ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для вивчення розділу курсу вищої математики, який містить у собі три теми:

1 Границі функції однієї змінної (завдання 1);

2 Диференціальне числення функцій однієї змінної (завдання 2);

3 Теорія функцій кількох змінних (завдання 3).

Математичні вказівки складаються з трьох частин.

Перша містить у собі достатню кількість означень, понять і формул, за допомогою яких можна розв’язати задачі контрольних завдань; друга – зразок виконання і оформлення контрольних завдань; третя частина складається з варіантів завдань.

Слід зазначити, що в методичних вказівках приділяється увага не тільки техніці диференціювання, але й застосуванню похідних для розв'язання деяких задач математичного аналізу.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Через дуже стислу і спрощену форму викладання курсу вищої математики на економічних спеціальностях конспект лекцій разом з класичними підручниками є основними джерелами знань для студентів. Конспект повинен містити відповіді на теоретичні питання, наведені в даних методичних вказівках. Особливу увагу слід звертати на визначення основних понять курсу, на їх застосування для виконання практичних завдань.

Методичні вказівки є основою для виконання індивідуальних домашніх завдань та розрахунково-графічних робіт для студентів денної форми навчання, а також для виконання контрольних робіт для студентів заочної форми навчання.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1 Функції однієї змінної

1.1 Границі функції однієї змінної

Означення 1 Нехай задані дві множини дійсних чисел $M(x)$ і $N(y)$, а також відомий закон відповідності, з яким кожному $x \in M$ відповідає певне $y \in N$.

Тоді кажуть, що на множині M визначена *функція*

$$y = f(x).$$

Множину M називають *областю визначення функції*, множину N – *областю значень функції*.

Означення 2 Число A називається *границею* функції $y = f(x)$ при умові, що $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого додатного $\varepsilon > 0$ існує додатне $\delta > 0$ таке, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

Границя функції позначається

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Арифметичні властивості границь

Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тоді існують границі суми, різниці, добутку і частки цих функцій:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B,$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (\text{якщо } B \neq 0).$$

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, тоді границю частки цих функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\mathrm{g(x)}}$ за арифметичними властивостями визначити неможливо тому, що границя знаменника дорівнює нулю.

Границю $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\mathrm{g(x)}}$ називають невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$, а її обчислення "розкриттям невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$".

Можна розглядати невизначеності типів $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[1^{\infty}\right]$ та інші.

Для розкриття невизначеностей можна користуватися так званими чудовими границями, або стандартними границями, а саме:

Перша "чудова границя"

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \quad (x\text{ – в радіанах}) \qquad (1.1)$$

і її наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1, \qquad (1.2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1, \qquad (1.3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1. \qquad (1.4)$$

Друга "чудова границя"

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{x}}=e} \qquad (1.5)$$

("*e*" – число Ейлера, *e*= 2.71828…)

і її наслідки:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}, \qquad (1.6)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \qquad (1.7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad (1.8)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1, \qquad (1.9)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=lna. \qquad (1.10)$$

<u>Означення 3</u> Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, тоді функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою (н.м.ф.)* в околі точки x_0.

<u>Означення 4</u> Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\neq 0,\infty$, тоді кажуть, що н.м.ф. в околі точки x_0 мають однаковий порядок, а коли $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними н.м.ф.* в околі точки x_0.

Еквівалентні н.м.ф. в околі точки x_0 можна замінювати одна другою: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$.

<u>Зауваження</u>. Із означення 4 і рівностей (1.1) – (1.4), (1.8) – (1.10) випливає, що еквівалентними н.м.ф. в околі точки $x_0 = 0$ будуть функції:

$$sin\,x\sim x;\ tg\,x\sim x;\ arcsin\,x\sim x;\ arctg\,x\sim x;\ e^x-1\sim x,$$

$$ln(1+x)\sim x;\ log_a(1+x)\sim x\,lna.$$

2 Диференціальне числення функції однієї змінної

2.1 Означення похідної, геометричний зміст, таблиця похідних, правила диференціювання

Означення 1 *Похідною* функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx при умові, що приріст аргументу Δx прямує до нуля.

