

**БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ  
ЗАВДАНЬ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

**Харків – 2016**

Приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з опору матеріалів розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 28 серпня 2015 р., протокол № 1.

У методичних вказівках подано приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з опору матеріалів для студентів спеціальності «Залізничні споруди та колійне господарство».

Укладач

доц. Є.І. Галагуря

Рецензент

проф. Д.А. Пługін

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ  
ЗАВДАНЬ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Відповідальний за випуск Галагуря Є.І.

Редактор Страхова В.В.

---

Підписано до друку 15.10.15 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,75. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,  
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**Кафедра будівельної механіки та гідравліки**

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ  
ЗАВДАНЬ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**для студентів спеціальності  
«Залізничні споруди та колійне господарство»**

**Харків 2016**

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 28 серпня 2015 р., протокол № 1.

У методичних вказівках подано приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з опору матеріалів для студентів спеціальності «Залізничні споруди та колійне господарство».

Укладач

доц. Є.І. Галагуря

Рецензент

проф. Д.А. Пługін

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Побудова епюр поздовжніх сил для ступінчатого стержня...	5
2 Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів для консольної балки.....	12
3 Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів для балки на двох опорах.....	20
4 Побудова епюр поперечних сил, поздовжніх сил та згинальних моментів для плоскої рами.....	28
5 Побудова епюр крутних моментів для вала.....	38
6 Розрахунок шарнірно-стержневих систем при розтяганні та стисканні.....	44
7 Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.	47
8 Розрахунок сталеві балки.....	55
9 Розрахунок дерев'яної балки.....	65
10 Розрахунок нерозрізних балок.....	73
11 Розрахунок балки на пружній (вінклерівській) основі.....	87
12 Розрахунок на косий згин.....	92
13 Розрахунок на позацентровий стиск.....	97
14 Розрахунок на згин із крученням.....	106
15 Розрахунок на стійкість.....	111
Список літератури.....	118
Додаток А. Таблиця значень початкових параметрів.....	119
Додаток Б. Таблиця значень функцій Крилова.....	124

## ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів і містять приклади розв'язання завдань, які виконують студенти денної та заочної форм навчання спеціальності «Залізничні споруди та колійне господарство» при вивченні опору матеріалів. Ці вказівки є продовженням та доповненням методичних рекомендацій кафедри будівельної механіки та гідравліки [1-5].

Для кінцевого контролю отриманого розв'язку чи контролю розв'язання по кроках, а також для допомоги при розв'язанні завдання призначені програмні комплекси кафедри [6].

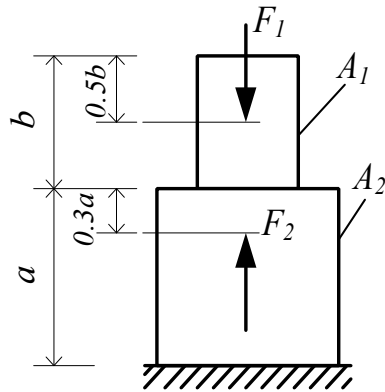
Вказівки містять довідковий матеріал, необхідний для розв'язання завдань: таблиця значень початкових параметрів (додаток А), таблиця значень функцій Крилова (додаток Б).

У даних вказівках розв'язання задач супроводжується основними теоретичними даними курсу, які покладено в основу розв'язання. Однак ці вказівки не можуть замінити підручник, тому щоб розв'язувати задачі з розумінням, треба попередньо ознайомитись з відповідним матеріалом у підручнику чи у курсі лекцій [7-12].

Зміст та наповнення розрахунково-графічних робіт прийняті згідно з планом підготовки студентів відповідного напрямку.

# 1 Побудова епюр поздовжніх сил для ступінчатого стержня

Для ступінчатого стержня побудувати епюру поздовжніх сил з урахуванням власної ваги стержня. Матеріал стержня – бетон (об'ємна вага бетону  $\gamma = 22 \text{ кН/м}^3$ ), рисунок 1.1.



Дано:

$$a = 4 \text{ м}$$

$$b = 3 \text{ м}$$

$$F_1 = 125 \text{ кН}$$

$$F_2 = 150 \text{ кН}$$

$$A_1 = 1.5 \text{ м}^2$$

$$A_2 = 2 \text{ м}^2$$

Рисунок 1.1 – Розрахункова схема

## Розв'язання

1.1 Визначимо положення граничних точок, які розташуємо по базовій лінії стержня. В нашому випадку п'ять граничних точок (рисунок 1.2).

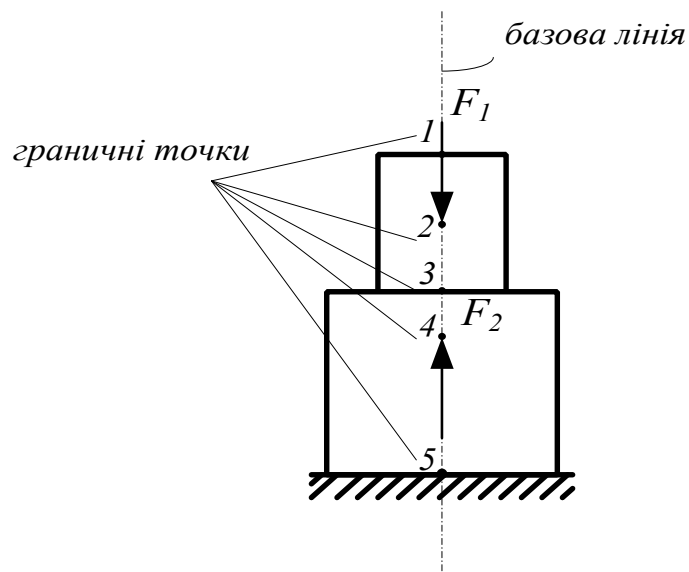


Рисунок 1.2 – Визначення положення граничних точок

1.2 Скористаємося методом перерізів для побудови епюри поздовжніх зусиль:

1.2.1 Проведемо переріз між точками 1 і 2 та відкинемо нижню частину стержня, яку замінимо поздовжнім внутрішнім зусиллям  $N_I$  (рисунок 1.3).

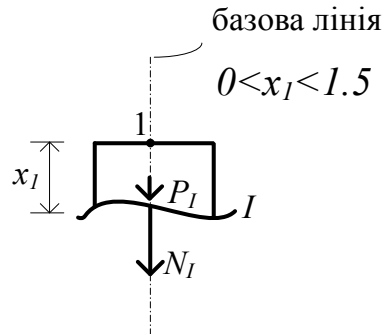


Рисунок 1.3 – Побудова епюри  $N_I$

Припустимо, що початок координат розташовано в граничній точці 1. Переріз  $I$  ми можемо провести як біля точки 1, так і біля точки 2, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_1$ . В даному випадку  $x_1$  буде змінюватися від 0 (координата точки 1) до 1.5 м (координата точки 2).

Так як наша система знаходиться в рівновазі, то сума всіх зовнішніх зусиль повинна дорівнювати 0. Спроекуємо усі зусилля на вісь  $y$  і визначимо внутрішнє зусилля  $N_I$ . На ділянці від точки 1 до точки 2 присутня лише власна вага  $P_I$ .

Запишемо рівняння рівноваги для перерізу  $I$ :

$$\sum Y = 0.$$

З урахуванням правила знаків для поздовжньої сили (поздовжня сила вважається додатною, якщо вона викликає розтягання або спрямована від перерізу, і від'ємною, якщо вона викликає стискання або спрямована до перерізу) рівняння рівноваги матиме такий вигляд:

$$-P_I - N_I = 0,$$



$$N_I = -P_I.$$

Власну вагу  $P_I$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня

$$P_I = \gamma \cdot A_1 \cdot x_1,$$

$$N_I = -\gamma \cdot A_1 \cdot x_1.$$

Так як  $x_1$  змінюється від 0 до 1.5 м, то визначимо  $N_I$  для двох значень  $x_1$ :

при  $x_1=0$

$$N_I = 0,$$

при  $x_1=1.5$  м

$$N_I = -22 \cdot 1.5 \cdot 1.5 = 49.5 \text{ кН}.$$

1.2.2 Проведемо переріз між точками 2 і 3 та відкинемо нижню частину стержня, яку замінимо поздовжнім внутрішнім зусиллям  $N_{II}$  (рисунок 1.4).

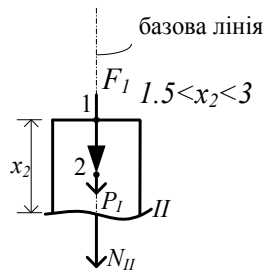


Рисунок 1.4 – Побудова епюри  $N_{II}$

Переріз  $II$  ми можемо провести як біля точки 2, так і біля точки 3, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_2$ . В даному випадку  $x_2$  буде змінюватися від 1.5 м (координата точки 2) до 3 м (координата точки 3).

Так як наша система знаходиться в рівновазі, то сума всіх зовнішніх зусиль повинна дорівнювати 0. Спроєктуємо усі зусилля на вісь  $y$  і визначимо внутрішнє зусилля  $N_{II}$ . Вище перерізу  $II$  присутня власна вага  $P_I$  та зосереджена сила  $F_1$ .

Запишемо рівняння рівноваги для перерізу  $II$ :

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0, \\ -P_I - N_{II} - F_1 &= 0, \\ N_{II} &= -P_I - F_1.\end{aligned}$$

Власну вагу  $P_I$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня

$$\begin{aligned}P_I &= \gamma \cdot A_1 \cdot x_2, \\ N_{II} &= -\gamma \cdot A_1 \cdot x_2 - F_1.\end{aligned}$$

Так як  $x_2$  змінюється від 1.5 м до 3 м, то визначимо  $N_{II}$  для двох значень  $x_2$ :

при  $x_2=1.5$  м

$$N_{II} = -22 \cdot 1.5 \cdot 1.5 - 125 = -174.5 \text{ кН},$$

при  $x_2=3$  м

$$N_{II} = -22 \cdot 1.5 \cdot 3 - 125 = -224 \text{ кН}.$$

1.2.3 Проведемо переріз між точками 3 і 4 та відкинемо нижню частину стержня, яку замінимо поздовжнім внутрішнім зусиллям  $N_{III}$  (рисунок 1.5).

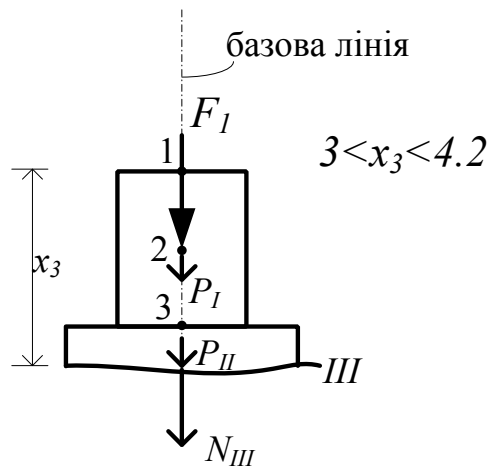


Рисунок 1.5 – Побудова епюри  $N_{III}$

Переріз  $III$  ми можемо провести як біля точки 3, так і біля точки 4, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_3$ . В даному випадку  $x_3$  буде змінюватися від 3 м (координата точки 3) до 4.2 м (координата точки 4).

Так як наша система знаходиться в рівновазі, то сума всіх зовнішніх зусиль повинна дорівнювати 0. Спроекуємо усі зусилля на вісь  $y$  і визначимо внутрішнє зусилля  $N_{III}$ . Вище перерізу  $III$  присутня власна вага  $P_I$ , зосереджена сила  $F_1$  та власна вага  $P_{II}$ .

Запишемо рівняння рівноваги для перерізу  $III$ :

$$\sum Y = 0,$$

$$-P_I - N_{III} - F_1 - P_{II} = 0,$$

$$N_{III} = -P_I - F_1 - P_{II}.$$

Власну вагу  $P_I$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня з площею  $A_1$ , а власну вагу  $P_{II}$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня з площею  $A_2$

$$P_I = \gamma \cdot A_1 \cdot b,$$

$$P_{II} = \gamma \cdot A_2 \cdot (x_3 - b),$$

$$N_{III} = -\gamma \cdot A_1 \cdot b - F_1 - \gamma \cdot A_2 \cdot (x_3 - b).$$

Так як  $x_3$  змінюється від 3 м до 4.2 м, то визначимо  $N_{III}$  для двох значень  $x_3$ :

при  $x_3=3$  м

$$N_{III} = -22 \cdot 1.5 \cdot 3 - 125 - 22 \cdot 2 \cdot (3 - 3) = -224 \text{ кН},$$

при  $x_3=4.2$  м

$$N_{III} = -22 \cdot 1.5 \cdot 3 - 125 - 22 \cdot 2 \cdot (4.2 - 3) = -276.8 \text{ кН}.$$

1.2.4 Проведемо переріз між точками 4 і 5 та відкинемо нижню частину стержня, яку замінимо поздовжнім внутрішнім зусиллям  $N_{IV}$  (рисунок 1.6).

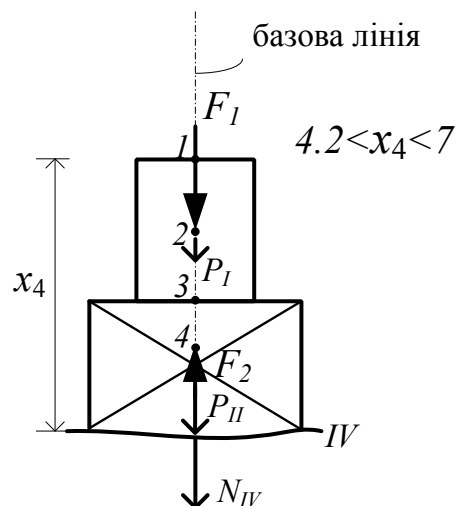


Рисунок 1.6 – Побудова епюри  $N_{IV}$

Переріз  $IV$  ми можемо провести як біля точки 4, так і біля точки 5, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_4$ . В даному випадку  $x_4$  буде змінюватися від 4.2 м (координата точки 4) до 7 м (координата точки 5).

Так як наша система знаходиться в рівновазі, то сума всіх зовнішніх зусиль повинна дорівнювати 0. Спроекуємо усі зусилля на вісь  $y$  і визначимо внутрішнє зусилля  $N_{IV}$ . Вище

перерізу  $IV$  присутня власна вага  $P_I$ , зосереджена сила  $F_1$ , власна вага  $P_{II}$  та зосереджена сила  $F_2$ .

Запишемо рівняння рівноваги для перерізу  $IV$ .

$$\sum Y = 0,$$
$$-P_I - N_{IV} - F_1 - P_{II} + F_2 = 0,$$
$$N_{IV} = -P_I - F_1 - P_{II} + F_2.$$

Власну вагу  $P_I$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня з площею  $A_1$ , а власну вагу  $P_{II}$  визначимо як множення об'ємної ваги стержня на об'єм стержня з площею  $A_2$

$$P_I = \gamma \cdot A_1 \cdot b,$$
$$P_{II} = \gamma \cdot A_2 \cdot (x_3 - b),$$
$$N_{IV} = -\gamma \cdot A_1 \cdot b - F_1 - \gamma \cdot A_2 \cdot (x_3 - b) + F_2.$$

Так як  $x_4$  змінюється від 4.2 м до 7 м, то визначимо  $N_{IV}$  для двох значень  $x_4$ :

при  $x_4=4.2$  м

$$N_{IV} = -22 \cdot 1.5 \cdot 3 - 125 - 22 \cdot 2 \cdot (4.2 - 3) + 150 = -126.8 \text{ кН},$$

при  $x_4=7$  м

$$N_{IV} = -22 \cdot 1.5 \cdot 3 - 125 - 22 \cdot 2 \cdot (7 - 3) + 150 = -250 \text{ кН}.$$

1.2.5 Після обчислень значень поздовжньої сили на всіх характерних перерізах побудуємо епюру  $N$  (рисунок 1.7).

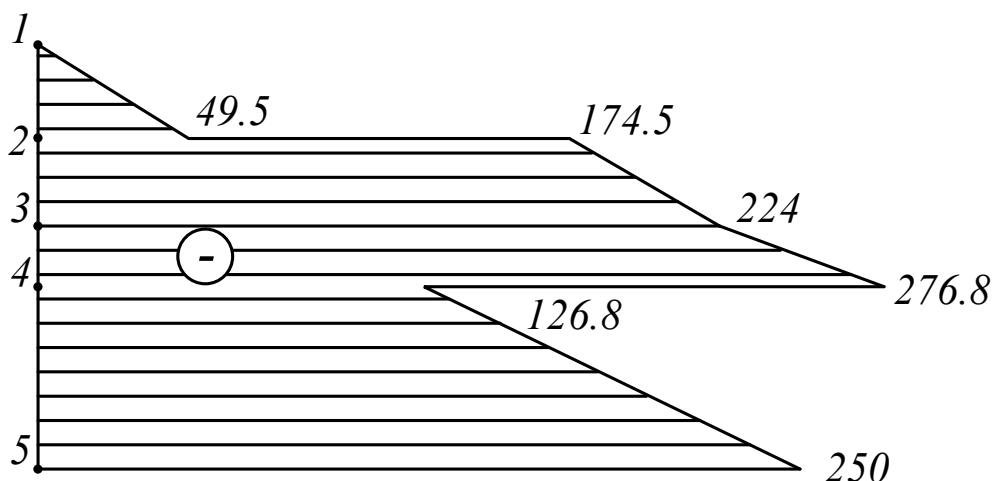
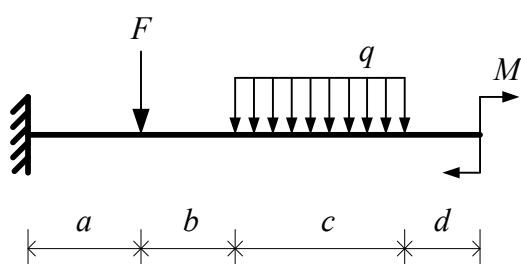


Рисунок 1.7 – Епюра  $N$

## 2 Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів для консольної балки

Для консольної балки побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів (рисунок 2.1).



Дано:

$$a = 4 \text{ м}; F = 100 \text{ кН};$$

$$b = 3 \text{ м}; q = 15 \text{ кН/м};$$

$$c = 5 \text{ м}; M = 20 \text{ кНм};$$

$$d = 2 \text{ м}.$$

Рисунок 2.1 – Розрахункова схема

### Розв'язання

2.1 Спочатку визначимо опорні реакції. В жорсткому закріпленні виникає вертикальна  $R_A$  і горизонтальна  $H_A$  опорні реакції і згинальний момент  $M_A$  (рисунок 2.2).

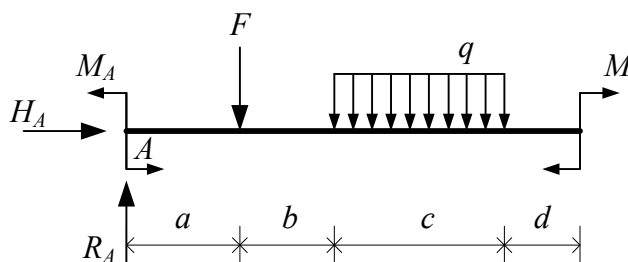


Рисунок 2.2 – Визначення опорних реакцій в балці

Горизонтальна реакція  $H_A$  в даному випадку дорівнює 0, тому що зовнішнє навантаження перпендикулярне до осі балки. Для спрощення виконання розрахунків необхідно подати розподілене навантаження у вигляді зосередженої сили, причому сила буде прикладатися в центрі тяжіння дії розподіленого навантаження, а величина зосередженої сили буде дорівнювати добутку інтенсивності дії розподіленого навантаження  $q$  на довжину ділянки дії розподіленого навантаження (в нашому випадку  $c$ ). Для визначення вертикальної опорної реакції  $R_A$  і згинального моменту  $M_A$  складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_A - F - q \cdot c = 0,$$

$$R_A = F + q \cdot c,$$

$$R_A = 100 + 15 \cdot 5 = 175 \text{ кН},$$

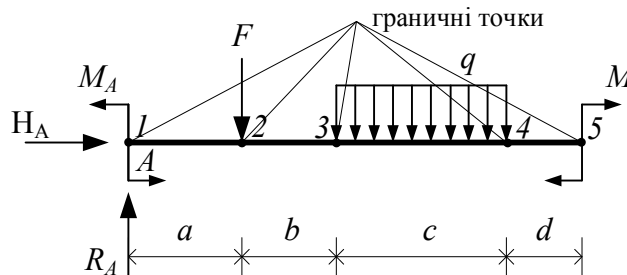
$$\sum M_A = 0,$$

$$M_A - F \cdot a - q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) - M = 0,$$

$$M_A = F \cdot a + q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) + M,$$

$$M_A = 100 \cdot 4 + 15 \cdot 5 \cdot \left(4 + 3 + \frac{5}{2}\right) + 20 = 1132.5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.2 Для побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів необхідно визначити положення граничних точок (рисунок 2.3), а потім скористатись методом перерізів.



## Рисунок 2.3 – Визначення граничних точок в балці

2.2.1 Припустимо, що початок координат розташовано в граничній точці 1.

Проведемо переріз між точками 1 і 2 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_I$  і  $M_I$  (рисунок 2.4).

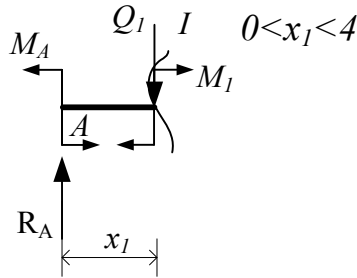


Рисунок 2.4 – Побудова епюри  $Q_I$  і  $M_I$

Переріз  $I$  ми можемо провести як біля точки 1, так і біля точки 2, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_1$ . В даному випадку  $x_1$  буде змінюватися від 0 (координата точки 1) до 4 м (координата точки 2).

Так як наша система знаходиться в рівновазі, та з урахуванням правила знаків для поперечної сили (*поперечна сила вважається додатною, якщо вона спрямована так, що прагне повернути елемент балки за годинниковою стрілкою та від'ємною, якщо вона спрямована так, що прагне повернути елемент балки проти годинниковою стрілки*) та для згинального моменту (*згинальний момент вважається додатним, якщо він згинає елемент балки опуклістю вниз, викликаючи розтягнення нижніх волокон та від'ємним, якщо він згинає елемент балки опуклістю вгору, викликаючи розтягнення верхніх волокон*) вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_I = R_A,$$

$$M_I = -M_A + R_A \cdot x_1.$$

Так як  $x_1$  змінюється від 0 до 4 м, то визначимо  $Q_I$  і  $M_I$  для двох значень  $x_1$ :

при  $x_1=0$



$$Q_1 = 175 \text{ кН},$$

$$M_1 = -1132.5 + 175 \cdot 0 = -1132.5 \text{ кНм},$$

при  $x_1=4$  м

$$Q_1 = 175 \text{ кН},$$

$$M_1 = -1132.5 + 175 \cdot 4 = -432.5 \text{ кНм}.$$

2.2.2 Проведемо переріз між точками 2 і 3 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_2$  і  $M_2$  (рисунок 2.5).

Переріз  $II$  ми можемо провести як біля точки 2, так і біля точки 3, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_2$ . В даному випадку  $x_2$  буде змінюватися від 4 м (координата точки 2) до 7 м (координата точки 3).

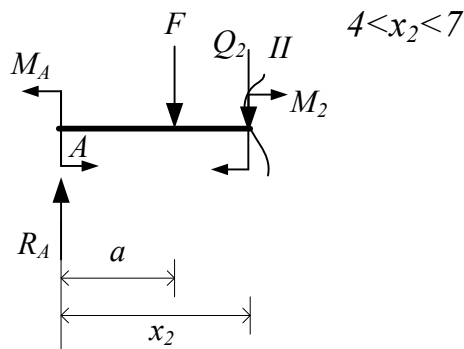


Рисунок 2.5 – Побудова епюри  $Q_2$  і  $M_2$

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_2 = R_A - F,$$

$$M_2 = -M_A + R_A \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - a).$$

Так як  $x_2$  змінюється від 4 до 7 м, то визначимо  $Q_2$  і  $M_2$  для двох значень  $x_2$ :

при  $x_2=4$

$$Q_2 = 175 - 100 = 75 \text{ кН},$$

$$M_2 = -1132.5 + 175 \cdot 4 - 100 \cdot (4 - 4) = -432.5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при  $x_2=7$  м

$$Q_2 = 175 - 100 = 75 \text{ кН},$$

$$M_2 = -1132.5 + 175 \cdot 7 - 100 \cdot (7 - 4) = -207.5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.2.3 Проведемо переріз між точками 3 і 4 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_3$  і  $M_3$  (рисунок 2.6).

Переріз *III* ми можемо провести як біля точки 3, так і біля точки 4, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_3$ . В даному випадку  $x_3$  буде змінюватися від 7 м (координата точки 3) до 12 м (координата точки 4).

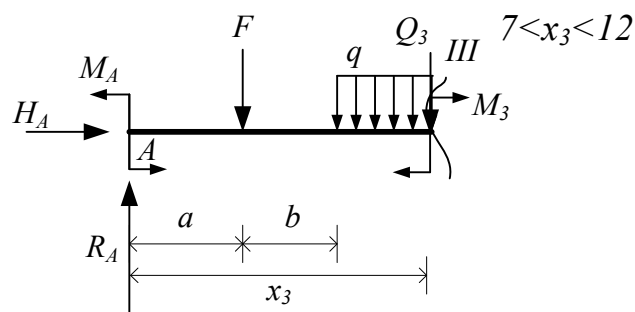


Рисунок 2.6 – Побудова епюри  $Q_3$  і  $M_3$

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_3 = R_A - F - q \cdot (x_3 - a - b),$$

$$M_3 = -M_A + R_A \cdot x_3 - F \cdot (x_3 - a) - q \cdot (x_3 - a - b) \cdot \frac{(x_3 - a - b)}{2}.$$

Так як  $x_3$  змінюється від 7 до 12 м, то визначимо  $Q_3$  і  $M_3$  для двох значень  $x_3$ :

при  $x_3=7$  м

$$Q_3 = 175 - 100 - 15 \cdot (7 - 4 - 3) = 75 \text{ кН},$$

$$M_3 = -1132.5 + 175 \cdot 7 - 100 \cdot (7 - 4) - 15 \cdot (7 - 4 - 3) \cdot x \frac{(7 - 4 - 3)}{2} = -207.5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при  $x_3=12$  м

$$Q_3 = 175 - 100 - 15 \cdot (12 - 4 - 3) = 0 \text{ кН},$$

$$M_3 = -1132.5 + 175 \cdot 12 - 100 \cdot (12 - 4) - 15 \cdot (12 - 4 - 3) \cdot x \frac{(12 - 4 - 3)}{2} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так як на цій ділянці діє розподілене навантаження, то необхідно знайти ще екстремальне значення згинального моменту. (Екстремальне значення згинального моменту визначається в точці, де еюра поперечної сили перетинає базову лінію (змінює знак і дорівнює нулю), а якщо такої точки немає, то значення згинального моменту знаходимо по середині дії розподіленого навантаження).

В нашому випадку екстремальне значення згинального моменту будемо визначати по середині дії розподіленого навантаження при  $x_3=9.5$  м.

$$M_3 = -1132.5 + 175 \cdot 9.5 - 100 \cdot (9.5 - 4) - 15 \cdot (9.5 - 4 - 3) \cdot x \frac{(9.5 - 4 - 3)}{2} = -66.875 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.2.4 Проведемо переріз між точками 4 і 5 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_4$  і  $M_4$  (рисунок 2.7).

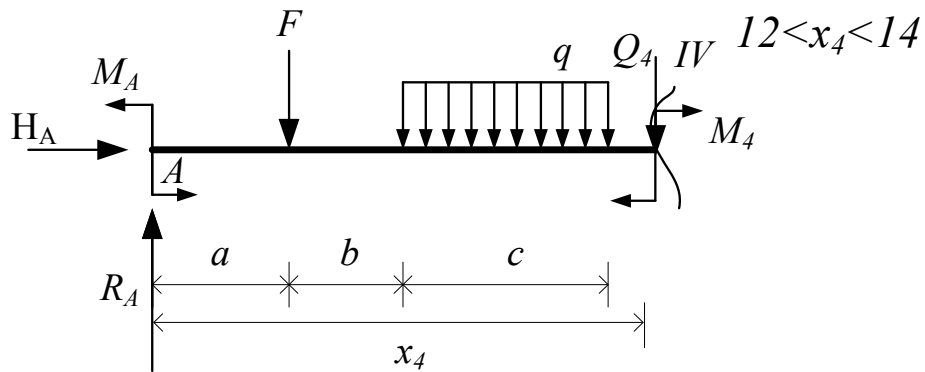


Рисунок 2.7 – Побудова епюри  $Q_4$  і  $M_4$

Переріз *III* ми можемо провести як біля точки 4, так і біля точки 5, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_4$ . В даному випадку  $x_4$  буде змінюватися від 12 м (координата точки 4) до 14 м (координата точки 5).

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_4 = R_A - F - q \cdot c,$$

$$M_4 = -M_A + R_A \cdot x_4 - F \cdot (x_4 - a) - q \cdot c \cdot \left(x_4 - a - b - \frac{c}{2}\right).$$

Так як  $x_4$  змінюється від 12 до 14 м, то визначимо  $Q_4$  і  $M_4$  для двох значень  $x_4$ :

при  $x_4=12$

$$Q_3 = 175 - 100 - 15 \cdot 5 = 0 \text{ кН},$$

$$M_3 = -1132.5 + 175 \cdot 12 - 100 \cdot (12 - 4) - 15 \cdot 5 \cdot \left(12 - 4 - 3 - \frac{5}{2}\right) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

при  $x_4=14$  м

$$Q_4 = 175 - 100 - 15 \cdot 5 = 0 \text{ кН},$$

$$M_4 = -1132.5 + 175 \cdot 14 - 100 \cdot (14 - 4) -$$

$$-15 \cdot 5 \cdot \left(14 - 4 - 3 - \frac{5}{2}\right) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.2.5 Після обчислень значень поперечної сили та згинальних моментів для всіх характерних перерізів побудуємо епюри  $M$  і  $Q$  (рисунок 2.8).

