ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Методичні вказівки і завдання
до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика” для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання

Харків – 1998

Методичні вказівки призначені для студентів заочників інженерно-технічних спеціальностей. Розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики ХарДАЗТ,

протокол № 3 від 9 листопада 1998 р.

Склали: доценти Давидов Р. М., Храбустовський В. І.

Рецензент професор Ковалішина І.В.

ВСТУП

Методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики (і, зокрема, математичного аналізу) – диференціальному численню функцій однієї змінної і його застосуванням. Вони містять теоретичні питання з програми цього розділу, список учбової літератури, зразки розв'язання задач з розгорнутими поясненнями і завдання контрольної роботи.

Вказівки рекомендовані студентам-заочникам, але можуть бути використані і при вивченні цього розділу студентами стаціонару.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

В зв'язку з невеликим обсягом аудиторних занять (лекційних і практичних) основним джерелом знань для студентів заочної форми навчання є не конспект лекцій, а підручник. Читання підручника рекомендується супроводжувати укладанням свого конспекту, який обов'язково повинен містити відповіді на теоретичні питання, наведені в даних методичних вказівках. Особливу увагу слід звертати на визначення основних понять курсу, а при вивченні теорем – на їхні формулювання, прагнути до чіткого усвідомлення припущень теорем і доводжуваних стверджень.

Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. Корисно для закріплення навиків, крім свого варіанта, виконати завдання ще одного варіанта.

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем. Залік контрольних робіт згідно з учбовою програмою є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики (математичного аналізу). Контрольна робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не заліковується.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

<u>Диференціальне числення функцій однієї змінної</u>

1. Похідна. Її механічний і геометричний змісти. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.
2. Похідні основних елементарних і гіперболічних функцій.
3. Правила диференціювання. Похідна складної функції.
4. Логарифмічне диференціювання та його застосування. Похідна степенево-показникової функції.
5. Похідна оберненої функції і функції, заданої параметрично.

6. Похідна функції, заданої неявно.
7. Диференціал. Геометричний зміст диференціала.
8. Властивості диференціала та його застосування в наближених обчисленнях.
9. Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної.
10. Теорема Лагранжа про скінчений приріст.
11. Правило Лопіталя.
12. Застосування похідних при дослідженні функцій. Ознаки монотонності функції.
13. Екстремуми. Необхідна умова екстремуму.
14. Достатні умови екстремуму. Схема дослідження функції на екстремум.
15. Опуклість графіка функції. Достатні умови опуклості.
16. Точки перегину. Необхідна і достатня ознаки перегину.
17. Асимптоти.
18. Схема дослідження функції та побудова ескізу її графіка.
19. Найбільше й найменше значення функції на відрізку.
20. Вектор-функція скалярного аргументу. Похідна вектор-функції. Рівняння дотичної прямої і нормальної площини до кривої.
21. Кривина плоскої кривої, радіус кривини, еволюта і евольвента.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Приклад 1. Знайти похідні $y'(x)$ і в пунктах **а)**, **б)**, **в)** диференціали dy для заданих функцій:

а) $y = \arcsin\sqrt{x}$; **б)** $y = e^{x^2+4x}\cdot \operatorname{tg} 2x^3$; **в)** $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+1}}$;

г) $y = \left(\sqrt{x}+3\right)^{\operatorname{sh} x}$; **д)** $1\text{-}\cos(xy)=\sin(x+y)$.

Розв'язання: а) За правилом диференціювання складної функції

$$\left[f(u(x))\right]' = f'(u)\cdot u'(x).$$

Тому, $y' = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(x^{1/2}\right)' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

При цьому використовувались наступні формули диференціювання основних елементарних функцій: $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\left(x^a\right)' = a\cdot x^{a-1}$.

Корисно також запам'ятати, що $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Диференціал dy функції $y = f(x)$y=f(x) дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної $dy = f'(x)dx$. Звідки

$$dy = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx.$$

б) Дана функція є добутком двох складних функцій. Похідна добутку обчислюється за формулою $(uv)' = u'v + uv'$, звідки

$$y' = \left(e^{x^2+4x}\cdot \operatorname{tg}\pi x\right)' = \left(e^{x^2+4x}\right)'\cdot \operatorname{tg}\pi x + e^{x^2+4x}\cdot(\operatorname{tg}\pi x)' =$$

$$= e^{x^2+4x}\left(x^2+4x\right)'\operatorname{tg}\pi x + e^{x^2+4x}\cdot\frac{(\pi x)'}{\cos^2\pi x} = e^{x^2+4x}\left((2x+4)\operatorname{tg}\pi x + \frac{\pi}{\cos^2\pi x}\right) =$$

$$= e^{x^2+4x}\left(\frac{(x+2)2\sin\pi x\cos\pi x + \pi}{\cos^2\pi x}\right) = e^{x^2+4x}\left(\frac{(x+2)\sin 2\pi x + \pi}{\cos^2\pi x}\right),$$

$$dy = e^{x^2+4x}\cdot\frac{(x+2)\sin 2\pi x + \pi}{\cos^2\pi x}\,dx.$$

При цьому використовувались наступні формули диференціювання основних елементарних функцій: $\left(e^x\right)' = e^x$, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ і відома формула тригонометрії $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

в) Дана функція є часткою двох складних функцій. Похідна частки обчислюється за формулою $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, звідки

$$\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\right)'\sqrt{x+1} - \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\cdot\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{3x-1}\right)^2}\left(\sqrt{3x-1}\right)'\sqrt{x+1} - \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)'}{x+1} =$$

$$=\frac{\dfrac{1}{1+3x-1}\cdot\dfrac{(3x-1)'}{2\sqrt{3x-1}}\sqrt{x+1}-\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{3x}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}\sqrt{x+1}-\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{x+1-x\sqrt{3x-1}\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{2x(x+1)\sqrt{(x+1)(3x-1)}},$$

$$dy=\frac{x+1-x\sqrt{3x-1}\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{2x(x+1)\sqrt{(x+1)(3x-1)}}dx.$$

При цьому використовувались такі формули диференціювання:

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

г) Для обчислення похідної функції виду $y = u\,(x)^{v(x)}$ (так званої степенево-показникової функції) використовується логарифмічне диференціювання [*)] – спосіб, який полягає в наступному. Прологарифмуємо обидві частини рівності $y=\left(\sqrt{x}+3\right)^{\operatorname{sh} x}$. Отримуємо

$$\ln y=\ln\left(\sqrt{x}+3\right)^{\operatorname{sh} x}=\operatorname{sh} x\cdot\ln\left(\sqrt{x}+3\right).$$