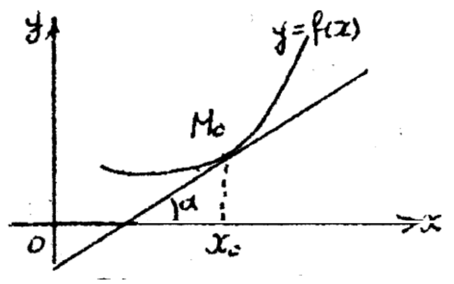
Якщо Δx – приріст аргументу в точці x_0, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ – відповідний приріст функції, тоді похідна дорівнює

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

або

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Означення 2



Геометричний зміст похідної такий: $f'(x_0)$ виявляється *кутовим коефіцієнтом* k дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{f'(x_0) = k = tg\,\alpha}.$$

Рівняння дотичної має вигляд

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Основні похідні наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Основні похідні

1	$(f \pm g)' = f' \pm g'$	9	$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$
2	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	10	$(sinx)' = cosx$
3	$(cf)' = c \cdot f'$	11	$(cosx)' = -sinx$
4	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	12	$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$
5	$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$	13	$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$
	$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$;	14	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$y = f(x)$ – зовнішня,	15	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$x = \varphi(t)$ – внутрішня,	16	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
	$y = f[\varphi(t)]$ – складена:	17	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
	$y'_t = f'(x) \cdot \varphi'(t)$	18	$(a^x)' = a^x lna$
7	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \ x^{\alpha - 1}$	19	$(e^x)' = e^x$
8	$(lnx)' = \frac{1}{x}$	20	$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ задана неявно, тоді для відшукання похідної "y'" потрібно знайти похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію y як функцію від аргументу *x*; з отриманої нової рівності визначити "y'".

Зауважимо далі, що в деяких випадках зручно використовувати попереднє логарифмування функції. Наприклад,

$$y = [f(x)]^{g(x)}, \quad y' = ?$$

Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності

$$lny = ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)lnf(x),$$

тобто

$$lny = g(x)\cdot lnf(x), \qquad (*)$$

а далі розглядаємо рівність (*), яка визначає функцію y у наявній формі, і обчислюємо похідну від обох частин, вважаючи lny складеною функцією від x

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)lnf(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x) \Rightarrow$$

$$y' = \left\{g'(x)\cdot lnf(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}[f(x)]^{g(x)}.$$

2.2 Диференціал функції, похідні вищих порядків

Означення 1 Нехай x_0 – фіксована точка, Δx – приріст аргументу в точці x_0; $y = f(x)$ – функція.

Диференціалом аргументу в точці x_0 називається приріст аргументу Δx і позначається так:

$$\boxed{dx = \Delta x}.$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної $f'(x)$ на диференціал аргументу $\Delta x = dx$, тобто

$$dy = f'(x_0)\Delta x,$$

$$\boxed{dy = f'(x_0)\mathrm{d}x}.$$

Перелічимо *властивості диференціала*, якщо $u = f(x), v = g(x)$:

$$1\ d(u \pm v) = du \pm dv;$$
$$2\ d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv;$$
$$3\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}.$$

4 Якщо $x = \varphi(t)$ – внутрішня функція, $y = f(x)$– зовнішня, тоді диференціал складеної функції $y = f[\varphi(t)]$ в точці $t_0(x_0=\varphi(t_0))$ дорівнює

$$dy = f'(x_0)\underbrace{\varphi'(t_0)dt}_{dx} = f'(x_0)dx.$$

<u>Означення 2</u> Нехай $y = f(x)$ і $y' = f'(x)$ – її похідна в фіксованій точці x.