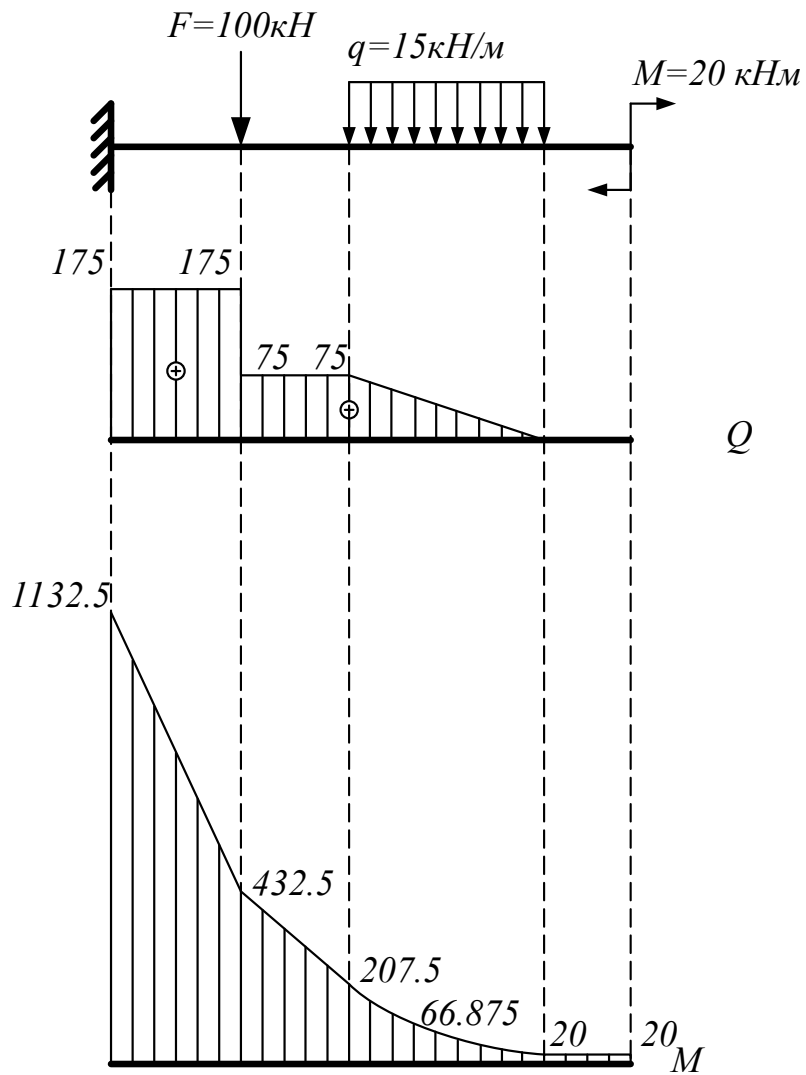
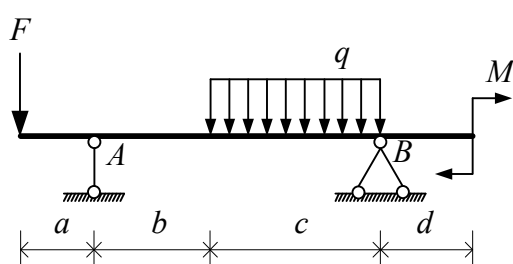


Рисунок 2.8 – Епюра  $Q$  і  $M$

### 3 Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів для балки на двох опорах

Для балки на двох опорах побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів (рисунок 3.1).



Дано:

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ м}; F = 80 \text{ кН}; \\ b &= 3 \text{ м}; q = 20 \text{ кН/м}; \\ c &= 5 \text{ м}; M = 40 \text{ кНм}; \\ d &= 2 \text{ м}. \end{aligned}$$

Рисунок 3.1 – Розрахункова схема

#### Розв'язання

3.1 Спочатку визначимо опорні реакції. Припустимо, що вертикальні опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$  спрямовані вгору. Горизонтальна реакція в шарнірно-нерухомій опорі  $B$  дорівнює нулю, тому що зовнішнє навантаження перпендикулярне осі балки. Тому на рисунку 3.2 горизонтальна реакція не показана.

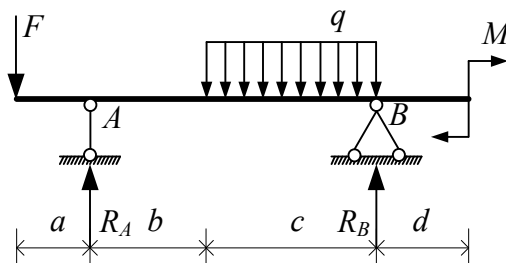


Рисунок 3.2 – Визначення опорних реакцій у двохопорній балці

Складемо рівняння рівноваги – рівняння моментів щодо опор (точок  $A$  і  $B$ ), для того щоб реакції  $R_A$  і  $R_B$  визначити незалежно одну від одної:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-F \cdot a + q \cdot c \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) - R_B \cdot (b + c) + M = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot a + q \cdot c \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) + M}{(b + c)},$$

$$R_B = \frac{-80 \cdot 2 + 20 \cdot 5 \cdot \left(3 + \frac{5}{2}\right) + 40}{(3 + 5)} = 53.75 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-F \cdot (a + b + c) - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} + R_A \cdot (b + c) + M = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot (a + b + c) + q \cdot c \cdot \frac{c}{2} - M}{(b + c)},$$

$$R_A = \frac{80 \cdot (2 + 3 + 5) + 20 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} - 40}{(3 + 5)} = 126.25 \text{ кН}.$$

Перевіряємо правильність визначення опорних реакцій, склавши таке рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_A + R_B - F - q \cdot c = 0,$$

$$126.25 + 53.75 - 80 - 20 \cdot 5 = 0.$$

Так як сума проєкцій всіх сил на вісь  $Y$  дорівнює нулю, реакцій знайдено правильно.

3.2 Для побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів необхідно визначити положення граничних точок (рисунок 3.3), а потім скористатись методом перерізів.

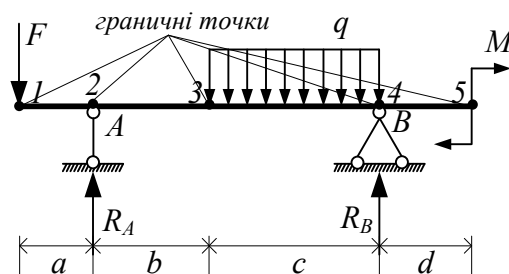


Рисунок 3.3 – Визначення граничних точок в балці

3.2.1 Припустимо, що початок координат розташовано в граничній точці 1. Проведемо переріз між точками 1 і 2 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_I$  і  $M_I$  (рисунок 3.4).

Переріз  $I$  ми можемо провести як біля точки 1, так і біля точки 2, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_1$ . В даному випадку  $x_1$  буде змінюватися від 0 (координата точки 1) до 2 м (координата точки 2).

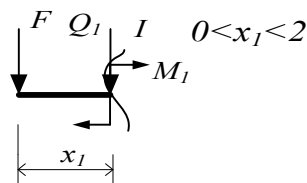


Рисунок 3.4 – Побудова епюри  $Q_I$  і  $M_I$

Так як наша система знаходиться в рівновазі, вирази згинальних моментів і поперечних сил (з урахуванням правила знаків для внутрішніх зусиль) будуть мати такий вигляд:

$$Q_1 = -F,$$

$$M_1 = -F \cdot x_1.$$

Так як  $x_1$  змінюється від 0 до 2 м, то визначимо  $Q_I$  і  $M_I$  для двох значень  $x_1$ :



при  $x_1=0$

$$Q_1 = -80 \text{ кН},$$

$$M_1 = -80 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

при  $x_1=2 \text{ м}$

$$Q_1 = -80 \text{ кН},$$

$$M_1 = -80 \cdot 2 = -160 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3.2.2 Проведемо переріз між точками 2 і 3 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_2$  і  $M_2$  (рисунок 3.5).

Переріз  $II$  ми можемо провести як біля точки 2, так і біля точки 3, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_2$ . В даному випадку  $x_2$  буде змінюватися від 2 м (координата точки 2) до 5 м (координата точки 3).

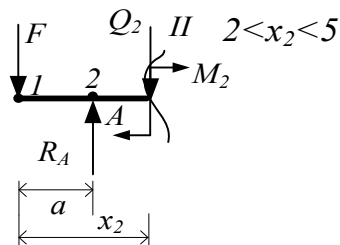


Рисунок 3.5 – Побудова епюри  $Q_2$  і  $M_2$

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_2 = R_A - F,$$

$$M_2 = -F \cdot x_2 + R_A \cdot (x_2 - a).$$

Так як  $x_2$  змінюється від 2 м до 5 м, то визначимо  $Q_2$  і  $M_2$  для двох значень  $x_2$ :

при  $x_2=2$

$$Q_2 = 126.25 - 80 = 46.25 \text{ кН},$$

$$M_2 = -80 \cdot 2 + 126.25 \cdot (2 - 2) = -160 \text{ кНм}.$$

при  $x_2=5$  м

$$Q_2 = 126.25 - 80 = 46.25 \text{ кН},$$

$$M_2 = -80 \cdot 5 + 126.25 \cdot (5 - 2) = -21.25 \text{ кНм}.$$

3.2.3 Проведемо переріз між точками 3 і 4 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_3$  і  $M_3$  (рисунок 3.6)

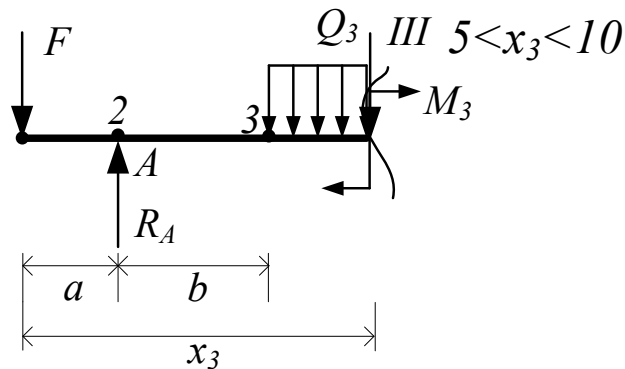


Рисунок 3.6 – Побудова епюри  $Q_3$  і  $M_3$

Переріз *III* ми можемо провести як біля точки 3, так і біля точки 4, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_3$ . В даному випадку  $x_3$  буде змінюватися від 5 м (координата точки 3) до 10 м (координата точки 4).

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_3 = R_A - F - q \cdot (x_3 - a - b),$$

$$M_3 = -F \cdot x_3 + R_A \cdot (x_3 - a) - q \cdot (x_3 - a - b) \cdot \frac{(x_3 - a - b)}{2}.$$

Так як  $x_3$  змінюється від 5 м до 10 м, то визначимо  $Q_3$  і  $M_3$  для двох значень  $x_3$ :

при  $x_3=5$  м

$$Q_3 = 126.25 - 80 - 20 \cdot (5 - 2 - 3) = 46.25 \text{ кН},$$

$$M_3 = -80 \cdot 5 + 126.25 \cdot (5 - 2) - 20 \cdot (5 - 2 - 3) \cdot \frac{(5 - 2 - 3)}{2} = \\ = -21.25 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

при  $x_3=10$  м

$$Q_3 = 126.25 - 80 - 20 \cdot (10 - 2 - 3) = -53.75 \text{ кН},$$

$$M_3 = -80 \cdot 10 + 126.25 \cdot (10 - 2) - 20 \cdot (10 - 2 - 3) \times \\ \times \frac{(10 - 2 - 3)}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Так як на цій ділянці діє розподілене навантаження, то необхідно знайти ще одне значення згинального моменту (екстремальне значення). Це значення визначаємо в точці, де еюра поперечної сили перетинає базову лінію (змінює знак і дорівнює нулю). Для цього необхідно визначити значення  $x_3$ , при якому поперечна сила  $Q_3$  буде дорівнювати нулю.

$$Q_3 = R_A - F - q \cdot (x_3 - a - b) = 0,$$

$$x_3 = \frac{R_A - F}{q} + a + b,$$

$$x_3 = \frac{126.25 - 80}{20} + 2 + 3 = 7.3125 \text{ м},$$

$$M_3 = -80 \cdot 7.3125 + 126.25 \cdot (7.3125 - 2) - 20 \times \\ \times (7.3125 - 2 - 3) \cdot \frac{(7.3125 - 2 - 3)}{2} = 32.23 \text{ кНм} .$$

3.2.4 Проведемо переріз між точками 4 і 5 та відкинемо праву частину балки, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_4$  і  $M_4$  (рисунок 3.7).

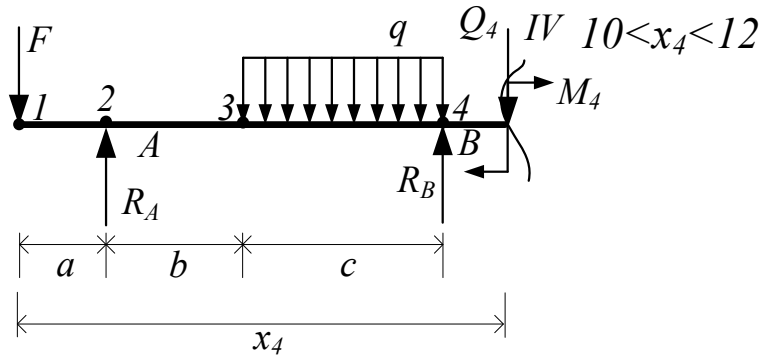


Рисунок 3.7 – Побудова епюри  $Q_4$  і  $M_4$

Переріз  $IV$  ми можемо провести як біля точки 4, так і біля точки 5, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початкової точки, позначимо через  $x_4$ . В даному випадку  $x_4$  буде змінюватися від 10 м (координата точки 4) до 12 м (координата точки 5).

Вирази згинальних моментів і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_3 = R_A - F - q \cdot c + R_B,$$

$$M_4 = -F \cdot x_4 + R_A \cdot (x_4 - a) - q \cdot c \cdot \left(x_4 - a - b - \frac{c}{2}\right) + R_B \cdot (x_4 - a - b - c).$$

Так як  $x_4$  змінюється від 10 м до 12 м, то визначимо  $Q_4$  і  $M_4$  для двох значень  $x_4$ :

при  $x_4=10$  м

$$Q_4 = 126.25 - 80 - 20 \cdot 5 + 53.75 = 0 \text{ кН},$$

$$M_4 = -80 \cdot 10 + 126.25 \cdot (10 - 2) - 20 \cdot 5 \times$$

$$\times \left(10 - 2 - 3 - \frac{5}{2}\right) + 53.75 \times (10 - 2 - 3 - 5) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

при  $x_4=12$  м

$$Q_4 = 126.25 - 80 - 20 \cdot 5 + 53.75 = 0 \text{ кН},$$

$$M_4 = -80 \cdot 12 + 126.25 \cdot (12 - 2) - 20 \cdot 5 \cdot \left(12 - 2 - 3 - \frac{5}{2}\right) + 53.75 \times \times (12 - 2 - 3 - 5) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

3.2.5 Після обчислень значень поперечної сили та згинальних моментів для всіх характерних перерізів побудуємо епюри  $M$  і  $Q$  (рисунок 3.8).

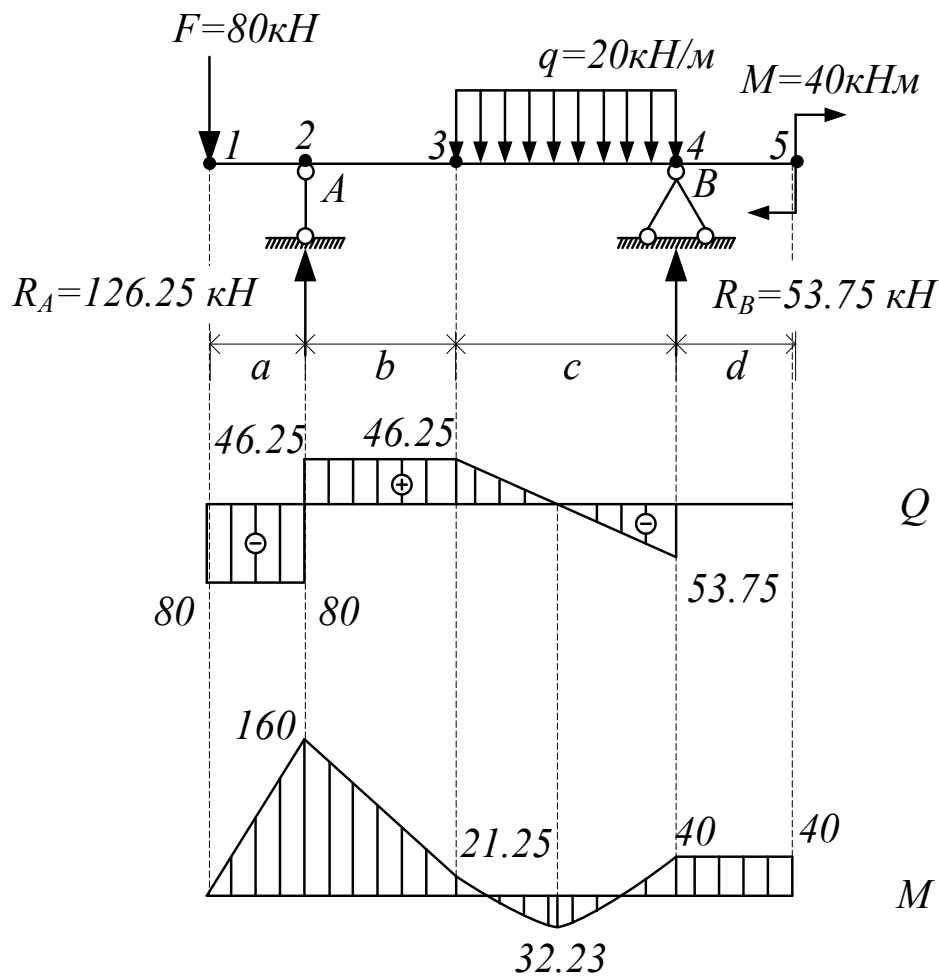
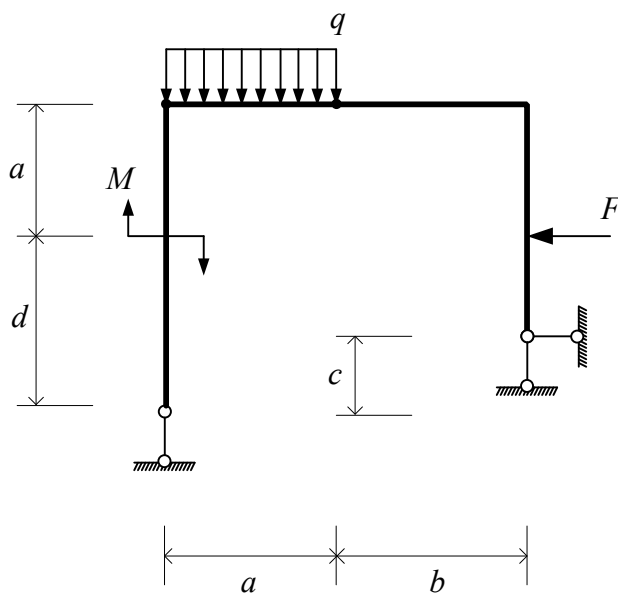


Рисунок 3.8 – Епюра  $Q$  і  $M$

#### 4 Побудова епюр поперечних сил, поздовжніх сил та згинальних моментів для плоскої рами

Для плоскої рами побудувати епюри поперечних сил, поздовжніх сил та згинальних моментів (рисунок 4.1).



Дано:

$a = 4$  м;  $F = 60$  кН;  
 $b = 3$  м;  $q = 10$  кН/м;  
 $c = 1$  м;  $M = 30$  кНм;  
 $d = 4$  м.

Рисунок 4.1 – Розрахункова схема

##### Розв'язання

4.1 Спочатку визначимо опорні реакції. Припустимо, що вертикальні опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$  спрямовані вгору, горизонтальна реакція в шарнірно-нерухомій опорі  $B$  спрямована праворуч (рисунок 4.2).

Складемо рівняння рівноваги – рівняння моментів щодо опор (точок  $A$  і  $B$ ), для того щоб реакції  $R_A$  і  $R_B$  визначити незалежно одну від одної:

$$\sum X = 0,$$

$$H_B - F = 0,$$

$$H_B = F,$$

$$H_B = 60 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0.$$

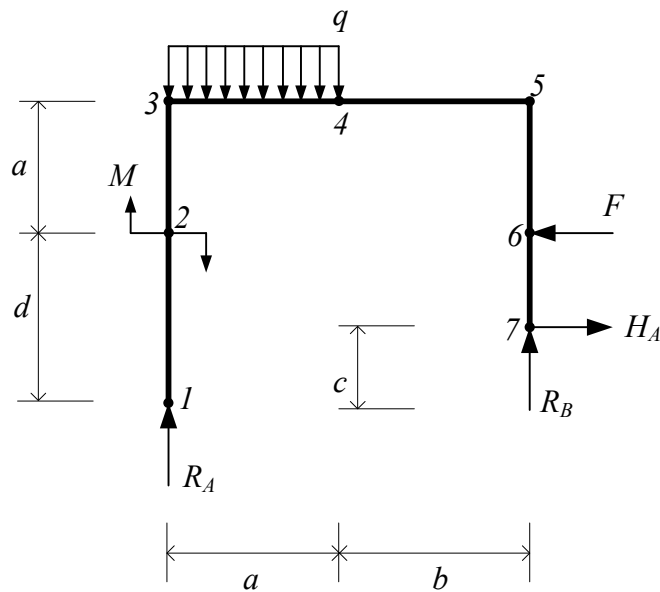


Рисунок 4.2 – Визначення опорних реакцій

$$M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot d + H_B \cdot c - R_B \cdot (a + b) = 0,$$

$$R_B = \frac{M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot d + H_B \cdot c}{(a + b)},$$

$$R_B = \frac{30 + 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 60 \cdot 4 + 60 \cdot 1}{(4 + 3)} = -10 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$R_A \cdot (a + b) + M - q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - F \cdot (d - c) = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) + F \cdot (d - c)}{(a + b)},$$

$$R_A = \frac{-30 + 10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) + 60 \cdot (4 - 1)}{(4 + 3)} = 50 \text{ кН} .$$

Перевіряємо правильність визначення опорних реакцій, склавши таке рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_A + R_B - q \cdot a = 0,$$

$$50 - 10 - 10 \cdot 4 = 0.$$

Так як сума проєкцій всіх сил на вісь Y дорівнює нулю, реакції знайдено правильно.

4.2 Для побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів необхідно визначити положення граничних точок (рисунок 4.3), а потім скористатись методом перерізів.

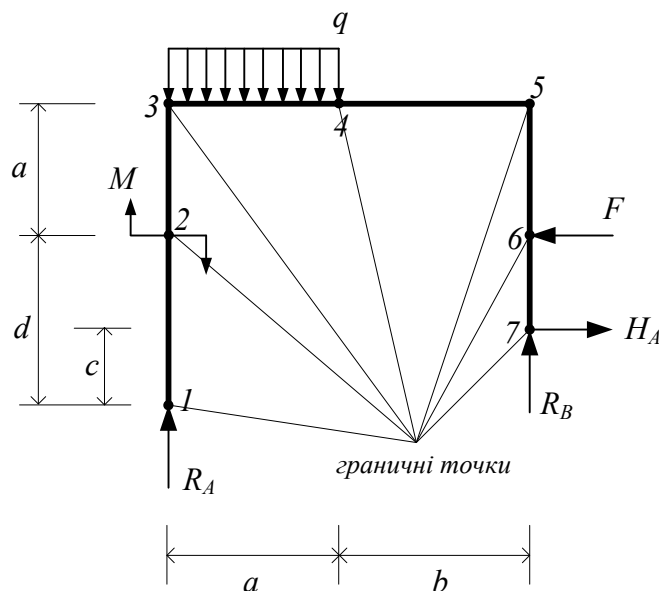


Рисунок 4.3 – Визначення граничних точок в консолі



4.2.1 Проведемо переріз між точками 1 і 2 та відкинемо верхню частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллями  $Q_I$ ,  $H_I$  і  $M_I$  (рисунок 4.4).

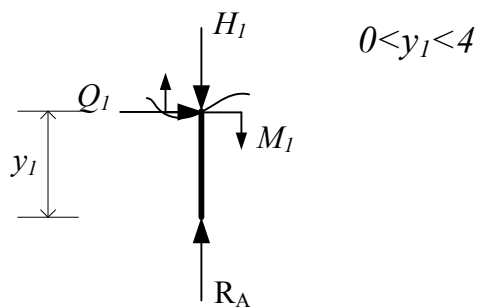


Рисунок 4.4 – Побудова епюри  $Q_I$ ,  $H_I$  і  $M_I$

Припустимо, що початок координат розташовано в граничній точці 1. Переріз  $I$  ми можемо провести як біля точки 1, так і біля точки 2, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $y_I$ . В даному випадку  $y_I$  буде змінюватися від 0 (координата точки 1) до 4 м (координата точки 2).

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0, \\ H_1 &= -R_A, \\ M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так як  $y_I$  змінюється від 0 до 4 м, то визначимо  $Q_I$ ,  $H_I$  і  $M_I$  для двох значень  $y_I$ :

при  $y_I=0$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0, \\ H_1 &= -50 \text{ кН}, \\ M_1 &= 0, \end{aligned}$$

при  $y_I=4$  м

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0, \\ H_1 &= -50 \text{ кН}, \\ M_1 &= 0. \end{aligned}$$

4.2.2 Проведемо переріз між точками 2 і 3 та відкинемо верхню частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_2$ ,  $H_2$  і  $M_2$  (рисунок 4.5).

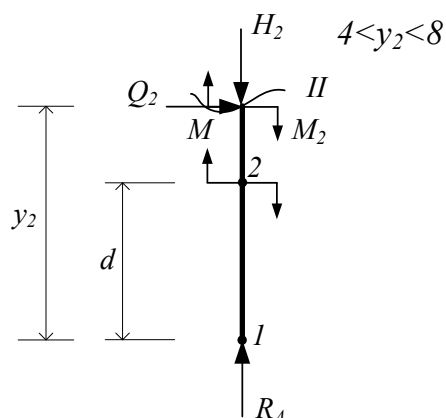


Рисунок 4.5 – Побудова епюри  $Q_2$ ,  $H_2$  і  $M_2$

Переріз II ми можемо провести як біля точки 2, так і біля точки 3, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $y_2$ . В даному випадку  $y_2$  буде змінюватися від 4 м (координата точки 2) до 8 м (координата точки 3).

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_2 = 0,$$

$$H_2 = -R_A,$$

$$M_2 = M.$$

Так як  $y_2$  змінюється від 4 м до 8 м, то визначимо  $Q_2$ ,  $H_2$  і  $M_2$  для двох значень  $y_2$ :

при  $y_2=4$  м

$$Q_2 = 0,$$

$$H_2 = -50 \text{ кН},$$

$$M_2 = 30 \text{ кНм},$$

при  $y_2=8$  м

$$Q_2 = 0,$$

$$H_2 = -50 \text{ кН},$$

$$M_2 = 30 \text{ кНм}.$$

4.2.3 Проведемо переріз між точками 3 і 4 та відкинемо праву частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллями  $Q_3$ ,  $H_3$  і  $M_3$  (рисунок 4.6).

Переріз III ми можемо провести як біля точки 3, так і біля точки 4, тому відстань на якій ми проводимо переріз від точки 3, позначимо через  $x_1$ . В даному випадку  $x_1$  буде змінюватися від 0 м (координата точки 3) до 4 м (координата точки 4).

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_3 = R_A - q \cdot x_1,$$

$$H_3 = 0,$$

$$M_3 = R_A \cdot x_1 + M - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}.$$

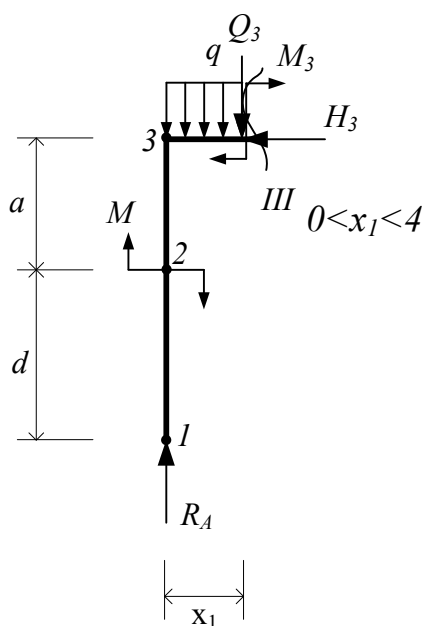


Рисунок 4.6 – Побудова епюри  $Q_3$ ,  $H_3$  і  $M_3$

Так як  $x_1$  змінюється від 0 м до 4 м, то визначимо  $Q_3$ ,  $H_3$  і  $M_3$  для двох значень  $x_1$ :

при  $x_1=0$  м

$$Q_3 = 50 - 10 \cdot 0 = 50 \text{ кН},$$

$$H_3 = 0,$$

$$M_3 = 50 \cdot 0 + 30 - 10 \cdot 0 \cdot \frac{0}{2} = 30 \text{кНм},$$

при  $x_1=4$  м

$$Q_3 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{кН},$$

$$H_3 = 0,$$

$$M_3 = 50 \cdot 4 + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 150 \text{кНм}.$$

Так як на цій ділянці дії розподілене навантаження, то необхідно знайти ще одне значення згинального моменту (екстремальне значення). Це значення визначаємо в точці по середині дії розподіленого навантаження. В даному випадку при  $x_1=2$  м

$$M_3 = 50 \cdot 2 + 30 - 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 110 \text{кНм}.$$

4.2.4 Проведемо переріз між точками 4 і 5 та відкинемо праву частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллями  $Q_4$ ,  $H_4$  і  $M_4$  (рисунок 4.7).

Переріз  $IV$  ми можемо провести як біля точки 4, так і біля точки 5, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від точки 3, позначимо через  $x_2$ . В даному випадку  $x_2$  буде змінюватися від 4 м (координата точки 4) до 7 м (координата точки 5).

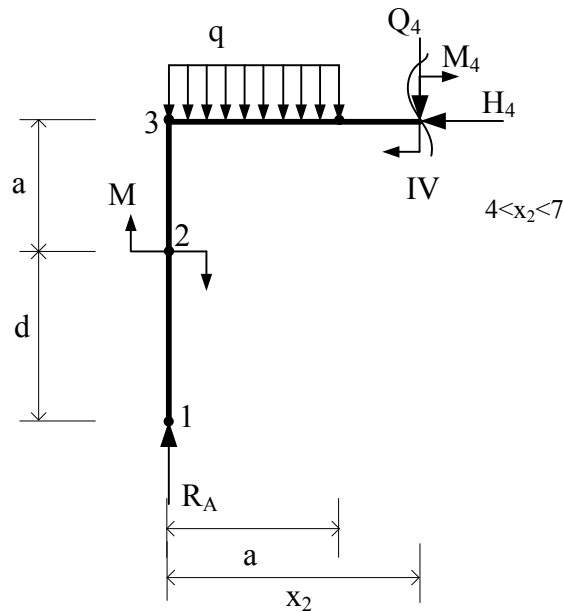


Рисунок 4.7 – Побудова епюри  $Q_4$ ,  $H_4$  і  $M_4$

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_4 = R_A - q \cdot a,$$

$$H_4 = 0,$$

$$M_4 = R_A \cdot x_2 + M - q \cdot a \cdot \left(x_2 - \frac{a}{2}\right).$$

Так як  $x_2$  змінюється від 4 м до 7 м, то визначимо  $Q_4$ ,  $H_4$  і  $M_4$  для двох значень  $x_2$ :

при  $x_2=4$  м

$$Q_4 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$H_4 = 0,$$

$$M_4 = 50 \cdot 4 + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(4 - \frac{4}{2}\right) = 150 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при  $x_2=7$  м

$$Q_4 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$H_4 = 0,$$

$$M_4 = 50 \cdot 7 + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(7 - \frac{4}{2}\right) = 180 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

4.2.5 Проведемо переріз між точками 5 і 6 та відкинемо нижню частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллям  $Q_5$ ,  $H_5$  і  $M_5$  (рисунок 4.8).