Тепер продиференціювавши ліву і праву частини останньої рівності, враховуючи, що $y=y(x)$, знаходимо

$$\frac{y'}{y}=(\operatorname{sh} x)'\cdot\ln\left(\sqrt{x}+3\right)+\operatorname{sh} x\cdot\left[\ln\left(\sqrt{x}+3\right)\right]'=\operatorname{ch} x\cdot\ln\left(\sqrt{x}+3\right)+$$

$$+\operatorname{sh} x\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)'}{\sqrt{x}+3}=\operatorname{ch} x\cdot\ln\left(\sqrt{x}+3\right)+\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)},$$

звідки, нарешті,

$$y'=y\cdot\left[\operatorname{ch} x\cdot\ \ln\left(\sqrt{x}+3\right)+\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right]=$$

[*)] Зауважимо, що похідну цієї функції можна обчислити також прямим диференціюванням, представивши її в показниковому виді $y=\mathrm{e}^{v\ln u}=\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x\ln\left(\sqrt{x}+3\right)}$.

$$= \left(\sqrt{x}+3\right)^{\operatorname{sh} x}\left[\operatorname{ch} x \cdot \ln\left(\sqrt{x}+3\right) + \frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right].$$

При цьому використовувались формули диференціювання логарифмічної функції $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ і гіперболічного синуса $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

д) Дане рівняння $1\text{-}\cos(xy)=\sin(x+y)$ задає функцію $y=y(x)$ неявно. Щоб знайти похідну, продиференціюємо обидві його частини, пам'ятаючи, що $y=y(x)$ є функція змінної x:

$$[1\text{-}\cos(xy)]' = [\sin(x+y)]' \Rightarrow \sin(xy)\cdot(xy)' = \cos(x+y)\cdot(x+y)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(xy)\cdot(y+xy') = \cos(x+y)\cdot(1+y').$$

Отримане рівняння розв'яжемо відносно похідної y'. Для цього розкриємо дужки і доданки, що містять y', перенесемо в ліву частину, а інші – в праву частину рівняння

$$y'[x\sin(xy) - \cos(x+y)] = \cos(x+y) - y\sin(xy).$$

Звідки, нарешті, знаходимо $\quad y' = \dfrac{\cos(x+y) - y\sin(xy)}{x\sin(xy) - \cos(x+y)}$.

При цьому використовувались формули диференціювання тригонометричних функцій $(\sin x)'=\cos x$, $\quad (\cos x)'=-\cos x$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти рівняння дотичних прямих і нормалей до графіків функцій, а також їхні кривини і радіуси кривини в заданих точках:

а) $y = x^2\, e^{1-x^3}$, $\quad x_0=1$; **б)** $x=\operatorname{th}^2 t$, $\quad y=\operatorname{cth}^2 t$, $\quad t_0=ln2$.

<u>Розв'язання:</u> **а**) Для функції, заданої явним рівнянням $y=f(x)$, рівняння дотичної прямої до графіка в точці x_0, має вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \qquad (1)$$

а рівняння нормалі (прямої, перпендикулярної до дотичної в точці дотику) –

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{або} \quad y'(x_0)\left(y - y_0\right) = -(x - x_0)y', \qquad (2)$$

де $y_0 = y(x_0)$. Кривина k обчислюється за формулою

$$k = \frac{\left|y''(x_0)\right|}{\left[1 + \left(y'(x_0)\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (3)$$

Тому, оскільки $\qquad y(x_0) = f(x_0) = f(1) = 1^2 \cdot e^{1-1^3} = e^0 = 1,$

$$y'(x) = f'(x) = \left(x^2\,\mathrm{e}^{1-x^3}\right)' = \left(x^2\right)'\mathrm{e}^{1-x^3} + x^2\left(\mathrm{e}^{1-x^3}\right)' = 2x\,\mathrm{e}^{1-x^3} +$$

$$+ x^2\,\mathrm{e}^{1-x^3}(1-x^3)' = \mathrm{e}^{1-x^3}\left(2x + x^2(-3x^2)\right) = \mathrm{e}^{1-x^3}\left(2x - 3x^4\right),$$

$$y'(x_0) = y'(1) = \mathrm{e}^{1-1^3}\left(2\cdot 1 - 3\cdot 1^4\right) = \mathrm{e}^0(2-3) = -1,$$

$$y''(x) = f''(x) = \left[\mathrm{e}^{1-x^3}\left(2x-3x^4\right)\right]' =$$

$$= \left(\mathrm{e}^{1-x^3}\right)'\left(2x-3x^4\right) + \mathrm{e}^{1-x^3}\left(2x-3x^4\right)' =$$

$$= \mathrm{e}^{1-x^3}\left(-3x^2\right)\left(2x-3x^4\right) + \mathrm{e}^{1-x^3}\left(2-3\cdot 4x^3\right) = \mathrm{e}^{1-x^3}\left(9x^6 - 18x^3 + 2\right),$$

$$y''(x_0) = y''(1) = \mathrm{e}^{1-1^3}\left(9\cdot 1^6 - 18\cdot 1^3 + 2\right) = \mathrm{e}^0(9-18+2) = -7,$$

то, підставивши ці значення в формули (1) – (3), послідовно знайдемо:

рівняння дотичної $y–1=-1\ (x–1)$ або $x+y–2=0$;

рівняння нормалі $y–1=x–1$ або $x–y=0$;

кривину $k = \dfrac{|-7|}{\left[1+(-1)^2\right]^{3/2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{2}} \approx 2{,}475;$

радіус кривини $R_{\text{кр}} = 1/k \approx 0.404.$

б) Для функції, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

рівняння дотичної і нормалі визначаються за тими ж формулами (1) і (2), де

$$x_0 = x(t_0), \qquad y_0 = y(t_0),$$

$$y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)},$$

(крапкою над знаком функції позначається похідна по параметру t). Кривина також може бути знайдена за формулою (3), але враховуючи, що

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'(x)\right)}{\dot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\dot{x}(t)\right)^3},$$

цю формулу можна переписати так

$$k=\frac{\left|\ddot{y}(t_0)\dot{x}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)\right|}{\left[(\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2\right]^{3/2}}. \tag{4}$$

В нашому випадку $x(t)=\text{th}^2 t,\ y(t)=\text{cth}^2 t,\quad t_0=\ln 2,$

$$x_0=\text{th}^2(\ln 2)=\left(\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}\right)^2=\left(\frac{2-1/2}{2+1/2}\right)^2=\left(\frac{3/2}{5/2}\right)^2=\frac{9}{25},$$

$$y_0=\text{cth}^2(\ln 2)=\text{th}^{-2}(\ln 2)=25/9,$$

$$\dot{x}(t)=\left(\text{th}^2 t\right)'=2\,\text{th}\,t\left(\text{th}\,t\right)'=\frac{2\,\text{th}\,t}{\text{ch}^2 t},\quad \dot{y}(t)=\left(\text{cth}^2 t\right)'=\frac{-2\,\text{cth}\,t}{\text{sh}^2 t},$$

$$y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{-2\,\text{cth}\,t}{\text{sh}^2 t}:\frac{2\,\text{th}\,t}{\text{ch}^2 t}=-\frac{\text{ch}^4 t}{\text{sh}^4 t}=-\text{cth}^4 t,$$

$$y'(x_0)=\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}=-\text{cth}^4(\ln 2)=-\left(\frac{25}{9}\right)^2=-\frac{625}{81}.$$

