t)$ , то можна визначити умовну  $n$ -мірну щільність імовірності  $\omega_n(z|b_i) = \omega_n(z|S_i)$  – функцію правдоподібності  $i$ -ї гіпотези ( $i = 0, m - 1$ ).

На вхід демодулятора протягом відрізка  $[0, T]$  приходять деякий елемент сигналу  $z(t)$ . Припустимо, що демодулятор приймає при цьому рішення, що передано символ  $b_i$ , тобто видає оцінку  $\hat{b}_i$ . Імовірність того, що це рішення правильне, вочевидь, дорівнює умовній імовірності  $P(b_i|z(t))$  того, що дійсно передавався символ  $b_i$ , за умови приходу реалізації елемента сигналу  $z(t)$ . Її називають апостеріорною ймовірністю символу  $b_i$  (тобто ймовірністю, визначеною після досліду, що полягає в спостереженні й аналізі сигналу  $z(t)$ ).

Очевидно, що ймовірність правильного приймання буде дорівнювати

$$P_{\text{прав}} = \int_z w(z) \sum_{i=0}^{m-1} P(b_i, \hat{b}_i | z)$$

і досягає максимуму, якщо для кожної конкретної реалізації  $z(t)$  сума

$$\sum_{i=0}^{m-1} P(b_i, \hat{b}_i | z) = \sum_{i=0}^{m-1} P(b_i | z) P(\hat{b}_i | z)$$

максимальна. Тут  $P(b_i | z)$  – умовна апостеріорна ймовірність передачі символу  $b_i$ , а  $P(\hat{b}_i | z)$  у сукупності утворюють вирішальне правило демодулятора. Оскільки  $\sum_{i=0}^{m-1} P(\hat{b}_i | z) = 1$ , то

найкращим вирішальним правилом буде таке, при якому  $P(\hat{b}_i|z) = 1$  для  $i$ , відповідного максимальному значенню  $P(b_i|z)$ .

Інакше кажучи, критерій ідеального спостерігача забезпечується вирішальною схемою, побудованою за правилом максимуму апостеріорної ймовірності, а само рішення  $\hat{b}_i$  приймається в тому випадку, якщо виконується система з  $m-1$  нерівностей:

$$P(b_i|z) > P(b_j|z), \quad j \in \overline{0, m-1}, j \neq i. \quad (7.5)$$

Для скорочення запишемо це правило в такій формі:

$$\hat{i} = \text{Arg max}_i \{P(b_i|z)\}, \quad (7.6)$$

де  $\text{Arg max}_i \{A_i\}$  – значення  $i$ , при якому  $A_i$  максимально.

Для двійкової системи сигналів згадане правило зводиться до перевірки нерівності

$$P(1|z) > P(0|z). \quad (7.7)$$

При виконанні нерівності (7.7) реєструється символ 1, в іншому випадку – 0.

Відповідно до відомої формули Байєса

$$P(b_i|z) = \frac{P(b_i)w(z|b_i)}{w(z)}, \quad (7.8)$$

де  $P(b_i)$  — апіорна ймовірність передачі символу  $b_i$  (тобто та ймовірність, що має місце до спостереження й аналізу і обумовлена статистикою джерела повідомлення й правилом кодування).

Підставивши вираз (7.8) у вираз (7.5) і з огляду на те, що  $w(z)$  – безумовна щільність імовірності, яка не є функцією  $i$ , можна записати правило рішення за критерієм ідеального спостерігача в такій формі:

$$P(b_i)w(z|b_i) > P(b_j)w(z|b_j), \quad j \in 0, 1, \dots, m-1, j \neq i,$$

або скорочено

$$\hat{i} = \text{Arg max}_i \{P(b_i)w(z|b_i)\}. \quad (7.9)$$

Приймач, що реалізує алгоритм (7.9), називають приймачем Котельникова. Для двійкової системи правило (7.9) зводиться до перевірки нерівності

$$P(1)w(z|1) > P(0)w(z|0), \quad (7.10)$$

при виконанні якої реєструється символ 1, а при невиконанні – символ 0.

Для побудови вирішальної схеми за правилом (7.9) необхідно знати апріорні ймовірності символів  $P(b_j)$ , а також властивості модулятора й каналу, визначальні умовні щільності  $w(z|b_i)$  – функції правдоподібності.

Правило (7.9) можна записати інакше. Рішення про те, що передавався символ  $b_i$ , має прийматися, якщо для всіх  $j \neq i$  виконуються  $m - 1$  нерівностей:

$$\frac{w(z|b_i)}{w(z|b_j)} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)}. \quad (7.11)$$

Відношення в лівій частині цієї нерівності називається відношенням правдоподібності двох гіпотез: про те, що передавався символ  $b_i$ , і про те, що передавався символ  $b_j$ . Його позначають  $\Lambda_{i,j}$ .

У випадку, коли всі  $t$  символів передаються рівноймовірно, тобто  $P(b_i) = 1/m$ , правило (7.11) спрощується:

$$\Lambda_{i,j} > 1, \quad i \in \overline{0, m-1}, \quad j \neq i. \quad (7.12)$$

Іноді вводять у розгляд, крім  $t$  гіпотез про передачу символів  $b_i (i \in \overline{0, m-1})$ , ще додаткову («шумову») гіпотезу про те, що жоден сигнал не передавався, тобто  $z(t) = n(t)$  — тільки

завада. Відношення правдоподібності  $\frac{w(z|b_i)}{w(z|b_{iu})} = \Lambda_{iu}$  звичайно позначають просто  $\Lambda_i$ . Тоді правило (7.12) можна записати так:

$$\Lambda_i > \Lambda_j \text{ при } j \neq i, \quad (7.13)$$

або скорочено  $\hat{i} = \text{Arg max}_i [\Lambda_i]$ . Таке правило максимуму правдоподібності реалізує критерій ідеального спостерігача за тієї умови, що всі символи передаються рівноймовірно.

Для двійкової системи правило (7.13) зводиться до перевірки нерівності

$$\Lambda_i > \Lambda_0. \quad (7.14)$$

Як зазначалося, критерій ідеального спостерігача не є єдиним «розумним» критерієм оптимальності вирішальної схеми. Справа в тому, що в багатьох випадках різні помилки призводять до різних наслідків. Наприклад, у системі автоматичної пожежної сигналізації небезпечніше не виявити сигнал про пожежу, ніж оголосити «фіктивну тривогу», коли в дійсності пожежі нема.

Облік наслідків помилок різного роду (пов'язаних з передачею різних символів) призводить до узагальнення критерію ідеального спостерігача, відомого як критерій мінімального середнього ризику (або байєсівський критерій). Уведемо деякі поняття.

Якщо при передачі символу  $b_i$  прийнято символ  $\hat{b}_j$ , то при  $j \neq i$  має місце помилка. Щоб урахувати нерівноцінність різних помилок, будемо з кожною парою символів  $b_i$  і  $\hat{b}_j$  зв'язувати деяку чисельну величину, яка названа «втратою», позначивши її  $L_{ij}$ . Величина «втрати» залежить, таким чином, від того, який символ  $\hat{b}_j$  прийнятий замість переданого  $b_i$ . Правильному прийманню при цьому звичайно приписується нульова «втрата». Значення  $L_{ij}$  визначаються в кожному конкретному випадку важливістю правильного приймання даного елемента сигналу й величиною безпеки різних помилок.

Оскільки при передачі символу  $b_i$  символи  $\hat{b}_j$  з'являються з певними ймовірностями як реалізації деякої дискретної випадкової величини, можна говорити про умовне математичне очікування величини «втрати» при передачі конкретного символу



$b_i$ . Назвемо це умовне математичне очікування умовним ризиком:

$$R_i = \sum_{j=0}^{m-1} P(\hat{b}_j | b_i) L_{i,j} = \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij} \int_{\hat{B}_j} w(z | b_i) dz. \quad (7.15)$$

Інтеграл у виразі (7.15) береться за областю  $\hat{B}_j$  вирішальної схеми й є ймовірністю того, що сигнал  $z(t)$  потрапив у цю область, якщо передавався символ  $b_i$ . Зробимо середнім умовний ризик  $R_i$  за всіма символами  $b_i$  і одержимо величину, названу середнім ризиком:

$$R_{\text{сеп}} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} P(b_i) L_{ij} \int_{\hat{B}_j} w(z | b_i) dz. \quad (7.16)$$

Критерій мінімального середнього ризику полягає в тому, що оптимальною вважається вирішальна схема, яка забезпечує найменше значення середнього ризику  $R_{\text{сеп}}$ . Приймач, що працює за таким критерієм, називають байєсівським.