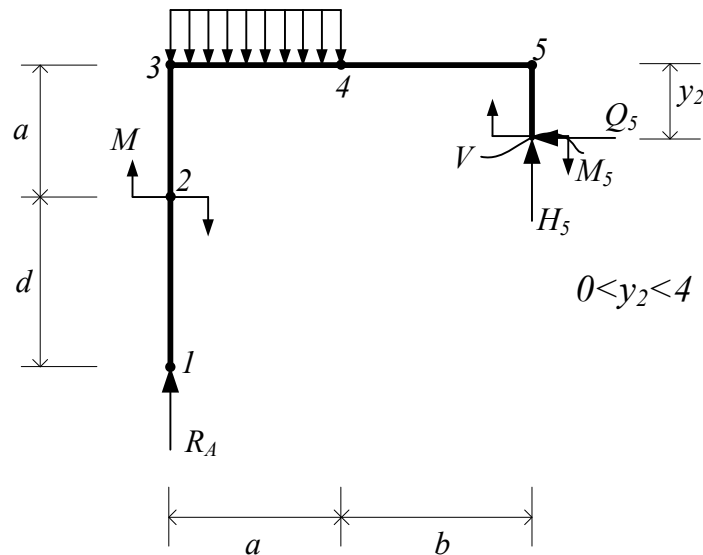


Рисунок 4.8 – Побудова епюри  $Q_5$ ,  $H_5$  і  $M_5$

Переріз  $V$  ми можемо провести як біля точки 5, так і біля точки 6, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від точки 5, позначимо через  $y_3$ . В даному випадку  $y_3$  буде змінюватися від 0 м (координата точки 5) до 4 м (координата точки 6).

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_5 = 0,$$

$$H_5 = R_A - q \cdot a,$$

$$M_5 = R_A \cdot (a + b) + M - q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right).$$

Так як  $x_2$  змінюється від 0 м до 4 м, то визначимо  $Q_5$ ,  $H_5$  і  $M_5$  для двох значень  $y_3$ :

при  $y_3=0$  м

$$Q_5 = 0,$$

$$H_5 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$M_5 = 50 \cdot (4 + 3) + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) = 180 \text{ кНм},$$

при  $y_3=4$  м

$$Q_5 = 0,$$

$$H_5 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$M_5 = 50 \cdot (4 + 3) + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) = 180 \text{ кНм}.$$

4.2.6 Проведемо переріз між точками 6 і 7 та відкинемо нижню частину рами, яку замінимо внутрішніми зусиллями  $Q_6$ ,  $H_6$  і  $M_6$  (рисунок 4.9). Переріз VI ми можемо провести як біля точки 6, так і біля точки 7, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від точки 5, позначимо через  $y_4$ . В даному випадку  $y_4$  буде змінюватися від 4 м (координата точки 6) до 7 м (координата точки 7).

Вирази згинальних моментів поздовжніх і поперечних сил будуть мати такий вигляд:

$$Q_6 = -F,$$

$$H_6 = R_A - q \cdot a,$$

$$M_6 = R_A \cdot (a + b) + M - q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - F \cdot (y_4 - a).$$

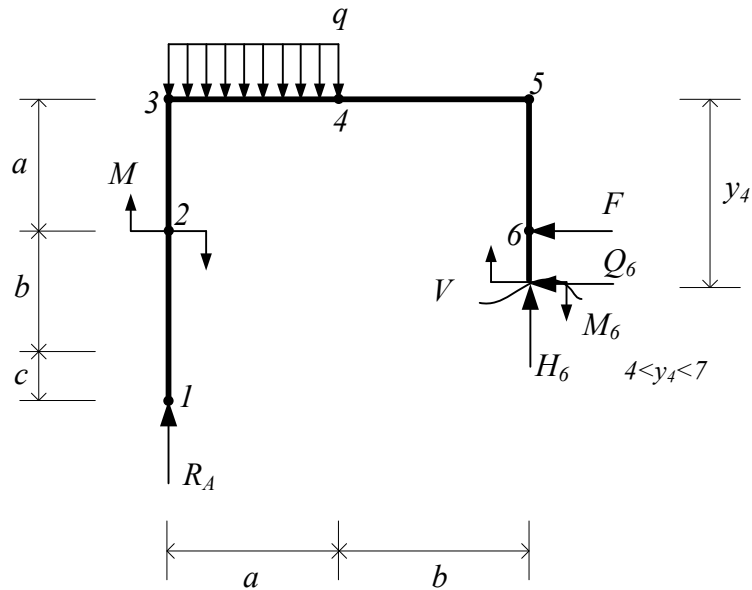


Рисунок 4.9 – Побудова епюри  $Q_6$ ,  $H_6$  і  $M_6$

Так як  $y_4$  змінюється від 4 м до 7 м, то визначимо  $Q_6$ ,  $H_6$  і  $M_6$  для двох значень  $y_4$ :

при  $y_4=4$  м

$$Q_6 = -60 \text{ кН},$$

$$H_6 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned} M_6 &= 50 \cdot (4 + 3) + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 60 \cdot (4 - 4) \\ &= 180 \text{ кН} \cdot \text{м} , \end{aligned}$$

при  $y_4=7$  м

$$Q_6 = -60 \text{ кН},$$

$$H_6 = 50 - 10 \cdot 4 = 10 \text{ кН},$$

$$M_6 = 50 \cdot (4 + 3) + 30 - 10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 60 \cdot (7 - 4) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4.2.7 Після обчислень значень поздовжньої сили, поперечної сили та згинальних моментів для всіх характерних перерізів побудуємо епюри  $Q$ ,  $H$  і  $M$  (рисунок 4.10).



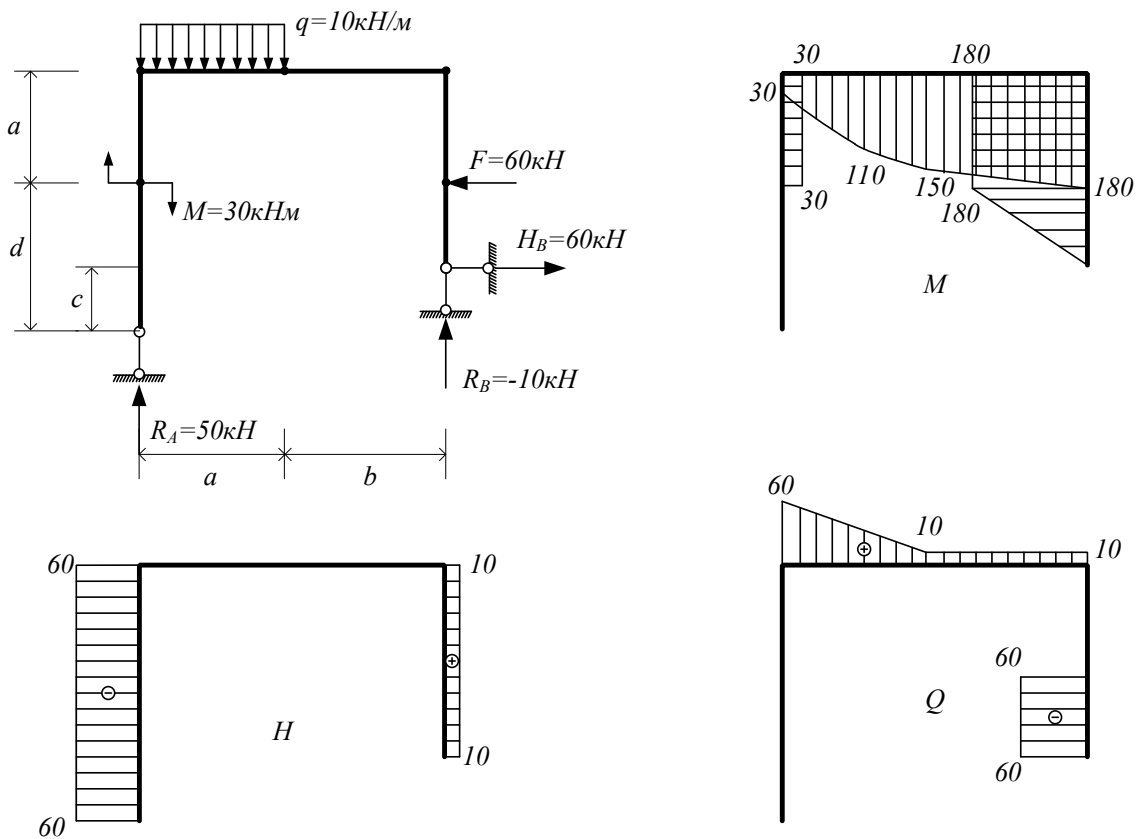
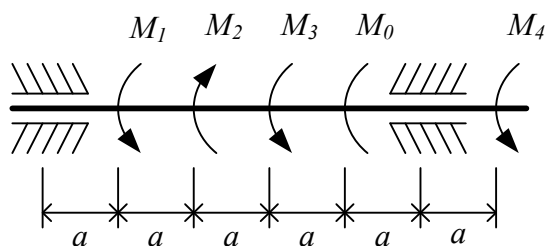


Рисунок 4.10 – Епюри  $Q$ ,  $N$  і  $M$

## 5 Побудова епюр крутних моментів для вала

Для вала побудувати епюру крутних моментів  $M_{кр}$ . Спочатку з рівняння рівноваги визначити крутний момент  $M_0$  (рисунок 5.1).



Дано:  
 $M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_2 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  
 $M_3 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_4 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  
 $a = 1 \text{ м}$ .

Рисунок 5.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

5.1 Визначимо крутний момент  $M_0$  з рівняння рівноваги, з урахуванням правила знаків для крутних моментів (крутний момент вважається додатним, якщо при погляді на переріз із боку зовнішньої нормалі він спрямований за годинниковою стрілкою). Для цього припустимо, що крутний момент  $M_0$  спрямований за годинниковою стрілкою (рисунок 5.2).

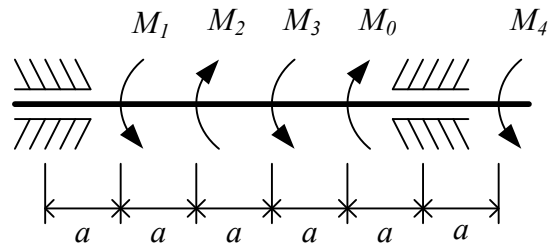


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема

$$\sum M_{\text{кр}} = 0,$$

$$\sum M_{\text{кр}} = -M_1 + M_2 - M_3 + M_0 - M_4 = 0,$$

$$M_0 = M_1 - M_2 + M_3 + M_4,$$

$$M_0 = 5 - 6 + 4 + 7 = 10 \text{ кНм.}$$

5.2 Для побудови епюр крутних моментів необхідно визначити положення граничних точок (рисунок 5.3), а потім скористатись методом перерізів.

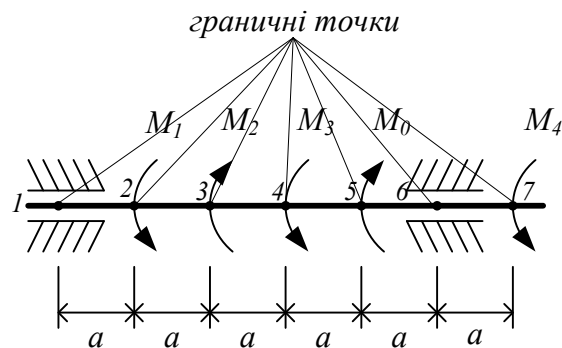


Рисунок 5.3 – Визначення положення граничних точок

5.2.1 Проведемо переріз між точками 1 і 2 та відкинемо праву частину вала. Розглянемо рівновагу лівої частини (рисунок 5.4).

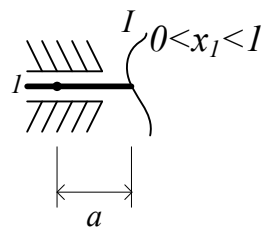


Рисунок 5.4 – Побудова епюри  $M_{крI}$

Припустимо, що початок координат розташовано в граничній точці 1. Переріз  $I$  ми можемо провести як біля точки 1, так і біля точки 2, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_1$ . В даному випадку  $x_1$  буде змінюватися від 0 (координата точки 1) до 1 м (координата точки 2).

Вираз крутного моменту буде мати такий вигляд:

$$M_{крI} = 0.$$

5.2.2 Проведемо переріз між точками 2 і 3 та відкинемо праву частину вала і розглядаємо рівновагу лівої частини (рисунок 5.5).

Переріз  $II$  ми можемо провести як біля точки 2, так і біля точки 3, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_2$ . В даному випадку  $x_2$  буде змінюватися від 1 м (координата точки 2) до 2 м (координата точки 3).

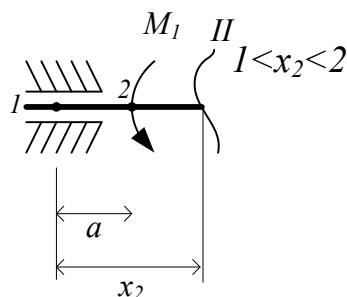


Рисунок 5.5 – Побудова епюри  $M_{крII}$

Вираз крутного моменту буде мати наступний вигляд:

$$M_{крII} = -M_1,$$

$$M_{крII} = -5 \text{ кНм}.$$

5.2.3 Проведемо переріз між точками 3 і 4 та відкинемо праву частину вала і розглянемо рівновагу лівої частини (рисунок 5.6).

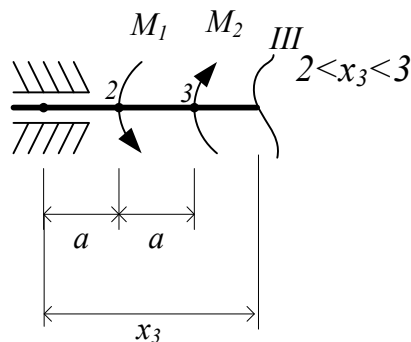


Рисунок 5.6 – Побудова епюри  $M_{крIII}$

Переріз  $III$  ми можемо провести як біля точки 3, так і біля точки 4, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_3$ . В даному випадку  $x_3$  буде змінюватися від 2 м (координата точки 3) до 3 м (координата точки 4).

Вираз крутного моменту буде мати такий вигляд:

$$M_{крIII} = -M_1 + M_2,$$

$$M_{крIII} = -5 + 6 = 1 \text{ кНм}.$$

5.2.4 Проведемо переріз між точками 4 і 5 та відкинемо праву частину вала і розглянемо рівновагу лівої частини (рисунок 5.7).

Переріз  $IV$  ми можемо провести як біля точки 4, так і біля точки 5, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_4$ . В даному випадку  $x_4$  буде змінюватися від 3 м (координата точки 4) до 4 м (координата точки 5).

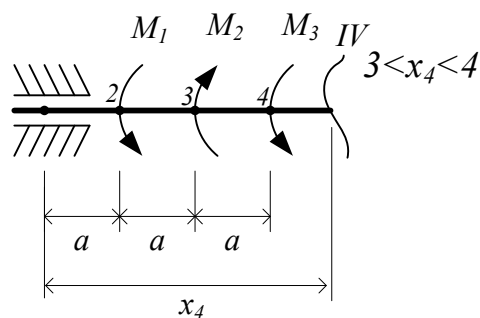


Рисунок 5.7 – Побудова епюри  $M_{крIV}$

Вираз крутного моменту буде мати такий вигляд:

$$M_{крIV} = -M_1 + M_2 - M_3,$$

$$M_{крIV} = -5 + 6 - 4 = -3 \text{ кНм.}$$

5.2.5 Проведемо переріз між точками 5 і 6 та відкинемо праву частину вала і розглянемо рівновагу лівої частини (рисунок 5.8).

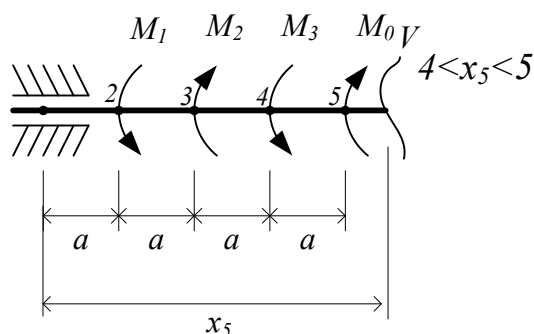


Рисунок 5.8 – Побудова епюри  $M_{крV}$

Переріз  $V$  ми можемо провести як біля точки 5, так і біля точки 6, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_5$ . В даному випадку  $x_5$  буде змінюватися від 4 м (координата точки 5) до 5 м (координата точки 6).

Вираз крутного моменту буде мати такий вигляд:

$$M_{крV} = -M_1 + M_2 - M_3 + M_0,$$

$$M_{крV} = -5 + 6 - 4 + 10 = 7 \text{ кНм.}$$

5.2.6 Проведемо переріз між точками 6 і 7 та відкинемо праву частину вала і розглянемо рівновагу лівої частини (рисунок 5.9). Переріз *VI* ми можемо провести як біля точки 6, так і біля точки 7, тому відстань, на якій ми проводимо переріз від початку координат, позначимо через  $x_6$ . В даному випадку  $x_6$  буде змінюватися від 5 м (координата точки 6) до 6 м (координата точки 7).

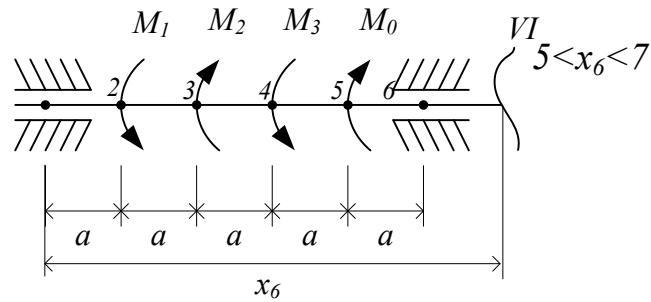


Рисунок 5.9 – Побудова епюри  $M_{крVI}$

Вираз крутного моменту буде мати такий вигляд:

$$M_{крVI} = -M_1 + M_2 - M_3 + M_0,$$

$$M_{крVI} = -5 + 6 - 4 + 10 = 7 \text{ кНм.}$$

5.2.7 Після обчислень значень крутного моменту для всіх характерних перерізів побудуємо епюру.

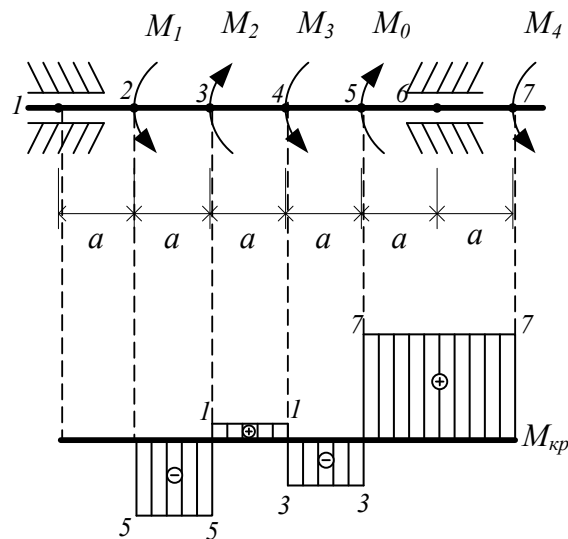


Рисунок 5.10 – Епюра  $M_{кр}$

## 6 Розрахунок шарнірно-стержневих систем при розтяганні та стисканні

Для заданої розрахункової схеми потрібно: підібрати розміри площ поперечних перерізів вказаних стержнів; визначити переміщення точки прикладання зосередженої сили  $F$ . Матеріал стержнів сталь (допустимі напруження для сталі  $[\sigma]=160\text{МПа}$ ; модуль пружності –  $E=2.1\cdot 10^5\text{МПа}$ ) (рисунок 6.1).

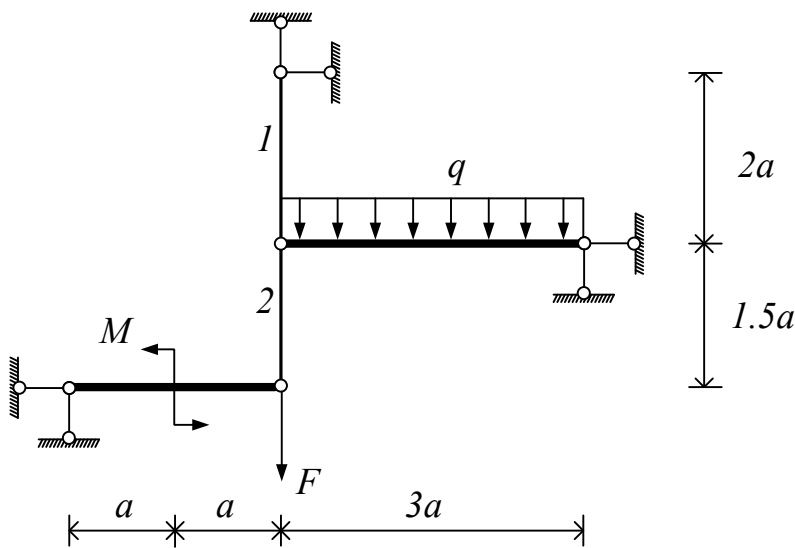


Рисунок 6.1 – Розрахункова схема

Дано:

$$M = 15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$q = 10 \text{ кН/м};$$

$$F = 20 \text{ кН};$$

$$a = 2 \text{ м.}$$

Стержні 1, 2 – стержні в яких необхідно визначити розміри площ поперечних перерізів. Стержні виділені жирною смугою – це абсолютно жорсткі стержні, які не деформуються.

### Розв'язання

6.1 Для того, щоб підібрати розміри площ поперечних перерізів стержнів 1 і 2, необхідно спочатку визначити всі внутрішні зусилля, які виникають в цих стержнях. Проведемо переріз через стержень 2, відкинемо верхню частину (рисунок 6.2) та розглянемо рівновагу нижньої частини.

Для визначення внутрішнього зусилля  $N_2$  необхідно записати суму моментів відносно точки  $A$  і прирівняти її до 0.

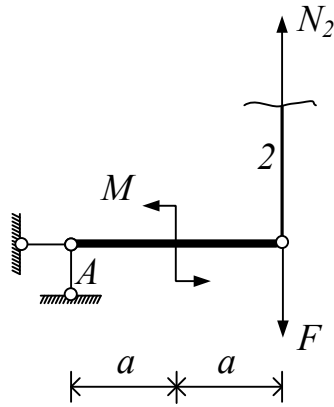


Рисунок 6.2 – Визначення внутрішнього зусилля  $N_2$

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - F \cdot 2 \cdot a + N_2 \cdot 2 \cdot a = 0,$$

$$N_2 = \frac{F \cdot 2 \cdot a - M}{2 \cdot a},$$

$$N_2 = \frac{20 \cdot 2 \cdot 2 - 15}{2 \cdot 2} = 16.25 \text{кН}.$$

Для визначення внутрішнього зусилля  $N_1$  необхідно провести перерізи через стержень 1 і 2, відкинути верхню та нижню частини конструкції та розглянути рівновагу правої частини конструкції (рисунок 6.3).

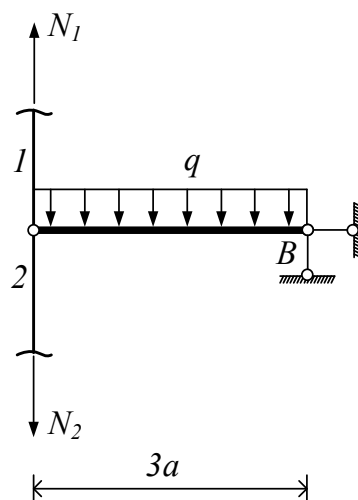


Рисунок 6.3 – Визначення внутрішнього зусилля  $N_1$

Для визначення внутрішнього зусилля  $N_1$  необхідно записати суму моментів відносно точки B і прирівняти її до 0.



$$\sum M_B = 0,$$

$$N_1 \cdot 3 \cdot a - N_2 \cdot 3 \cdot a - q \cdot 3 \cdot a \cdot \frac{3 \cdot a}{2} = 0,$$

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot 3 \cdot a + q \cdot 3 \cdot a \cdot \frac{3 \cdot a}{2}}{3 \cdot a},$$

$$N_1 = \frac{16.25 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2}}{3 \cdot 2} = 46.25 \text{кН}.$$

6.2 Для визначення площі поперечного перерізу стержня скористаємось методом допустимих напружень. Виходячи з цього площу поперечного перерізу визначимо за такою формулою:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

$$A_1 \geq \frac{16.25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{м}^2,$$

$$A_2 \geq \frac{46.25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.28 \cdot 10^{-3} \text{м}^2.$$

6.3 Для визначення переміщення точки прикладання зосередженої сили  $F$  необхідно визначити спочатку подовження стержня 1 і 2 від дії зовнішнього навантаження. Подовження стержня можна визначити за такою формулою:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

$$\Delta l_1 = \frac{16.25 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 2}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}} = 0.309 \cdot 10^{-2} \text{м} = 3.09 \text{мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{46.25 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 2}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 0.28 \cdot 10^{-3}} = 0.235 \cdot 10^{-2} \text{м} = 2.35 \text{мм}.$$

Переміщення точки прикладання зосередженої сили  $F$  визначимо за такою формулою:

$$\Delta l_F = \Delta l_1 + \Delta l_2,$$
$$\Delta l_F = 3.09 + 2.35 = 5.44 \text{ мм.}$$

## 7 Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

Для заданого перерізу (рисунок 7.1) визначити положення головних центральних осей та значення головних центральних моментів інерції.

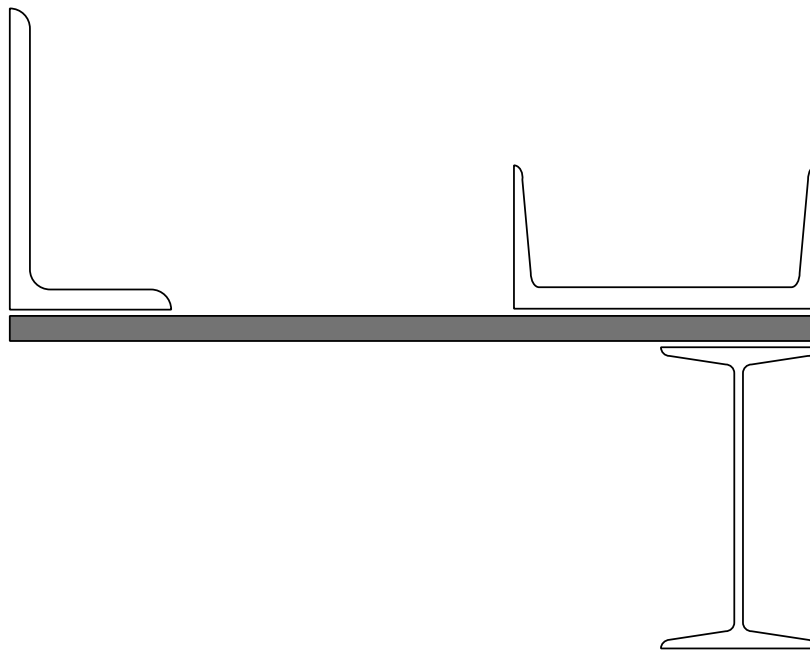


Рисунок 7.1 – Розрахункова схема

### *Розв'язання*

7.1 Випишемо необхідні для розв'язання задачі дані з таблиць сортаменту, з урахуванням розташування двотавра, швелера та нерівнобокого кутика, а для смуги обчислимо за відомими формулами:

двотавр №36	швелер №24	кутник 100х63х10	смуга 500х18
$h_1=360$ мм	$h_2=240$ мм	$h_3=100$ мм	$h_4=500$ мм
$b_1=145$ мм	$b_2=90$ мм	$b_3=63$ мм	$b_4=18$ мм
$d_1=7.5$ мм	$d_2=5.6$ мм	$d_3=10$ мм	$A_3=90$ см <sup>2</sup>
$t_1=12.3$ мм	$t_2=10.0$ мм	$A_3=15.5$ см <sup>2</sup>	
$A_1=61.9$ см <sup>2</sup>	$A_2=30.6$ см <sup>2</sup>	$I_{x3}=154$ см <sup>4</sup>	
$I_{x1}=13380$ см <sup>4</sup>	$I_{x2}=208$ см <sup>4</sup>	$I_{y3}=47.1$ см <sup>4</sup>	
$I_{y1}=516$ см <sup>4</sup>	$I_{y2}=2900$ см <sup>4</sup>	$x_0=1.58$ см	
	$z_0=2.42$ см	$y_0=3.40$ см	
		$tg\alpha_3=0.387$	

7.2 Визначення центра ваги перерізу. Проведемо допоміжні осі  $x$  та  $y$  (рисунок 7.2) та обчислимо відносно цих осей координати центрів ваги всіх складових перерізу:

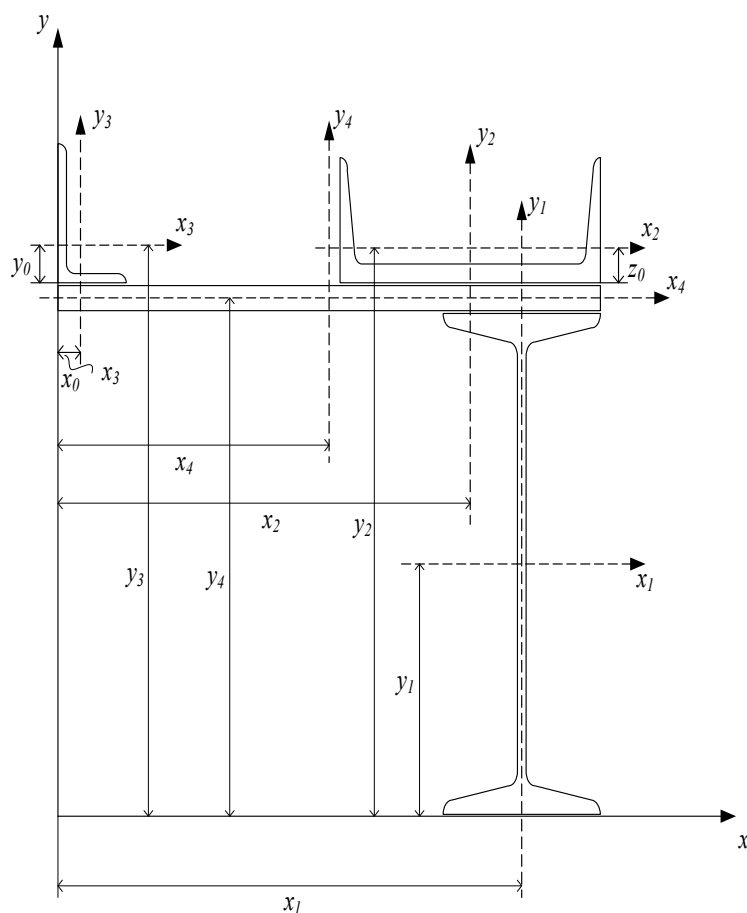


Рисунок 7.2 – Визначення центрів ваги всіх складових перерізу відносно допоміжних осей  $y$  та  $x$

- визначимо відстані від допоміжної осі  $y$  до осі  $y_i$  кожної складової перерізу

$$x_1 = h_4 - \frac{b_1}{2} = 50 - \frac{14.5}{2} = 42.75 \text{ см},$$

$$x_2 = h_4 - \frac{h_2}{2} = 50 - \frac{24}{2} = 38 \text{ см},$$

$$x_3 = x_0 = 1.58 \text{ см},$$

$$x_4 = \frac{h_4}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ см};$$

- визначимо відстані від допоміжної осі  $x$  до осі  $x_i$  кожної складової перерізу

$$y_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ см},$$

$$y_2 = h_1 + b_4 + z_0 = 36 + 1.8 + 2.42 = 40.22 \text{ см},$$

$$y_3 = h_1 + b_4 + y_0 = 36 + 1.8 + 3.40 = 41.2 \text{ см},$$

$$y_4 = h_1 + \frac{b_4}{2} = 36 + \frac{1.8}{2} = 36.9 \text{ см}.$$

Визначимо координати центрів ваги за такими формулами:

$$x_c = \frac{\sum S_{yi}}{A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + A_4 \cdot x_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4},$$

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4},$$

$$x_c = \frac{61.9 \cdot 42.75 + 30.6 \cdot 38 + 15.5 \cdot 1.58 + 90 \cdot 25}{61.9 + 30.6 + 15.5 + 90} = 30.72 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{61.9 \cdot 18 + 30.6 \cdot 40.22 + 15.5 \cdot 41.2 + 90 \cdot 36.9}{61.9 + 30.6 + 15.5 + 90} = 31.84 \text{ см}.$$

7.3 Проведемо через центр ваги перерізу центральні осі та обчислимо моменти інерції відносно цих осей.