Якщо змінювати точку x, тоді буде змінюватися і похідна $f'(x)$, тобто $y' = f'(x)$ знову таки буде функцією від x; для цієї нової функції можна обчислювати похідну, яку називають *похідною другого порядку* і позначають

$$y'' = [f'(x)]' = f''(x).$$

Далі аналогічно

$$y''' = [f''(x)]' = f'''(x);$$
$$y^{(4)} = [f'''(x)]' = f^{(4)}(x)$$

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' = f^{(n)}(x) -$$

похідна n *– го порядку.*

2.3 Правило Лопіталя

За допомогою похідних можна розкривати різні типи невизначеностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [0^0],\ [1^\infty],\ [\infty^0].$$

Правило Лопіталя. У випадках невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$ розкривається так:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\underset{\substack{\downarrow\\0}}{f(x)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\\infty}}{g(x)}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

а далі використовуємо правило Лопіталя.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\begin{cases}0\\1\\\infty\end{cases},\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\begin{cases}0\\\infty\\0\end{cases}$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\begin{cases}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{cases}$.

Позначаємо шукану границю літерою A і логарифмуємо

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A\Rightarrow lnA=\ell n\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0} ln[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} g(x) lnf(x)$$

(знак ln і знак lim можна поміняти місцями, бо $ln\,x$ неперервна функція).

Таким чином,

$$lnA=\lim_{x\to x_0}\{g(x)\cdot lnf(x)\}=\begin{Bmatrix}0\cdot\infty\\\infty\cdot 0\\0\cdot\infty\end{Bmatrix}=b\Rightarrow$$

$$A=e^b.$$

2.4 Монотонність функції, екстремум, опуклість, увігнутість, перегин кривої, асимптоти

Означення 1 Функція $y = f(x)$ називається відповідно *монотонно зростаючою, неспадною, спадною, незростаючою* на інтервалі (a, b), якщо для двох значень аргументу $\forall\, x_1 \in (a,b)$, $\forall\, x_2 \in (a,b)$, таких, що $x_1 < x_2$, відповідні значення функції задовольняють нерівності

$$f(x_1) < f(x_2),$$
$$f(x_1) \leq f(x_2),$$
$$f(x_1) > f(x_2),$$
$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Теорема. Для того щоб функція $y = f(x)$ була монотонно неспадною на інтервалі (a, b), необхідно і достатньо, щоб

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Зауваження. Якщо $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (a,b)$ функція $y = f(x)$ монотонно зростаюча на інтервалі (a, b).

Означення 2 Функція $y = f(x)$ має *максимум* в точці x_0, якщо існує окіл точки x_0 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ такий, що для $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

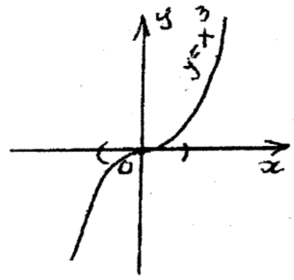
Функція $y = f(x)$ має *мінімум* в точці x_0, якщо існує окіл точки x_0 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ такий, що для $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ має *екстремум* в точці x_0, якщо вона має в точці x_0 максимум або мінімум.

Теорема (*необхідна умова екстремуму*) Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 екстремум і якщо існує похідна $f'(x_0)$, тоді $f'(x_0) = 0$.

Зауваження. Умова $f'(x_0) = 0$ (або $f'(x_0)$ не існує) є лише необхідною, але не є достатньою умовою існування екстремуму.

<u>Приклад.</u> $y = x^3$; $y' = 3x^2$; $y'(0) = 0$,
але в околі точки $x_0 = 0$
значення функції $y(0) = 0$
не є найбільшим або найменшим.



<u>Означення 3</u> Точки x_0, в яких $f'(x_0) = 0$ (або $f'(x_0)$ не існує), називаються *критичними*.