З виразу (7.16) видно, що при використанні цього критерію потрібно, крім апріорних імовірностей  $p(b_i)$  передачі окремих символів, знати і величини втрат  $L_{ij}$ . Зазначимо, що якщо вважати всі помилки рівноцінними ( $L_{ij} = \text{const}$  при  $j \neq i$  й  $L_{ij} = 0$ ), то критерій мінімального середнього ризику збігається з критерієм ідеального спостерігача, а байєсівський приймач збігається з ідеальним приймачем Котельникова. У загальному ж випадку в оптимальному байєсівському приймачі частіше будуть виникати помилки, пов'язані з малими втратами, і рідше - з великими втратами.

Ситуація, у якій практично неможливо визначити апріорну ймовірність передачі окремих елементарних повідомлень, а наслідки помилок різного роду неоднакові, типова для радіолокації, коли приймач, аналізуючи прийняте коливання  $z(t)$  (відбитий сигнал плюс завада), повинен визначити, є в даному напрямку й на даній відстані об'єкт спостереження (ціль) чи ні. Як правило, апріорна ймовірність наявності відбитого від цілі сигналу (передачі 1) заздалегідь не відома. Наслідки двох родів помилок фіктивної тривоги (приймач фіксує, що ціль існує, у той

час як у дійсності її нема) і пропускання цілі (приймач відзначає відсутність цілі, у той час як фактично вона є) – нерівноцінні.

У цій та інших подібних ситуаціях найчастіше користуються критерієм приймання, відомим як критерій Неймана-Пірсона. Суть його полягає в тому, що вирішальна схема вважається оптимальною, якщо при заданій імовірності фіктивної тривоги  $P_{\text{фм}}$  забезпечується мінімальна ймовірність пропускання цілі  $P_{\text{прц}}$ . Уведемо в розгляд функції правдоподібності гіпотези відсутність цілі  $w[z|0]$  і наявність цілі  $w[z|1]$ .

Вочевидь, можливо різними способами розбити простір прийнятих коливань  $z(t)$  на дві області:  $\hat{B}_0$  (область рішення про відсутність цілі) і  $\hat{B}_1$  (про наявність цілі), так, щоб імовірність фіктивної тривоги

$$P_{\text{фм}} = \int_{\hat{B}_1} w(z|0) dz \quad (7.17)$$

дорівнювала заданій величині. Оскільки в локації символ 0 (відсутність цілі) передається паузою, то  $w[z|0]$  – це щільність розподілу завади. Отже, імовірність фіктивної тривоги визначається ймовірнісними характеристиками завади й вибором області  $\hat{B}_1$ . Але від вибору цієї області залежить і ймовірність правильного виявлення цілі:

$$P_{\text{прц}} = \int_{\hat{B}_1} w(z|1) dz = 1 - P_{\text{прц}} = 1 - \int_{\hat{B}_0} w(z|1) dz, \quad (7.18)$$

де  $P_{\text{прц}}$  – імовірність пропускання цілі.

Інтеграл у виразах (7.17), (7.18) і в аналогічних інших формулах, узяті за векторною змінною, вочевидь, багаторазові.

Максимізація виразу (7.18) при заданій величині виразу (7.17) досягається, якщо рішення про наявність цілі приймається при виконанні нерівності

$$\Lambda_{1,0} = \frac{w(z|1)}{w(z|0)} > \lambda, \quad (7.19)$$

де  $\lambda$  — граничний пороговий рівень, обумовлений заданою ймовірністю фіктивної тривоги  $P_{\text{фм}}$ .

Існують й інші критерії якості приймання, що не потребують знання апріорних імовірностей символів. Внаслідок

сказаного будемо надалі користуватися, якщо не обговорено зворотне, правилом максимальної правдоподібності й вирішальну схему, яка реалізує правило (7.13), називати оптимальною.

### 7.3 Оптимальні алгоритми приймання при повністю відомих сигналах (когерентне приймання)

Припустимо, що всі спотворення в каналі строго детерміновані й випадковим є тільки гаусівський адитивний шум  $n(t)$ , який спочатку припускаємо є «білим», зі спектральною щільністю  $N_0$ . Це означає, що при передачі символу  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) прийняте коливання можна описати моделлю

$$z(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.20)$$

де всі  $S_i(t) = \gamma U(t - \tau - kT, b_k^{(i)})$  відомі ( $\gamma$  – відомий коефіцієнт передачі каналу). Невідома лише реалізація завади та позиція (індекс  $i$ ) дійсно переданого сигналу, який  $i$  повинна визначити вирішальна схема.

Будемо також уважати, що всі  $S_i$  є фінітними сигналами, тривалість яких дорівнює  $T$ . Це має місце, якщо передані сигнали  $u_i(t)$  є фінітними й мають однакову тривалість (система синхронна), а в каналі нема ні багатопроменевого поширення, ні лінійних спотворень, що викликають збільшення тривалості сигналу (або вони скоректовані).

У подальшому будемо вважати, що в системі забезпечена надійна тактова синхронізація, тобто границі тактового інтервалу, на якому приходить сигнал  $S_i(t)$ , відомі точно. Момент початку посилення  $S_i(t)$  приймемо за нуль.

Визначимо в цих умовах алгоритм роботи оптимального (тобто заснованого на правилі максимальної правдоподібності) демодулятора, що аналізує сигнал на тактовому інтервалі  $0 \dots T$ . Для цього необхідно знайти відносини правдоподібності для всіх  $m$  можливих сигналів.

Завдання ускладнюється тим, що ширина спектра сигналу нескінченна (оскільки він фінітний), а тому простір сигналів безкінцевомірний  $L_2(t)$ . Для таких сигналів (або безкінцевомірних

векторів) не існують щільності ймовірностей. Однак існують  $n$ -мірні щільності ймовірностей для будь-яких  $n$  перетинів сигналу.

Правило приймання дискретних сигналів у цьому випадку зводиться до перевірки системи нерівностей

$$\int_0^T z(t)S_i(t)dt - 0,5E_i > \int_0^T z(t)S_j(t)dt - 0,5E_j, \quad j \neq i, \quad (7.21)$$

де  $E_i$  – енергія очікуваного сигналу  $S_i(t)$ ,  $E_i = \int_0^T S_i^2(t)dt$ .

Вираз (7.21) визначає ті операції (алгоритм приймання), які має виконувати оптимальний приймач над вхідним коливанням.

Для двійкової системи алгоритм (7.21) зводиться до перевірки однієї нерівності

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt - 0,5E_1 > \int_0^T z(t)S_0(t)dt - 0,5E_0. \quad (7.22)$$

При виконанні нерівності (7.22) реєструється символ «1», в іншому випадку – символ «0».

Пристрій, що безпосередньо обчислює скалярний добуток (або кореляційний інтеграл), називають активним фільтром або корелятором, тому приймач, що реалізує алгоритм (7.21), називають кореляційним, який здійснює поелементне приймання.

$$(z, S_i) = \int_0^T z(t)S_i(t)dt. \quad (7.23)$$

На рисунку 7.2 показана структурна схема приймального пристрою, що працює відповідно до виразу (7.22). Блоки «х» — перемножники;  $\Gamma_0, \Gamma_1$  — генератори опорних сигналів  $S_0(t), S_1(t)$ ;  $\int$  — інтегратори; «—» пристрої, що віднімають; ВП – вирішальний пристрій, що визначає в моменти часу, кратні  $T$  (при замиканні ключа - К), номер  $i$ -ї гілки з максимальним сигналом ( $i = 0, 1$ ). При  $m > 2$  у схемі рисунка 7.2 та інших нижчеподаних схемах зростає відповідно кількість гілок обробки сигналу, що потрапляють на ВП.

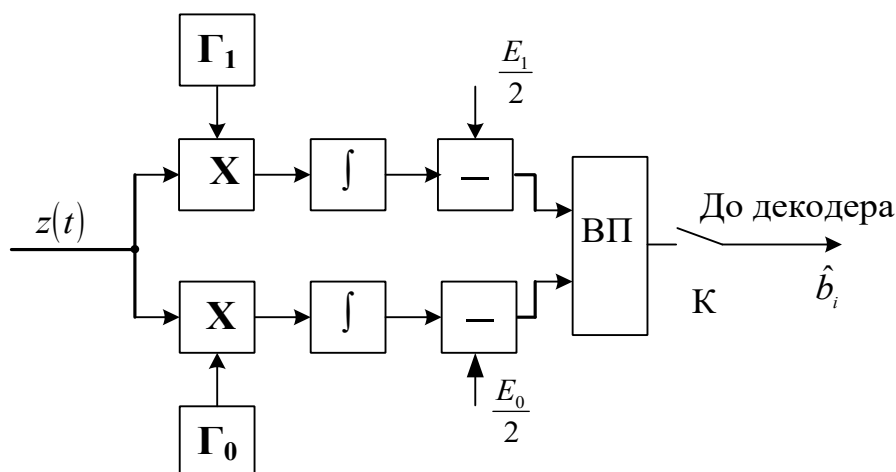


Рисунок 7.2 – Оптимальний кореляційний демодулятор при відомих сигналах

Для двійкової системи нерівність (7.22) можна подати в більш простому вигляді:

$$\int_0^T [z(t) - S_i(t)]^2 dt > \int_0^T [z(t) - S_j(t)]^2 dt, j \neq i. \quad (7.24)$$

Зазначимо, що саме в такому вигляді вперше одержав алгоритм оптимального приймання В. О. Котельников.