Таким чином, з формул (1), (2) одержуємо:

рівняння дотичної $\quad y-\frac{25}{9}=-\frac{625}{81}\left(x-\frac{9}{25}\right),$

рівняння нормалі $\quad y-\frac{25}{9}=\frac{81}{625}\left(x-\frac{9}{25}\right).$

Далі знаходимо

$$y''(x)=\frac{\frac{d}{dt}\left(y'(x)\right)}{\dot{x}(t)}=\left(-\text{cth}^4 t\right)':\frac{2\,\text{th}\,t}{\text{ch}^2 t}=-4\,\text{cth}^3 t\left(\text{cth}\,t\right)'\cdot\frac{\text{ch}^2 t}{2\,\text{th}\,t}=$$

$$=-4\,\text{cth}^3 t\cdot\frac{-1}{\text{sh}^2 t}\cdot\frac{\text{ch}^2 t}{2\,\text{th}\,t}=2\,\text{cth}^6 t,$$

$$y''(x_0)=2\,\text{cth}^6 t_0=2\,\text{cth}^6(\ln 2)=2(5/3)^6=\frac{31250}{729}.$$

Значення кривини за формулою (4) і радіус кривини графіка функції в заданій точці t_0: $\quad k=\frac{\left|31250/729\right|}{\left[1+(-625/81)^2\right]^{3/2}}\approx 0{,}091,$

$$R_{\text{кр}}=1/k\approx 10{,}99.$$

Приклад 3. Провести повне дослідження заданої функції і побудувати її графік: $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Розв'язання: Розіб'ємо дослідження функції на декілька етапів.

а) Знайдемо область визначення, інтервали неперервності і точки розриву функції.

Область визначення $D(f)$ $=\{x\colon\ x\neq 1\}=(-\infty;1)\bigcup(1;\infty)$. Дана функція неперервна, як елементарна, в кожній точці області визначення $D(f)$, тобто неперервна в кожному з інтервалів $(-\infty;1)$ і $(1;\infty)$. Оскільки функція невизначена в точці $x=1$, то ця точка є точкою розриву функції.

Тут же також можна виявити деякі властивості функції такі, як: парність, непарність, періодичність і т.п. Досліджувана функція не є ні періодичною, ні парною, ні непарною.

Знайдемо ще точки перетину графіка з осями координат:

точка перетину з віссю Oy: $\quad x=0 \Rightarrow y=0$;

точка перетину з віссю Ox: $\quad y=0 \Rightarrow y=0$, тобто крива проходить через початок координат.

б) Знайдемо асимптоти графіка.

Вертикальні асимптоти можуть бути тільки в граничних точках інтервалів неперервності функції, зокрема в точках розриву. Тому асимптота може бути тільки в точці $x=1$. Обчислимо односторонні границі функції $y(x)$ в цій точці.

Ліва границя:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-0-1}=\frac{1/3}{-0}=-\infty.$$

Права границя:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+0-1}=\frac{1/3}{+0}=+\infty.$$

Таким чином, обидві границі рівні нескінченності, і пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти задаються рівняннями $y=k_\pm x+b_\pm$, де коефіцієнти $k_\pm$ і $b_\pm$ рівні наступним границям *)

$$k_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x^4-x}=\left|\begin{matrix}x^4-x\sim x^4\\ x\to\pm\infty\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

*) Якщо хоча б одна з цих границь не існує, то графік не має похилої асимптоти на відповідному кінці осі.

$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x) - k_{\pm}\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1} = 0.$$

Оскільки $k_- = k_+ = 1$, $b_+ = b_- = 0$, то пряма y=x є похилою асимптотою при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

в) Визначимо, використовуючи похідну, інтервали монотонності функції та її екстремуми.

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3-1}\right)' = \frac{\left(x^4\right)'\left(x^3-1\right) - x^4\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{4x^3\left(x^3-1\right) - x^4\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3-1\right)^2}.$$

Критичні точки, тобто точки, що належать області визначення і, в яких похідна y'=0 або не існує, знайдемо, прирівнюючи нулю її числівник і знаменник:

$$\left[\begin{array}{l} x^6 - 4x^3 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3\left(x^3-4\right) = 0 \\ (x-1)\left(x^2+x+1\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}56 \\ x_3 = 1 \notin D(f) \end{array}.$$

Критичні точки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$ і точка розриву $x_3 = 1$ розбивають числову вісь на чотири інтервали, в кожному з яких похідна зберігає знак, а отже, функція є монотонною. Підставивши довільні значення змінної з цих інтервалів, знаходимо знак похідної на кожному з них, наприклад, $x = -1 \in (-\infty;\, 0)$, $y'(-1)=5/4>0 \Rightarrow y(x)$ монотонно зростає на цьому інтервалі. Результат зручно оформити у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; x_2)$	x_2	$(x_2;\infty)$
y'	+	0	–	Не існує	–	0	+
y	↗	*max* y=0	↘	Не існує	↘	*min* $y\approx-2.11$	↗

Оскільки в точці x=0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то функція має в цій точці максимум. Підставивши x=0 в функцію, знаходимо його значення $y(0) = 0$. В точці $x_2 = \sqrt[3]{4}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, тобто функція має мінімум, його значення $y(x_2) = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3} \approx 2{,}12$.

г) Визначимо, використовуючи похідну другого порядку, інтервали опуклості графіка і точки перегину.

$$y'' = \left(\frac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(x^6 - 4x^3\right)'\left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 - 4x^3\right)\left[\left(x^3 - 1\right)^2\right]'}{\left(x^3 - 1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(6x^5 - 12x^2\right)\left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 - 4x^3\right)2\left(x^3 - 1\right)3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^3 - 1\right)\left[\left(6x^5 - 12x^2\right)\left(x^3 - 1\right) - 6x^2\left(x^6 - 4x^3\right)\right]}{\left(x^3 - 1\right)^4} = \frac{6x^5 + 12x^2}{\left(x^3 - 1\right)^3}.$$

Критичні точки другого роду, тобто точки, що належать області визначення і, в яких похідна другого порядку $y'' = 0$ або не існує, знайдемо, прирівнюючи нулю її числівник і знаменник:

$$\left[\begin{array}{l} 6x^5 + 12x^2 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^2\left(x^3 + 2\right) = 0 \\ \left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}26 \\ x_3 = 1 \notin D(f) \end{array}.$$