Достатні умови екстремуму

Перша достатня умова

Якщо x_0 – критична точка $\left| f'(x_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{не існує} \end{cases} \right|$ і якщо

1) $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) > 0;\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) < 0,$

тоді $f(x_0) - max;$

2) $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f'(x) < 0;\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) > 0,$

тоді $f(x_0) - min;$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)\ f'(x) > 0 \\ 4)\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)\ f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{екстремуму немає.}$$

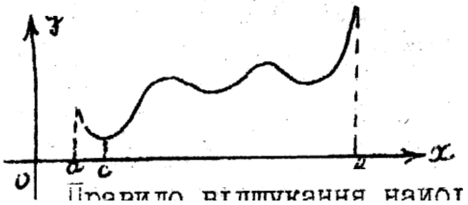
Друга достатня умова

Якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, тоді, якщо:

$$f''(x_0) > 0 \ \Rightarrow f(x_0) - min,$$

$$f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow f(x_0) - max.$$

<u>Зауваження</u>. *Найбільше і найменше значення функції* на сегменті $[a, b]$ містяться або в критичних точках, які розташовані на цьому сегменті, або на кінцях сегмента.



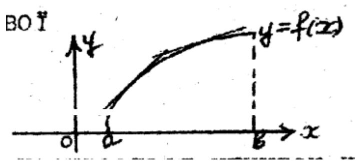
$f(c)$ – найменше
$f(b)$ – найбільше

Правило відшукання найбільшого і найменшого значення функції на сегменті [a, b]

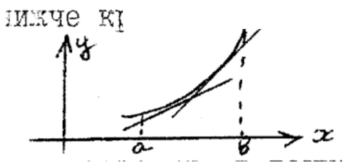
За допомогою похідної знаходимо критичні точки x_0 ($f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує), які містяться на сегменті $[a, b]$.

Далі обчислюємо значення функції у критичних точках $x_0 \in \lfloor a\ ,b \rfloor$ і на кінцях сегмента, тобто $f(x_0)$, $f(a)$, $f(b)$ і обираємо серед них найбільше і найменше.

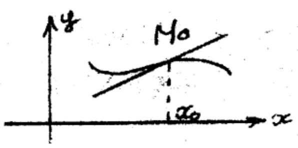
<u>Означення 4</u> Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі $[a,b]$, якщо дотична в кожній відповідній точці кривої розташована вище кривої



Крива $y = f(x)$ називається *увігнутою* на інтервалі $[a,b]$, якщо дотична до кривої в кожній відповідній точці кривої розташована нижче кривої



Крива $y = f(x)$ має *перегин* в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, якщо дотична до кривої в точці M_0 розташована по різні сторони від кривої.



<u>Теорема</u> (*достатня умова опуклості (увігнутості) кривої*)

Якщо $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ – крива $y = f(x)$ опукла в (a, b);
якщо $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ – крива $y = f(x)$ увігнута в (a, b).

Теорема *(необхідна умова перегину)*

Якщо крива $y = f(x)$ має перегин у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тоді

$$f''(x_0) = \begin{cases} 0 \\ \textit{не існує} \end{cases}.$$

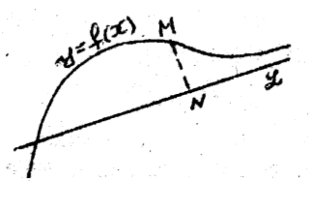
Теорема 1 *(достатня умова перегину)*

Якщо $f''(x_0) = 0$ (або $f''(x_0)$ не існує) і якщо $f''(x) \gtrless 0$ для $\forall x \in \left(x_0 - \delta,\;\; x_0 \right)$, а $f''(x) \gtrless 0$ для $\forall x \in \left(x_0,\;\; x_0 + \delta \right)$, тоді в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ крива $y = f(x)$ має перегин.

Теорема 2 *(достатня умова перегину)*

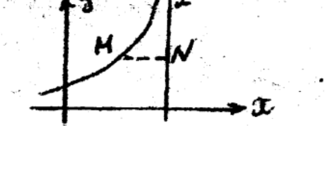
Якщо $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, тоді крива $y = f(x)$ має в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ перегин.

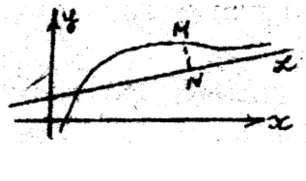
Означення 5 Пряма (L) називається *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо відстань MN від точки M, розташованої на кривій, до прямої (L) прямує до нуля, якщо точка M по кривій $y = f(x)$ прямує до нескінченності



$$M \to \infty \;\; \Rightarrow \;\; MN \to 0.$$

Асимптоти поділяються на вертикальні і похилі.