Моменти інерції листа відносно осей  $x_4$  та  $y_4$  обчислимо за формулами для прямокутного перерізу:

$$I_{x_4} = \frac{h_4 \cdot b_4^3}{12},$$

$$I_{y_4} = \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12},$$

$$I_{x_4} = \frac{50 \cdot 1.8^3}{12} = 24.3 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_4} = \frac{1.8 \cdot 50^3}{12} = 18750 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_c} = \sum (I_{x_i} + A_i \cdot (y_i - y_c)^2),$$

$$\begin{aligned} I_{x_c} = & (13380 + 61.9 \cdot (18 - 31.84)^2) + \\ & + (208 + 30.6 \cdot (40.22 - 31.84)^2) + \\ & + (154 + 15.5 \cdot (41.2 - 31.84)^2) + \\ & + (24.3 + 90 \cdot (36.9 - 31.84)^2) = 31434.112 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + A_i \cdot (x_i - x_c)^2),$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} = & (516 + 61.9 \cdot (42.75 - 30.72)^2) + \\ & + (2900 + 30.6 \cdot (38 - 30.72)^2) + \\ & + (47.1 + 15.5 \cdot (1.58 - 30.72)^2) + \\ & + (18750 + 90 \cdot (25 - 30.72)^2) = 48899.394 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$I_{x_c y_c} = \sum (I_{x_i y_i} + A_i \cdot (x_i - x_c) \cdot (y_i - y_c)).$$

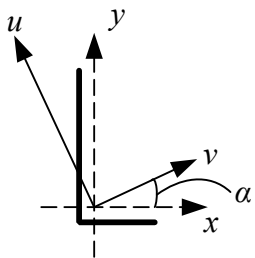
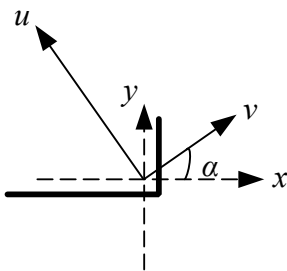
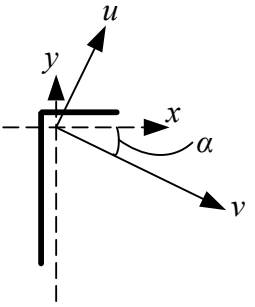
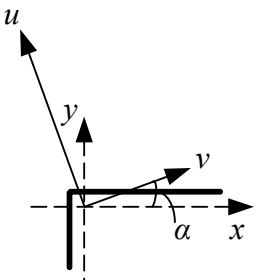
Відцентровий момент інерції двотавра, швелера та пластини відносно власних осей дорівнює нулю (якщо фігура має хоча б одну вісь симетрії, то відцентровий момент такої фігури дорівнює нулю). Відцентровий момент нерівнобокого кутника розраховуємо за такою формулою:

$$I_{x_3y_3} = \frac{I_{y_3} - I_{x_3}}{2} \cdot \operatorname{tg}2\alpha_3.$$

Знак  $\operatorname{tg}2\alpha$  визначаємо з таблиці 7.1

$$\begin{aligned} I_{x_cy_c} = & 0 + 61.9 \cdot (18 - 31.84) \cdot (42.75 - 30.72) + \\ & + 0 + 30.6 \cdot (40.22 - 31.84) \cdot (38 - 30.72) + \\ & + \frac{47.1 - 154}{2} \cdot 0.910 + 15.5 \cdot (41.2 - 31.84) \cdot (1.58 - 30.72) + \\ & + 0 + 90 \cdot (36.9 - 31.84) \cdot (25 - 30.72) = -15320.14 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Таблиця 7.1

Положення кутника	Знак $\operatorname{tg}2\alpha$	Положення кутника	Знак $\operatorname{tg}2\alpha$
	+		+
	-		+

	+		-
	-		-

7.4 Визначимо положення головних центральних осей та головних моментів інерції. Для цього спочатку визначимо кут нахилу головних осей за формулою

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \cdot (-15320.41)}{48899.394 - 31434.112} = -1.754, \\ 2\alpha &= -60.31^\circ, \\ \alpha &= -30.16^\circ. \end{aligned}$$

Обчислимо головні моменти інерції за формулою

$$\begin{aligned} I_{v,u} &= \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2}, \\ I_v &= \frac{31434.112 + 48899.394}{2} + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(31434.112 - 48899.394)^2 + 4 \cdot (-15320.41)^2}$$

$$= 57801.22 \text{ см}^4 ,$$

$$I_u = \frac{31434.112 + 48899.394}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{(31434.112 - 48899.394)^2 + 4 \cdot (-15320.41)^2}$$

$$= 22532.28 \text{ см}^4 .$$

7.5 Покажемо на кресленні положення головних осей (рисунок 7.3)

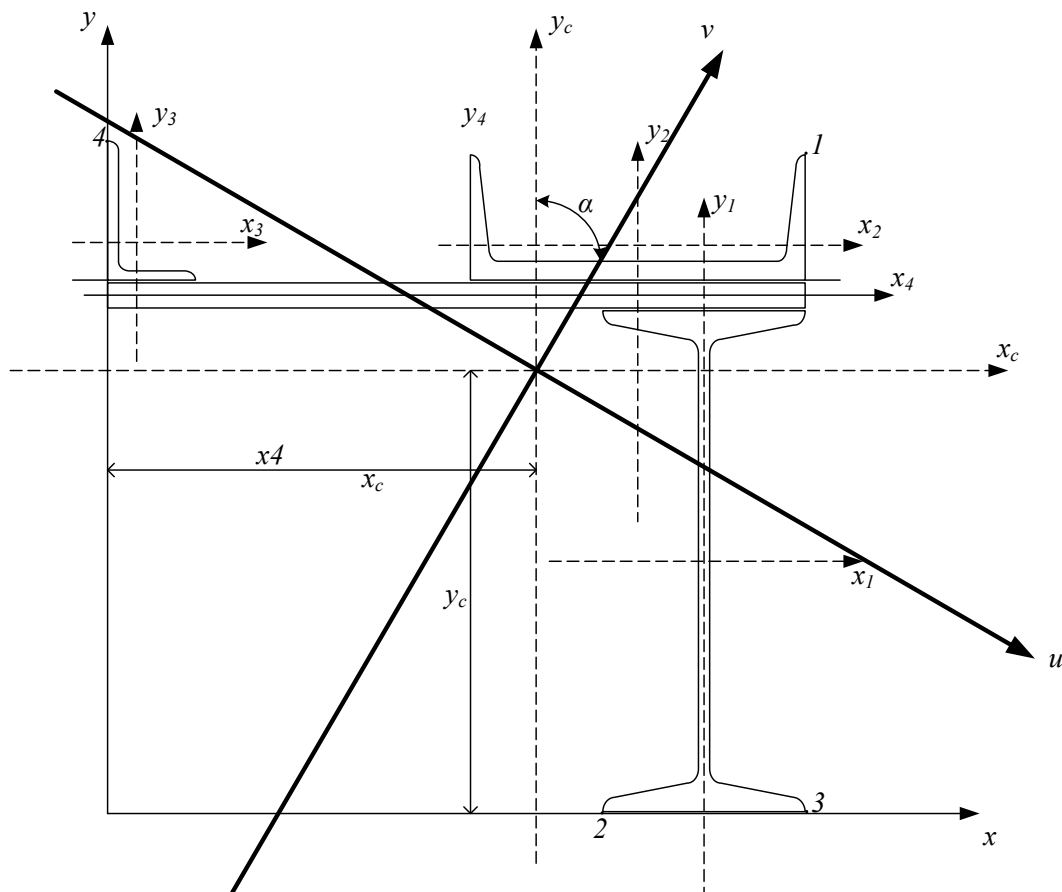


Рисунок 7.3 – Визначення положення головних осей

7.6 Обчислення моментів опору відносно головних осей

Найбільш віддаленою точкою від осі *u* в додатному напрямку є точка *1*, а у від'ємному точка *2*. Аналогічно відносно



осі  $v$ , відповідно, точки 3 і 4. Щоб знайти необхідні координати для визначення моментів опору, спочатку обчислимо їх координати відносно центральних осей  $x_c$  і  $y_c$ .

$$x(1) = x_2 - x_c + \frac{h_2}{2} = 38 - 30.72 + \frac{24}{2} = 19.28 \text{ см,}$$

$$y(1) = y_2 - y_c + b_2 - z_0 = 40.22 - 31.84 + 9 - 2.42 = 14.96 \text{ см,}$$

$$x(2) = x_1 - x_c - \frac{b_1}{2} = 42.75 - 30.72 - \frac{14.5}{2} = 4.78 \text{ см,}$$

$$y(2) = y_c = 31.84 \text{ см,}$$

$$x(3) = x_1 - x_c + \frac{b_1}{2} = 42.75 - 30.72 + \frac{14.5}{2} = 19.28 \text{ см,}$$

$$y(3) = y_c = 31.84 \text{ см,}$$

$$x(4) = x_c = 30.72 \text{ см,}$$

$$y(4) = y_3 - y_c + h_3 - y_0 = 41.2 - 31.84 + 10 - 3.4 = 15.96 \text{ см.}$$

Тепер, використовуючи формули перетворення координат при повороті осей, знайдемо найбільші відстані від граничних точок перерізу до осей  $u$  і  $v$ :

$$u(i) = x(i) \cdot \cos\alpha + y(i) \cdot \sin\alpha,$$

$$v(i) = y(i) \cdot \cos\alpha - x(i) \cdot \sin\alpha,$$

$$\sin(-30.16^\circ) = -0.5024,$$

$$\cos(-30.16^\circ) = 0.9999,$$

$$v(1) = 14.96 \cdot 0.9999 - 19.28 \cdot (-0.5024) = 24.64 \text{ см,}$$

$$v(2) = 31.84 \cdot 0.9999 - 4.78 \cdot (-0.5024) = 34.23 \text{ см,}$$

$$u(3) = 19.28 \cdot (-0.5024) - 31.84 \cdot 0.9999 = -41.52 \text{ см,}$$

$$u(4) = 30.72 \cdot (-0.5024) - 15.96 \cdot 0.9999 = -31.39 \text{ см.}$$

Далі визначимо моменти опору:

$$W_u(1) = \frac{I_u}{v(1)} = \frac{22532.28}{24.64} = 914.46 \text{ см}^3,$$

$$W_u(2) = \frac{I_u}{v(2)} = \frac{22532.28}{34.23} = 658.26 \text{ см}^3,$$

$$W_v(3) = \frac{I_v}{|u(3)|} = \frac{57801.22}{41.52} = 1392.13 \text{ см}^3,$$

$$W_v(4) = \frac{I_v}{|u(4)|} = \frac{57801.22}{31.39} = 1841.39 \text{ см}^3.$$

## 8 Розрахунок сталевій балки

План розв'язання задачі

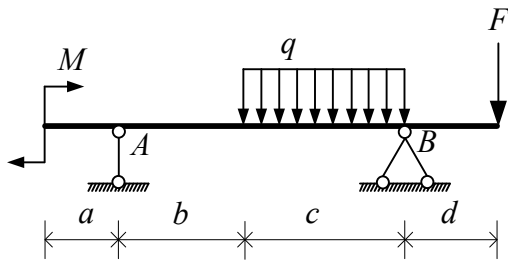
1 Побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.

2 Провести розрахунок за нормальними напруженнями при  $[\sigma]=160$  МПа. Побудувати двотавровий переріз балки.

3 Провести перевірку міцності за дотичними напруженнями при  $[\tau]=100$  МПа .

4 Визначити переріз, у якому виникають найбільші головні напруження. В небезпечному перерізі побудувати епюри нормальних та дотичних напружень. Зробити перевірку за головними напруженнями, для чого скористатися четвертою (енергетичною) теорією міцності.

5 Визначити згини та кути повороту на кінцях консолей і посередині прольоту методом початкових параметрів.



Дано:

$a = 1$  м;  $F = 5$  кН;

$b = 3$  м;  $q = 10$  кН/м;

$c = 5$  м;  $M = 10$  кНм.

$d = 2$  м (рисунок 8.1).

Рисунок 8.1 – Розрахункова схема

### Розв'язання

8.1 Спочатку визначимо реакції опор та побудуємо епюри  $Q$  і  $M$ . Вони зображені на рисунку 8.2.

8.2 Підберемо двотавровий переріз. З епюри згинальних моментів  $M$  витікає, що небезпечним перерізом балки за нормальними напруженнями є переріз, де діє максимальний згинальний момент  $M_{max} = 49.08$  кНм. При цьому з умови міцності при згині маємо

$$W = \frac{M}{[\sigma]}$$

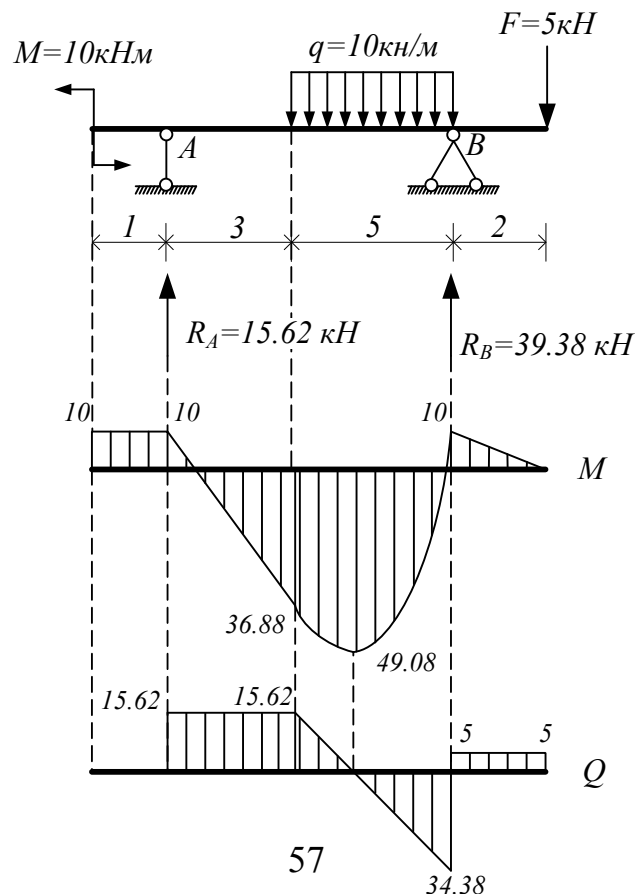


Рисунок 8.2  
– Епюри  $M$  і  $Q$

$$W = \frac{49.08 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.30675 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 306.75 \text{ см}^3.$$

За сортаментом підбираємо переріз двотаврової балки, у якій значення моменту опору буде більше, ніж значення розрахованого моменту опору за попередньою формулою. Відповідно до цього розглянемо двотавр №27 ( $W_x=371 \text{ см}^3$ ,  $I_x=5010 \text{ см}^4$ ,  $S_x=210 \text{ см}^3$ ,  $h=270 \text{ мм}$ ,  $b=125 \text{ мм}$ ,  $d=6.0 \text{ мм}$ ,  $t=9.8 \text{ мм}$ ).

Визначимо для цього двотавра максимальні нормальні та дотичні напруження.

Максимальні нормальні напруження будуть дорівнювати

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{49.08 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = 132.29 \text{ МПа}.$$

Це менше допустимого напруження (яке для сталі дорівнює 160 МПа).

З епюри  $Q$  видно, що небезпечним перерізом балки за дотичними напруженнями є переріз на опорі А, де діє максимальна поперечна сила  $Q_{\max}=34.38 \text{ кН}$ .

Максимальні дотичні напруження визначимо за такою формулою

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S}{d \cdot I} = \frac{34.38 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{6.0 \cdot 10^{-3} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 24.01 \text{ МПа}.$$

Це менше допустимого дотичного напруження (яке для сталі дорівнює 100 МПа).

8.3 Перевіримо міцність балки за головними напруженнями за IV теорією міцності. Для цього необхідно побудувати епюри нормальних та дотичних напружень для небезпечного перерізу двотаврової балки. *Найбільші нормальні напруження будуть у тих перерізах балки, де згинальний момент досягає максимального за абсолютною величиною значення. Найбільші дотичні напруження виникають там, де максимального значення досягає поперечна сила. Якщо обидва перерізи збігаються, то тут будуть і найбільші головні напруження. Тоді*

цей переріз балки і буде небезпечним. Частіше за все переріз з найбільшим згинальним моментом і найбільшою поперечною силою не збігаються. У цьому випадку за небезпечні перерізи слід прийняти: перерізи, де згинальний момент має найбільші значення; перерізи, де поперечна сила найбільша; перерізи, де і хоча і не приймають найбільших значень, але у своїй комбінації створюють найбільш не вигідне сполучення (тобто головні напруження будуть найбільшими). Небезпечним щодо головних напружень в нашому випадку є переріз, де діють  $M=36.88$  кНм та  $Q=15.62$  кН.

### 8.3.1 Побудова епюр нормальних напружень

Для побудови епюри необхідно спочатку визначити граничні точки в двотавровому перерізі (рисунок 8.3).

Нормальні напруження в граничних точках будемо визначати за формулою

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y,$$

де  $M$  – згинальний момент в небезпечному перерізі;

$I_x$  – момент інерції відносно осі  $x$ ;

$y$  – відстань від центра ваги перерізу до точки, в якій визначаємо напруження.

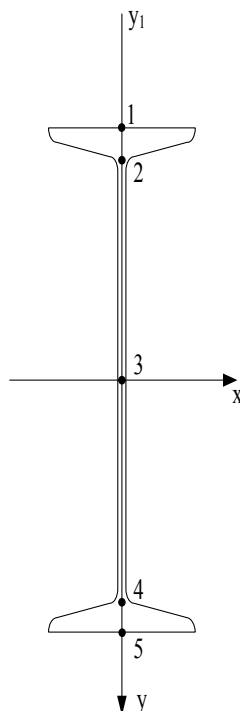


Рисунок 8.3 – Визначення граничних точок

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{36.88 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-\frac{0.27}{2}\right) = -99.37 \text{ МПа,} \\ \sigma_2 &= \frac{36.88 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-\left(\frac{0.27}{2} - 0.0098\right)\right) = -92.16 \text{ МПа,} \\ \sigma_3 &= \frac{36.88 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot 0 = 0 \text{ МПа,} \\ \sigma_4 &= \frac{36.88 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0.27}{2} - 0.0098\right) = 92.16 \text{ МПа,} \\ \sigma_5 &= \frac{36.88 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0.27}{2}\right) = 99.37 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

8.3.2 Побудова епюр дотичних напружень. Для побудови епюри дотичних напружень розглянемо граничні точки, зображені на рисунку 8.3, але в точках 2 і 4 необхідно розглянути два випадки: перший, коли точка належить полиці двотавра (точки 2 і 4); другий, коли точка належить стінці двотавра (точки 2' і 4').

Дотичні напруження в граничних точках будемо визначати за формулою

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{відс}}}{B \cdot I_x},$$

де  $Q$  – поперечна сила в небезпечному перерізі;

$S$  – статичний момент відсіченої частини поперечного перерізу відносно осі  $x$ ;

$B$  – ширина перерізу в точці;

$I_x$  – момент інерції відносно осі  $x$ .

$$\tau_1 = \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 0}{0.125 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0,$$

$$\tau_2 = \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{b \cdot t}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right)}{0.125 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{0.125 \cdot 0.0098}{2} \cdot \left( \frac{0.27}{2} - \frac{0.0098}{2} \right) \right)}{0.125 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0.19 \text{ МПа},$$

$$\tau_{2'} = \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{b \cdot t}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right)}{0.006 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{0.125 \cdot 0.0098}{2} \cdot \left( \frac{0.27}{2} - \frac{0.0098}{2} \right) \right)}{0.006 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 4.14 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{0.006 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 10.91 \text{ МПа},$$

$$\tau_{4'} = \tau_{2'} = 4.14 \text{ МПа},$$

$$\tau_4 = \tau_2 = 0.19 \text{ МПа},$$

$$\tau_5 = \tau_1 = 0.$$

Згідно з розрахунками побудуємо епюри  $\sigma$  і  $\tau$  (рисунок 8.4).

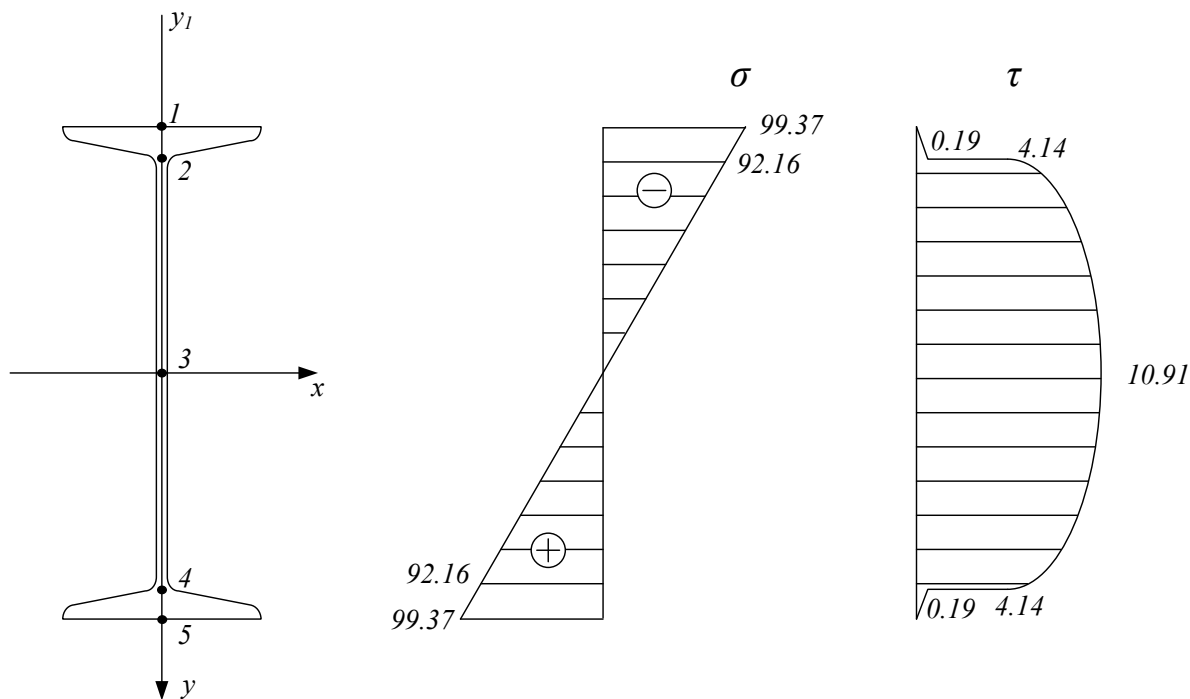


Рисунок 8.4 – Епюри  $\sigma$  і  $\tau$  для двотаврового перерізу

З епюр  $\sigma$  і  $\tau$  видно, що небезпечним перерізом для двотаврового перерізу буде точка переходу від полиці до стінки, де діють напруження  $\sigma=92.16$  МПа та  $\tau=4.14$  МПа. В цій точці визначимо еквівалентне напруження згідно з IV теорією міцності.

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2},$$

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{92.16^2 + 3 \cdot 4.14^2} = 92.43 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Згідно з розрахунками двотавр № 27 задовольняє усім умовам міцності за нормальними, дотичними і головними напруженнями.

8.4 Визначимо методом початкових параметрів прогини та кути повороту на кінцях консолей і по середині прольоту балки.

Виконання розрахунків методом початкових параметрів необхідно виконувати з урахуванням правила Клебша.

Запишемо рівняння для визначення прогину і кута повороту по середині прольоту балки ( $x=5$  м):

$$y_5 = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{M_0 \cdot x^2}{2! \cdot E \cdot I} + \frac{Q_0 \cdot x^3}{3! \cdot E \cdot I} -$$



$$-\frac{R_A \cdot (x-1)^3}{3! \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{4! \cdot E \cdot I},$$

$$\varphi_5 = \varphi_0 + \frac{M_0 \cdot x}{E \cdot I} + \frac{Q_0 \cdot x^2}{2! \cdot E \cdot I} - \frac{R_A \cdot (x-1)^2}{2! \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot (x-4)^3}{3! \cdot E \cdot I}.$$

Для розв'язання цих рівнянь необхідно визначити початкові параметри  $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0$ . Два з них знаходять відразу ж із граничних умов, поставлених на лівому кінці балки. Для двох інших початкових параметрів необхідно сформулювати дві граничні умови на другому її кінці (рисунок 8.5).

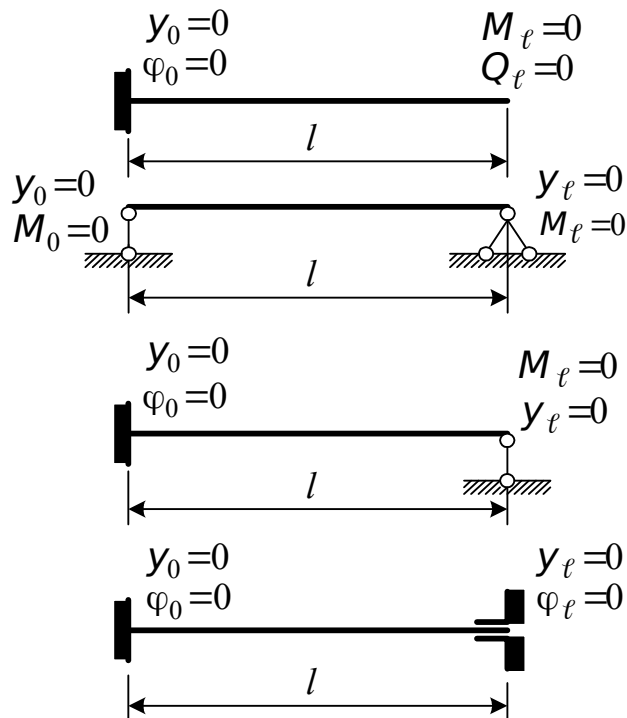


Рисунок 8.5 – До визначення початкових параметрів

В нашому випадку початковий параметр  $M_0$  буде дорівнювати зосередженому моменту  $M=10$  кНм, прикладеному на початку координат, а  $Q_0=0$ . Для визначення початкових параметрів  $y_0$  та  $\varphi_0$  необхідно записати рівняння прогину при  $x=1$  м та при  $x=9$  м. В цих точках прогини будуть дорівнюватись 0, що нам дозволить визначити  $y_0$  та  $\varphi_0$ .

При  $x=1$  м

$$y_1 = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{M \cdot x^2}{2! \cdot E \cdot I} = 0,$$

$$y_0 + \varphi_0 \cdot 1 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I} = 0,$$

при  $x=9$  м

$$y_9 = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{M \cdot x^2}{2! \cdot E \cdot I} - \frac{R_A \cdot (x-1)^3}{3! \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{4! \cdot E \cdot I} = 0,$$

$$y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 9^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{24 \cdot E \cdot I} = 0.$$

Складемо систему

$$\begin{cases} y_0 + \varphi_0 \cdot 1 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I} = 0, \\ y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 9^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{24 \cdot E \cdot I} = 0. \end{cases}$$

Виразимо із першого рівняння  $y_0$  та підставимо його у друге рівняння

$$y_0 = -\varphi_0 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I},$$

$$-\varphi_0 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I} + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 9^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{24 \cdot E \cdot I} = 0.$$

Визначимо  $\varphi_0$ , а потім і  $y_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 9^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{24 \cdot E \cdot I}}{8} = \\ &= \frac{84.061 \cdot 10^3}{E \cdot I}, \end{aligned}$$

$$y_0 = -\frac{84.061 \cdot 10^3}{E \cdot I} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot I} = -\frac{91.061 \cdot 10^3}{E \cdot I}.$$

Визначимо прогин і кут повороту по середині прольоту балки ( $x=5$  м):

$$y_5 = -\frac{91.061 \cdot 10^3}{E \cdot I} + \frac{84.061 \cdot 10^3 \cdot 5}{E \cdot I} +$$

$$+ \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{6 \cdot E \cdot I} +$$

$$+ \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^4}{24 \cdot E \cdot I} = \frac{288.099 \cdot 10^3}{E \cdot I},$$

$$\varphi_5 = \frac{84.061 \cdot 10^3}{E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5}{E \cdot I} - \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{6 \cdot E \cdot I} =$$

$$= \frac{10.771 \cdot 10^3}{E \cdot I}.$$

Визначимо прогин і кут повороту на консолі балки ( $x=11$  м):

$$y_{11} = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{M \cdot x^2}{2! \cdot E \cdot I} - \frac{R_A \cdot (x-1)^3}{3! \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot (x-4)^4}{4! \cdot E \cdot I} -$$

$$- \frac{R_B \cdot (x-9)^3}{3! \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot (x-9)^4}{4! \cdot E \cdot I},$$

$$\varphi_{11} = \varphi_0 + \frac{M \cdot x}{E \cdot I} - \frac{R_A \cdot (x-1)^2}{2! \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot (x-4)^3}{3! \cdot E \cdot I} -$$

$$- \frac{R_B \cdot (x-9)^2}{2! \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot (x-9)^3}{3! \cdot E \cdot I},$$

$$y_{11} = -\frac{91.061 \cdot 10^3}{E \cdot I} + \frac{84.061 \cdot 10^3 \cdot 11}{E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 11^2}{2 \cdot E \cdot I} -$$

$$- \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 7^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{24 \cdot E \cdot I} -$$

$$- \frac{39.38 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{6 \cdot E \cdot I} = -\frac{243.48 \cdot 10^3}{E \cdot I},$$

$$\varphi_{11} = \frac{84.061 \cdot 10^3}{E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 11}{E \cdot I} -$$

$$- \frac{15.62 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 7^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{6 \cdot E \cdot I} -$$

$$- \frac{39.38 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{-107.359 \cdot 10^3}{E \cdot I},$$

$$y_0 = -\frac{91.061 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = -0.0086 \text{ м},$$

$$\varphi_0 = \frac{84.061 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0.0079 \text{ рад},$$

$$y_5 = \frac{288.099 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0.02738 \text{ м},$$

$$\varphi_5 = -\frac{34.229 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = -0.001024 \text{ рад},$$

$$y_{11} = -\frac{243.48 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = -0.0231 \text{ м},$$

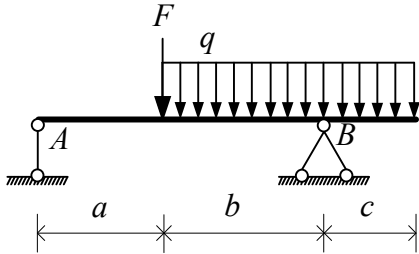
$$\varphi_{11} = -\frac{107.359 \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = -0.010204 \text{ рад}.$$

## 9 Розрахунок дерев'яної балки

Дерев'яна балка навантажена тимчасовим навантаженням ( $F$ ,  $q$ ,  $M$ ) з коефіцієнтом перевантаження ( $n$ ). Розрахунковий опір деревини 15 МПа, коефіцієнт умови роботи ( $m$ ).