Критичні точки другого роду $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{-2}$ і точка розриву $x_3 = 1$ розбивають числову вісь на чотири інтервали, в кожному з яких друга похідна зберігає знак, а отже, графік функції зберігає напрям опуклості. Підставляючи довільні значення змінної x із цих інтервалів в другу похідну, знаходимо її знак в кожному з них, наприклад, $x = -1 \in (x_2; 0),\ y''(-1) = -3/4 < 0 \Rightarrow$ графік функції $y(x)$ на цьому інтервалі опуклий вгору. І тут, як і в попередньому розділі, результат досліджень оформимо у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

x	$(-\infty; x_2)$	x_2	$(x_2; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y''	+	0	–	0	–	не існує.	+
y	$\cup$	точка перегину	$\cap$	перегину нема	$\cap$	не існує.	$\cup$

Оскільки в точці $x_2 = \sqrt[3]{-2} \approx -1.26$ друга похідна змінює знак, то точка графіка з координатами (x_2; $y(x_2)$), де $y(x_2) = -0.84$, є точкою перегину графіка. В точці $x=0$ друга похідна не змінює знак, тому точка графіка з координатами $(0;\ 0)$ не є точкою перегину (як ми знаємо, $x = 0$ є точка максимуму)

д) Використовуючи отримані відомості, будуємо графік функції (рис. 1).

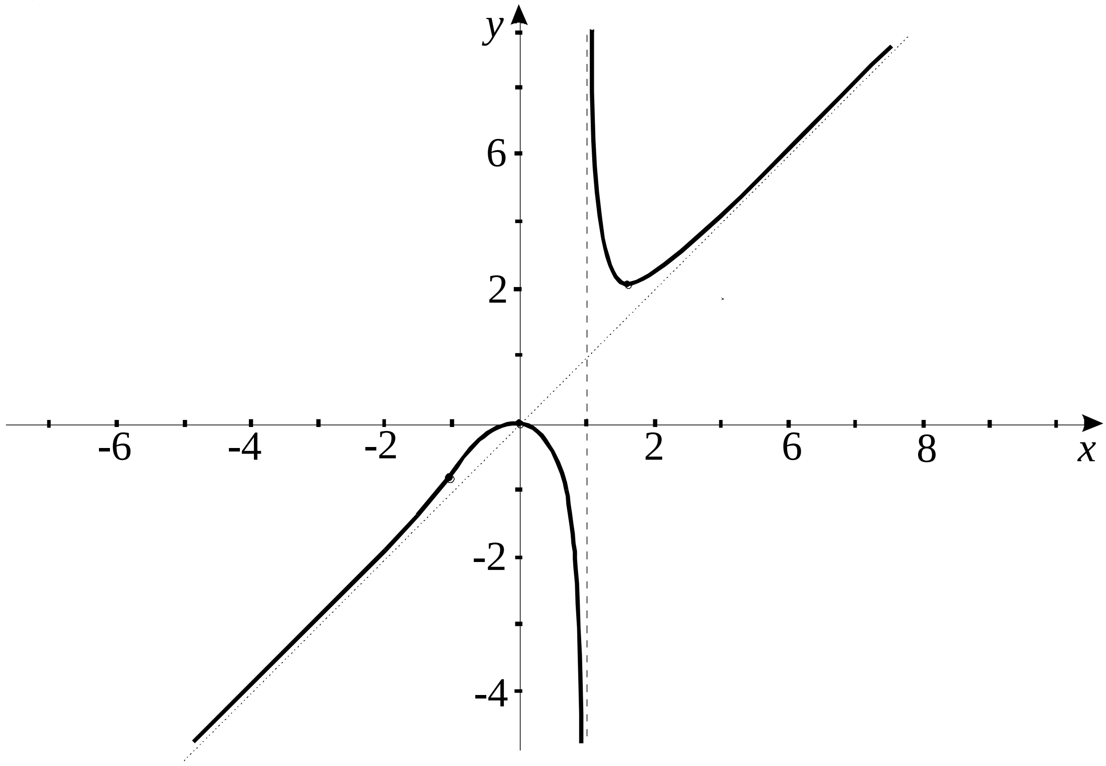

Рис. 1

Побудову його починаємо з асимптот і характерних точок графіка (екстремуми, точки перегину, точки перетину з осями координат). Слід врахувати, що на достатньому віддаленні від початку системи координат графік практично співпадає з асимптотами.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції

$y = 3x^4 - 20x^3 - 36x^2 + 5$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Розв'язання: Як відомо, неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає на ньому свого найменшого і найбільшого значень або всередині відрізка – в точках екстремуму, або на його кінцях – в точках $x = a$ і $x = b$.

Дана функція є елементарною, визначена, а значить і неперервна, на всій осі. Знайдемо критичні (підозрілі на екстремум) точки, що лежать на заданому відрізку, тобто точки, в яких похідна y' дорівнює нулю або не існує. Оскільки похідна $y' = 12x^3 - 60x^2 - 72x$ визначена (існує) в усіх точках, то залишається знайти її нулі, розв'язавши рівняння

$$12x^3 - 60x^2 - 72x = 0 \Rightarrow 12x(x^2 - 5x - 6) = 0 \Rightarrow 12x(x-6)(x+1) = 0.$$

З трьох коренів цього рівняння $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 6$ тільки перші два лежать на заданому відрізку [–1; 1]. Обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка: $y(-1) = -8$; $y(0) = 5$; $y(1) = -48$. Порівнюючи ці значення, знаходимо

$$\max_{x\in[-1;1]} y(x) = y(0) = 5, \quad \min_{x\in[-1;1]} y(x) = y(1) = -48.$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти рівняння дотичної прямої і нормальної площини до лінії, заданої вектор-функцією $\vec{r}(t) = 4t\cdot\vec{i} - 12t\cdot\vec{j} + \ln \operatorname{tg} t\cdot\vec{k}$ в точці $t_0=\pi/4$.