На рисунку 7.3 для  $m=2$  наведена структурна схема приймального пристрою, що працює відповідно до алгоритму (7.24).

Схема складається з таких блоків: (-) – пристрої, що віднімають;  $\Gamma_0, \Gamma_i$  – генератори опорних сигналів  $S_0(t), S_i(t)$ ;  $(\cdot)^2$  – квадратори;  $\int$  – інтегратори; ВП – вирішальний пристрій, що визначає в моменти часу, кратні  $T$  (при замиканні ключа К), номер гілки з мінімальним сигналом.

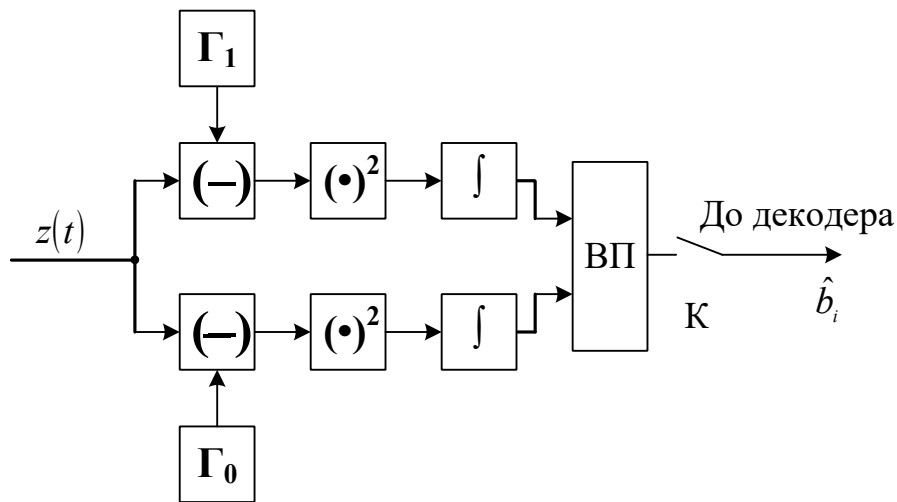


Рисунок 7.3 – Структурна схема оптимального приймального пристрою при відомих сигналах

У просторі Гілберта вираз  $\sqrt{\left(\int_0^T [z(t) - S_i(t)]^2 dt\right)}$  визначає норму різниці векторів  $z$  й  $S_i$  або відстань між ними. Тому алгоритм (7.24) можна записати як

$$\|z - S_i\| < \|z - S_j\|, \quad j \neq i$$

і дати йому просту геометричну інтерпретацію: оптимальний демодулятор повинен реєструвати той із сигналів  $S_i(t)$  (відповідний символу  $b_i$ ), що «ближче» до прийнятого коливання  $z(t)$ . Як приклад на рисунку 7.4 показано оптимальний розподіл двовимірного простору прийнятих сигналів  $z(t)$  при передачі сигналів  $S_1(t)$  і  $S_0(t)$ .

Області ухвалення рішення на користь символів 0 та 1 розташовані по обидва боки від прямої 0-0', перпендикулярної до відрізка, що з'єднує точки сигналів і ділить його навпіл.

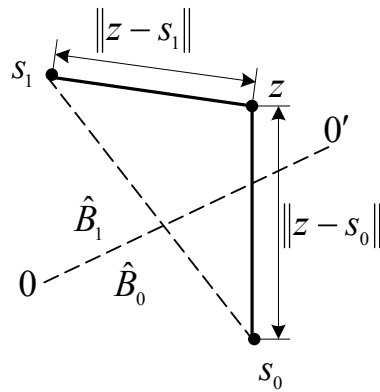


Рисунок 7.4 – Оптимальний розподіл простору прийнятих коливань при двійковому коді й точно відомих сигналах

Всі методи приймання, для реалізації яких необхідне точне апріорне знання початкових фаз сигналів, що поступають, називають когерентними. У тих випадках, коли відомості про початкові фази очікуваних сигналів витягують із самого прийнятого сигналу (наприклад, якщо фаза флукутує, але настільки повільно, що може бути завбачена за попередніми елементами сигналу), приймання називають квазікогерентним. Якщо ж відомості про початкові фази сигналів, що приходять, відсутні або з будь-яких міркувань їх не використовують, то приймання називають некогерентним.

#### 7.4 Приймання сигналів на узгоджений фільтр

Скалярний добуток виразу (7.23) можна обчислити не тільки за допомогою активного фільтра (корелятора), описаного в попередньому пункті, але й за допомогою пасивного лінійного фільтра з постійними параметрами.

Якщо на вхід фільтра подати прийнятий сигнал  $z(t)$ , то напруга на виході фільтра в момент часу  $t=T$  може бути визначена з виразу

$$y(T) = \int_0^T z(\tau)g(T-\tau)d\tau,$$

де  $g(\tau)$  – імпульсна характеристика фільтра (IX).

У більш загальному випадку узгодженим фільтром для сигналу  $S(t)$  називають лінійний пасивний фільтр з постійними параметрами та ІХ

$$g(t) = aS_i(t_0 - t), \quad (7.25)$$

де  $a$  – коефіцієнт передачі узгодженого фільтра;

$t_0$  – час затримки сигналу в узгодженому фільтрі.

Функція  $g(t)$  є дзеркальним відображенням  $S(t)$  відносно осі, проведеної через точку  $t_0/2$  (рисунок 7.5). Для фізичної реалізованості фільтра необхідно й досить, щоб  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ . Зокрема для фінітного сигналу  $S(t)$ , що надходить на вхід фільтра в момент  $t=0$  і закінчується в момент  $T$ , умова фізичної реалізованості узгодженого фільтра свідомо виконується, як видно з рисунка 7.5, якщо постійна  $t_0$  (момент відліку) задовольняє умову

$$t_0 - T \geq 0 \text{ або } t_0 \geq T. \quad (7.26)$$

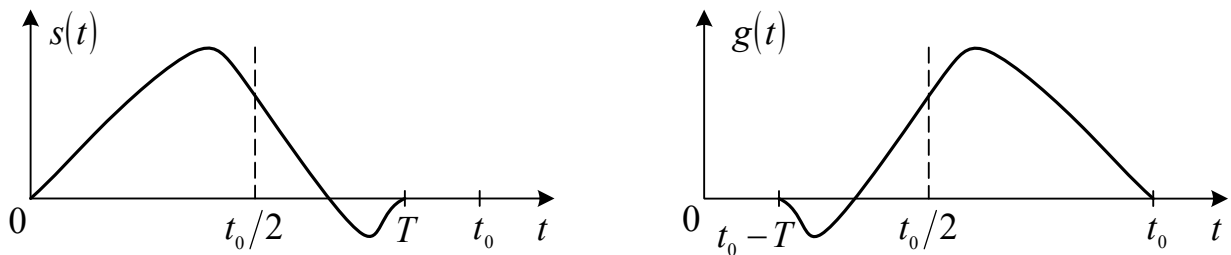


Рисунок 7.5 – Сигнал  $S(t)$  та імпульсна характеристика  $g(t)$  лінійного фільтра, узгодженого з цим сигналом

Передатна функція (частотна характеристика) узгодженого фільтра з ІХ (з виразу (7.25)) визначається перетворенням Фур'є виразом

$$\begin{aligned} K_{y\phi}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} S(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) e^{-j\omega(t_0 - \tau)} d\tau = a\hat{S}(j\omega) e^{-j\omega t_0}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

де  $\hat{S}(j\omega)$  – функція, комплексно-сполучена зі спектральною щільністю сигналу  $S(t)$ .