План розв'язання задачі

- 1 Побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.
- 2 Підібрати переріз балки за міцністю:
  - а) круглий;
  - б) прямокутний з заданим відношенням сторін.



Дано:

$$a = 2 \text{ м}; F = 15 \text{ кН};$$

$$b = 3 \text{ м}; q = 20 \text{ кН/м};$$

$$c = 1.5 \text{ м}; n = 1.2; m = 0.8; h/b = 2.$$

$$E = 0.1 \cdot 10^5 \text{ МПа (рисунок 9.1)}.$$

Рисунок 9.1 – Розрахункова схема

### Розв'язання

9.1 Спочатку визначимо реакції опор та побудуємо епюри  $Q$  і  $M$ . Вони зображені на рисунку 9.2

9.2 Підберемо круглий та прямокутний (з відношенням сторін  $h/b=2$ ) перерізи дерев'яної балки за міцністю при таких умовах: розрахунковий опір деревини на згин  $R=15$  МПа, коефіцієнт надійності за навантаженням  $n=1.2$ , коефіцієнт умов роботи балки  $m=0.8$ .

Запишемо умову міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}| \cdot n}{W} \leq m \cdot R.$$

Виходячи з умови міцності маємо:

$$W = \frac{|M_{max}| \cdot n}{m \cdot R}.$$

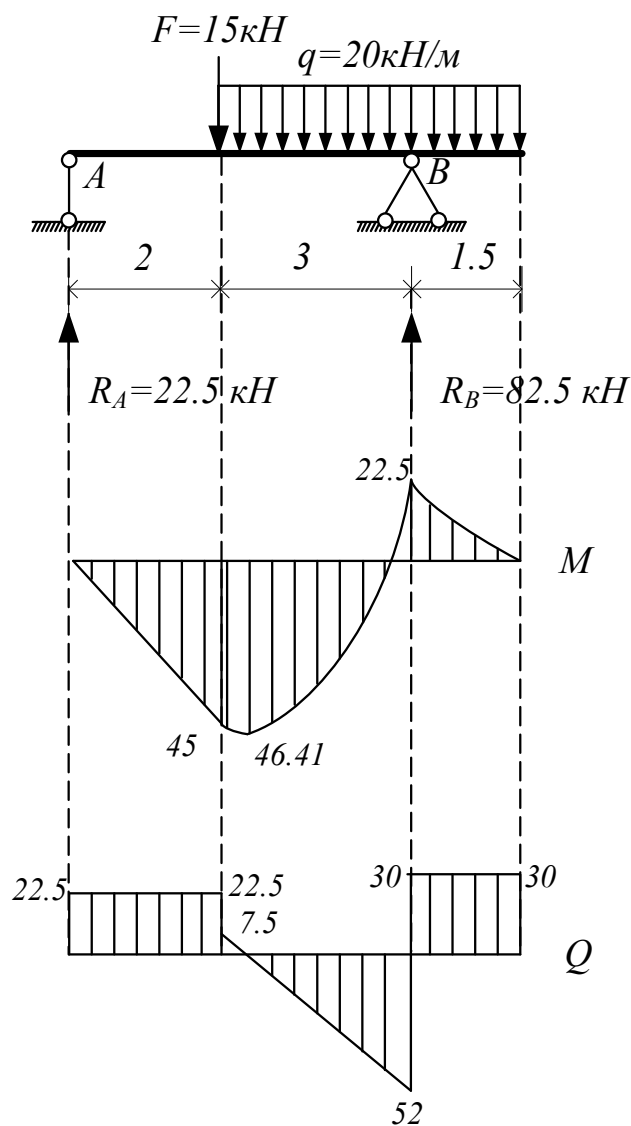


Рисунок 9.2 – Епюри  $M$  і  $Q$

Для круглого поперечного перерізу момент опору визначимо за формулою:

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{|M_{max}| \cdot n}{m \cdot R},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{max}| \cdot n}{\pi \cdot m \cdot R}},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 46.61 \cdot 10^3 \cdot 1.2}{3.14 \cdot 0.8 \cdot 15 \cdot 10^6}} = 0.36 \text{ м.}$$

Для прямокутного поперечного перерізу

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

так як  $h/b=2$ , то  $h=2 \cdot b$ , тоді момент опору для прямокутного перерізу визначимо за такою формулою:

$$W = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3},$$

$$\frac{2 \cdot b^3}{3} = \frac{|M|_{max} \cdot n}{m \cdot R},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot |M|_{max} \cdot n}{2 \cdot m \cdot R}},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 46.61 \cdot 10^3 \cdot 1.2}{2 \cdot 0.8 \cdot 15 \cdot 10^6}} = 0.19 \text{ м,}$$

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 0.19 = 0.38 \text{ м.}$$

9.2.1 Для підбраного перетину визначимо осьовий момент інерції

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

$$I_x = \frac{0.19 \cdot 0.38^3}{12} = 0.8688 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4.$$

9.3 Визначимо переміщення в точці прикладання сили  $F$  методом фіктивних навантажень.

Переміщення методом фіктивного навантаження визначимо за такою формулою:





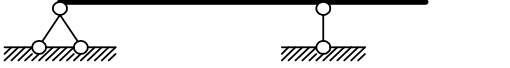

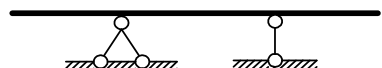
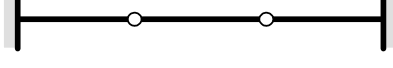
$$y = -\frac{M^{\Phi}}{EI},$$

де  $M^{\Phi}$  – фіктивний момент в точці, в якій визначаємо переміщення;

$EI$  – жорсткість балки на згин.

Для визначення фіктивного моменту необхідно побудовану епюру  $M$  (рисунок 9.2) подати у вигляді фіктивного навантаження, спрямованого до осі балки, та прикласти її до фіктивної балки (рисунок 9.3, 9.4). Для цього необхідно розбити епюру  $M$  на прості фігури та прикласти рівнодіючу силу  $\omega_i$  в центрі ваги кожної фігури. Фіктивна балка будується згідно з таблицею 9.1.

Таблиця 9.1

Задана балка	Фіктивна балка
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^{\Phi} = 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^{\Phi} \neq 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ $y=0$ $\varphi \neq 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^{\Phi} = 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ $M^{\Phi} = 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ $M^{\Phi} \neq 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $y=0$ $\varphi \neq 0$ $y=0$ $\varphi \neq 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^{\Phi} \neq 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ $M^{\Phi} = 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ $M^{\Phi} = 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ $M^{\Phi} \neq 0$ $Q^{\Phi} \neq 0$ 

Визначимо значення рівнодіючих  $\omega$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 45 \cdot 10^3 = 45 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$



$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 45 \cdot 10^3 = 67.5 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{M}^2,$$

$$\omega_3 = \frac{g \cdot l^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{12} = 45 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{M}^2,$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 22.5 \cdot 10^3 = 33.75 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{M}^2,$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 22.5 \cdot 10^3 = 16.875 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{M}^2,$$

$$\omega_6 = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1.5^3}{12} = 5.625 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{M}^2.$$

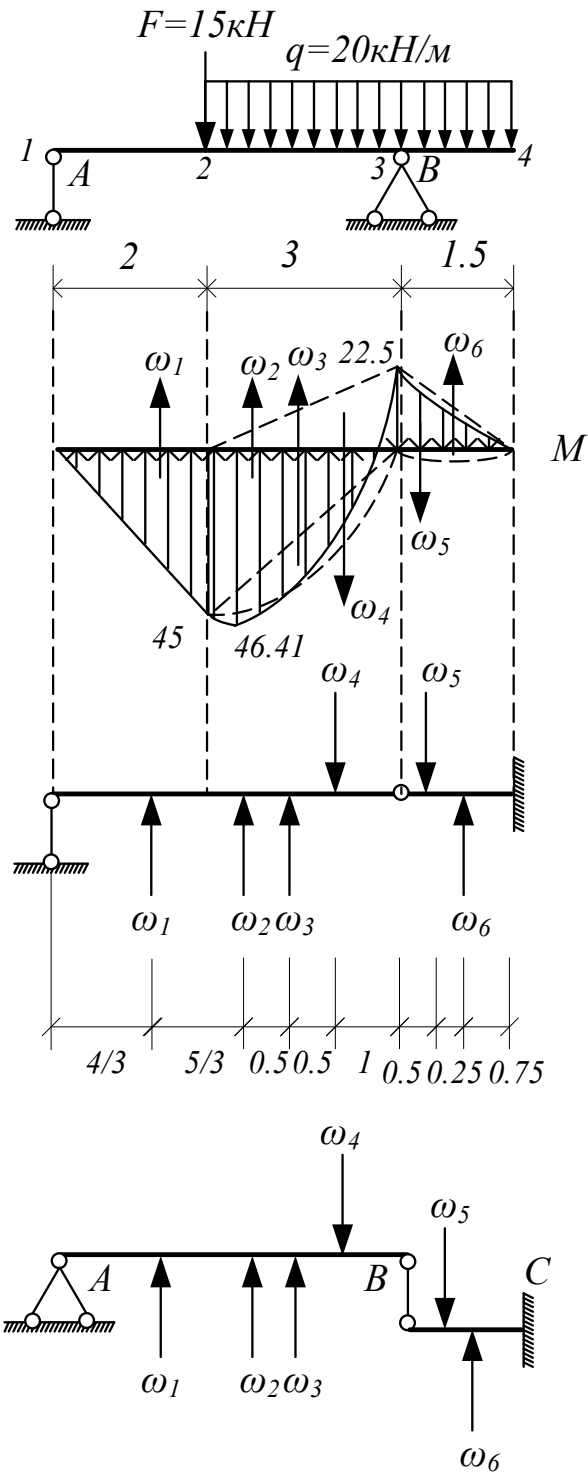


Рисунок 9.3 – Визначення переміщення методом фіктивного навантаження

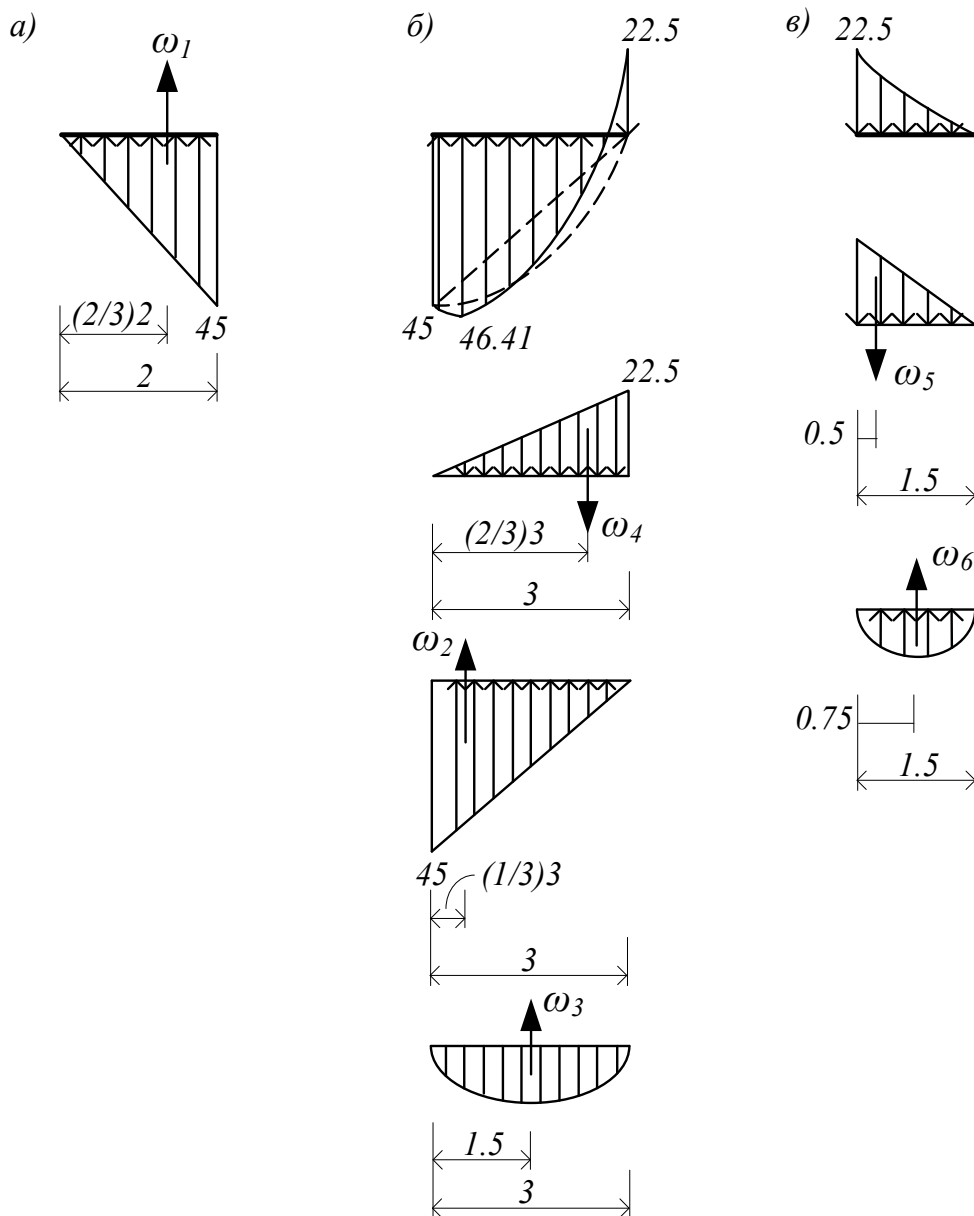


Рисунок 9.4 – Визначення зосередженого фіктивного навантаження

На ділянці 1-2 балки епюра  $M$  має вигляд трикутника (рисунок 9.4, а), який ми замінюємо рівнодіючою силою  $\omega_1$ , яка чисельно дорівнює площі трикутника та прикладена в центрі тяжіння трикутника.

На ділянці 2-3 епюру  $M$  подамо у вигляді суми трьох навантажень (рисунок 9.4, б), які ми замінюємо рівнодіючими силами  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ .

На ділянці 3-4 епюру  $M$  подамо у вигляді суми двох навантажень (рисунок 9.4, в), які ми замінюємо рівнодіючими силами  $\omega_5$ ,  $\omega_6$ .

Так як сила  $F$  розташована на ділянці  $AB$ , яка у свою чергу є верхнім поверхом, що передає навантаження на нижній поверх  $BC$ , то для визначення фіктивного моменту в точці прикладання сили  $F$  достатньо розглянути лише фіктивну балку  $AB$ . Визначимо фіктивні опорні реакції та фіктивний момент (рисунок 9.5) з урахуванням правила знаків (фіктивна опорна реакція вважається додатною, якщо спрямована вниз).

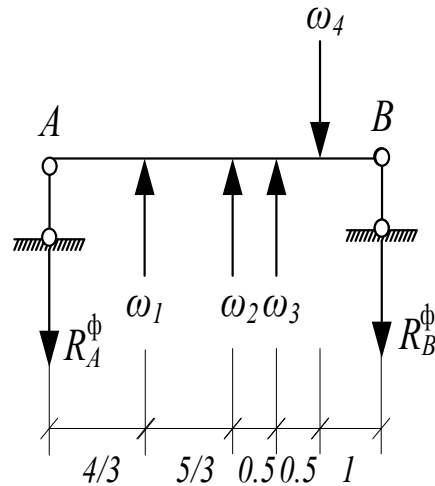


Рисунок 9.5 – Розрахункова схема для визначення фіктивного моменту

Для визначення фіктивних опорних реакцій запишемо рівняння рівноваги

$$\sum M_A = 0,$$

$$\omega_1 \cdot \frac{4}{3} + \omega_2 \cdot 3 + \omega_3 \cdot 3.5 - \omega_4 \cdot 4 - R_B^\phi \cdot 5 = 0,$$

$$R_B^\phi = \frac{\omega_1 \cdot \frac{4}{3} + \omega_2 \cdot 3 + \omega_3 \cdot 3.5 - \omega_4 \cdot 4}{5},$$

$$R_B^\phi = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} + 67.5 \cdot 10^3 \cdot 3 + 45 \cdot 10^3 \cdot 3.5 - 33.75 \cdot 10^3 \cdot 4}{5} = 57 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$\omega_1 \cdot 3 \frac{2}{3} + \omega_2 \cdot 2 + \omega_3 \cdot 1.5 - \omega_4 \cdot 1 - R_A^\phi \cdot 5 = 0,$$

$$R_A^\phi = \frac{\omega_1 \cdot 3 \frac{2}{3} + \omega_2 \cdot 2 + \omega_3 \cdot 1.5 - \omega_4 \cdot 1}{5},$$

$$\begin{aligned} R_B^\phi &= \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 3 \frac{2}{3} + 67.5 \cdot 10^3 \cdot 2 + 45 \cdot 10^3 \cdot 1.5 - 33.75 \cdot 10^3 \cdot 1}{5} = \\ &= 66.75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Перевіряємо правильність визначення опорних реакцій, склавши таке рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_A^\phi - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + R_B^\phi = 0,$$

$$57 - 45 - 67.5 - 45 + 33.75 + 66.75 = 0.$$

Опорні реакції знайдено правильно. Тепер визначимо фіктивний момент в точці прикладення сили  $F$ .

$$M^\phi = R_A^\phi \cdot 2 - \omega_1 \cdot \frac{1}{3} = 57 \cdot 10^3 - 45 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{3} = 42 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^3.$$

Визначимо переміщення

$$y = - \frac{42 \cdot 10^3}{0.1 \cdot 10^{11} \cdot 0.8688 \cdot 10^{-3}} = 483.43 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

## 10 Розрахунок нерозрізних балок

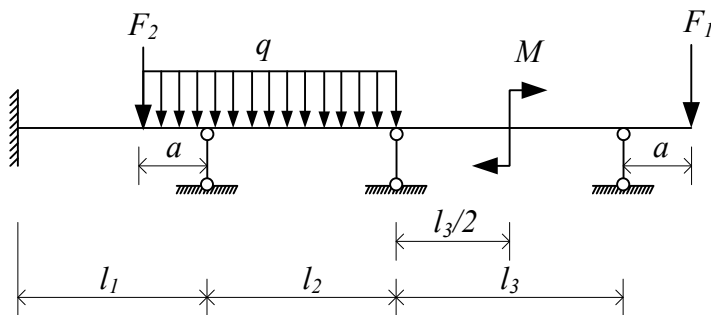
План розв'язання задачі

1 Визначити опорні моменти та побудувати епюру згинальних моментів.

2 Зробити перевірку правильності побудови епюри згинальних моментів.

3 Побудувати епюру поперечних сил.

4 Провести розрахунок за нормальними напруженнями при  $[\sigma]=160$  МПа. Побудувати двотавровий переріз балки.



Дано:

$$F_1 = 15 \text{ кН}; F_2 = 25 \text{ кН};$$

$$M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 30 \text{ кН/м}$$

$$l_1 = 4 \text{ м}; l_2 = 3 \text{ м}; l_3 = 5 \text{ м};$$

$$a = 2 \text{ м (рисунок 10.1).}$$

Рисунок 10.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

10.1 Визначимо ступінь статичної невизначності балки за формулою

$$L = C_0 - 3,$$

де  $C_0$  – кількість опорних зв'язків;

3 – три рівняння статички для плоскої системи.

Для нашого випадку

$$L = 6 - 3 = 3, \text{ тобто балка тричі статично невизначена.}$$

10.2 Виберемо основну систему шляхом постановки в опорні перерізи балки шарнірів, жорстке затиснення заміняємо додатковим прогоном із нульовою довжиною (рисунок 10.2).

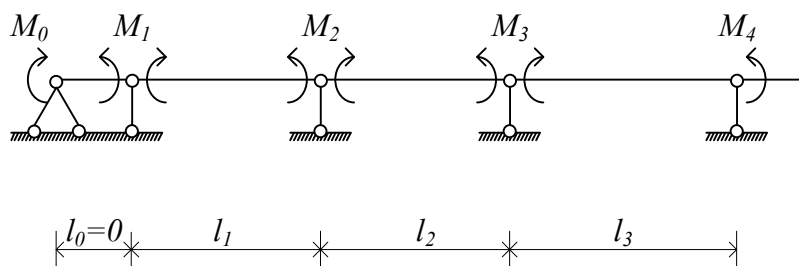


Рисунок 10.2 – Основна система

10.3 Запишемо рівняння трьох моментів:

$$\begin{cases} M_0 \cdot l_0 + 2 \cdot M_1 \cdot (l_0 + l_1) + M_2 \cdot l_1 = -6 \cdot R_1^\Phi, \\ M_1 \cdot l_1 + 2 \cdot M_2 \cdot (l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -6 \cdot R_2^\Phi, \\ M_2 \cdot l_2 + 2 \cdot M_3 \cdot (l_2 + l_3) + M_4 \cdot l_3 = -6 \cdot R_3^\Phi. \end{cases}$$

Кількість рівнянь в системі залежить від ступеня статичної невизначності.

10.4 Визначимо правий крайній та лівий крайній моменти:

правий крайній момент дорівнює нулю  $M_0 = 0$ , а лівий крайній дорівнює  $M_4 = -F_1 \cdot a = -15 \cdot 2 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

10.5 Для визначення опорних моментів необхідно розрахувати систему рівнянь (п. 10.3), а для цього необхідно визначити фіктивні опорні реакції. Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно для кожного прогону від зовнішнього навантаження побудувати епюри згинальних моментів та подати їх у вигляді нерівномірно розподіленого навантаження (рисунок 10.3).

10.6 Після визначення фіктивних опорних реакцій по кожному прогону визначимо фіктивні опорні реакції  $R_1^\Phi$ ,  $R_2^\Phi$ ,  $R_3^\Phi$ :

$$R_1^\Phi = A_1^\Phi = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$R_2^\Phi = B_1^\Phi + A_2^\Phi = 70 + 33.75 = 103.75 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$R_3^\Phi = B_2^\Phi + A_3^\Phi = 33.75 - 11.21 = 22.54 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

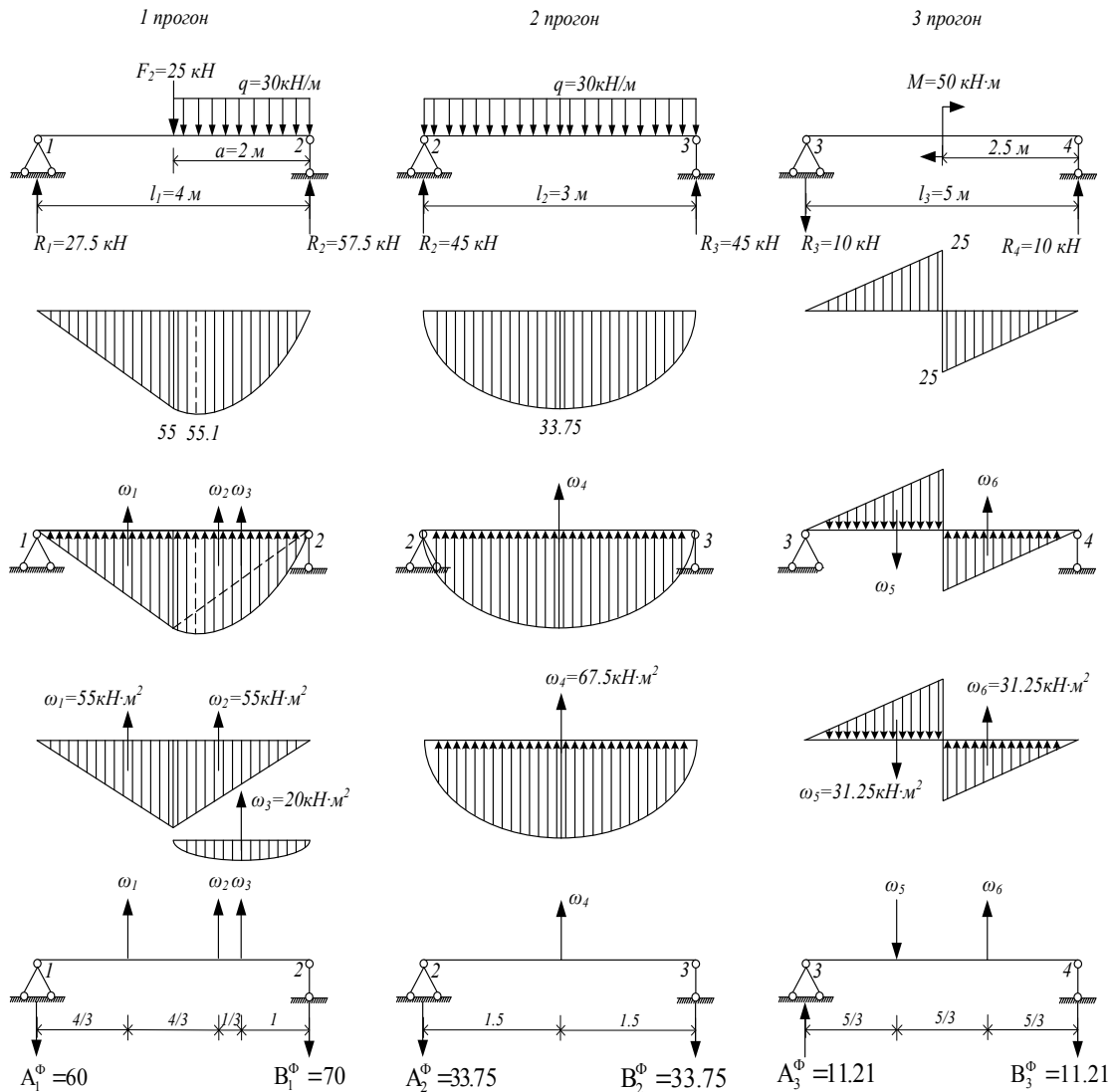


Рисунок 10.3 – Визначення фіктивних опорних реакцій

10.7 Підставимо значення фіктивних опорних реакцій  $R_1^\Phi$ ,  $R_2^\Phi$ ,  $R_3^\Phi$  в рівняння трьох моментів та визначимо невідомі моменти:

$$\begin{cases} 0 \cdot 0 + 2 \cdot M_1 \cdot (0 + 4) + M_2 \cdot 4 = -6 \cdot 60, \\ M_1 \cdot 4 + 2 \cdot M_2 \cdot (4 + 3) + M_3 \cdot 3 = -6 \cdot 103.75, \\ M_2 \cdot 3 + 2 \cdot M_3 \cdot (3 + 5) - 30 \cdot 5 = -6 \cdot 22.54. \end{cases}$$



10.7.1 Виразимо  $M_1$  з першого рівняння:

$$M_1 = \frac{-360 - 4 \cdot M_2}{8}.$$

10.7.2 Виразимо  $M_3$  з третього рівняння:

$$M_3 = \frac{14.76 - 3 \cdot M_2}{16}.$$

10.7.3 Підставимо значення  $M_1$  та  $M_3$  в друге рівняння та визначимо  $M_2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{-360 - 4 \cdot M_2}{8} \right) \cdot 4 + M_2 \cdot 14 + \left( \frac{14.76 - 3 \cdot M_2}{16} \right) \cdot 3 &= \\ = -6 \cdot 103.75, & \\ -180 + M_2 \cdot 2 + M_2 \cdot 14 + 2.76 - M_2 \cdot 0.56 &= -622.5, \\ M_2 &= -38.92 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

10.7.4 Визначимо значення  $M_1$  та  $M_3$ :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{-360 - 4 \cdot (-38.92)}{8} = -25.54 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \\ M_3 &= \frac{14.76 - 3 \cdot (-38.92)}{16} = 8.22 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

10.8 Для побудови остаточних епюр згинальних моментів та поперечних сил розглянемо окремо кожен прогін, завантажений зовнішнім навантаженням та опорними моментами (рисунок 10.4).

10.9 Остаточні епюри згинальних моментів та поперечних сил матимуть вигляд, як на рисунку 10.5.

10.10 Опорна реакція на будь-якій опорі  $n$  нерозрізної балки визначається таким чином: вирізаємо двома перерізами, розташованими по обидва боки від опори, нескінченно малу ділянку балки (рисунок 10.6).