<u>Розв'язання:</u> Якщо лінія задана вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то похідна від неї – вектор-функція $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ є вектором дотичним до лінії в кожній її точці $M(x(t); y(t); z(t))$, отже, є напрямним вектором дотичної прямої. Звідси виникає, що канонічне рівняння дотичної прямої в заданій точці t_0 має вид

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}, \tag{5}$$

а рівняння нормальної площини, тобто площини, що проходить через точку дотику M_0 перпендикулярно до дотичної прямої, –

$$x'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) + y'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) + z'(t_0)\big(z - z(t_0)\big) = 0. \tag{6}$$

Для заданої вектор-функції

$$x(t_0) = x(\pi/4) = 4\cdot(\pi/4) = \pi\,; \quad y(t_0) = y(\pi/4) = -12\cdot(\pi/4) = 3\pi;$$

$$z(t_0) = z(\pi/4) = \ln \operatorname{tg}(\pi/4) = \ln 1 = 0;$$

$$\vec{r}\,'(t) = 4\vec{i} - 12\vec{j} + \frac{(\operatorname{tg} t)'}{\operatorname{tg} t}\vec{k} = 4\vec{i} - 12\vec{j} + \frac{2}{\sin 2t}\vec{k} = \left\{4; -12; \frac{2}{\sin 2t}\right\};$$

$$\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,'(\pi/4) = \left\{4; -12; \frac{2}{\sin(\pi/2)}\right\} = \{4; -12; 2\}.$$

Підставивши одержані значення в рівняння (5) і (6), знаходимо:

рівняння дотичної прямої

$$\frac{x-\pi}{4} = \frac{y - 3\pi}{-12} = \frac{z-0}{2}$$

і рівняння нормальної площини

$$4(x-\pi) - 12(y - 3\pi) + 2(z - 0) = 0.$$

Останнє рівняння можна спростити до виду

$$2x - 6y + z + 16\pi = 0.$$

ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ і в пунктах а), б), в) диференціали dy для заданих функцій:

1. **а)** $y = \arcsin\left(e^{-x} - 1\right)$; **б)** $y = \dfrac{1}{8}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4}$;

   в) $y = \dfrac{\ln(\operatorname{ctg} 2x + 4)}{\operatorname{ctg} 2x}$; **г)** $y=(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$; **д)** $xy+e^{x+y}=x^2-y^2$;

2. **а)** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{2}$; **б)** $y = 2x\ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}\right)$;

   в) $y = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{4x^2 + 2x}$; **г)** $y=(\sin x)^{5\operatorname{tg} x}$; **д)** $\ln(1+y/x)=2x$;

3. **а)** $y=5e^{-3\operatorname{tg}(x/3)}$; **б)** $y = (2x+3)^3 \arcsin\dfrac{1}{2x+3}$;

   в) $y = \dfrac{3\ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)}{2x+3}$; **г)** $y = \left(\sin 2x\right)^{\sqrt{x}}$; **д)** $x+y=x\sin y-y\sin x$;

4. **а)** $y = 2\sin\left(\dfrac{\ln 2x}{3}\right)$; **б)** $y = (x+3)^4 \operatorname{arctg}\sqrt{x+2}$;

   в) $y = \dfrac{\arccos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}$; **г)** $y = \left(\cos x\right)^{5e^x}$; **д)** $\operatorname{tg}(xy)=2y$;

5. **а)** $y = 3x\ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{-4x}}\right)$; **б)** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\cdot\operatorname{ctg} 3x^2$;

   в) $y = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}(3x^2+3)}$; **г)** $y=(x^2-1)^{\cos x}$; **д)** $x^2+y=y\cos x-x\cos y$;

6. **а)** $y = \sqrt{1 - e^{6x}}$; **б)** $y=\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}^2 3x$;

   в) $y = \dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}$; **г)** $y=(x+2)^{\operatorname{tg} x}$; **д)** $\sin(xy-8)=y^2+x^2$;

7. **а)** $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$; **б)** $y=x\ln(1+\operatorname{ctg} 2x)$;

   в) $y = \dfrac{\sin 3x}{2x+1}$; **г)** $y = (x^2+1)^{\arcsin x}$; **д)** $y=x+3\cos y$;

8. **а)** $y=\sin(x/3)\ln\sin(x/3)$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+3}}{\operatorname{tg}4x}$;

в) $y=e^{2\cos x^2}$; **г)** $y=(x-5)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; **д)** $y^2+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}xy=0$;

9. **а)** $y=\sqrt{5x-x^2}\ln(2x+4)$; **б)** $y=\dfrac{\arccos 2x^2}{\arcsin 2x^2}$;

в) $y=\operatorname{tg}(e^{2x-1})$; **г)** $y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{x+1}$; **д)** $\sqrt{xy}+x^2+y^2=0$;

10. **а)** $y=\operatorname{arctg}3x\cdot\sqrt{x^2-4}$; **б)** $y=\ln\dfrac{1+3x^2}{1-3x^2}$;

в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{3x-2}$; **г)** $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\cos x}$**;** **д)** $y+\cos x+\sin(x/y)=0$;

11. **а)** $y=2^{3x}\arcsin\sqrt{1-3x}$; **б)** $y=8\operatorname{ch}\left(\dfrac{x^2}{4}+2\sqrt{x}\right)$;

в) $y=\ln\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$; **г)** $y=\left(x^2-5\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; **д)** $xy+\sin(x+y)=0$;

12. **а)** $y=\dfrac{3\operatorname{ch}\left(4x^2-2x\right)}{\operatorname{sh}\left(2x^2-x\right)}$; **б)** $y=\sqrt{5-4x^2}\arcsin 2x$;

в) $y=\sqrt{2+\ln\left(x^2+y\right)}$; **г)** $y=(\operatorname{tg}x^2)^{\ln x}$; **д)** $xy+\sin(x/y)=0$;

13. **а)** $y=\sqrt[5]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$; **б)** $y=(e^{3x}+7x)^4$;

в) $y=\ln\cos\left(\sqrt{x}-1\right)$; **г)** $y=(\operatorname{tg}x^2)^{\sin x}$; **д)** $x+y+\cos(y/x)=0$;

14. **а)** $y=\ln(3+\operatorname{ctg}2x)$; **б)** $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

в) $y=\left(e^{\sqrt{x}}+5x\right)^4$; **г)** $y=\left(2x+1\right)^{e^x}$; **д)** $x+y^2+\operatorname{tg}(xy)=0$;

15. **а)** $y=\sqrt[4]{x^3+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; **б)** $y=(e^{\sin 2x}+4x)^4$;

в) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; **г)** $y=(\operatorname{ctg}2x)^{\sin x}$; **д)** $x^2+y+\operatorname{ctg}(xy)=0$;

16. **а)** $y = x^3\sqrt{1-x^3}$; **б)** $y = \dfrac{3\sin x^2}{\cos 2x}$;

в) $y = \mathrm{arctg}(e^{3x})$; **г)** $y = \left(\sqrt{x+1}\right)^{\sin 2x}$; **д)** $xy + \mathrm{ch}(xy) = 0$;

17. **а)** $y = e^{2x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x^3}}$; **б)** $y = \dfrac{2+\mathrm{ctg}\,3x}{3-\mathrm{tg}\,3x}$;

в) $y = 3\arccos(1-5x^2)$; **г)** $y = (\cos 2x)^{\sqrt{x}}$; **д)** $\mathrm{th}(x/y) = 7x$;