Отже, з точністю до коефіцієнта  $a$  АЧХ узгодженого фільтра визначається амплітудним спектром сигналу  $S(t)$  (тобто фільтр краще передає ті частоти, які дають більший внесок в енергію сигналу), а його фазочастотна характеристика зворотна за знаком фазовому спектру сигналу  $S(t)$ . Завдяки цьому в момент  $t_0$  всі складові спектра прийнятого сигналу складаються у фазі й дають максимальний відгук.

Згідно з виразом (7.25) у момент часу  $T$  напруга на виході узгодженого фільтра пропорційна сигналу на виході інтегратора активного фільтра у схемі рисунка 7.2. Тому демодулятор, що реалізує алгоритм (7.22), може бути виконаний і на базі узгоджених фільтрів. Структурна схема такого демодулятора для двійкової системи показана на рисунку 7.6, де УФ-фільтр, узгоджений із сигналом  $S_i(t)$ .

Відгук узгодженого фільтра на фінітний сигнал тривалістю  $T$ , поданий до входу в момент часу  $t = 0$ , існує лише на фінітному інтервалі довжиною  $2T$ . Дійсно, якщо на вхід фільтра поданий сигнал, з яким він узгоджений, то сигнальна складова на виході узгодженого фільтра має вигляд

$$y_c(t) = \int_0^t S(t-\tau)g(\tau)d\tau = a \int_0^t S(t-\tau)S(t_0-\tau)d\tau = aB_s(t_0-t), \quad (7.28)$$

де  $B_s(t_0-t)$  – ФК сигналу  $S(t)$  при аргументі  $t_0-t$ .

Для фінітного сигналу вона визначена на інтервалі  $(0,2T)$  і має максимум у точці  $t = t_0 = T$ . Підкреслимо, що форми корисного сигналу на вході й виході узгодженого фільтра, як правило, істотно відрізняються одна від одної. Завданням узгодженого фільтра є не відновлення форми сигналу, перекрученої шумом, а одержання одного відліку, за яким можна судити про присутність або відсутність на вході фільтра сигналу відомої форми.

Доведемо, що довільний лінійний стаціонарний фільтр із імпульсною характеристикою  $g(t)$  дає на своєму виході в момент часу  $t_0 \geq T$  значення відношення пікової потужності сигналу до дисперсії шуму:

$$\rho_{nik}(t_0) = \frac{y^2 c(t_0)}{y_n^2(t)} \leq 2h^2, \quad (7.29)$$

де  $2h^2$  – значення  $\rho_{nik}(t_0)$  для узгодженого фільтра ( $h^2 = E/N_0$  – відношення енергії сигналу тривалості  $T$  до спектральної щільності шуму на позитивних частотах).

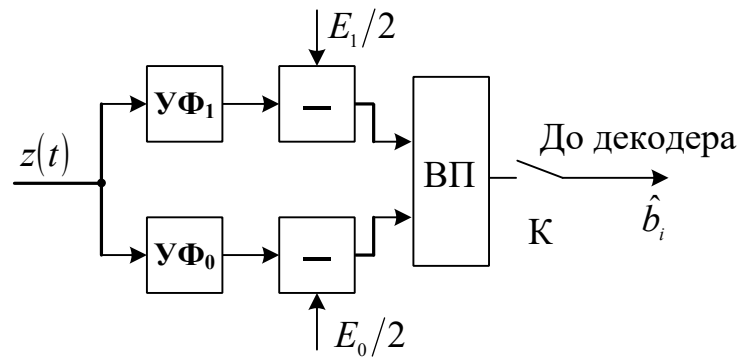


Рисунок 7.6 – Оптимальний демодулятор на основі узгодженого фільтра

Дійсно, нехай на вхід фільтра в момент  $t = 0$  при нульових початкових умовах подається суміш  $z(t) = s(t) + N(t)$ . Тоді сигнальна та шумова складові на виході УФ мають вигляд

$$y_c(t_0) = \int_0^{t_0} S(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau,$$

$$y_n(t_0) = \int_0^{t_0} n(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau.$$

Якщо шум  $n(\tau)$  центрований, стаціонарний і  $\delta$ -корельований, то  $\overline{y_n(t_0)} = 0$ , тобто

$$\sigma_n^2 = \overline{y_n^2(t_0)} = \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} \overline{n(\tau_1) n(\tau_2)} g(t_0 - \tau_1) g(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} \delta(\tau_1 - \tau_2) g(t_0 - \tau_1) g(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Враховуючи фільтруючу властивість  $\delta$ -функції, маємо

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} g^2(t_0 - \tau) d\tau = \frac{N_0}{2} E_g,$$

де  $E_g = \int_0^{t_0} g^2(t) dt$ .

Тоді отримуємо

$$\rho_{\text{ник}}(t_0) = \frac{2y^2 c(t_0)}{N_0 E_g} = \frac{2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau \right|^2}{N_0 E_g} \leq 2h^2. \quad (7.30)$$

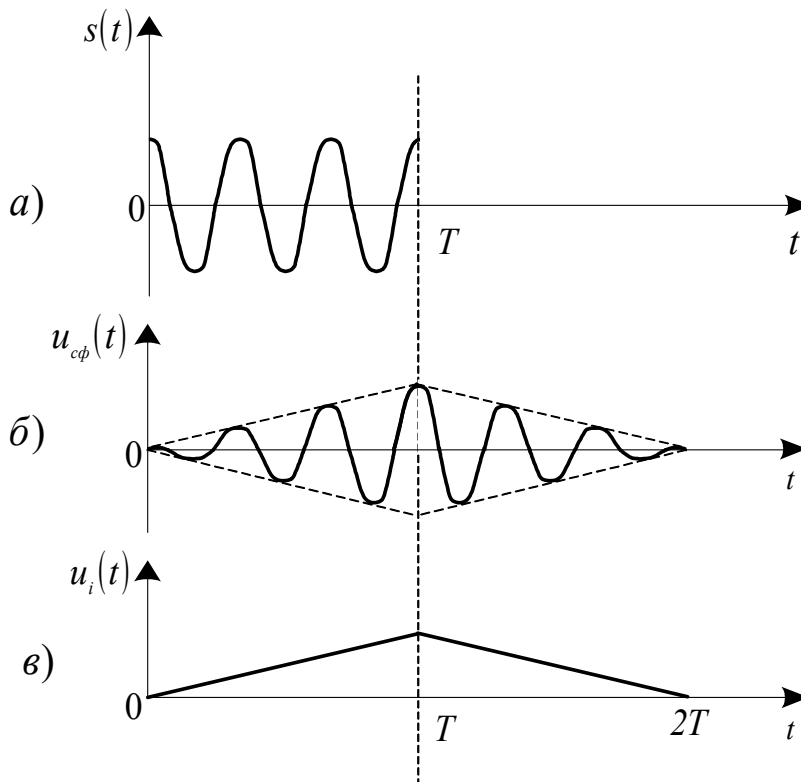
Відповідно до нерівності Буняковського-Шварца маємо

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t_0 - \tau) d\tau, \quad (7.31)$$

причому рівність має місце лише при виконанні умови (7.25), тобто для узгодженого фільтра. З урахуванням виразів (7.30) і (7.31) одержимо в результаті вираз (7.29).

Розглянемо можливості реалізації узгоджених фільтрів. Узгоджений фільтр для фінітного сигналу довільного виду  $S(t)$  можна у принципі побудувати на основі довгої лінії, що не спотворює і забезпечує затримку сигналу на час  $T$ , з нескінченною щільністю відводів. Практично можна брати відводи в дискретних точках з рознесенням  $\Delta = 0,5/\Delta F$ , де  $\Delta F$  — ефективна ширина спектра сигналу.

З рисунка 7.7 видно, що припустима неточність у часі  $\Delta t$  зняття відліку максимуму сигналу на виході активного фільтра значно більше, ніж при знятті відліку максимуму сигналу на виході узгодженого фільтра. При активному фільтрі досить зажадати, щоб неточність узяття відліку була мала порівняно з тактовим інтервалом, а при узгодженому фільтрі - порівняно з періодом високочастотного заповнення радіоімпульсу (так званий когерентний відлік). Труднощі забезпечення когерентного відліку в узгодженому фільтрі цілком порівняна з труднощами реалізації когерентних опорних генераторів в активному фільтрі.