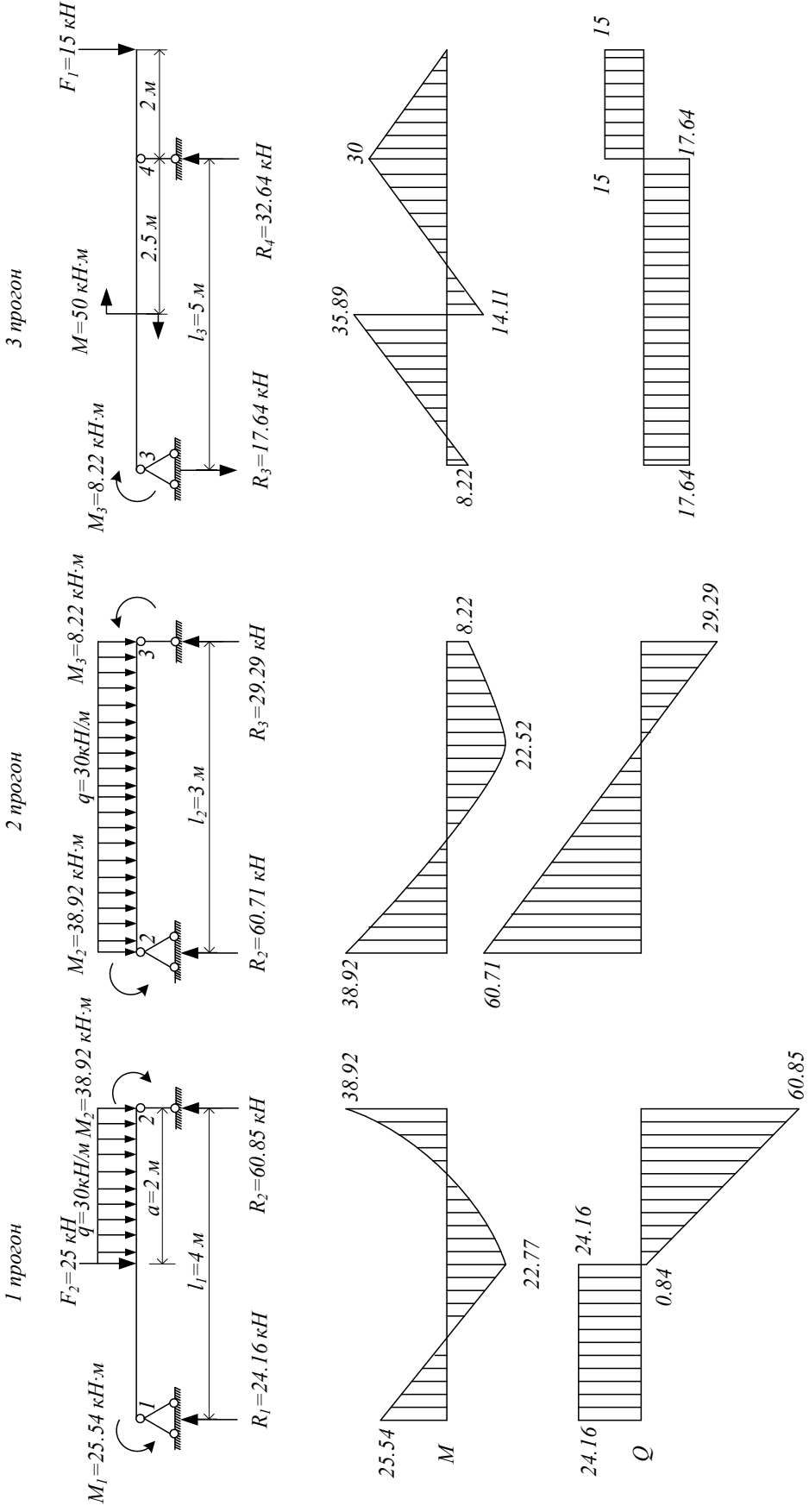


Рисунок 10.4 – Побудова епюр на кожному прогоні

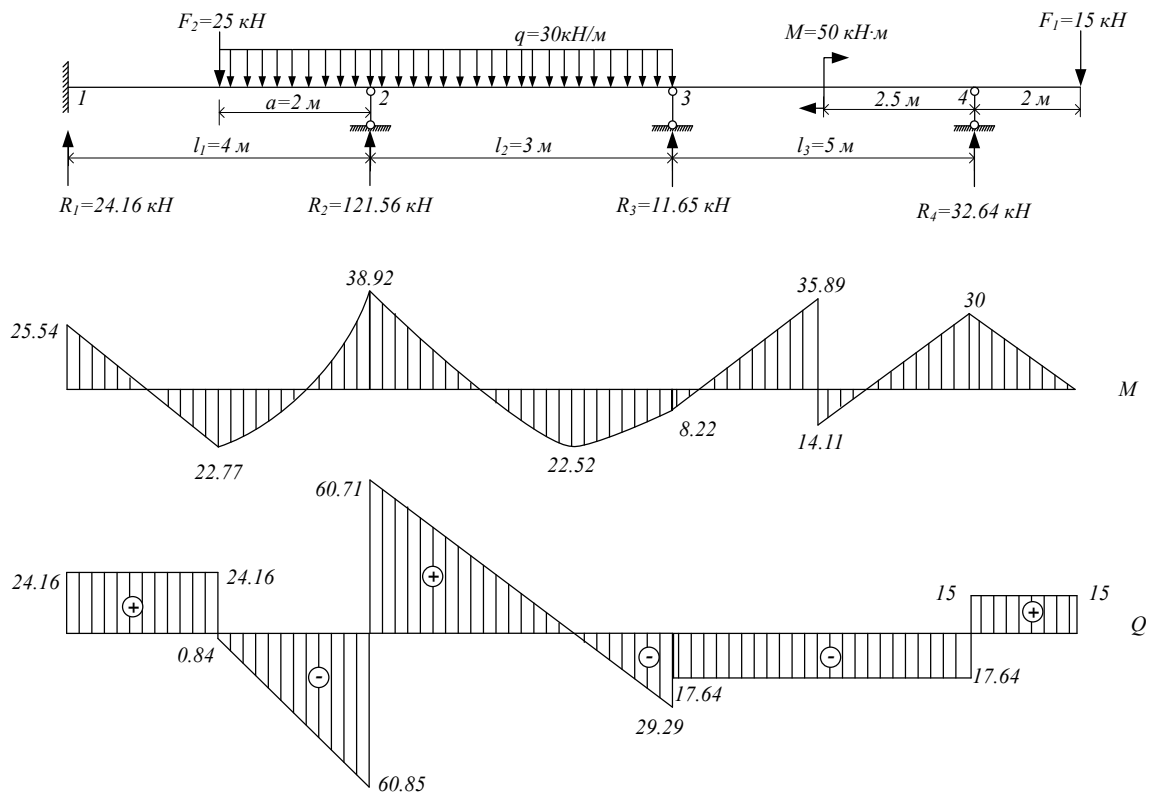


Рисунок 10.5 – Побудова остаточних епюр

Спроекуємо на вертикаль всі діючі на виділену ділянку балки сили

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n .$$

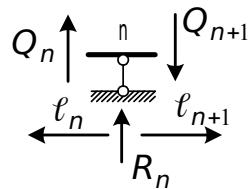


Рисунок 10.6 – Визначення опорної реакції на опорі нерозрізної балки

10.10.1 Визначимо опорну реакцію  $R_1$ .

$$\sum Y = 0$$

$$R_1 - Q_{\text{пр}} + Q_{\text{л}} = 0$$

$$R_1 = Q_{\text{пр}} - Q_{\text{л}} = 24.16 - 0 = 24.16\text{кН}$$

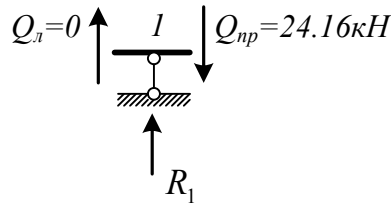


Рисунок 10.7 – Визначення опорної реакції  $R_1$

10.10.2 Визначимо опорну реакцію  $R_2$ .

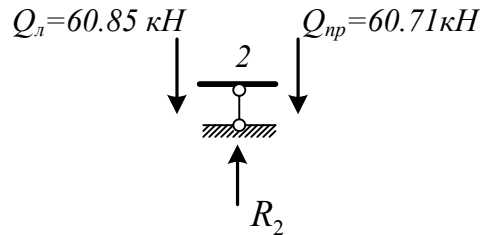


Рисунок 10.8 – Визначення опорної реакції  $R_2$

$$\sum Y = 0$$

$$R_2 - Q_{пр} - Q_л = 0$$

$$R_2 = Q_{пр} + Q_л = 60.85 - 60.71 = 121.56 \text{ кН}$$

10.10.3 Визначимо опорну реакцію  $R_3$ .

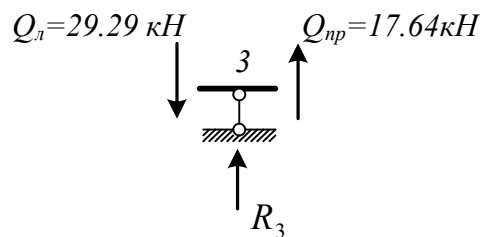


Рисунок 10.9 – Визначення опорної реакції  $R_3$

$$\sum Y = 0$$

$$R_3 + Q_{пр} - Q_л = 0$$

$$R_3 = -Q_{пр} + Q_л = -17.64 + 29.29 = 11.65 \text{ кН}$$

10.10.4 Визначимо опорну реакцію  $R_4$ .

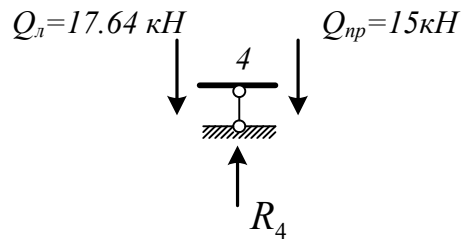


Рисунок 10.10 – Визначення опорної реакції  $R_4$

$$\sum Y = 0$$

$$R_4 - Q_{пр} - Q_{л} = 0$$

$$R_4 = Q_{пр} + Q_{л} = 17.64 + 15 = 32.64 \text{ кН}$$

10.11 Виконаємо перевірку.

10.11.1 Статична перевірка. Для цього спроектуємо всі сили на вісь  $y$ .

$$\sum Y = 0$$

$$R_1 - F_2 - q \cdot 5 + R_2 + R_3 + R_4 - F_1 = 0$$

$$24.16 - 25 - 30 \cdot 5 + 121.56 + 11.65 + 32.64 - 15 = 0$$

10.11.2 Деформаційна перевірка. Для перевірки правильності побудови епюри згинальних моментів слід пригадати, що зігнута вісь нерозрізної балки неперервна на опорах, тобто взаємний кут повороту перерізів лівіше і правіше даної опори дорівнює нулю. Отже, епюра  $M$  в межах двох суміжних прогонів нерозрізної балки правильна, якщо алгебраїчна сума фіктивних реакцій на середній опорі дорівнює нулю:

$$B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi = 0$$

Для цього розглянемо два суміжних прольота балки (рисунок 10.11).

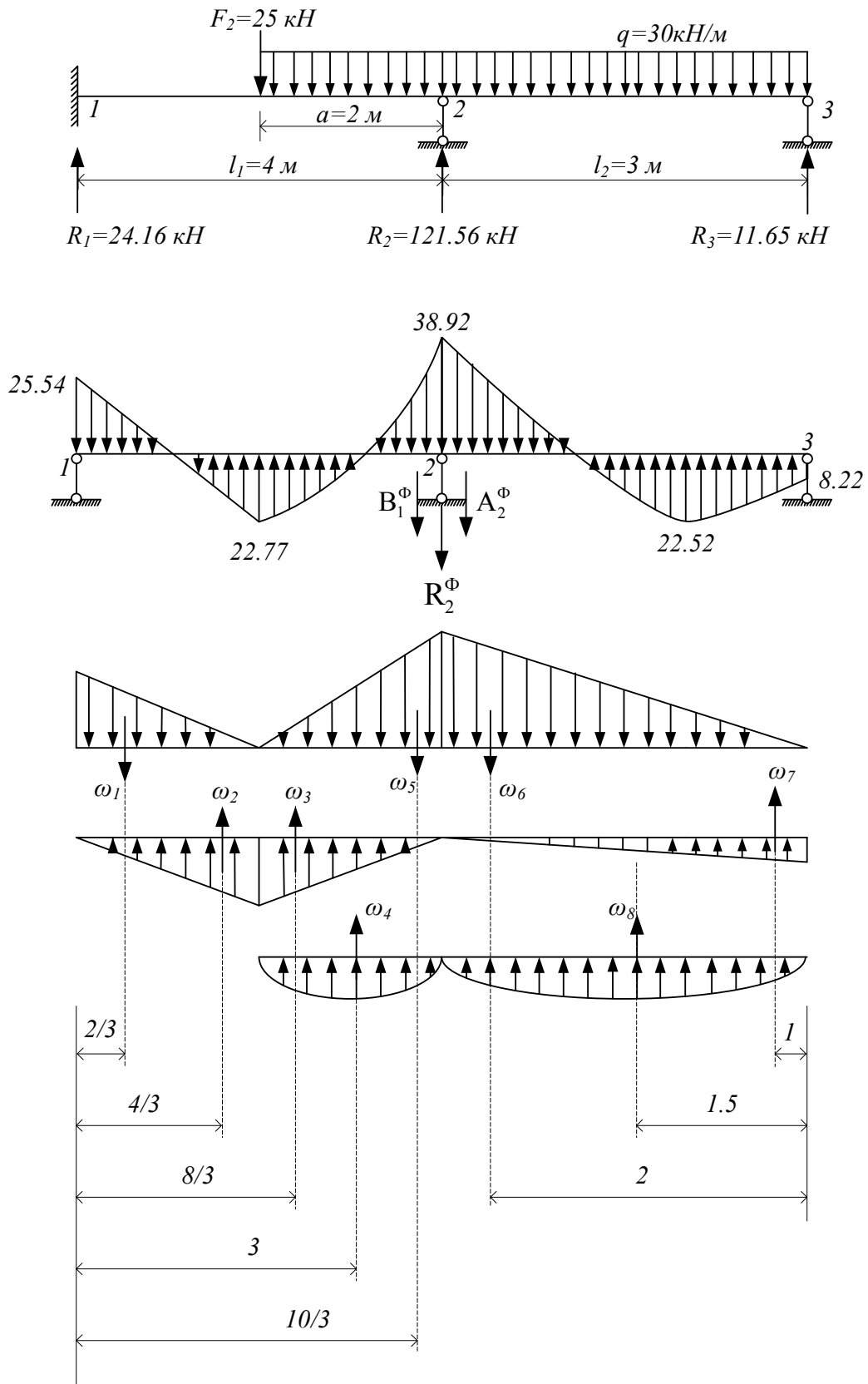


Рисунок 10.11 – Визначення фіктивної опорної реакції  $R_2^\Phi$

Визначимо значення рівнодіючих  $\omega$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25.54 \cdot 10^3 = 25.54 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 22.77 \cdot 10^3 = 22.77 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 22.77 \cdot 10^3 = 22.77 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_4 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{12} = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 38.92 \cdot 10^3 = 38.92 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 38.92 \cdot 10^3 = 58.38 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8.22 \cdot 10^3 = 12.33 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_8 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{12} = 67.5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Визначимо значення фіктивних опорних реакцій, для цього запишемо суму моментів відносно опори 1, розглянувши окремо прогін 1-2, та опори 3 з прогону 2-3.

$$\sum M_1 = 0$$

$$\omega_1 \cdot \frac{2}{3} - \omega_2 \cdot \frac{4}{3} - \omega_3 \cdot \frac{8}{3} - \omega_4 \cdot 3 + \omega_5 \cdot \frac{10}{3} + B_1^\phi \cdot 4 = 0$$

$$B_1^\phi = \frac{-\omega_1 \cdot \frac{2}{3} + \omega_2 \cdot \frac{4}{3} + \omega_3 \cdot \frac{8}{3} + \omega_4 \cdot 3 - \omega_5 \cdot \frac{10}{3}}{4}$$

$$B_1^\phi = \frac{(-25.54 \cdot \frac{2}{3} + 22.77 \cdot \frac{4}{3} + 22.77 \cdot \frac{8}{3} + 20 \cdot 3 - 38.92 \cdot \frac{10}{3}) \cdot 10^3}{4} =$$

$$= 1.07 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$



$$\sum M_3 = 0$$

$$-\omega_7 \cdot 1 - \omega_8 \cdot 1.5 + \omega_6 \cdot 2 + A_2^\phi \cdot 3 = 0$$

$$A_2^\phi = \frac{\omega_7 \cdot 1 + \omega_8 \cdot 1.5 - \omega_6 \cdot 2}{3}$$

$$A_2^\phi = \frac{(12.33 \cdot 1 + 67.5 \cdot 1.5 - 58.38 \cdot 2) \cdot 10^3}{3} = -1.07 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Визначимо фіктивну опорну реакцію  $R_2^\phi$  за формулою:

$$R_2^\phi = B_1^\phi + A_2^\phi = 1.07 \cdot 10^3 + (-1.07 \cdot 10^3) = 0$$

Деформаційна перевірка виконується.

10.12 Підберемо двотавровий переріз. З епюри згинальних моментів  $M$  витікає, що небезпечним перерізом балки за нормальними напруженнями є переріз де діє максимальний згинаючий момент  $M_{\max} = 38.92 \text{ кНм}$ . При цьому з умови міцності при згині маємо

$$W = \frac{M}{[\sigma]}$$

$$W = \frac{38.92 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.24325 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 243.25 \text{ см}^3$$

За сортаментом підбираємо переріз двотаврової балки, у якій значення моменту опору буде більше ніж значення розрахованого моменту опору по попередній формулі. У відповідності до цього розглянемо двотавр №24 ( $W_x = 289 \text{ см}^3$ ,  $I_x = 3460 \text{ см}^4$ ,  $S_x = 163 \text{ см}^3$ ,  $h = 240 \text{ мм}$ ,  $b = 115 \text{ мм}$ ,  $d = 5.6 \text{ мм}$ ,  $t = 9.5 \text{ мм}$ ).

Визначимо для цього двотавра максимальні нормальні та дотичні напруження.

Максимальні нормальні напруження будуть дорівнювати:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{38.92 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 134.67 \text{ МПа}$$

Це менше допустимого напруження (яке для сталі дорівнює 160 МПа).

З епюри  $Q$  видно, що небезпечним перерізом балки за дотичними напруженнями є переріз на опорі 2, де діє максимальна поперечна сила  $Q_{\max}=60.85\text{кН}$ .

Максимальні дотичні напруження визначимо за наступною формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S}{d \cdot I} = \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5.6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 51.18 \text{ МПа}$$

Це менше допустимого дотичного напруження (яке для сталі дорівнює 100 МПа).

Перевіримо міцність балки за головними напруженнями за IV теорією міцності. Для цього необхідно побудувати епюри нормальних та дотичних напружень для небезпечного перерізу двотаврової балки. Небезпечним щодо головних напружень в нашому випадку є переріз де діють  $M=38.92\text{кНм}$  та  $Q=60.85\text{кН}$ .

Для побудови епюри необхідно спочатку визначити граничні точки в двотавровому перерізі (рисунок 10.12).

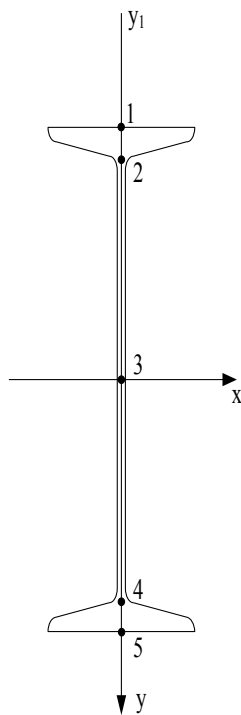


Рисунок 10.12 – Визначення граничних точок

Нормальні напруження в граничних точках будемо визначати за формулою:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y$$

де  $M$  – згинальний момент в небезпечному перерізі;

$I_x$  – момент інерції відносно осі  $x$ ;

$y$  – відстань від центра ваги перерізу до точки, в якій визначаємо напруження.

$$\sigma_1 = \frac{38.92 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-\frac{0.24}{2}\right) = -134.98 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{38.92 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-\left(\frac{0.24}{2} - 0.0095\right)\right) = -124.29 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{38.92 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot 0 = 0 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = \frac{38.92 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0.24}{2} - 0.0095\right) = 124.29 \text{ МПа}$$

$$\sigma_5 = \frac{38.92 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0.24}{2}\right) = 134.98 \text{ МПа}$$

Для побудови епюри дотичних напружень розглянемо граничні точки зображені на рисунку 10.12, але в точках 2 і 4 необхідно розглянути два випадки: перший, коли точка належить полиці двотавра (точки 2 і 4); другий, коли точка належить стінки двотавра (точки 2' і 4').

Дотичні напруження в граничних точках будемо визначати за формулою:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{відс}}}{B \cdot I_x}$$

де  $Q$  – поперечна сила в небезпечному перерізі,

$S$  – статичний момент відсіченої частини поперечного перерізу відносно осі  $x$ ,

$B$  – ширина перерізу в точці,

$I_x$  – момент інерції відносно осі  $x$ .

$$\tau_1 = \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot 0}{0.115 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0$$

$$\tau_2 = \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{b \cdot t}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right)}{0.115 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{0.115 \cdot 0.0095}{2} \cdot \left( \frac{0.24}{2} - \frac{0.0095}{2} \right) \right)}{0.115 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0.96 \text{ МПа}$$

$$\tau_{2'} = \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{b \cdot t}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right)}{0.0056 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{0.115 \cdot 0.0095}{2} \cdot \left( \frac{0.24}{2} - \frac{0.0095}{2} \right) \right)}{0.0056 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 19.77 \text{ МПа}$$

$$\tau_3 = \frac{60.85 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{0.0056 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 51.5 \text{ МПа}$$

$$\tau_{4'} = \tau_{2'} = 19.77 \text{ МПа}$$

$$\tau_4 = \tau_2 = 0.96 \text{ МПа}$$

$$\tau_5 = \tau_1 = 0$$

Згідно розрахунків побудуємо епюри  $\sigma$  і  $\tau$  (рисунок 10.13).

З епюр  $\sigma$  і  $\tau$  видно, що небезпечним перерізом для двотаврового перерізу буде точка переходу від полиці до стінки де діють напруження  $\sigma=124.29$  МПа та  $\tau=19.77$  МПа. В цій точці визначимо еквівалентне напруження згідно з IV теорією міцності.

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{124.29^2 + 3 \cdot 19.77^2} = 128.29 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Згідно з розрахунків двотавр №24 задовольняє усім умовам міцності, за нормальними, дотичними і головними напруженнями.

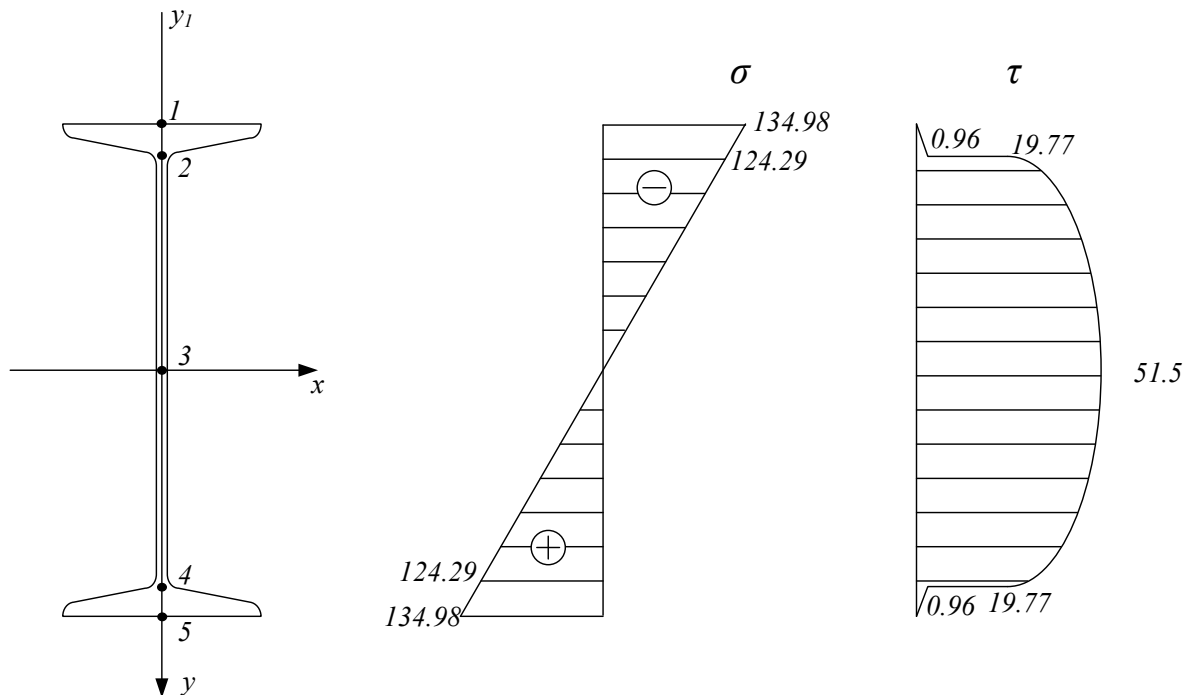


Рисунок 10.13 – Епюри  $\sigma$  і  $\tau$  для двотаврового перерізу.

## 11 Розрахунок балки на пружній (вінклерівській) основі

План розв'язання задачі

1 Побудувати епюри поперечних сил, згинальних моментів та згинів.

2 Побудувати епюру напружень основи.

3 Скласти вихідну інформацію для розрахунку балки на ПЕОМ, зробити аналіз "ручного" та машинного розрахунків.

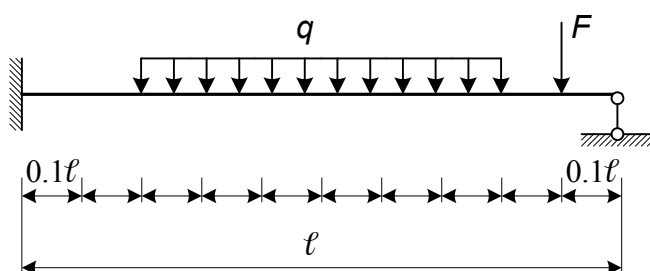


Рисунок 11.1 – Розрахункова схема

Дано:

$$F = 35 \text{ кН}; q = 25 \text{ кН/м},$$

$$l = 10 \text{ м}; k = 3.2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^3,$$

$$b = 1.1 \text{ м},$$

$$E = 3.25 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2; I = 0.125 \text{ м}^4$$

(рисунок 11.1).

### Розв'язання

11.1 Для визначення прогину по середині прольоту балки запишемо рівняння прогину

$$y_5 = y_0 \cdot Y_{1(s \cdot 5)} + \frac{\varphi_0}{s} \cdot Y_{2(s \cdot 5)} - \frac{M_0}{s^2 \cdot E \cdot I} \cdot Y_{3(s \cdot 5)} - \frac{Q_0}{s^3 \cdot E \cdot I} \cdot Y_{4(s \cdot 5)} - \frac{q}{4 \cdot s^4 \cdot E \cdot I} \cdot (Y_{1(s \cdot (5-2))} - 1),$$

де  $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0$  – початкові параметри, які визначаються з умов закріплення балки, ті початкові параметри, які не дорівнюють нулю, визначаються за формулами, поданими в додатку А;

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  – функції Крилова, визначаються за додатком Б.

11.2 Визначимо характеристичне число за формулою

$$s = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4 \cdot E \cdot I}},$$
$$s = \sqrt[4]{\frac{3.2 \cdot 10^7 \cdot 1.1}{4 \cdot 3.25 \cdot 10^{10} \cdot 0.125}} = 0.21 \text{ м}^{-1}.$$

11.3 Визначимо початкові параметри. В нашій розрахунковій схемі початкові параметри  $y_0$  та  $\varphi_0$  дорівнюють нулю,  $M_0$  та  $Q_0$  визначимо з додатка А (схеми 13 та 14).

- визначимо початкові параметри  $M_0$  та  $Q_0$  від дії розподіленого навантаження (схема 13 додатка А, а також див. рисунок 11.2) за такими формулами:

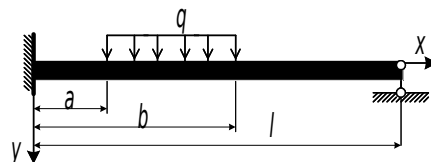


Рисунок 11.2 – Визначення початкових параметрів  $M_0$  та  $Q_0$  від дії розподіленого навантаження

$$Q_0 = -\frac{q}{4s} \cdot \frac{Y_{1(s\ell)} (Y_{1(s(\ell-a))} - Y_{1(s(\ell-b))}) + 4Y_{3(s\ell)} (Y_{3(s(\ell-a))} - Y_{3(s(\ell-b))})}{Y_{1(s\ell)} Y_{4(s\ell)} - Y_{2(s\ell)} Y_{3(s\ell)}},$$

$$M_0 = \frac{q}{4s^2} \cdot \frac{Y_{2(s\ell)} (Y_{1(s(\ell-a))} - Y_{1(s(\ell-b))}) + 4Y_{4(s\ell)} (Y_{3(s(\ell-a))} - Y_{3(s(\ell-b))})}{Y_{1(s\ell)} Y_{4(s\ell)} - Y_{2(s\ell)} Y_{3(s\ell)}}.$$

Спочатку обчислимо функції Крилова:

$$s \cdot l = 0.21 \cdot 10 = 2.1,$$

$$Y_{1(sl)} = -2.09223,$$

$$Y_{2(sl)} = 0.7735,$$

$$Y_{3(sl)} = 1.73585,$$

$$Y_{4(sl)} = 1.40195,$$

$$s \cdot (l - a) = 0.21 \cdot (10 - 2) = 1.68,$$

$$Y_{1(s(l-a))} = -0.30254,$$

$$Y_{3(s(l-a))} = 1.28708,$$

$$s \cdot (l - b) = 0.21 \cdot (10 - 8) = 0.42,$$

$$Y_{1(s(l-b))} = 0.99481,$$

$$Y_{3(s(l-b))} = 0.08817,$$

$$Q_0 = -\frac{25 \cdot 10^3}{4 \cdot 0.21} \cdot \frac{-2.09223 \cdot (-0.30254 - 0.99481) + 4 \cdot 1.73585 \cdot (1.28708 - 0.08817)}{-2.09223 \cdot 1.40195 - 0.7735 \cdot 1.73585} =$$

$$= -33.38 \text{ кН}$$

$$M_0 = \frac{25}{4 \cdot 0.21} \cdot \frac{0.7735 \cdot (-0.30254 - 0.99481) + 4 \cdot 1.40195 \cdot (1.28708 - 0.08817)}{-2.09223 \cdot 1.40195 - 0.7735 \cdot 1.73585} =$$

$$= -39.81 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

- визначимо початкові параметри  $M_0$  та  $Q_0$  від дії зосередженої сили (схема 14 додатка А, а також див. рисунок 11.3) за такими формулами:

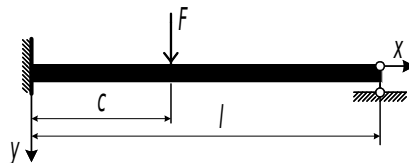


Рисунок 11.3 – Визначення початкових параметрів  $M_0$  та  $Q_0$  від дії зосередженої сили

$$Q_0 = F \cdot \frac{Y_{1(s\ell)} Y_{4(s(\ell-c))} - Y_{3(s\ell)} Y_{2(s(\ell-c))}}{Y_{1(s\ell)} Y_{4(s\ell)} - Y_{2(s\ell)} Y_{3(s\ell)}},$$

$$M_0 = -\frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{2(s\ell)} Y_{4(s(\ell-c))} - Y_{4(s\ell)} Y_{2(s(\ell-c))}}{Y_{1(s\ell)} Y_{4(s\ell)} - Y_{2(s\ell)} Y_{3(s\ell)}}.$$

Обчислимо функції Крилова:

$$s \cdot l = 0.21 \cdot 10 = 2.1,$$

$$Y_{1(sl)} = -2.09223,$$

$$Y_{2(sl)} = 0.7735,$$

$$Y_{3(sl)} = 1.73585,$$

$$Y_{4(sl)} = 1.40195,$$

$$s \cdot (l - c) = 0.21 \cdot (10 - 9) = 0.21,$$

$$Y_{2(s(l-c))} = 0.209986,$$

$$Y_{4(s(l-c))} = 0.001543,$$

$$Q_0 = 35 \cdot 10^3 \cdot \frac{-2.09223 \cdot 0.001543 - 1.73585 \cdot 0.209986}{-2.09223 \cdot 1.40195 - 0.7735 \cdot 1.73585} = 3.01 \text{кН},$$

$$M_0 = -\frac{35 \cdot 10^3}{0.21} \cdot \frac{0.7735 \cdot 0.001543 - 1.40195 \cdot 0.209986}{-2.09223 \cdot 1.40195 - 0.7735 \cdot 1.73585} = -11.43 \text{кН} \cdot \text{м};$$

Обчислимо остаточні значення початкових параметрів  $M_0$  та  $Q_0$  від дії зосередженої сили та розподіленого навантаження, для цього складемо значення початкових параметрів від дії зосередженої сили та розподіленого навантаження відповідно:

$$Q_0 = -33.38 + 3.01 = -30.37 \text{кН},$$

$$M_0 = -39.81 - 11.43 = -51.24 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

11.4 Визначимо прогин по середині прольоту балки:  
- визначимо функції Крилова

$$s \cdot x = 0.21 \cdot 5 = 1.05,$$

$$Y_{3(sx)} = 0.543812,$$



$$\begin{aligned}
Y_{4(sx)} &= 0.191821, \\
s \cdot (x - 2) &= 0.21 \cdot (5 - 2) = 0.63, \\
Y_{1(s(x-2))} &= 0.973755, \\
y(5) &= -\frac{-51.24 \cdot 10^3}{0.21^2 \cdot 3.25 \cdot 10^{10} \cdot 0.125} \cdot 0.543812 - \\
&\quad -\frac{-30.37 \cdot 10^3}{0.21^3 \cdot 3.25 \cdot 10^{10} \cdot 0.125} \cdot 0.191821 - \\
&\quad -\frac{25 \cdot 10^3}{4 \cdot 0.21^4 \cdot 3.25 \cdot 10^{10} \cdot 0.125} \cdot (0.973755 - 1) = 0.3311\text{мм}.
\end{aligned}$$

11.5 Перевіримо отримане значення прогину з розрахунком на ЕОМ.