18. **а)** $y = \dfrac{3x}{\sqrt{6-2x^2}}$; **б)** $y = \dfrac{5+\sin^2 x}{3+4\cos^2 x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{arctg}\,x^2$; **г)** $y = (\mathrm{tg}\,2x)^{x^2+2}$; **д)** $2x - y - \mathrm{ch}(x/y) = 0$;

19. **а)** $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{3-2x+7x^2}}$; **б)** $y = \cos 2x - 2x\sin 2x$;

в) $y = \dfrac{x\ln 2x}{x-3}$; **г)** $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2x}$; **д)** $y\,\mathrm{ch}x = \mathrm{sh}(xy)$;

20. **а)** $y = 2\mathrm{ctg}^3(x^3+5)$; **б)** $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} + 2\sqrt[4]{x^4+1}$;

в) $y = e^{\arccos 4x^2}$; **г)** $y = \left(2x^2+1\right)^{\mathrm{arctg}\,x}$; **д)** $y^3 - x^3 + 6xy = 0$;

21. **а)** $y = \left(e^{\sqrt{x}}+3\right)^2$; **б)** $y = (x^3-4x)\ln\cos(3x+7)$;

в) $y = \dfrac{x^2+2x+5}{2\sqrt{3x+1}}$; **г)** $y = (\mathrm{sh}x)^{\mathrm{ch}x}$; **д)** $3x/y = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$;

22. **а)** $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1}$; **б)** $y = \left(x^2-3\right)\ln\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $y = (e^{\mathrm{tg}2x}+x)^4$; **г)** $y = (\mathrm{arctg}2x)^{\mathrm{tg}x}$; **д)** $y - x + \mathrm{th}(xy) = 0$;

23. **а)** $y = \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; **б)** $y = (e^{\arcsin 3x}+5)^3$;

в) $y = \sin 2x^2\cdot\ln(x^2+1)$; **г)** $y = (\mathrm{sh}\,x)^{\sqrt{x+2}}$; **д)** $(e^x-2)(e^y-3) = 5$;

24. **а)** $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{5-4x^2}}$; **б)** $y=\mathrm{ctg}\ln(3x^2+4)$;

в) $y=e^{-3x}\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; **г)** $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{x^2}$; **д)** $\ln y=\mathrm{arctg}(x/y)$;

25. **а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x^2-4x+5}$; **б)** $y=(e^{\mathrm{arctg}5x}+5)^4$;

в) $y=\ln\mathrm{tg}(5x+2)$; **г)** $y=(\mathrm{th}x)^{\mathrm{ch}y}$; **д)** $y=xe^{xy}$;

26. **а)** $y=(\sin 2x+\mathrm{tg}2x)^3$; **б)** $y=\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}$;

в) $y=e^{\sqrt{x+2}}\cos 2x$; **г)** $y=\left(\ln x\right)^{\arccos\sqrt{x}}$; **д)** $x^3+y^3=\mathrm{th}(xy)$;

27. **а)** $y=(2x-5)^3\ln(4x^2-25)$; **б)** $y=\left[e^{-x^2}+\ln(3x+1)\right]^5$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sqrt{x^4+1}}$; **г)** $y=\left(\sin\pi x\right)^{x^2}$; **д)** $x^2-y^2=\mathrm{ch}(xy)$;

28. **а)** $y=\left(\sin 2x+4\right)e^{-x^2}$; **б)** $y=\dfrac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y=\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; **г)** $y=\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^{\cos 2x}$; **д)** $xy=\mathrm{ch}(x^2+y^2)$;

29. **а)** $y=5\sin 4x\cdot\mathrm{tg}(x^2+4)$; **б)** $y=\dfrac{e^{1+3x}}{\mathrm{arctg}2x}$; **в)** $y=\left(x^2-1\right)^{\sin x}$;

г) $y=\dfrac{1}{3}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; **д)** $e^{xy}=\mathrm{sh}(x+y)$;

30. **а)** $y=\sqrt{x+x^3}\arccos^2 3x$; **б)** $y=\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 3x}$; **в)** $y=\left(\mathrm{arctg}x\right)^{\sqrt{x}}$;

г) $y=\ln\cos(5x^2-3)$; **д)** $\mathrm{ch}(x^2-y^2)=x-y$;

31. **а)** $y=(x+3)^4\mathrm{arctg}\sqrt{x+2}$; **б)** $y=2\sin\left(\dfrac{\ln 2x}{3}\right)$;

в) $y=\left(\mathrm{sh}2x\right)^{\sqrt{x}}$; **г)** $y=\dfrac{\arccos\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}$; **д)** $e^{x-y}=x^2+y^2$;

32.**а)** $y=\arcsin\sqrt{x}$; **б)** $y=e^{x^2+4x}\cdot \operatorname{tg} 2x^3$; **в)** $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+1}}$;

г) $y=\left(\sqrt{x}+3\right)^{\operatorname{sh} x}$; **д)** $1-\cos(xy)=\sin(x+y)$.

Завдання 2. Знайти рівняння дотичних прямих і нормалей до графіків функцій, а також їхні кривини в заданих точках:

1. **а)** $y=(4x-x^2)/4$, $x_0=2$; **б)** $x=\cos(t/2)$, $y=t/\pi-\operatorname{ctg}t$, $t_0=\pi/3$;
2. **а)** $y=2x^2+3x-1$, $x_0=-2$; **б)** $x=\cos(t/4)$, $y=t/\pi+\operatorname{tg}t$, $t_0=\pi$;
3. **а)** $y=x-x^3$, $x_0=-1$; **б)** $x=t^3-t^2$, $y=\cos^2\pi t$, $t_0=1/3$;
4. **а)** $y=x^2+8\sqrt{x}-32$, $x_0=4$; **б)** $x=t^2+1$, $y=\sin^4\pi t$, $t_0=1/4$;
5. **а)** $y=x+\sqrt{x^3}$, $x_0=1$; **б)** $x=\operatorname{arctg} t$, $y=t^2+4$, $t_0=1$;
6. **а)** $y=(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})$, $x_0=4$; **б)** $x=\operatorname{tg}\pi t$, $y=\cos\pi t$, $t_0=1/4$;
7. **а)** $y=4x^2-3x+1$, $x_0=1$; **б)** $x=\cos^2 t$, $y=t^2+1$, $t_0=\pi/3$;
8. **а)** $y=x-6\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$; **б)** $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$, $t_0=\pi/4$;
9. **а)** $y=\sqrt{2x^2+2}$, $x_0=-1$; **б)** $x=\operatorname{tg}^2\pi t$, $y=1/t$, $t_0=1/3$;
10. **а)** $y=(x^5+1)/(x^4+1)$, $x_0=1$; **б)** $x=\operatorname{ctg}^2\pi t$, $y=t^{-2}$, $t_0=1/6$;
11. **а)** $y=3\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$, $x_0=1$; **б)** $x=1/\sin t$, $y=1/t$, $t_0=\pi/4$;
12. **а)** $y=2x/(x^2+1)$, $x_0=-2$; **б)** $x=\operatorname{tg}(t/3)$, $y=t^3-\pi^3$, $t_0=\pi$;
13. **а)** $y=(1+3x^2)/(3+x^2)$, $x_0=-1$; **б)** $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$, $t_0=\ln 3$;
14. **а)** $y=\left(3\sqrt{x}+1\right)/x$, $x_0=9$; **б)** $x=1/\cos t$, $y=\pi^2/t^2$, $t_0=\pi/4$;
15. **а)** $y=6\sqrt[3]{x}-2x$, $x_0=8$; **б)** $x=t^2+4t$, $y=5t^4-3t$, $t_0=2$;
16. **а)** $y=x^2-8\sqrt{x}$, $x_0=4$; **б)** $x=\operatorname{sh}(t/2)$, $y=\operatorname{ch}(t/2)$, $t_0=\ln 4$;
17. **а)** $y=9-\sqrt{x^3}$, $x_0=4$; **б)** $x=1+\sqrt{2}\cos t$, $y=2-\sqrt{2}\sin t$, $t_0=\pi/4$;