а) імпульс на вході; б) імпульс на виході узгодженого фільтра;  
в) напруга на виході інтегратора активного фільтра

Рисунок 7.7 – Сигнали на виході узгодженого фільтра й кореляційної схеми при поданні на вхід прямокутного радіоімпульсу

Зазначимо одну важливу обставину, яка властива узгодженому фільтру. Нехай на його вхід надходить коливання  $z(t)$ , а фільтр погоджений з фінітним сигналом  $S(t)$ . Тоді сигнал на його виході в момент часу  $t$  запишемо як

$$y_s(t) = \int_0^t z(\tau) S(\tau - (t - t_0)) d\tau . \quad (7.32)$$

Спектральна щільність, за Фур'є, цього сигналу дорівнює

$$\dot{S}_y(f) = \dot{S}_s^*(f) \dot{S}_z(f) e^{-j\omega t_0} .$$

На виході фільтра, узгодженого зі сполученим сигналом  $\bar{S}(t)$ , коливання  $z(t)$  дає відгук

$$y_{\bar{s}}(t) = \int_0^t z(\tau) \bar{S}(\tau - (t - t_0)) d\tau. \quad (7.33)$$

Спектральна щільність, за Фур'є, цього сигналу дорівнює

$$\dot{S}_{y_{\bar{s}}}(f) = j \operatorname{sign}(f) \dot{S}_s(f) \dot{S}_{\bar{z}}(f) e^{-j\omega t_0}.$$

Таким чином, сигнали виразів (7.38) і (7.39) спряжені, за Гілбертом, з точністю до знака. Обвідна на виході фільтра, узгодженого з сигналом  $S(t)$  (або  $\bar{S}(t)$ ), описується формулою

$$V_s(t) = \sqrt{y_s^2(t) + y_{\bar{s}}^2(t)}. \quad (7.34)$$

Якщо сигнал  $S(t)$  отримує фазовий зсув  $\theta$ , то маємо такі вирази:

$$y_{s,\theta}(t) = y_s(t) \cos \theta - y_{\bar{s}}(t) \sin \theta;$$

$$y_{\bar{s},\theta}(t) = y_{\bar{s}}(t) \cos \theta + y_s(t) \sin \theta.$$

Оскільки обвідна сигналу  $S(t)$  від  $\theta$  не залежить, то вираз буде мати такий вигляд:

$$V_{s,\theta}(t) = \sqrt{y_{s,\theta}^2(t) + y_{\bar{s},\theta}^2(t)} = \sqrt{y_s^2(t) + y_{\bar{s}}^2(t)} = V_s(t). \quad (7.35)$$

Якщо коливання  $z(t)$  ортогональне  $S(t)$  на інтервалі  $(0, T)$ , але не є ортогональним на цьому інтервалі  $\hat{S}(t)$ , то  $y_s(T) = 0$ ,  $y_{\bar{s}}(T) = 0$  та  $V(T) \neq 0$ . Обвідна на виході фільтра дорівнює нулю, якщо  $z(t)$  та  $S(t)$  ортогональні в посиленому розумінні.

## Контрольні питання та задачі

1 При заданій реалізації прийнятого коливання апостеріорні ймовірності переданих символів 1 і 0 дорівнюють  $p(1|z) = 0,6$  і  $p(0|z) = 0,4$ . Який символ зареєструє приймач, оптимальний за критерієм ідеального спостерігача?

2 Яке правило приймання переважно застосовують у техніці зв'язку й чому?

3 Які основні блоки містить кореляційна схема оптимального когерентного приймання в каналі з адитивним стаціонарним білим гаусівським шумом?

4 Що розуміють під узгодженим фільтром (УФ)? У який момент часу на виході УФ забезпечується максимальне відношення сигнал/шум і чому воно дорівнює?

5 Знайти передатну функцію фільтра, узгодженого з прямокутним відеоімпульсом, і на її основі побудувати структурну схему фільтра.

6 Фільтр узгоджений з пачкою з  $N$  періодично переданих (з періодом  $T$ ) імпульсів. Перший імпульс має спектральну щільність  $S_1(j\omega)$ . Знайти передатну функцію УФ і на її основі побудувати структурну схему фільтра.

## **ЛЕКЦІЯ 8. Принципи побудови багатоканальних систем передачі інформації**

### **План**

8.1 Принципи побудови багатоканальних систем передачі інформації (БКСП).

8.1.1 Частотний розподіл каналів.

8.1.2 Часовий розподіл каналів.

8.1.3 Розподіл сигналів за формою.

8.1.4 Комбінований розподіл сигналів.

8.2 Особливості цифрових багатоканальних систем передачі інформації.

**Мета** – дати поняття мультиплексування і демупльтиплексування сигналів з метою побудови багатоканальних систем передачі (БСП); пояснити суть побудови частотного і кодового (часового) розподілу сигналів.

## 8.1 Принципи побудови багатоканальних систем передачі інформації (БКСП)

Практика побудови сучасних систем передачі інформації (СП) показує, що найдорожчими ланками каналів зв'язку є лінії зв'язку і лінійні споруди: кабельні, хвилеводні, світловодні, радіорелейні, супутникові та ін. Оскільки економічно недоцільно використовувати дорогу лінію зв'язку і лінійну споруду для передачі інформації між однією парою абонентів, то виникає необхідність побудови багатоканальних систем передачі, у яких одна спільна лінія зв'язку ущільнюється певною кількістю індивідуальних каналів. Цим забезпечується підвищення ефективності використання пропускнуєї спроможності лінії зв'язку. Узагальнена структурна схема багатоканальної системи передачі (БСП) показана на рисунку 8.1.

Індивідуальні сигнали повідомлень  $A_1(t), \dots, A_N(t)$  від  $N$  джерел повідомлень  $IC_1, \dots, IC_N$  за допомогою індивідуальних модуляторів  $M_1, \dots, M_N$  перетворюються в каналні сигнали  $U_1(t), \dots, U_N(t)$ . Після об'єднання цих сигналів у пристроях об'єднання (ПОБ) утворюється груповий сигнал  $U_{гр}(t)$ , який після перетворення в груповому модуляторі в лінійний  $U_{л}(t)$  передається лінією зв'язку (ЛЗ). Груповий приймач  $\Pi$  перетворить отриманий сигнал  $Z_{л}(t)$  у початковий груповий сигнал  $Z(t) = U_{гр}(t)$ . Індивідуальні приймачі  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$  виділяють з групового сигналу  $Z(t)$  відповідні каналні сигнали  $Z_1(t), \dots, Z_N(t)$ , а перетворювачі  $\text{Пр}_1, \dots, \text{Пр}_N$  перетворюють їх у повідомлення  $\tilde{A}_1(t), \dots, \tilde{A}_N(t)$ . Блоки  $M_1, \dots, M_N$  і суматор ПОБ утворюють апаратуру ущільнення (АУ), блоки  $M$ , ЛЗ і  $\Pi$  складають груповий канал, блоки  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$  утворюють апаратуру розподілу (АР) каналів. Апаратура ущільнення, груповий канал і апаратура розподілу є основою багатоканальної системи передачі інформації.

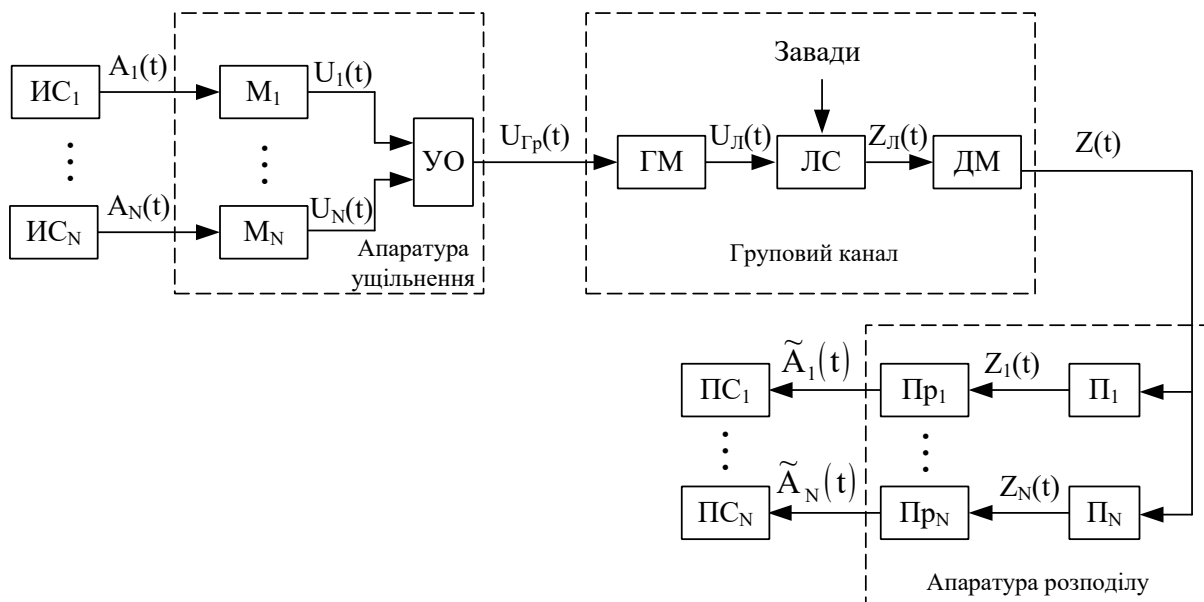


Рисунок 8.1 – Узагальнена структурна схема багатоканальної системи передачі

Щоб розподільні пристрої могли розрізнити сигнали окремих каналів, мають бути визначені відповідні ознаки, властиві тільки даному сигналу. Такими ознаками в разі безперервної модуляції можуть бути частота, амплітуда, фаза, а в разі дискретної модуляції форма – і код сигналу. Відповідно до використовуваних для розподілу сигналів ознак розрізняються такі способи розподілу: частотний, часовий, фазовий, за формою, за кодом та ін.