Рівняння вертикальної асимптоти

$$x = x_0 \qquad \left(x \to x_0,\ y \to \infty\right)$$

(вертикальні асимптоти, як правило, проходять через точки x_0, де функція $y = f(x)$ має нескінченний розрив другого роду).

Похила асимптота має рівняння

$$y = kx + b,$$

де параметри k і b обчислюються за формулами:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

Зауважимо, що крива $y = f(x)$ може мати будь-яку кількість вертикальних асимптот, але не більше ніж дві похилі асимптоти.

2.5 Дослідження функції за допомогою диференціального числення і побудова її графіка за результатами дослідження

Схема дослідження

1 Визначити природну область існування функції $y = f(x)$, типи розривів і те, чи буде мати крива $y = f(x)$ вертикальні асимптоти. Для цього треба визначити ліву і праву границі функції у точках нескінченних розривів другого роду

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0); \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0 + 0).$$

2 Визначити рівняння похилих асимптот

$$y = kx + b, \qquad k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

3 За допомогою похідної $f'(x)$ знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

4 За допомогою похідної другого порядку $f''(x)$ знайти інтервали опуклості, увігнутості і точки перегину кривої (зауважимо, що для правильної побудови графіка функції в околі точки перегину необхідно спочатку побудувати дотичну до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, для чого потрібно обчислити похідну $f'(x_0)$).

5 Якщо в деяких місцях поведінка кривої сумнівна, можна додатково обчислити координати двох (або трьох) точок, які містяться на кривій, наприклад, знайти точки перетину із осями координат.

За результатами дослідження побудувати графік функції $y = f(x)$.

3 Елементи теорії функцій кількох змінних

3.1 Основні поняття

Означення 1 Нехай задані дві множини: множина D точок $M(x, y)$, множина N дійсних чисел z . Якщо відомий закон, за яким кожній точці $M(x, y) \in D$ відповідає певне число $z \in N$, тоді кажуть, що на множині D визначена *функція двох змінних x і y,* яку позначають

$$z = f(x, y) \qquad (\text{або } z = f(M)).$$

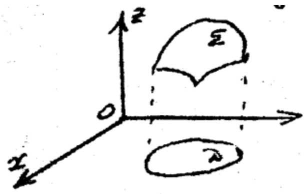
Множина D називається областю визначення функції $z = f(x, y)$, множина N – областю значень функції.

Зауважимо, що точка M може мати три координати (x, y, z), або навіть n координат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і тоді $u = f(M)$ буде функцією трьох або n змінних.

Означення 2 Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ при умові, що $M \to M_0$, якщо для будь–якого малого додатного $\varepsilon > 0$ існує додатне $\delta > 0$ таке, що із нерівності $M_0M < \delta$ випливає нерівність $| f(M) - A| < \varepsilon$, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

Зауважимо, що властивості функції $z = f(M)$, для якої існує границя, майже збігаються з відповідними властивостями функції однієї змінної $y = f(x)$.



З геометричної точки зору функція $z = f(x, y)$ виявляється рівнянням поверхні Σ в просторовій системі координат *XOYZ*.

3.2 Частинні похідні

Означення. Якщо вважати, що один із аргументів *x* або *y* залишається сталим, наприклад, $y = y_0$, тоді функція $z = f(x, y_0)$ виявляється функцією однієї змінної x, і для неї можна за відомими правилами обчислювати похідну в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Такі *похідні* називаються *частинними*

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = z'_x = f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = z'_y = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

де $M_0(x_0, y_0)$.