Завдання 2

18.**а)** $y=x^2-8x+22$, $x_0=-2$; **б)** $x=e^{-2t}$, $y=e^{3t}$, $t_0=1$;

19.**а)** $y=8\sqrt[3]{x}+18$, $x_0=-8$; **б)** $x=2\cos^3 t$, $y=3\sin^2 t$, $t_0=\pi/4$;

20.**а)** $y=x^2-3x+6$, $x_0=3$; **б)** $x=5\sin t$, $y=6\cos^2 t$, $t_0=\pi/3$;

21.**а)** $y=(x+2)/(x^2-2)$, $x_0=1$; **б)** $x=t^2+3t$, $y=5t^2$, $t_0=2$;

22.**а)** $y=(x^2-6)/(x+1)$, $x_0=2$; **б)** $x=5t-t^3$, $y=3t^2$, $t_0=2$;

23.**а)** $y=-2(x^8+2)$, $x_0=1$; **б)** $x=1+\ln t^3$, $y=-3+\ln t^2$, $t_0=e$;

24.**а)** $y=(x^2+9)/(1-2x^2)$, $x_0=1$; **б)** $x=\cos^3 2t$, $y=\sin^2 3t$, $t_0=\pi/12$;

25.**а)** $y=1/(3x+2)$, $x_0=2$; **б)** $x=3\cos^2 2t$, $y=\cos^2 3t$, $t_0=\pi/6$;

26.**а)** $y=(3x-2x^3)/3$, $x_0=2$; **б)** $x=\cos^2(t/4)$, $y=(t^2+2t)/\pi$, $t_0=\pi$;

27.**а)** $y=14\sqrt{x^2+1}$, $x_0=0$; **б)** $x=2\operatorname{tg} t$, $y=3\operatorname{ctg} t$, $t_0=\pi/3$;

28.**а)** $y=3/x+\sqrt[3]{x^2+4}$, $x_0=2$; **б)** $x=\sin^2 t$, $y=t^2+1$, $t_0=\pi/4$;

29.**а)** $y=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0=1$; **б)** $x=t^2-1$, $y=\cos 3t$, $t_0=\pi/4$;

30.**а)** $y=e^x\sin x$, $x_0=0$; **б)** $x=3\sin^2(t/4)$, $y=2\cos^2(t/6)$, $t_0=\pi$;

31.**а)** $y=x^2 e^{1-x^3}$, $x_0=1$; **б)** $x=\operatorname{th}^2 t$, $y=\operatorname{cth}^2 t$, $t_0=\ln 2$.

Завдання 3. Провести повне дослідження заданої функції і побудувати ескіз її графіка:

1. $y=\dfrac{x^4}{\left(1-x^3\right)^2}$;
2. $y=\dfrac{(1+x)^3}{x^2}$;
3. $y=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$;
4. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$;
5. $y=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$;
6. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{4x+1}$;
7. $y=\dfrac{x^4}{1-x^3}$;
8. $y=-\dfrac{x^3}{x^2-1}$;
9. $y=\dfrac{x^3+2x-6}{x-3}$;
10. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;
11. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$;
12. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+3}$;
13. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$;
14. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
15. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
16. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x+3}$;
17. $y=\dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$;
18. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$;
19. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$;
20. $y=\dfrac{3x^4}{x^3-1}$;
21. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$;
22. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
23. $y=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$;
24. $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$;
25. $y=\dfrac{x^2-x}{x+4}$;
26. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$;
27. $y=\dfrac{(x-5)^2}{x+1}$;
28. $y=\dfrac{(x-1)(x+3)}{2x+3}$;
29. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;
30. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;
31. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

.Завдання 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

1. $f(x)= x^3-12x+7,\quad [0;3]$;
2. $f(x)= 3x^5-5x^3+6;\quad [0;2]$;
3. $f(x)= \sqrt{3}x+2\cos x,\quad [0;\pi/2]$;
4. $f(x)= 3x^4-16x^3+4,\quad [-3;1]$;
5. $f(x)= x^3-3x+1,\quad [0{,}5;2]$;
6. $f(x)= x^4+4x,\quad [-2;2]$;
7. $f(x)= \sqrt{3}x-2\sin x,\quad [0;\pi/2]$;
8. $f(x)= 81x-6x^4,\quad [-1;4]$;
9. $f(x)=2x^3+9x^2-24x+7,\ [0;3]$;
10. $f(x)= x^3+3x^2-24x-4,\ [1;4]$;
11. $f(x)= \sqrt{100-x^2},\quad [-6;8]$;
12. $f(x)= x^3-3x^2-9x+14,\ [-2;4]$;
13. $f(x)= x-\mathrm{arctg}\,x,\quad [0;1]$;
14. $f(x)= x^2-2\ln(x/2),\ [2e^{-1};2e]$;
15. $f(x)=2x^3-9x^2-24x+10,\ [0;3]$;
16. $f(x)= x^2-16/x+7,\quad [-3;-1]$;
17. $f(x)= x^4-8x^2+4,\quad [-1;3]$;
18. $f(x)= x^3-27x+5,\quad [0;4]$;
19. $f(x)=\sqrt{9-x^2},\quad [-3;3]$;
20. $f(x)= x\ln x,\quad [1;e]$;
21. $f(x)= -3x^4+6x^2,\quad [-2;2]$;
22. $f(x)= x-2\sin x+3,\ [\pi;3\pi/2]$;
23. $f(x)= x^3-3x^2-9x+7,\ [2;4]$;
24. $f(x)= x^3-9x^2+11,\quad [-1;1]$;
25. $f(x)= 3-2x^2,\quad [-1;3]$;
26. $f(x)= x-\sin x,\quad [-\pi;\pi]$;
27. $f(x)= 2x^3-9x^2+15,\quad [2;4]$;
28. $f(x)= \mathrm{arctg}\,\dfrac{1-x}{1+x},\quad [0;1]$;
29. $f(x)= x^3-2x^2-5,\quad [-2;2]$;
30. $f(x)= 2x^3+9x^2-10,\ [-4;1]$;
31. $f(x)= x^3+6x^2-5,\quad [-5;2]$;
32. $f(x)=3x^4-20x^3-36x^2+5,\ [-1;1]$.