### 8.1.1 Частотний розподіл каналів

Структурна схема багатоканальної системи з частотним розподілом каналів (ЧРК) показана на рисунку 8.2.



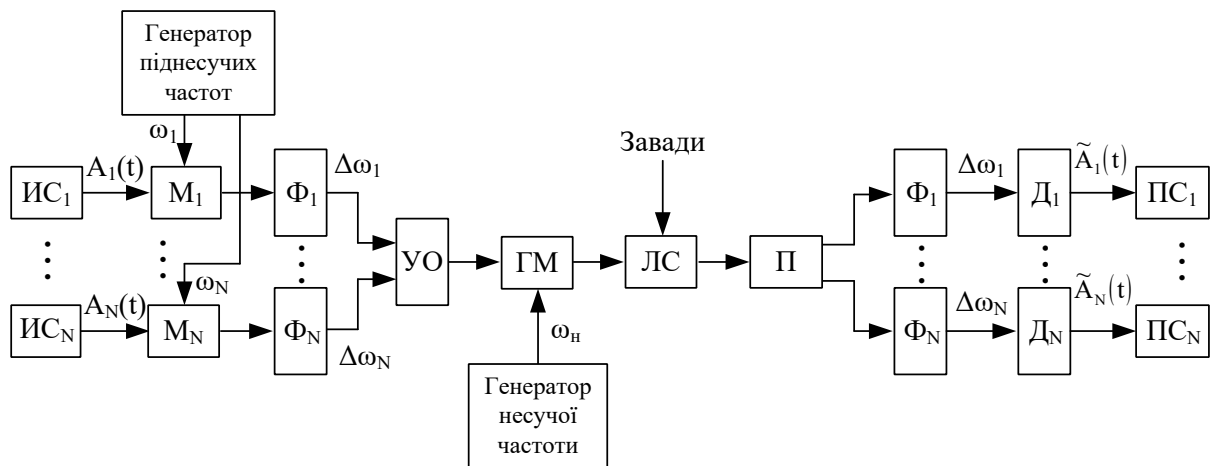


Рисунок 8.2 – Структурна схема багатоканальної системи передачі з частотним розподілом каналів

Первинні сигнали, що відображують індивідуальні повідомлення  $A_1(t), \dots, A_N(t)$ , модулюють піднесучі частоти  $\omega_1, \dots, \omega_N$  в модуляторах  $M_1, \dots, M_N$ . Модульовані сигнали з виходів модуляторів надходять на входи смугових частотних фільтрів  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ . На виходах  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  формуються спектри каналних сигналів, що займають відповідні смуги частот  $\Delta\omega_1, \dots, \Delta\omega_N$ . Сигнали з цими спектрами об'єднуються в ПрО і надходять у груповий модулятор (ГМ), який переносить сумарний спектр групового сигналу в область частот, відведених для передачі цієї групи каналів по лінії зв'язку.

На приймальному боці в демодуляторі приймача (П) спектр отриманого сигналу перетворюється в спектр переданого об'єданого сигналу, який смуговими фільтрами  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  розділяється на смуги  $\Delta\omega_1, \dots, \Delta\omega_N$ , що відповідають окремим каналам. Демодулятори  $D_1, \dots, D_N$  перетворюють каналні сигнали в сигнали початкових повідомлень  $\tilde{A}_1(t), \dots, \tilde{A}_N(t)$ , які поступають до одержувачів повідомлень  $ПС_1 \dots ПС_N$ .

Для нормальної роботи такої системи необхідно мати частотні смугові фільтри, кожен з яких повинен пропускати без ослаблення тільки відповідні їм смуги частот, у яких зосереджена основна частина енергії передаваних сигналів  $\Delta\omega_1, \dots, \Delta\omega_N$ . Оскільки реальні фільтри не мають ідеальної АЧХ, то відбувається взаємне накладення енергетичних спектрів сусідніх каналів, що призводить до перехідних завад. На практиці ця обставина враховується за введенням захисних частотних

інтервалів між смугами частот сусідніх каналів. Це призводить до того, що для передачі інформації використовується лише близько 80 % смуги пропускання лінії зв'язку.

Наприклад, телефонний канал зв'язку або канал тональної частоти (ТЧ) займає діапазон 300-3400 Гц. Враховуючи захисні частотні інтервали, що дорівнюють 900 Гц, для каналу ТЧ вибирається смуга частот 4 кГц. Історично першою була реалізована 12-канальна система в смузі частот від 60 до 108 кГц ( $108-60=48/4=12$ ). Якщо необхідно організувати систему з великою кількістю каналів, то за початкову береться ця 12-канальна система і на її основі формуються стандартні групи каналів більш високого порядку. Так, якщо необхідно організувати систему з 60 каналами методом частотного розподілу, то формують 5 дванадцятиканальних груп у смузі частот від 312 до 552 кГц ( $552-312=240$  кГц,  $240/4=60$ ). Якщо 5 частотних діапазонів по 240 кГц розмістити на осі частот, то отримаємо спектр частот, розрахований на 300 каналів.

При цьому кожену групу каналів можна використати для різних служб або ж цілком як один широкосмуговий канал, або як велику кількість каналів. Так, спектр груп шириною 240 кГц (60 телефонних каналів) можна цілком використати для факсимільної передачі газетних повідомлень, для якої потрібна смуга 170 кГц. Якщо взяти 5 груп по 1200 кГц, дві по 240 кГц і розмістити їх поруч, то отримаємо смугу частот близько 6,5 МГц, придатну для передачі телевізійних сигналів. Такий діапазон частот дозволяє також передавати  $5 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 60 = 1620$  телефонних каналів.

### **8.1.2 Часовий розподіл каналів**

Часовий розподіл каналів (РКЧ) використовується для передачі аналогових і дискретних повідомлень, проте при цьому необхідно використовувати методи імпульсної модуляції (ІМ).

Структурна схема системи передачі повідомлень з часовим розподілом каналів зображена на рисунку 8.3.

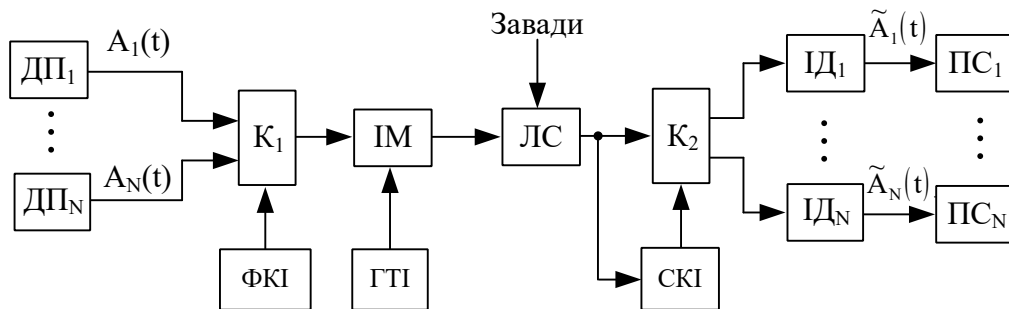


Рисунок 8.3 – Структурна схема БКСП з РКЧ

Комутатор передавача  $K_1$  під управлінням формувача комутуючих імпульсів (ФКІ) по черзі в кожному такті часу  $\Delta t_g \leq \frac{1}{2f_c}$  підключає сигнали від джерел повідомлень  $ДП_1, \dots, ДП_N$  до лінії зв'язку (ЛЗ). На приймальному боці комутатор приймача  $K_2$  під управлінням селектора каналних (комутуючих) імпульсів (СКІ) синхронно з  $K_1$  підключає відповідні імпульсні детектори  $ID_1, \dots, ID_N$ , виходи яких сполучені з відповідними перетворювачами сигналів у повідомлення  $ПС_1 \dots ПС_N$ . Приклад часового розподілу двох сигналів показаний на рисунку 8.4.