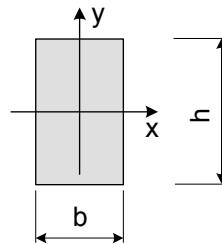
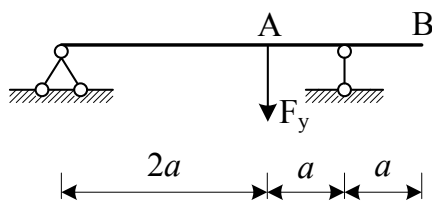
Вихідні дані:

- 1 Характеристики основи та перерізу балки  $k, EI$ .
- 2 Кількість граничних точок  $n$ .
- 3 Координати граничних точок.
- 4 Кількість зосереджених сил  $nf$ .
- 5 Номери точок дії та величини сил.
- 6 Кількість зосереджених моментів  $nm$ .
- 7 Номери точок дії та величини моментів.
- 8 Кількість розподілених навантажень  $ng$ .
- 9 Номери початкових та кінцевих точок і інтенсивність розподілених навантажень.
- 10 Закріплення лівого кінця балки (нема – 1, шарнірне – 2, затиснене – 3).
- 11 Закріплення правого кінця балки.

## 12 Розрахунок на косий згин

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу (рисунок 12.1) навантажена вертикальною силою  $F$  в т. А та горизонтальною силою  $F$  в т. В (обидві точки розміщені на осі балки). В опорах балки виникають як вертикальні, так і горизонтальні реакції, які спрямовані за перпендикуляром до площини креслення. Необхідно:

- 1) побудувати епюри  $M_x$  та  $M_y$  і виявити положення небезпечного перерізу;
- 2) підібрати розміри поперечного перерізу при  $[\sigma]=10$  МПа;
- 3) визначити положення нейтральної лінії у небезпечному перерізі балки та побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії.

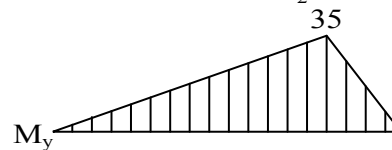
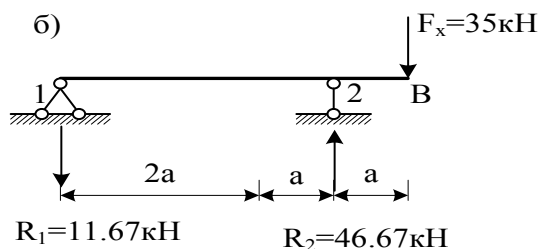
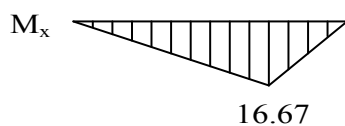
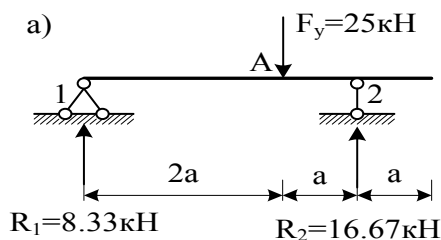


Дано:  
 $F_y = 25$  кН;  
 $F_x = 35$  кН;  
 $a = 1$  м;  
 $[\sigma] = 10$  МПа;  
 $h/b = 1.2$ .

Рисунок 12.1 – Розрахункова схема

### Розв'язання

12.1 Побудуємо епюри згинальних моментів від дії горизонтальної та вертикальної сили  $F$  (рисунок 12.2).



## Рисунок 12.2 – Побудова епюр згинальних моментів

12.2 Визначимо положення небезпечного перерізу (рисунок 12.3). Небезпечним перерізом буде переріз, в якому значення  $M_x$  та  $M_y$  добігають максимальних або близьких до таких величин.

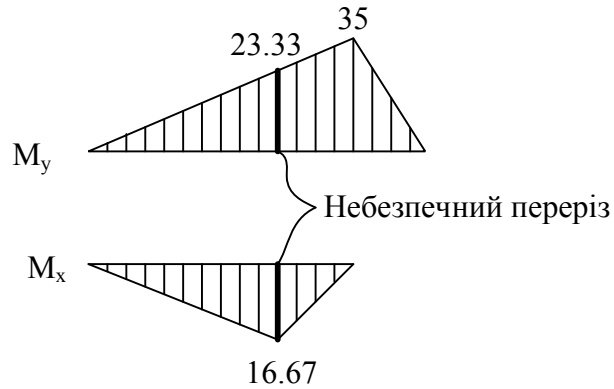


Рисунок 12.3 – Визначення положення небезпечного перерізу

12.3 Виходячи з умови міцності при косому згині підберемо розміри поперечного перерізу прямокутної балки.

Умова міцності при косому згині записується таким чином:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

де  $M_y, M_x$  – згинальні моменти в небезпечному перерізі;

$W_y, W_x$  – моменти опору для перерізу, що розглядається.

В нашому випадку моменти опору для прямокутного перерізу (рисунок 12.1) визначимо за такими формулами:

$$W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6},$$

$$W_x = \frac{h^2 \cdot b}{6}.$$

У зв'язку з тим, що  $h/b=1.2$  і відповідно  $h=1.2 \cdot b$ , то формули для визначення моментів опору набудуть такого вигляду:

$$W_y = \frac{b^2 \cdot 1.2 \cdot b}{6} = \frac{b^3}{5},$$

$$W_x = \frac{h^2 \cdot b}{6} = \frac{(1.2 \cdot b)^2 \cdot b}{6} = \frac{b^3}{4.17}.$$

Для визначення невідомого  $b$  необхідно отримані формули моментів опору підставити до формули умови міцності при косому згині з урахуванням того, що  $[\sigma]=10$  МПа:

$$10 \cdot 10^6 = \frac{23.33 \cdot 10^3}{\frac{b^3}{5}} + \frac{16.67 \cdot 10^3}{\frac{b^3}{4.17}},$$

$$10 \cdot 10^6 = \frac{5 \cdot 23.33 \cdot 10^3}{b^3} + \frac{4.17 \cdot 16.67 \cdot 10^3}{b^3},$$

$$10 \cdot 10^6 = \frac{5 \cdot 23.33 \cdot 10^3 + 4.17 \cdot 16.67 \cdot 10^3}{b^3},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 23.33 \cdot 10^3 + 4.17 \cdot 16.67 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0.265 \text{ м},$$

$$h = 1.2 \cdot 0.265 = 0.318 \text{ м}.$$

12.4 Визначимо положення нейтральної лінії. Положення нейтральної лінії визначається кутом  $\beta$ , який відкладається від осі  $x$ , та визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y},$$

де  $\alpha$  – кут між силовою лінією та віссю  $y$ ;

$I_x, I_y$  – осьові моменти інерції перерізу.

Осьові моменти інерції прямокутного перерізу визначимо за формулами

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12},$$

$$I_x = \frac{h^3 \cdot b}{12},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{\frac{h^3 \cdot b}{12}}{\frac{b^3 \cdot h}{12}} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{h^3 \cdot b}{b^3 \cdot h} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{h^2}{b^2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{23.33 \cdot 10^3}{16.67 \cdot 10^3} \cdot \frac{0.318^2}{0.265^2} = 2.015,$$

$$\beta = 63.61^\circ.$$

12.5 Побудуємо епюру нормального напруження для небезпечного перерізу. Нормальні напруження будемо розраховувати за такою формулою:

$$\sigma_i = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_x}{W_x}.$$

Знак нормальних напружень залежить від знаків згинальних моментів (рисунок 12.4). Згинальні моменти додатні з боку розтягнутих волокон. Згідно за цим правилом, на рисунку 12.4 першим показаний знак нормальних напружень від дії  $M_x$ , а другим – від дії  $M_y$ .

Обчислимо значення моментів опору:

$$W_y = \frac{0.265^3}{5} = 3.72 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_x = \frac{0.265^3}{4.17} = 4.46 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$\sigma_1 = -\frac{16.67 \cdot 10^3}{4.46 \cdot 10^{-3}} - \frac{23.33 \cdot 10^3}{3.72 \cdot 10^{-3}} = -10 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{16.67 \cdot 10^3}{4.46 \cdot 10^{-3}} - \frac{23.33 \cdot 10^3}{3.72 \cdot 10^{-3}} = -2.53 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{16.67 \cdot 10^3}{4.46 \cdot 10^{-3}} + \frac{23.33 \cdot 10^3}{3.72 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_4 = -\frac{16.67 \cdot 10^3}{4.46 \cdot 10^{-3}} + \frac{23.33 \cdot 10^3}{3.72 \cdot 10^{-3}} = 2.53 \text{ МПа.}$$

За одержаними значеннями нормальних напружень будемо їх епюру (рисунок 12.5).

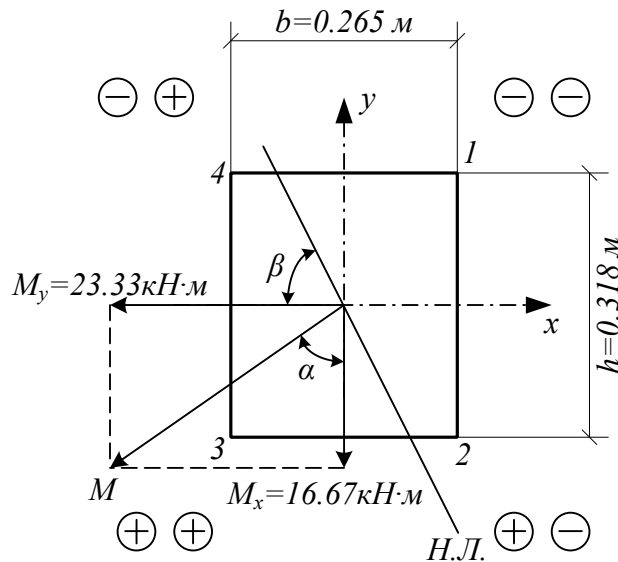


Рисунок 12.4 – Переріз балки

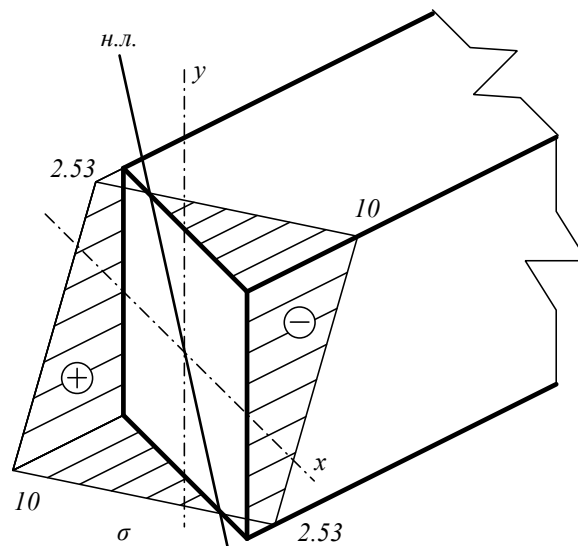


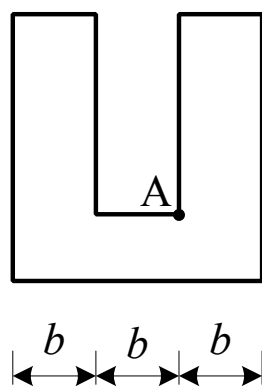
Рисунок 12.5 – Епюра нормальних напружень

### 13 Розрахунок на позацентровий стиск

Бетонний короткий стержень (рисунок 13.1) стискується повздовжньою силою, яка прикладена в т. А.

*Потрібно:*

- 1) обчислити найбільші напруження, що виникають при розтягненні та стиску, виразити значення цих напружень через  $F$ ;
- 2) знайти допустиме навантаження  $F$  при заданих розмірах поперечного перерізу та розрахунковому опорі бетону при стиску  $[\sigma]_c=30$  МПа і при розтягненні  $[\sigma]_p=2$  МПа;
- 3) побудувати ядро перерізу.



Дано:

$$a= 25 \text{ см};$$

$$b= 35 \text{ см};$$

$$[\sigma]_c=30 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_p=2 \text{ МПа}.$$

Рисунок 13.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

13.1 Визначимо центр ваги короткого стержня. Переріз має вісь симетрії  $y_c$ , це і буде головна центральна вісь. Для визначення положення головної центральної осі  $x_c$  потрібно розбити загальну площу перерізу на декілька прямокутників і знайти величину статичного моменту площ відносно довільно вибраної осі  $x$ , яку проведемо по нижній грані перерізу (рисунок 13.2).

Для цього розглянемо дві простих фігури:

- \* фігура I (прямокутник 75x105 см з центром ваги в точці  $C_I$ );

\* фігура II (прямокутник 35x50 см з центром ваги в точці  $C_{II}$ );

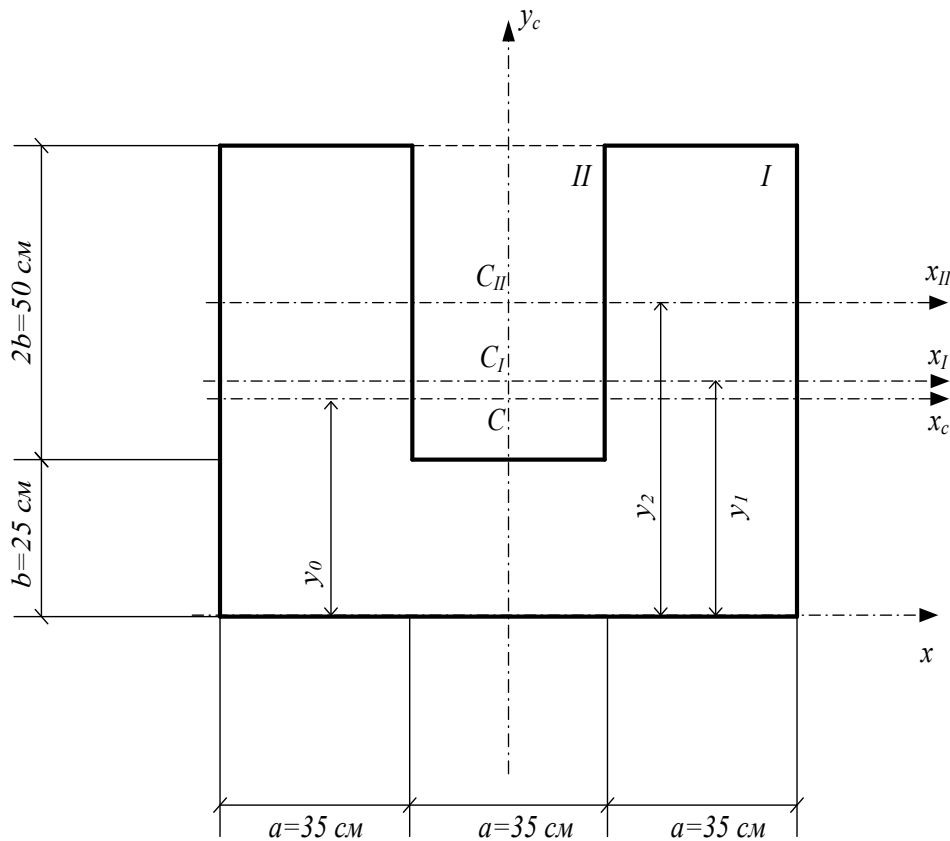


Рисунок 13.2 – Схема перерізу стержня

- визначимо загальну площу перерізу стержня, для цього зі значення площі фігури I віднімемо значення площі фігури II:

$$A = A_I - A_{II},$$

$$A = 0.75 \cdot 1.05 - 0.35 \cdot 0.50 = 0.6125 \text{ м}^2;$$

- визначимо відстані від допоміжної осі  $x$  до осей  $y_I$  та  $y_{II}$

$$y_1 = \frac{3 \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 0.25}{2} = 0.375 \text{ м},$$

$$y_2 = b + \frac{2 \cdot b}{2} = 0.25 + \frac{2 \cdot 0.25}{2} = 0.50 \text{ м};$$

- визначимо величину статичного моменту площ відносно довільно вибраної осі  $x$



$$S_x = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2,$$

$$S_x = (0.75 \cdot 1.05) \cdot 0.375 - (0.35 \cdot 0.50) \cdot 0.50 = 0.2078 \text{ м}^3;$$

- визначимо координату осі  $x_c$  відносно довільно вибраної осі  $x$  за такою формулою:

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{0.2078}{0.6125} = 0.34 \text{ м.}$$

13.2 Визначимо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей  $x_c$  та  $y_c$ :

- визначимо значення осьового моменту інерції відносно осі  $y_c$ , для цього зі значення осьового моменту інерції відносно осі  $y_c$  фігури  $I$  віднімемо значення осьового моменту інерції відносно осі  $y_c$  фігури  $II$ . Значення осьових моментів інерції відносно осі  $y_c$  для кожної фігури розрахуємо за звичайними формулами для прямокутника:

$$I_{y_c} = I_{y_{IC}} - I_{y_{IIC}},$$

$$I_{y_{IC}} = \frac{(3 \cdot b) \cdot (3 \cdot a)^3}{12},$$

$$I_{y_{IIC}} = \frac{b \cdot (2 \cdot a)^3}{12},$$

$$I_{y_c} = \frac{(3 \cdot b) \cdot (3 \cdot a)^3}{12} - \frac{b \cdot (2 \cdot a)^3}{12},$$

$$I_{y_c} = \frac{(3 \cdot 0.25) \cdot (3 \cdot 0.35)^3}{12} - \frac{0.25 \cdot (2 \cdot 0.35)^3}{12} = 0.0652 \text{ м}^4;$$

- визначимо значення осьового моменту інерції відносно осі  $x_c$ , для цього зі значення осьового моменту інерції відносно осі  $x_c$  фігури  $I$  віднімемо значення осьового моменту інерції відносно осі  $x_c$  фігури  $II$ . Значення осьових моментів інерції відносно осі  $x_c$  для кожної фігури розрахуємо за формулами для прямокутника при паралельному переносі осей:

$$\begin{aligned}
I_{x_c} &= I_{x_{IC}} - I_{x_{IIC}}, \\
I_{x_{IC}} &= I_{x_I} + A_I \cdot (y_1 - y_0)^2, \\
I_{x_{IC}} &= \frac{(3 \cdot a) \cdot (3 \cdot b)^3}{12} + A_I \cdot (y_1 - y_0)^2, \\
I_{x_{IC}} &= \frac{(3 \cdot 0.35) \cdot (3 \cdot 0.25)^3}{12} + (1.05 \cdot 0.75) \cdot (0.375 - 0.34)^2 = \\
&= 0.03786 \text{ м}^4, \\
I_{x_{IIC}} &= I_{x_{II}} + A_{II} \cdot (y_2 - y_0)^2, \\
I_{x_{IIC}} &= \frac{(2 \cdot a) \cdot b^3}{12} + A_{II} \cdot (y_2 - y_0)^2, \\
I_{x_{IIC}} &= \frac{(2 \cdot 0.35) \cdot 0.25^3}{12} + (0.35 \cdot 0.50) \cdot (0.50 - 0.34)^2 = 0.01542, \\
I_{x_c} &= 0.03786 - 0.01542 = 0.02244 \text{ м}^4.
\end{aligned}$$

13.3 Визначимо квадрати радіусів інерції перерізу відносно осей  $x_c$  і  $y_c$ :

$$\begin{aligned}
i_x^2 &= \frac{I_{x_c}}{A}, \\
i_x^2 &= \frac{0.02244}{0.6125} = 0.037 \text{ м}^2, \\
i_y^2 &= \frac{I_{y_c}}{A}, \\
i_y^2 &= \frac{0.0652}{0.6125} = 0.106 \text{ м}^2.
\end{aligned}$$

13.4 Визначаємо положення нейтральної лінії за формулами:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_f},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_f},$$

де  $a_x$  – відрізок, який нейтральна лінія відсікає від осі  $x$ ;

$a_y$  – відрізок, який нейтральна лінія відсікає від осі  $y$ ;

$x_f, y_f$  – координати прикладення сили  $F$  відносно центра ваги (рисунок 13.3).

$$a_x = -\frac{0.106}{0.175} = -0.61 \text{ м},$$

$$a_y = -\frac{0.037}{-0.09} = 0.41 \text{ м}.$$

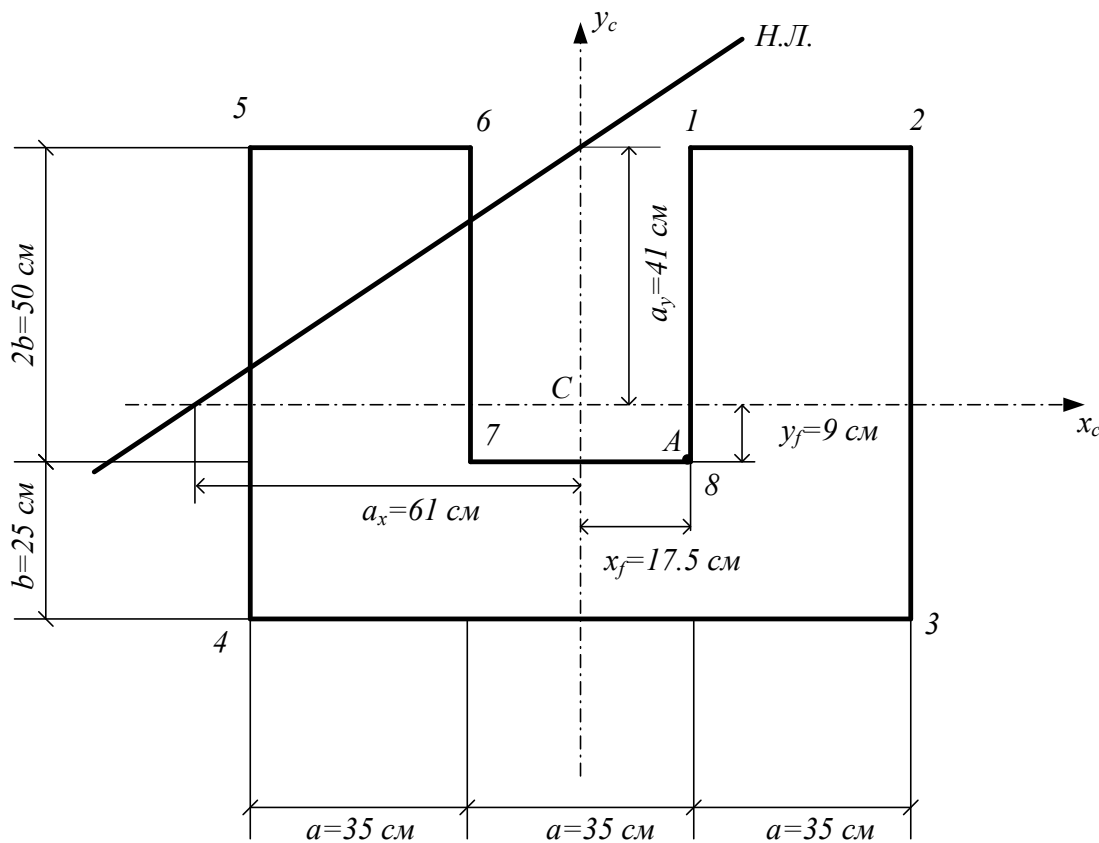


Рисунок 13.3 – Визначення положення нейтральної лінії

### 13.5 Визначаємо значення стискальної сили $F$ .

В точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії, будуть найбільші напруження. У точці 3 будуть виникати найбільші стискальні напруження, а в точці 5 – найбільші розтягувальні напруження. Визначимо, яку силу треба прикласти до стержня,

щоб найбільші стискальні напруження у точці 3 дорівнювали допустимому напруженню при стиску  $[\sigma]_c=30$  МПа. Для цього в умову міцності при позацентровому стиску підставляємо значення координат точки 3 і визначаємо силу  $F$ .

Умова міцності при позацентровому стиску має такий вигляд:

$$\sigma_i = -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{x_f \cdot x_i}{i_y^2} + \frac{y_f \cdot y_i}{i_x^2} \right] \leq [\sigma]_c,$$

де  $x_i, y_i$  – координати точки, в якій визначається напруження відносно центра ваги.

Проведемо розрахунки для точки 3:

$$30 \cdot 10^6 = -\frac{F}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot 0.525}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot (-0.34)}{0.037} \right],$$

$$30 \cdot 10^6 = -\frac{F}{0.6125} \cdot 2.69,$$

$$30 \cdot 10^6 = -4.39 \cdot F,$$

$$F = -\frac{30 \cdot 10^6}{4.39} = -6.83 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Знак «мінус» показує, що сила стискальна.

Далі визначимо, яку силу треба прикласти, щоб максимальне напруження у точці 5 не перевищувало допустимого при розтяганні  $[\sigma]_p=2$  МПа. Для цього підставляємо в умову міцності координати точки 5.

$$2 \cdot 10^6 = -\frac{F}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot (-0.525)}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot 0.41}{0.037} \right],$$

$$30 \cdot 10^6 = -\frac{F}{0.6125} \cdot (-0.86),$$

$$30 \cdot 10^6 = 1.4 \cdot F,$$

$$F = \frac{30 \cdot 10^6}{1.4} = 21.43 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Для подальшого розрахунку приймаємо меншу за модулем величину стискальної сили, тобто  $F=6830 \text{ кН}$ .

13.6 Побудуємо епюру нормальних напружень для перерізу стержня.

Для побудови епюри нормальних напружень визначаємо їх значення у кожній точці перерізу, використавши формулу умови міцності при позацентровому стисканні.

Точка 1:

$$\sigma_1 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot 0.175}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot 0.41}{0.037} \right] =$$

$$= -3.34 \text{ МПа}$$

Точка 2:

$$\sigma_2 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot 0.525}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot 0.41}{0.037} \right] =$$

$$= -9.81 \text{ МПа}$$

Точка 3:

$$\sigma_3 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot 0.525}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot (-0.34)}{0.037} \right] =$$

$$= -30 \text{ МПа}$$

Точка 4:

$$\sigma_4 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot (-0.525)}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot (-0.34)}{0.037} \right] =$$

$$= -10.59 \text{ МПа}$$

Точка 5:

$$\sigma_5 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot (-0.525)}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot 0.41}{0.037} \right] =$$

$$= 9.59 \text{ МПа}$$

Точка 6:

$$\sigma_6 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot (-0.175)}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot 0.41}{0.037} \right] =$$

$$= 3.12 \text{ МПа}$$

Точка 7:

$$\sigma_7 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot (-0.175)}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot (-0.09)}{0.037} \right] =$$

$$= -10.37 \text{ МПа}$$

Точка 8:

$$\sigma_8 = -\frac{6.83 \cdot 10^6}{0.6125} \cdot \left[ 1 + \frac{0.175 \cdot 0.175}{0.106} + \frac{-0.09 \cdot (-0.09)}{0.037} \right] =$$

$$= -16.84 \text{ МПа} .$$

За одержаними значеннями напружень в точках будемо епюру нормальних напружень для перерізу в аксонометрії (рисунок 13.4).

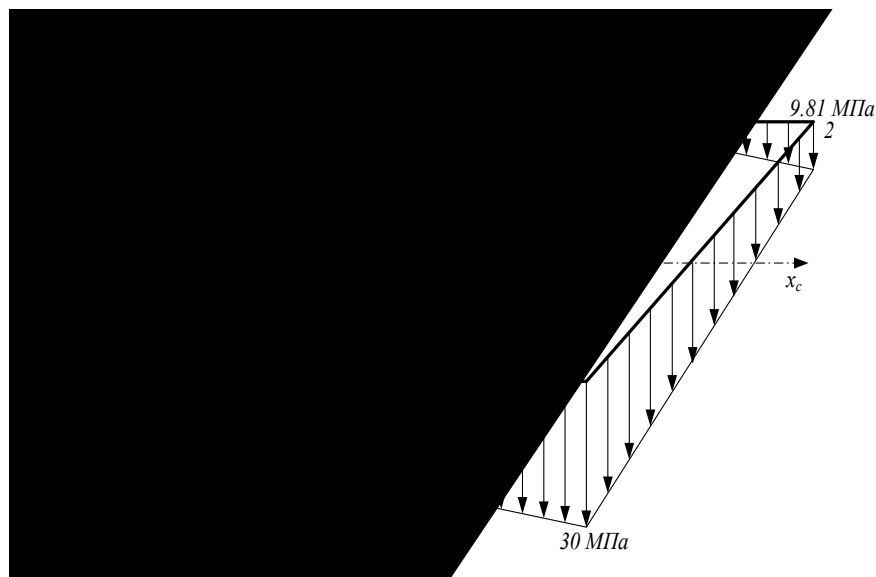


Рисунок 13.4 – Епюра нормальних напружень

### 13.7 Побудуємо ядро перерізу.

Для побудови ядра перерізу будемо проводити нейтральні лінії, які є дотичними до перерізу. Визначимо відрізки, які відсікає нейтральна лінія на головних центральних осях і за формулами:

$$x_f = -\frac{i_y^2}{a_x},$$

$$y_f = -\frac{i_x^2}{a_y},$$

визначимо координати ядра перерізу (рисунок 13.5).

Для положення нейтральної лінії *I-I*:  $a_x=0.525$  м,  $a_y=\infty$ , координати ядра перерізу мають такі значення:

$$x_f = -\frac{0.106}{0.525} = -0.2 \text{ м},$$
$$y_f = -\frac{0.037}{\infty} = 0.$$

За координатами знаходимо точку 1 ядра перерізу (рисунок 13.5).

Для положення нейтральної лінії *II-II*:  $a_x=\infty$ ,  $a_y= - 0.34$  м, координати ядра перерізу мають такі значення:

$$x_f = -\frac{0.106}{\infty} = 0,$$
$$y_f = -\frac{0.037}{-0.34} = 0.1 \text{ м}.$$

За координатами знаходимо точку 2 ядра перерізу (рисунок 13.5).

Для положення нейтральної лінії *III-III*:  $a_x= - 0.525$  м,  $a_y=\infty$ , координати ядра перерізу мають такі значення:

$$x_f = -\frac{0.106}{-0.525} = 0.2 \text{ м},$$
$$y_f = -\frac{0.037}{\infty} = 0.$$

За координатами знаходимо точку 3 ядра перерізу (рисунок 13.5).

Для положення нейтральної лінії *IV-IV*:  $a_x=\infty$ ,  $a_y=0.34$  м, координати ядра перерізу мають такі значення:

$$x_f = -\frac{0.106}{\infty} = 0,$$

$$y_f = -\frac{0.037}{0.34} = -0.1 \text{ м.}$$

За координатами знаходимо точку 4 ядра перерізу (рисунок 13.5).

З'єднаємо отримані точки прямими лініями.