Завдання 5. Знайти рівняння дотичної прямої і нормальної площини до лінії, заданої вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в точці t_0:

1. $\vec{r}(t) = \frac{16}{t}\vec{i} + \ln(t-3)\vec{j} + (16-t^2)\vec{k};\ t_0 = 4;$
2. $\vec{r}(t) = 2\sqrt{t}\vec{i} + (t-1)\vec{j} + \ln(t-3)\vec{k};\ t_0 = 4;$
3. $\vec{r}(t) = \left(\frac{48}{t} - 12\right)\vec{i} + \left(\frac{t^2-2t}{2}\right)\vec{j} + \ln(t-2)\vec{k};\ t_0 = 3;$
4. $\vec{r}(t) = (t^2-3)\vec{i} + \frac{1}{t-1}\vec{j} + \ln(t-1)\vec{k};\ t_0 = 4;$
5. $\vec{r}(t) = \operatorname{tg} t\vec{i} + \sqrt{2}\sin t\vec{j} - \sqrt{2}\cos t\vec{k};\ t_0 = \pi/4;$
6. $\vec{r}(t) = \sin 2t\vec{i} + 3\cos 2t\vec{j} - \frac{8t}{\pi}\vec{k};\ t_0 = \pi/3;$
7. $\vec{r}(t) = \cos 2t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} + \frac{t}{\pi}\vec{k};\ t_0 = \pi/6;$
8. $\vec{r}(t) = (t^2-3t)\vec{i} + (t^3-6)\vec{j} + \frac{t^5}{16}\vec{k};\ t_0 = 2;$
9. $\vec{r}(t) = \ln(3-t)\vec{i} - \sqrt{8-t^2}\,\vec{j} + 5t^2\vec{k};\ t_0 = 2;$
10. $\vec{r}(t) = 3\mathrm{e}^{t^2-1}\vec{i} + 2t^4\vec{j} - 3\mathrm{e}^{1-t^2}\,\vec{k};\ t_0 = 1;$
11. $\vec{r}(t) = \operatorname{ch} t\vec{i} + 2\operatorname{sh} 2t\vec{j} + (t-\ln 2)\vec{k};\ t_0 = \ln 2;$
12. $\vec{r}(t) = (1-\operatorname{ch} t)\vec{i} + 4\mathrm{e}^{2t}\,\vec{j} + \operatorname{sh} 3t\vec{k};\ t_0 = \ln 3;$
13. $\vec{r}(t) = \sin \pi t\vec{i} + e^{\pi(t-3)}\,\vec{j} + \cos \pi t^2\vec{k};\ t_0 = 3;$
14. $\vec{r}(t) = (2-t)\vec{i} + \sqrt{25-t^2}\,\vec{j} + t^2\vec{k};\ t_0 = 4;$
15. $\vec{r}(t) = 2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + \frac{t}{2\pi}\vec{k};\ t_0 = \frac{\pi}{2};$
16. $\vec{r}(t) = e^t\sin t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k};\ t_0 = 0;$
17. $\vec{r}(t) = 2\sin t\,\vec{i} + 3\operatorname{tg} t\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k};\ t_0 = \frac{\pi}{4};$
18. $\vec{r}(t) = (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k};\ t_0 = \frac{\pi}{2};$

Завдання 5

19. $\vec{r}(t)=\left(4-\frac{t^2}{2}\right)\vec{i}+\left(t^3-2\right)\vec{j}+\frac{t^2-4}{t}\vec{k};\;\; t_0=2;$

20. $\vec{r}(t)=\left(t^3+8t\right)\vec{i}+t^2\,\vec{j}+\left(t^5+3t\right)\vec{k};\;\; t_0=2;$

21. $\vec{r}(t)=\mathrm{e}^t\,\vec{i}+\mathrm{e}^{-t}\,\vec{j}+t\,\vec{k};\quad t_0=0;$

22. $\vec{r}(t)=\mathrm{tg}t\,\vec{i}+\mathrm{ctg}t\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k};\;\; t_0=\frac{\pi}{4};$

23. $\vec{r}(t)=\mathrm{e}^{-t}\,\vec{i}+\mathrm{e}^t\,\vec{j}+t^2\,\vec{k};\;\; t_0=0;$

24. $\vec{r}(t)=\left(t^2-9t\right)\vec{i}+6\sqrt{t}\,\vec{j}+(t-5)\vec{k};\;\; t_0=9;$

25. $\vec{r}(t)=\ln(t-2)\vec{i}+\frac{9}{t}\vec{j}+\left(t^2-9\right)\vec{k};\;\; t_0=3;$

26. $\vec{r}(t)=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\,\vec{j}+2\sin t\,\vec{k};\;\; t_0=\frac{\pi}{2};$

27. $\vec{r}(t)=2\sin t\,\vec{i}+3\mathrm{tg}t\,\vec{j}+2\cos t\,\vec{k};\;\; t_0=\frac{\pi}{4};$

28. $\vec{r}(t)=(2-t)\vec{i}+\sqrt{25-t^2}\,\vec{j}+t^2\,\vec{k};\;\; t_0=4;$

29. $\vec{r}(t)=\ln(t-3)\vec{i}-t\,\vec{j}+\left(t^2-16\right)\vec{k};\;\; t_0=4;$

30. $\vec{r}(t)=\left(2t^2-5\right)\vec{i}+\left(t^2-2t\right)\vec{j}-\sqrt{5-t^2}\,\vec{k};\;\; t_0=2;$

31. $\vec{r}(t)=4t\,\vec{i}-12t\,\vec{j}+\ln\,\mathrm{tg}t\,\vec{k};\;\; t_0=\frac{\pi}{4}.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.– М.: Наука, 1969.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.–М.: Наука, 1980-88.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.–М.: Высшая школа, 1986, ч. 1.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч.II. Практические занятия по дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных. –Харьков: изд-во ХГУ, 1967.
5. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. –М.: Наука, 1975-88.
6. Мантуров О.В., Матвеева Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.–М.: Высшая школа, 1986.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. –М.: Наука, 1987.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, –М.: Наука, 1978-85, т. 1.
9. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича). –М.: Наука, 1981-86,. ч. 1.

ЗМІСТ