Системи з часовим розподілом каналів (сигналів) відносно прості в реалізації, надійні в роботі, мають порівняно малі габарити і масу, дозволяють використовувати стандартну елементну базу, наприклад великі інтегральні схеми (ВІС) для реалізації. Основний їх недолік полягає в необхідності синхронної роботи комутаторів  $K_1$  і  $K_2$ , а якщо вони рознесені на велику відстань, то це важко забезпечити.

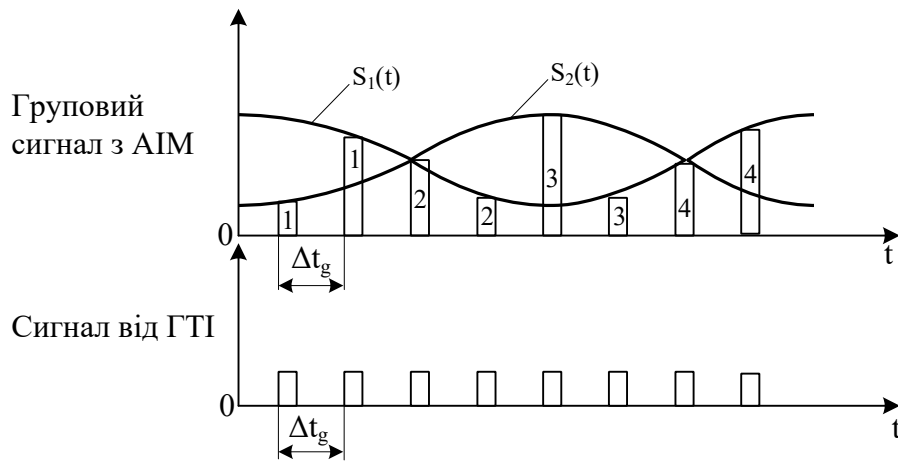


Рисунок 8.4 – Приклад часового розподілу двох сигналів  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$

У цих системах через неідеальності характеристик апаратури також можуть виникати взаємні завади (накладення імпульсів). Для їх усунення вводять захисні часові інтервали між імпульсами  $\tau_z$ .

Пояснимо смисл принципу часового розподілу каналів на прикладі передачі мовних сигналів. За основу при цьому береться телефонний канал або канал тональної частоти (ТЧ). Він займає смугу частот 4000 Гц. Якщо перетворити безперервний мовний сигнал у дискретизований методом імпульсно-кодової модуляції (ІКМ), врахувавши теорему Котельникова, то отримаємо, що такий мовний сигнал можна представити послідовністю імпульсів з періодом  $\Delta t_g = \frac{1}{2F_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot 4000} = 125$  мкс. Тоді кількість вирізаних з аналогового сигналу імпульсів у секунду буде дорівнювати  $N_{\text{имп}} = \frac{1}{125 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^3$ . Для передачі мови цифровим способом максимальна амплітуда одного імпульсу може бути представлена 1 байтом, тобто 8-розрядним двійковим кодом. Отже, кожен 125 мкс в лінію зв'язку повинно поступати 8 бітів інформації, що характеризують амплітуду імпульсів, вирізаних з початкового безперервного мовного сигналу в конкретний момент часу.

Тоді загальна швидкість передачі мови каналом тональної частоти у вигляді двійкових символів «0» і «1» буде дорівнювати  $V_p = 8 \cdot 8 \cdot 10^3 = 64$  кбіт/с. Таким чином, людська мова може бути

передана каналом зв'язку у вигляді послідовності байтів, що поступають 8000 разів у секунду, тобто через 125 мкс. Якщо тепер зменшити інтервал передачі одного байта до 5 мкс, то за час 125 мкс можна передати ще 24 інших байти, які відповідатимуть розмовам інших абонентів. Таким чином, по одному каналу зв'язку, не порушуючи умов теореми Котельникова, можна здійснити передачу 25 розмов різних абонентів.

### **8.1.3 Розподіл сигналів за формою**

Для розподілу сигналів у багатоканальних системах передачі інформації (БСПІ) можуть використовуватися не лише такі ознаки, як частота або час, але також і форма сигналу. При цьому сигнали, що розрізняються за формою, можуть передаватися одночасно і мати частотні спектри, що перекриваються. Такі сигнали можна одночасно передавати в одній і тій самій смузі частот і в одні і ті самі інтервали часу, але при цьому повинна точно виконуватися умова лінійної незалежності або умова ортогональності сигналів. При цьому істотно зростає ефективність використання лінії зв'язку.

Для побудови систем багатоканального зв'язку з розподілом сигналів за їх формою застосовується операція ортогоналізації, тобто перетворення лінійно-залежних сигналів у незалежні, тобто в ортогональні. Для цього можуть бути використані відомі методи подання функцій у вигляді поліномів Чебишева, Ерміта, Лежандра, Лагера, Уолша та ін. Проте реалізація такого перетворення може стати дуже складною. Тому методи розподілу каналів на основі відмінності форм сигналів нині продовжують розвиватися.

### **8.1.4 Комбінований розподіл сигналів**

Комбінований спосіб розподілу використовується в основному при груповій передачі дискретних повідомлень. Суть цього способу полягає в такому.

Нехай необхідно організувати передачу  $N$  незалежних дискретних повідомлень по одному груповому каналу зв'язку.

Якщо кожен елемент повідомлення може приймати  $m$  станів (наприклад  $m=2$ , а кількість каналів  $N=2$ ), то виявляються можливими 4 різних комбінації елементарних сигналів 0 і 1 в обох каналах. Завдання тепер зводиться до передачі деяких чисел, що визначають номер конкретної комбінації. Ці числа можуть передаватися за допомогою будь-якого коду. При такій передачі груповий сигнал є відображенням певної комбінації сигналів різних каналів. Тому розподіл сигналів, заснований на відмінності в комбінаціях сигналів різних каналів, називається комбінаційним розподілом.

Типовим прикладом комбінованого розподілу каналів є система двократної частотної модуляції (ДЧМ). Так, для передачі чотирьох різних комбінацій сигналів двох каналів використовуються чотири різні частоти  $f_1, f_2, f_3, f_4$ . Тоді кожному каналу можна поставити у відповідність кодову комбінацію і частоту в такому вигляді:

Канал 1	0	1	0	1
Канал 2	0	0	1	1
Частота	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$

Порівняння ДЧМ із звичайною двоканальною ЧМ системою з частотним розподілом показує, що обидві системи займають однакову смугу частот, проте потужність сигналу, що забезпечує задану правильність передачі при ДЧМ, майже удвічі менша, ніж при частотному розподіленні. Тому комбінований розподіл широко застосовується в каналах з обмеженим динамічним діапазоном.

## **8.2 Особливості цифрових багатоканальних систем передачі інформації**

Цифрові багатоканальні системи передачі (ЦБСП) повідомлень засновані на широко розвинених методах імпульсно-кової модуляції і використовують часовий принцип розподілу каналів. У багатоканальній цифровій системі передачі сполучень з часовим розподілом каналів загальний потік бітів, що

передається послідовно по лінії зв'язку, періодично ставиться у відповідність окремим каналам. Період цього процесу, тобто цикл, зображений на рисунку 8.5.

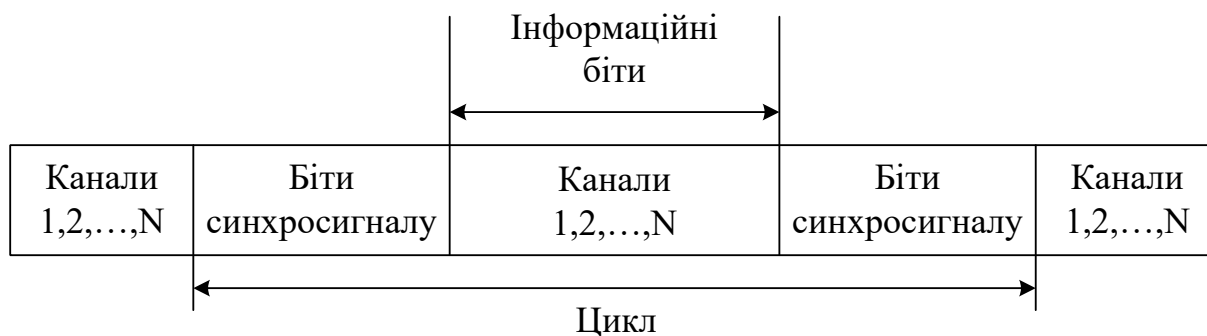


Рисунок 8.5 – Структура циклу цифрової багатоканальної системи передачі повідомлень

Для синхронізації циклів відводиться невелика частина загальної кількості бітів. Окремі біти цього циклового синхросигналу можуть розташовуватися або всі підряд у вигляді синхронізуючої комбінації (як на рисунку 8.5), або розподіляються всередині циклу. Після того як вказаним способом позначений початок циклу, інформаційні біти простим їх виділенням можна розподілити між окремими каналами по одному (посимвольний спосіб об'єднання цифрових потоків) або по групах (груповий спосіб об'єднання цифрових потоків).