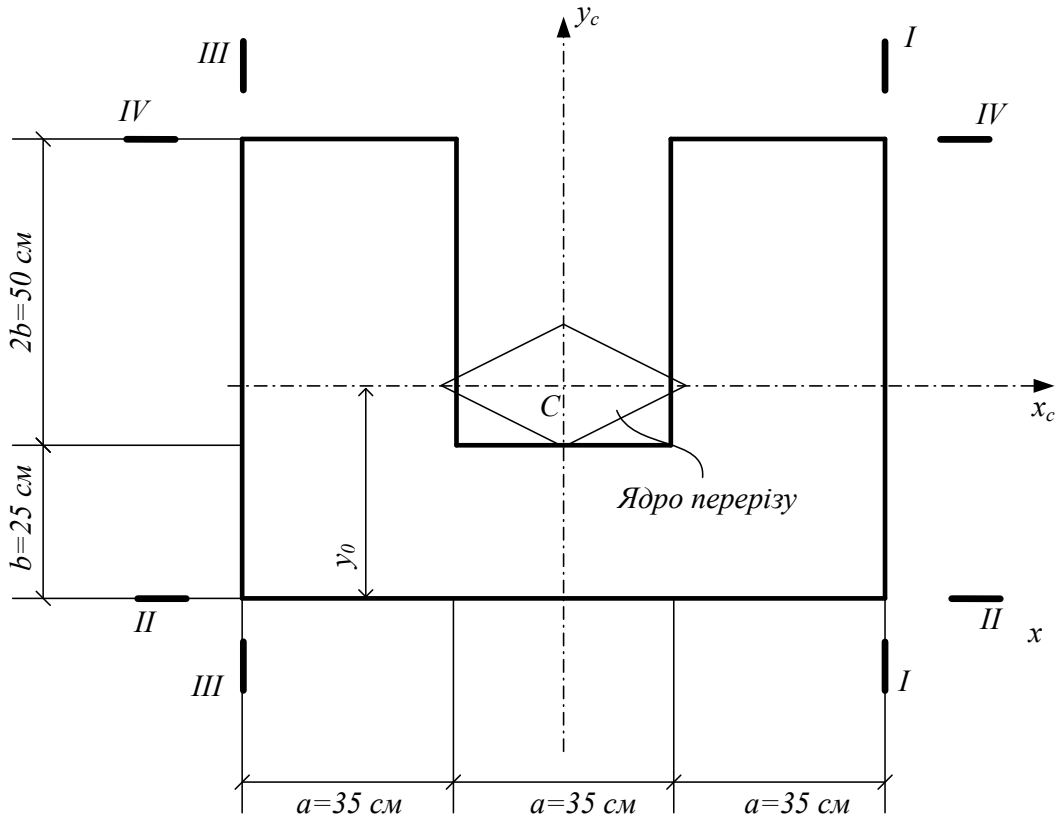


Рисунок 13.5 – Побудова ядра перерізу

## 14 Розрахунок на згин із крученням

На рисунку 14.1 зображена в аксонометрії вісь ламаного стержня кільцевого поперечного перерізу, яка розташована в горизонтальній площині і має прямі кути в т. С і В. На стержень діє вертикальне навантаження.

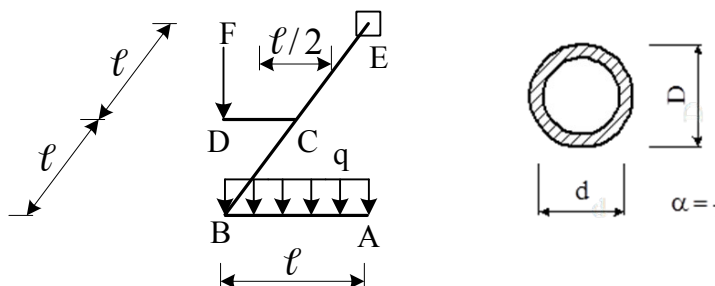
*Потрібно:*

1) побудувати окремо (в аксонометрії) епюри згинальних та крутних моментів;



2) знайти небезпечний переріз і визначити для нього значення розрахункового моменту, користуючись четвертою теорією міцності;

3) визначити зовнішній та внутрішній діаметри стержня при допустимому напруженні  $[\sigma]=80$  МПа.



Дано:  
 $l=1.5$  м;  
 $F=10$  кН;  
 $q=5$  кН/м;  
 $\alpha=0.5$ ;  
 $[\sigma]=80$  МПа.

Рисунок 14.1 – Розрахункова схема

### Розв'язання

14.1 Для ламаного стержня кільцевого поперечного перерізу (рисунок 14.1) побудуємо епюри згинальних і крутних моментів. Для побудови епюр зручно розглянути стержень з консолі. У цьому випадку не треба визначати реакції опор.

- розглянемо ділянку А-В, як консоль навантажену розподільним навантаженням, та побудуємо епюри згинальних моментів та поперечної сили (рисунок 14.2, а);

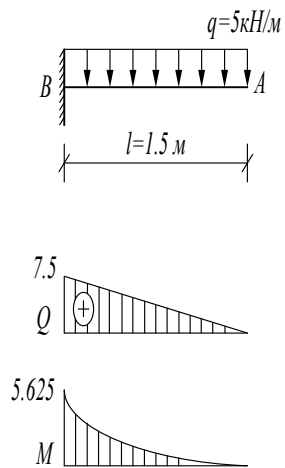
- розглянемо ділянку D-C, як консоль навантажену зосередженою силою  $F$ , та побудуємо епюри згинальних моментів та поперечної сили (рисунок 14.2, б);

- розглянемо ділянку В-С, як консоль навантажену зосередженою силою  $Q=q \cdot l$  та крутним моментом  $M_{кр} = q \cdot l \cdot l/2$  від дії розподільного навантаження, та побудуємо епюри згинальних моментів, крутних моментів та поперечної сили (рисунок 14.2, в);

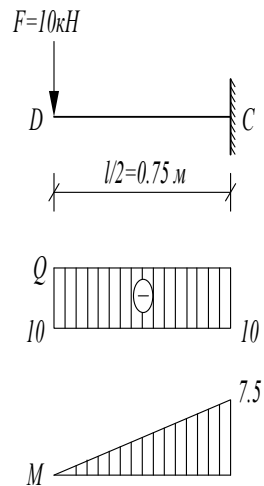
- розглянемо ділянку С-Е, як консоль навантажену зосередженими силами  $Q=q \cdot l$  та  $F$  крутними моментами  $M_{кр} = q \cdot l \cdot l/2$  від дії розподільного навантаження, та  $M_{кр2} = F \cdot l/2$ , побудуємо епюри згинальних моментів, крутних моментів та поперечної сили (рисунок 14.2, г).

Покажемо епюри внутрішніх зусиль в аксонометрії (рисунок 14.3).

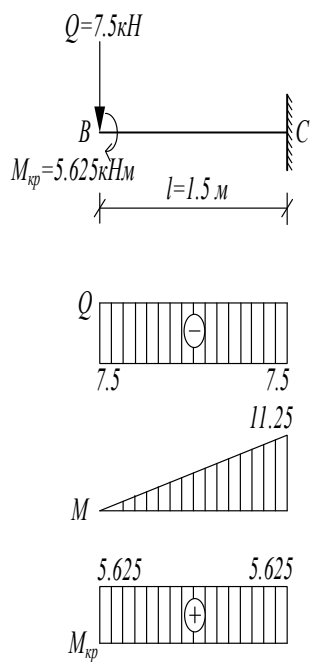
а)



б)



в)



г)

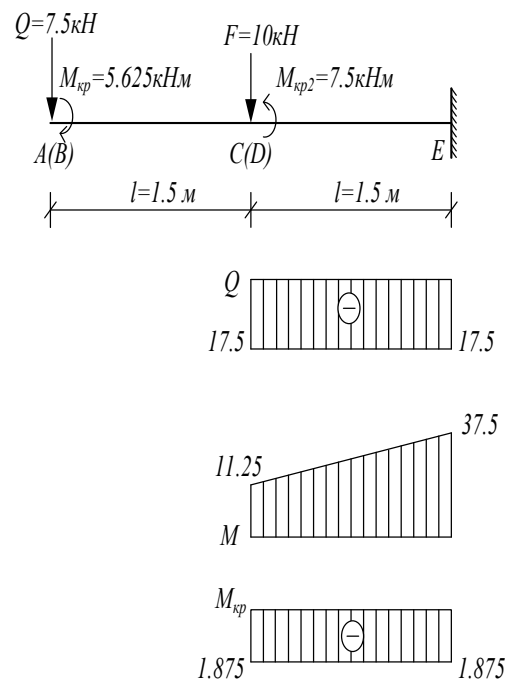


Рисунок 14.2 – Ділянки стержнів з епюрами внутрішніх зусиль

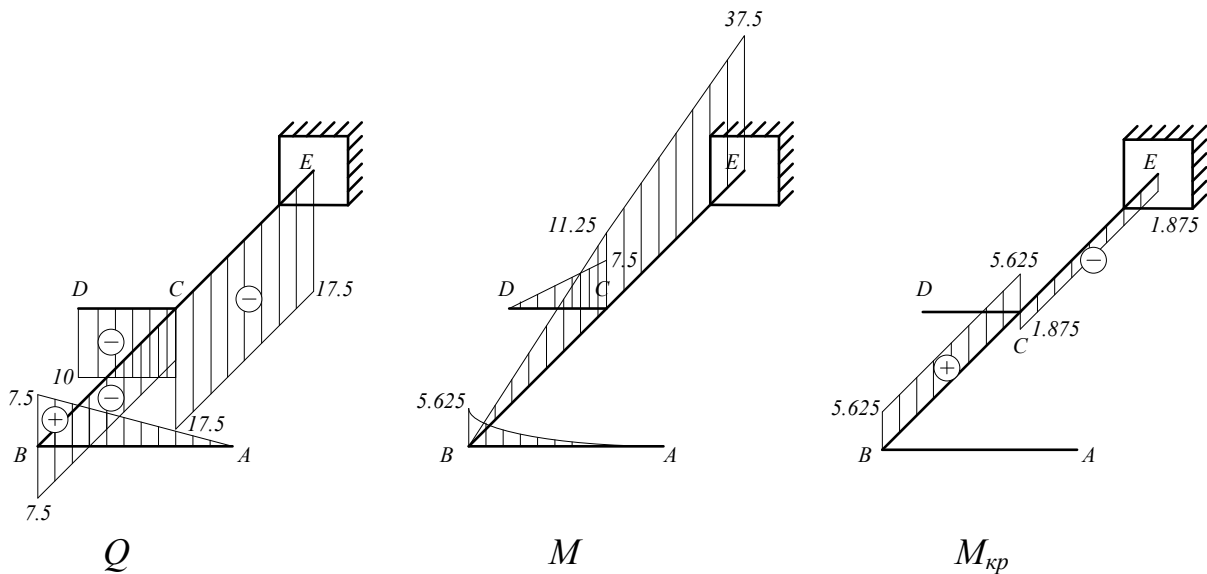


Рисунок 14.3 – Епюри поперечних сил, згинальних та крутних моментів

14.2 Визначимо небезпечний переріз та підберемо діаметр ламаного стержня. В нашому випадку треба розглянути два небезпечних перерізи:

- точка С на ділянці В-С ( $M=11.25$  кНм,  $M_{кр}=5.625$  кНм);
- точка Е на ділянці С-Е ( $M=37.5$  кНм,  $M_{кр}=1.875$  кНм)

Використаємо четверту (енергетичну) теорію міцності та підберемо діаметр ламаного стержня.

Проведемо розрахунки для точки С

- умова міцності при згині з крученням має такий вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{пр}}{W} \leq [\sigma],$$

де  $M_{пр}$  – приведений момент, який визначається відповідно до обраної теорії міцності;

$W$  – момент опору перерізу стержня.

$$M_{пр}^{IV} = \sqrt{M^2 + 0.75 \cdot M_{кр}^2},$$

$$M_{пр}^{IV} = \sqrt{11.25^2 + 0.75 \cdot 5.625^2} = 12.26 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

визначимо момент опору перерізу з умови міцності стержня:

$$W = \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}$$

· визначимо момент опору для кільцевого перерізу:

$$W = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4);$$

· прирівнявши значення моментів опору, визначимо зовнішній діаметр стержня:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4),$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{пр}}}{\pi \cdot [\sigma] \cdot (1 - \alpha^4)}},$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 12.26 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0.5^4)}} = 0.12 \text{ м};$$

· визначимо внутрішній діаметр стержня:

$$d = D \cdot \alpha,$$

$$d = 0.12 \cdot 0.5 = 0.06 \text{ м}.$$

Проведемо розрахунки для точки E:

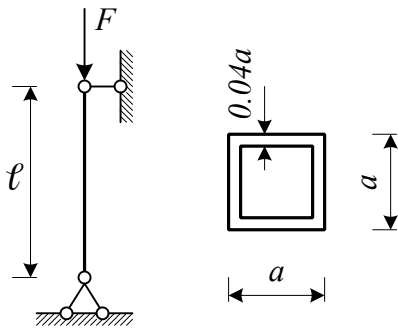
$$M_{\text{пр}}^{IV} = \sqrt{37.5^2 + 0.75 \cdot 1.875^2} = 37.53 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 37.53 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0.5^4)}} = 0.17 \text{ м},$$

$$d = 0.17 \cdot 0.5 = 0.086 \text{ м}.$$

## 15 Розрахунок на стійкість

Для сталюого стержня (рисунок 15.1) підібрати розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні на простий стиск  $[\sigma]=160$  МПа.



Дано:

$$l=2.2 \text{ м;}$$

$$F=120 \text{ кН.}$$

$$[\sigma]=160 \text{ МПа}$$

Рисунок 15.1 – Розрахункова схема

*Розв'язання*

15.1 Знайдемо геометричні характеристики перерізу:

- площа перерізу

$$A = a^2 - (0.92 \cdot a)^2 = 0.1536 \cdot a^2;$$

- мінімальний момент інерції

$$I_{min} = \frac{a \cdot a^3}{12} - \frac{(0.92 \cdot a) \cdot (0.92 \cdot a)^3}{12} = 0.02363 \cdot a^4;$$

- мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{0.02363 \cdot a^4}{0.1536 \cdot a^2}} = 0.39 \cdot a.$$

15.2 Визначимо площу перерізу з умови стійкості. Умова стійкості має вигляд

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma],$$

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт поздовжнього згину, який залежить від матеріалу та гнучкості стержня, визначається за таблицею 15.1.

Таблиця 15.1

λГнучкість	Сталь марок			Чавун марок		Д16ГДюралюміній	Дерево
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2. 15ГС. 10Г2С. 10Г2СД. 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48		
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
10	0.99	0.98	0.98	0.97	0.95	0.999	0.99
20	0.97	0.96	0.95	0.91	0.87	0.998	0.97
30	0.95	0.93	0.92	0.81	0.75	0.835	0.93
40	0.92	0.90	0.89	0.69	0.60	0.700	0.87
50	0.89	0.85	0.84	0.57	0.43	0.568	0.80
60	0.86	0.80	0.78	0.44	0.32	0.455	0.71
70	0.81	0.74	0.71	0.34	0.23	0.353	0.61
80	0.75	0.67	0.63	0.26	0.18	0.269	0.49
90	0.69	0.59	0.54	0.20	0.14	0.212	0.38
100	0.60	0.50	0.46	0.16	0.12	0.172	0.31
110	0.52	0.43	0.39			0.142	0.25
120	0.45	0.37	0.33			0.119	0.22
130	0.40	0.32	0.29			0.101	0.18
140	0.36	0.28	0.25			0.087	0.16
150	0.32	0.25	0.23			0.076	0.14
160	0.29	0.23	0.21				0.12
170	0.26	0.21	0.19				0.11
180	0.23	0.19	0.17				0.10
190	0.21	0.17	0.15				0.09
200	0.19	0.15	0.13				0.08
210	0.17	0.14	0.12				
220	0.16	0.13	0.11				

15.3 Прирівняємо значення площин та визначимо розмір  $a$ :

$$0.1536 \cdot a^2 = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]},$$
$$a = \sqrt{\frac{F}{\varphi \cdot [\sigma] \cdot 0.1536}}$$

У даній формулі невідомими є  $\varphi$  та  $a$ . Для розв'язання поставленої задачі застосовуємо метод послідовних наближень.

**1 наближення:**

- задамо значення  $\varphi_1=0.5$ ;
- розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.099 \text{ м};$$

- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.099 = 0.03861 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l \cdot \mu}{i_{min}},$$

де  $\mu$  – коефіцієнт приведеної довжини стержня, який визначається з умов закріплення стержня, в нашому випадку  $\mu=1$ .

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.03861} = 56.98;$$

- за таблицю 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{lp}=0.84$ .

Знайдене значення  $\varphi$  не дорівнює прийнятому в першому наближенні.

**2 наближення.** У другому наближенні приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1p}}{2} = \frac{0.5 + 0.84}{2} = 0.67;$$

. розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.67 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.085 \text{ м};$$

. розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.085 = 0.03315 \text{ м};$$

. визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.03315} = 66.36;$$

. за таблицю 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{2p}=0.79$ .

**3 наближення**

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2p}}{2} = \frac{0.67 + 0.79}{2} = 0.73;$$

. розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.73 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.081 \text{ м};$$



- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.081 = 0.03159 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.03159} = 69.64;$$

- за таблицею 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{зр}=0.783$ .

#### ***4 наближення***

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_{зр}}{2} = \frac{0.783 + 0.73}{2} = 0.756;$$

- розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.756 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.08 \text{ м};$$

- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.08 = 0.0312 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.0312} = 70.51;$$

- за таблицею 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{4p}=0.78$ .

### **5 наближення**

$$\varphi_5 = \frac{\varphi_4 + \varphi_{4p}}{2} = \frac{0.756 + 0.78}{2} = 0.768;$$

- розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.768 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.0797 \text{ м};$$

- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.0797 = 0.031 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.031} = 70.96;$$

- за таблицею 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{5p}=0.778$ .

### **6 наближення**

$$\varphi_6 = \frac{\varphi_5 + \varphi_{5p}}{2} = \frac{0.768 + 0.778}{2} = 0.773;$$

- розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.773 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.0794 \text{ м};$$

- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.0794 = 0.0309 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.0309} = 71.197;$$

- за таблицею 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{6p}=0.777$ .

### **7 наближення**

$$\varphi_7 = \frac{\varphi_6 + \varphi_{6p}}{2} = \frac{0.773 + 0.777}{2} = 0.775;$$

- розрахуємо розмір  $a$

$$a = \sqrt{\frac{120 \cdot 10^3}{0.775 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0.1536}} = 0.0794 \text{ м};$$

- розрахуємо мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = 0.39 \cdot 0.0794 = 0.0309 \text{ м};$$

- визначаємо розрахункову гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{2.2 \cdot 1}{0.0309} = 71.197;$$

- за таблицею 15.1 знаходимо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_{7p}=0.777$ .

Оскільки прийняте значення  $\varphi$  збігається з розрахунковим з наперед заданою точністю (до 5 %), то розрахунок вважається закінченим, і розмір підібраним  $a=0.0794$  м.

15.4 Визначаємо критичну силу. Якщо розрахункова гнучкість стержня менша за граничну, то для визначення критичної сили використовується формула Ясинського. Для сталі Ст.3 гранична гнучкість дорівнює 100, а розрахункова гнучкість в нашому випадку 71.197.

$$F_{кр} = (a - \lambda \cdot b) \cdot A,$$

де  $a$ ,  $b$  – дослідні коефіцієнти (для Ст3  $a=310$  МПа,  $b=1.14$  МПа).

$$F_{кр} = (310 \cdot 10^6 - 71.197 \cdot 1.14 \cdot 10^6) \cdot 0.1536 \cdot 0.0794^2 = \\ = 221.6 \text{ кН} .$$

15.5 Визначимо коефіцієнт запасу на стійкість

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{221.6}{120} = 1.85.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Методичні вказівки

1 Чихладзе, Е.Д. Побудова епюр внутрішніх сил в рамах з використанням ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 48 с.

2 Чихладзе, Е.Д. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів з контролем рішення на комп'ютері [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева та ін.. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. – 48 с.

3 Чихладзе, Е.Д. Розрахунок на міцність і визначення переміщень в балках при згині з контролем рішення на ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, О.М. Гайдук. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 76 с.

4 Чихладзе, Е.Д. та ін. Розрахунки на складний опір та стійкість із застосуванням ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева. – Харків: ХарДАЗТ, 2001. – 52 с.

5 Чихладзе, Е.Д. Вибрані задачі з опору матеріалів з відповідями і розв'язаннями [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов. – Харків: ХарДАЗТ, 2003. – 194 с.

6 Кітов, Ю.П. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів [Текст] / Ю.П. Кітов, М.А. Веревічева, С.М. Чуменко. – Харків: ХарДАЗТ, 2002. – 62 с.

7 Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др.; под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1974. – 672 с.

8 Писаренко, Г.С. Опір матеріалів [Текст] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квитка, Є.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.

9 Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1965. – 856 с.

10 Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.

11 Чихладзе, Е.Д. Опір матеріалів [Текст]: підручник / Е.Д. Чихладзе. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 366 с.

12 Чихладзе, Э.Д. Сопротивление материалов [Текст]: учебник / Э.Д. Чихладзе. – Харьков: УкрГАЗТ, 2011. – 366 с.

### ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Значення початкових параметрів

1	2	3
1		$Q(0) = \frac{q Y_{2l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)}) - Y_{4l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)})}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$ $y'(0) = \frac{q}{4s^3 EJ} \times \frac{Y_{2l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
2		$Q(0) = F \frac{Y_{2l} Y_{2(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{Y_{4l} Y_{2(l-c)} - Y_{2l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
3		$Q(0) = -m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{3(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{m}{s EJ} \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$

1	2	3
4		$Q(0) = \frac{q}{s} \cdot \frac{Y_{1l}(Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = \frac{q}{s^2} \cdot \frac{Y_{1l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)}) - Y_{2l}(Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$
5		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l}Y_{1(l-c)} + 4Y_{4l}Y_{2(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{1l}Y_{2(l-c)} - Y_{2l}Y_{1(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$

Продовження таблиці А.1

6		$Q(0) = 4m \cdot s \cdot \frac{Y_{1l}Y_{4(l-d)} - Y_{4l}Y_{1(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = -m \cdot \frac{Y_{1l}Y_{1(l-d)} + 4Y_{2l}Y_{4(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l}Y_{4l}}$
7		$y'(0) = \frac{q}{s^3EJ} \times \frac{Y_{4l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) - Y_{1l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$ $y(0) = \frac{q}{4s^4EJ} \times \frac{Y_{1l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$
8		$y'(0) = -\frac{F}{s^2EJ} \cdot \frac{Y_{1l}Y_{3(l-c)} + 4Y_{4l}Y_{4(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$ $y(0) = -\frac{F}{s^3EJ} \cdot \frac{Y_{1l}Y_{4(l-c)} - Y_{2l}Y_{3(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$
9		$y'(0) = \frac{m}{sEJ} \cdot \frac{Y_{1l}Y_{2(l-d)} + 4Y_{4l}Y_{3(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$ $y(0) = \frac{m}{s^2EJ} \cdot \frac{Y_{1l}Y_{3(l-d)} - Y_{2l}Y_{2(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l}Y_{2l}}$
10		$y'(0) = \frac{q}{4s^3EJ} \times \frac{Y_{3l}(Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{2l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$

	$y(0) = -\frac{q}{4s^4EJ} \times$ $\times \frac{Y_{4l}(Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{3l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$
--	--

Продовження таблиці А.1

1	2	3
1 1		$y'(0) = \frac{F}{4s^2EJ} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{1(l-c)} - Y_{2l}Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{F}{4s^3EJ} \cdot \frac{Y_{4l}Y_{1(l-c)} - Y_{3l}Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$
1 2		$y'(0) = \frac{m}{4sEJ} \cdot \frac{Y_{2l}Y_{1(l-d)} + 4Y_{3l}Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{m}{4s^2EJ} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l}Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$
1 3		$Q(0) = -\frac{q}{4s} \times$ $\times \frac{Y_{1l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}}$ $M(0) = \frac{q}{4s^2} \times$ $\times \frac{Y_{2l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}}$
1 4		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l}Y_{4(l-c)} - Y_{3l}Y_{2(l-c)}}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}},$ $M(0) = -\frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{2l}Y_{4(l-c)} - Y_{4l}Y_{2(l-c)}}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}}$
1 5		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{3l}Y_{1(l-d)} - Y_{1l}Y_{3(l-d)}}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}},$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{2l}Y_{3(l-d)} - Y_{4l}Y_{1(l-d)}}{Y_{1l}Y_{4l} - Y_{2l}Y_{3l}}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3
---	---	---

1 6		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times \frac{Y_{1l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l}(Y_{4(l-a)} - Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l})}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$ $y_0' = \frac{q}{4s^3EJ} \times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)})}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
1 7		$Q(0) = F \frac{Y_{2l}Y_{3(l-c)} - Y_{1l}Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2EJ} \frac{Y_{4l}Y_{3(l-c)} - Y_{3l}Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
1 8		$Q(0) = s \cdot m \cdot \frac{Y_{1l}Y_{3(l-d)} - Y_{2l}Y_{2(l-d)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{m}{sEJ} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{3(l-d)} - Y_{4l}Y_{2(l-d)}}{Y_{2l}Y_{3l} - Y_{1l}Y_{4l}}$
1 9		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times \frac{Y_{2l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l}(Y_{4(l-a)} - Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = -\frac{q}{4s^2} \times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$
2 0		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{3l}Y_{3(l-c)} - Y_{2l}Y_{4(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{3l}Y_{4(l-c)} - Y_{4l}Y_{3(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3
2 1		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l}Y_{3(l-d)} - Y_{3l}Y_{2(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{4l}Y_{2(l-d)} - Y_{3l}Y_{3(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l}Y_{4l}}$



## ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Значення функцій Крилова

$s/x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
0	1.0	0	0	0
0.1	1.0	0.10	0.0050	0.00015
0.2	0.9997	0.20	0.0200	0.00135
0.3	0.9987	0.2999	0.0450	0.00450
0.4	0.9957	0.39965	0.0800	0.0107
0.5	0.9895	0.49895	0.1249	0.0208
0.6	0.9784	0.59745	0.17975	0.0360
0.7	0.9600	0.69440	0.24435	0.0571
0.8	0.9318	0.7891	0.31855	0.08515
0.9	0.8931	0.88035	0.40205	0.1211
1.0	0.8337	0.96675	0.49445	0.1659

$s/x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1.1	0.7568	1.04645	0.59515	0.2203
1.2	0.6561	1.1173	0.70345	0.28515
1.3	0.5272	1.1767	0.81825	0.3612
1.4	0.3656	1.22165	0.9383	0.4490
1.5	0.1664	1.24855	1.06195	0.5490
1.6	-0.0753	1.2535	1.18725	0.66145
1.7	-0.3644	1.2319	1.3118	0.7864
1.8	-0.7060	1.17885	1.4326	0.9237
1.9	-1.1049	1.0888	1.54635	1.0727
2.0	-1.5656	0.95575	1.64895	1.2325
2.1	-2.09223	0.7735	1.73585	1.40195
2.2	-2.6882	0.5351	1.8018	1.57905
2.3	-3.3562	0.23345	1.84075	1.7614
2.4	-4.0976	-0.1386	1.8461	1.94605
2.5	-4.9128	-0.5885	1.81045	2.12925
2.6	-5.8003	-1.1236	1.72555	2.3065
2.7	-6.7565	-1.7509	1.58265	2.47245
2.8	-7.7759	-2.4770	1.3721	2.6208
2.9	-8.8471	-3.3079	1.08375	2.7443
3.0	-9.9669	-4.24845	0.70685	2.8346
3.1	-11.1119	-5.30225	0.2303	2.8823
3.2	-12.2656	-6.47105	-0.3574	2.8769
3.3	-13.4048	-7.7549	-1.0678	2.80675
3.4	-14.5008	-9.15065	-1.9121	2.6589
3.5	-15.5198	-10.65245	-2.9014	2.4195

Продовження таблиці Б.1

$s/x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
3.6	-16.4218	-12.25075	-4.04585	2.0735
3.7	-17.1622	-13.9315	-5.35435	1.60485
3.8	-17.6875	-15.67605	-6.8343	0.9969
3.9	-17.9387	-17.45985	-8.4909	0.2321
4.0	-17.8498	-19.25235	-10.3265	-0.7073
4.1	-17.3472	-21.0160	-12.3404	-1.8392
4.2	-16.3505	-22.70545	-14.52735	-3.1812
4.3	-14.7722	-24.26685	-16.8773	-4.7501
4.4	-12.5180	-25.63725	-19.37425	-6.5615
4.5	-9.4890	-26.74465	-21.9959	-8.6290
4.6	-5.5791	-27.50565	-24.71165	-10.96380
4.7	-0.6812	-27.8274	-27.4823	-13.57323

4.8	5.3164	-27.60515	-30.2589	-16.4604
4.9	12.5239	-26.72385	-32.9814	-19.6232
5.0	21.0504	-25.05645	-35.57745	-23.0525
5.1	30.9997	-22.46605	-37.96185	-26.7317
5.2	42.4661	-18.8057	-40.0350	-30.6346
5.3	55.5317	-13.9201	-41.68255	-34.72455
5.4	70.2637	-7.6440	-42.77265	-38.9324
5.5	86.7044	0.19005	-43.15925	-43.2557
5.6	104.8687	9.75435	-42.67745	-47.5558
5.7	124.7352	21.2199	-41.14535	-51.75625
5.8	146.2478	34.7564	-38.36395	-55.74285
5.9	169.2837	50.5203	-34.1198	-59.38045
6.0	193.6813	68.65775	-28.2116	-62.5106
6.1	219.2004	89.29465	-20.30425	-64.9518
6.2	245.5231	112.5249	-10.2356	-66.4981
6.3	272.2487	138.4120	2.28855	-66.91745
6.4	298.8909	166.9722	17.5362	-65.9486
6.5	324.7861	198.1637	35.77125	-63.21045
6.6	349.2554	231.88005	57.2528	-58.6871
6.7	371.4244	267.9374	82.2255	-51.74295
6.8	390.2947	306.0558	110.9087	-42.11895
6.9	404.7145	347.34985	143.4927	-30.1819
7.0	413.3762	386.80715	180.1191	-13.2842
7.1	414.8263	428.2849	220.87175	6.7296
7.2	407.4216	469.4772	265.76635	31.02805

Продовження таблиці Б.1

$s/x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
7.3	389.3783	509.41565	314.72645	60.0189
7.4	358.7306	546.93425	367.56875	94.1019
7.5	313.3700	580.67095	423.9858	133.6506
7.6	251.0334	609.0402	483.5233	179.00345
7.7	169.3472	630.22945	545.5557	230.4412
7.8	65.8475	642.1835	609.25955	288.16805
7.9	-62.0375	642.58715	673.6057	352.3123
8.0	-216.8647	628.8779	737.31005	422.8713
8.1	-401.1674	598.23435	798.81785	499.7008
8.2	-617.4142	547.5808	856.28775	582.49745
8.3	-867.9091	473.5998	907.5542	670.7544

8.4	-1154.6587	372.78655	950.11575	763.7226
8.5	-1479.3701	241.41355	981.0984	860.3917
8.6	-1843.2880	75.6088	997.25265	959.44835
8.7	-2247.0402	-128.58235	994.93765	1059.2289
8.8	-2690.4845	-375.1167	970.1255	1157.69385
8.9	-3172.6917	-667.9794	818.86635	1252.35605
9.0	-3691.4815	-1010.87995	834.8607	1340.3007
9.1	-4243.5551	-1407.3690	714.40845	1418.0930
9.2	-4824.0587	-1860.5365	551.49275	1481.76105
9.3	-5426.5154	-2372.94855	340.3091	1526.7834
9.4	-6042.3167	-2946.2708	74.8875	1548.0229
9.5	-6660.9594	-3581.47555	-250.99585	1539.7419
9.6	-7269.3664	-4278.16925	-643.4861	1495.5985
9.7	-7851.7063	-5034.4713	-1108.61825	1408.6174
9.8	-8389.5687	-5847.0360	-1652.2517	1271.2663
9.9	-8860.9431	-6710.2069	-2279.7354	1075.3680
10.0	-9240.8733	-7616.1461	-2995.70945	812.3636