Частинні похідні від частинних похідних називаються частинними похідними другого порядку. Наприклад:

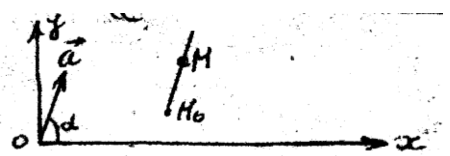
$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy},$$

$$z'''_{xxy} = [\left(z'_x\right)'_x]'_y = f'''_{xxy} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

Якщо похідні вищих порядків обчислюються за різними аргументами, їх називають <u>*мішаними.*</u>

3.3 Похідні у даному напрямі. Градієнт



<u>Означення 1</u> Проведемо із точки M_0 промінь, паралельний до вектора $\vec{a}$. Оберемо на ньому довільну точку M і складемо границю

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} = \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} = f'_{\vec{a}}(M_0)}, \tag{3.1}$$

яку називають *похідною функції* $z = f(M)$ *в точці* M_0 *у напрямі вектора* $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат OX і OY відповідно кути α і $\beta = 90^\circ - \alpha$, тоді похідну у напрямі вектора $\vec{a}$ обчислюють за формулою ($\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ та одночасно координати його одиничного вектора $\vec{e}_{\vec{a}}$

$$\boxed{f'_{\vec{a}}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta}. \tag{3.2}$$

<u>Означення 2</u> Розглянемо новий вектор, координати якого дорівнюють $\left(f'_x(M_0), f'_y(M_0)\right)$. Такий вектор називається *градієнтом* функції $z = f(M)$ у точці M_0

$$\boxed{grad\ f\ \Big|_{M_0} = f'_x(M_0)\cdot\vec{i} + f'_y(M_0)\cdot\vec{j}}. \tag{3.3}$$

3.4 Екстремум функції двох змінних

Означення 1 Функція $z = f(M)$ має *максимум* в точці M_0, якщо існує δ – окіл точки M_0 ($M_0M < \delta$) такий, що для будь-якої точки M із цього околу виконується нерівність

$$f(M) < f(M_0).$$

Означення 2 Функція $z = f(M)$ має *мінімум* в точці M_0, якщо існує δ – окіл точки M_0 ($M_0M < \delta$) такий, що для будь-якої точки M із цього околу виконується нерівність

$$f(M) > f(M_0).$$

Означення 3 Максимум або мінімум функції $z = f(M)$ називають *екстремумом*.

Теорема (*необхідна умова екстремуму*)

Якщо функція $z = f(M)$ має в точці M_0 екстремум і якщо існують частинні похідні $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, тоді

$$f'_x(M_0) = 0, \qquad f'_y(M_0) = 0.$$

Зауваження. Твердження попередньої теореми не є достатніми для існування екстремуму.

Дійсно, функція $z = x^2 - y^2$ в точці $M_0(0, 0)$ має частинні похідні

$$z'_x\Big|_{M_0} = 2x\Big|_{M_0} = 0; \; z'_y\Big|_{M_0} = -2y\Big|_{M_0} = 0,$$

але значення функції $z(M_0) = 0$ не буде найбільшим або найменшим в околі точки M_0.

Із попередньої теореми випливає, що екстремум розташовується лише в точках $M_0(x_0, y_0)$, в яких частинні похідні або дорівнюють нулю, або не існують.

Такі точки називаються *критичними* (якщо $f'_x(M_0)=0$, $f'_y(M_0)=0$ – точку M_0 називають *стаціонарною*), але не в кожній критичній точці функція $z = f(M)$ має екстремум.

<u>Теорема</u> (*достатня умова екстремуму*)

Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ $f'_x(M_0)=0$, $f'_y(M_0)=0$ (M_0 – стаціонарна точка) і якщо визначник другого порядку в точці M_0

$$H(M_0)=\left.\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}\right|_{M_0}$$

більший за нуль $H(M_0)>0$, тоді в точці M_0 функція $z = f(M)$ має екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0)<0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0)>0$.

Якщо $H(M_0)<0$, функція $z = f(M)$ в точці M_0 екстремуму не має.

Якщо $H(M_0)=0$, ситуація з екстремумом в точці M_0 не визначена.

3.5 Метод найменших квадратів

Якщо в результаті експерименту отримана множина значень деякої функції $y = f(x)$, які відповідають відомим значенням аргументу, постає питання знаходження аналітичного виразу для цієї функції.