Структурна схема цифрової системи передачі даних з часовим розподілом сигналів показана на рисунку 8.6, де виділені такі позначення блоків: MUX – мультиплексор; ДМУХ – демультіплексор; ТЦС – тактовий генератор і синхронізатор циклів.

Робота схеми полягає в такому. Цифрові сигнали даних надходять на вхідні блоки  $V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  і зберігаються там до тих пір, поки мультиплексор не об'єднає їх у загальний потік і не включить кожен з них на тому місці циклу, яке відповідає номеру каналу кожного з цих сигналів.

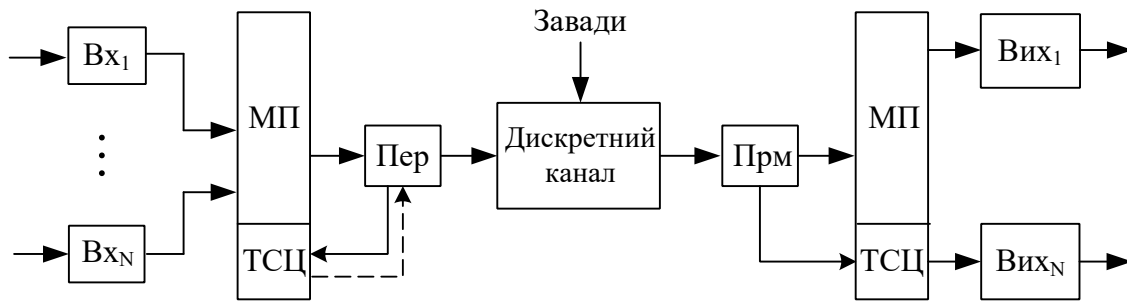


Рисунок 8.6 – Структурна схема цифрової системи передачі з ЧРК

Інформація, необхідна для циклової синхронізації, також спрямовується у відведене їй місце в загальному потоці бітів, наприклад у вигляді синхронізуючої бітової комбінації на початку циклу. Сформований потік передається каналом зв'язку.

На приймальному боці в облаштуванні ТЦС виділяється синхронізуюча циклова комбінація і безперервно контролюється. ТЦС встановлює демультимплексор у стан, що відповідає надходженню циклової комбінації так, що інформаційні біти, які належать різним каналам  $1, \dots, N$ , у належні моменти часу прочитуються і розподіляються по вихідних блоках  $Вих_1, \dots, Вих_N$ .

Система з часовим розподілом каналів вимагає синхронізації передавального і приймального пристроїв. Якщо такти формуються приймально-передавальною апаратурою (Пер, Прм), то вони поступають у блоки системи від передавача (Пер) і приймача (Прм) у протилежних напрямках. У ряді випадків робиться так, щоб синхросигнали завжди співпадали з напрямком передач групового сигналу. Для цього на передавальному боці тактовий сигнал, як і дані з виходу ТЦС, поступає на передавач.

Найважливішими особливостями цифрових систем багатоканальної передачі з часовим розподілом каналів є такі:

- 1) спосіб об'єднання цифрових потоків;
- 2) забезпечення циклової синхронізації;
- 3) узгодження швидкостей передачі потоків бітів (стафінг).

Вище ми вже говорили про два способи об'єднання цифрових потоків: посимвольний і груповий. Перший з вказаних способів дозволяє порівняно просто організувати РКЧ. При цьому способі сигнали даних, що передаються окремими



каналами, об'єднуються мультиплексором у груповий потік по окремих бітах (символах). Тому у вихідних блоках  $V_{их1}, \dots, V_{ихN}$  тільки один біт підлягає проміжному запам'ятовуванню на той час, поки він не буде поміщений на відповідне місце (позицію) у циклі. Передаваний сигнал даних таким чином може бути зсунутий відносно тактів запам'ятовуючого пристрою максимум на один біт, тому найбільший час затримки при переведенні одного біта в груповий потік дорівнює двом одиничним тактам часу.

Посимвольний метод об'єднання є дуже гнучким і допускає об'єднання каналів з різними швидкостями в одній системі.

Груповий метод об'єднання припускає розподіл потоку бітів у кожному каналі по групах бітів певної довжини. При цьому вхідні блоки повинні виявити початок цих груп і запам'ятовувати їх. Потім мультиплексор виконує вставлення цієї групи бітів у потрібне місце в циклі. Тому час затримки в ЦБСП з РКЧ при такому способі об'єднання може досягати подвоєної тривалості групи бітів.

Для циклової синхронізації виділяється невелика частина бітів із загальної їх кількості в циклі. Вони розміщуються всередині циклу строго певним чином (наприклад на початку циклу) і повинні гарантувати на приймальному боці відповідність передаваних інформаційних бітів своїм індивідуальним каналам. Для цього необхідна повна синхронізація всіх блоків ЦБСП з РКЧ. Це досягається за допомогою спеціальних методів узгодження швидкостей (стафінгу).

Суть цих методів: спочатку утворюється цикл узгодження, який, як правило, відповідає основному циклу або надциклу, що охоплює декілька основних циклів системи з РКЧ. Загальна кількість бітів у циклі узгодження вибирається більшою, ніж кількість інформаційних бітів, для того, щоб виконати такі умови.

1 Вводиться один або кілька бітів заповнення, які можуть містити або не містити дані (тобто використовується постійний цикл узгодження).

2 Вводиться один або більше бітів пробілу, які для вирівнювання швидкостей можуть за необхідності видалятися (тобто використовується змінний цикл узгодження).

3 Для забезпечення узгодження на приймальний бік ЦБСП з РКЧ спрямовується інформація (закодована кількома бітами) про те, чи містить біт заповнення дані, або про те, збережений чи ні біт пробілу.

За певну кількість кроків процесу узгодження на приймальному боці цифрової системи з РКЧ можна таким чином відновити тактові інтервали первинного сигналу даних.

### Контрольні питання та задачі

1 Сформулювати основні переваги багатоканальної передачі і пояснити її структурну схему.

2 Які вимоги повинні задовольняти каналні сигнали при формуванні групового сигналу системи багатоканальної передачі?

3 Визначити ширину спектра групового сигналу 12-канальної системи односмугової ЧРК за умови, що кожне з каналних повідомлень займає смугу частот 300...3400 Гц, а захисний проміжок складає 30 % рознесення між піднесучими частотами.

4 Довести, що енергетична ефективність  $\beta$  при  $p = const$  для ФМ-2 і ФМ-4 однакова, а частотна ефективність  $\gamma$  відрізняється у два рази (3 дБ).

5 Як визначається кількість і якість продукції в системах зв'язку? Як визначаються показники інформаційної, енергетичної і частотної ефективності системи зв'язку?

6 Визначити енергетичний виграш ідеальної системи порівняно з ФМ-2 при  $\gamma = 1$ . Як залежить цей виграш від допустимої імовірності помилки  $p$ ? Вказівка: скористатися

наближеним виразом для інтеграла  $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ , де для

ФМ-2  $\alpha^2 = \frac{2E_b}{N_0}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Батаєв О. П., Ковтун І. В., Корольова Н. А. Теорія електричного зв'язку : навч. посібник. Харків : УкрДАЗТ, 2010. 630 с.
- 2 Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Теорія електричного зв'язку : підруч. для вузів. Київ : Техніка, 2006. 550 с.
- 3 Волочій Б. Ю. Передавання сигналів в інформаційних системах. Львів : Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2005. Ч. 1. 194 с.
- 4 Гусєв О. Ю., Конахович Г. Ф., Корнієнко В. І., Кузнецов Г. В., Пузиренко О. Ю. Цифрові системи передачі інформації : навч. посібник. Львів : Магнолія, 2006. 364 с.
- 5 Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Проектування телекомунікаційних мереж. Київ : Техніка, 2002. 792 с.
- 6 Дирда В. Ю., Іващенко П. В. Теорія електричного зв'язку. Одеса, 2010. 80 с.
- 7 Дробик О. В., Кідалов В. В., Коваль В. В., Костік Б. Я., Лазебний В. С., Розорінов Г. М., Сукач Г. О. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах : навч. посібник. Київ : Наукова думка, 2008. – 144 с.