Як правило, цей вираз шукають у вигляді багаточленів різних степенів з невідомими поки що коефіцієнтами

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ можна відшукати, використовуючи таку вимогу: *сума квадратів відхилень спостережених значень функції від аналітичних значень при даних значеннях аргументу повинна бути найменшою, тобто функція*

$$S(a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{k} \left[y_i - \left(a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + ... + a_n \right) \right]^2 \qquad (*)$$

(n+1) змінної $a_0, a_1, ..., a_n$ *повинна мати мінімум.*

Обчислюючи з цією метою частинні похідні за аргументами $a_0, a_1, ..., a_n$ і дорівнюючи їх нулю

$$\begin{cases} S'_{a_0} = 0 \ , \\ S'_{a_1} = 0 \ , \\ .... \\ S'_{a_n} = 0 \ , \end{cases} \qquad (**)$$

ми отримаємо систему, яка складається з (n+ 1) лінійного рівняння відносно невідомих коефіцієнтів.

Цей метод отримання наближеного аналітичного виразу шуканої функції $y = f(x)$ називається *методом найменших квадратів*.

Найпростіший випадок, коли функція $y = f(x)$ шукається у вигляді многочлена першого степеня, тобто $y = ax + b$.

В цьому випадку функція S у рівнянні (*) залежить лише від двох змінних a і b :

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 ,$$

а система (**) складається з двох рівнянь:

$$S'_a = \left\{ \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 \right\}'_a = \sum_{i-1}^{5} 2 \left[y_i - (ax_i + b) \right] (-x_i) = 0 \, ,$$

$$S'_b = \left\{ \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 \right\}'_b = \sum_{i-1}^{5} 2 \left[y_i - (ax_i + b) \right] (-1) = 0 \, .$$

Таким чином, для відшукання параметрів a і b потрібно розв'язати систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i + 5b = \sum_{i=1}^{5} y_i. \end{cases} \qquad (***)$$

Для зручності обчислення коефіцієнтів при невідомих a і b і вільних членів системи (***) складають таблицю 3.1.

Таблиця 3.1

i	1	2	3	4	5	
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Σx_i
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Σy_i
x_i^2	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	x_5^2	Σx_i^2
$x_i y_i$	$x_1 y_1$	$x_2 y_2$	$x_3 y_3$	$x_4 y_4$	$x_5 y_5$	$\Sigma x_i y_i$

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1

1 Обчислити границі функцій:

$$а)\lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2};$$

$$б)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2};\qquad в)\ \lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}};$$

$$г)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}\ ;\quad д)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3-2x}.$$

Завдання 2

1 Обчислити похідні таких функцій:

$$а)\ y=\ell n\left(\sqrt{2}\ tgx+\sqrt{\cos 2x}\right);\qquad б)\ y=\frac{\ell n\ x}{(x^2+3)\sqrt{x-1}};$$

$$в)\ y=(\sin 2x)^{x^2};$$

$$г)\ x\cdot\sin\ y+y\cdot\sin\ x=0,\ \ y'=?;\qquad д)\ \begin{cases}x=t-\sin t\\ t=2-\cos t\end{cases}\quad y'_x=?$$

2 Знайти диференціал dy функції y, якщо

$$y=\ell n\left|x^2-1\right|-\frac{1}{x^2-1}.$$

3 Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{1}{3x+2}$ у точці, абсциса якої дорівнює $x_0=2$.

4 Знайти похідну другого порядку від функції

$$y = (3x-7)\cdot 5^x, \quad y'' = ?$$

5 Знайти найбільше і найменше значення функції на сегменті:

$$y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5} \quad , \quad [-5;1] \; .$$

6 Провести повне дослідження функції за допомогою диференціального числення і побудувати її графік, якщо

$$y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 .$$

7 Обчислити границі функції, використовуючи правила Лопіталя:

$$а)\; \lim_{x\to 0} \frac{\ell n\, sin\, x}{\ell n\, x}; \qquad б)\; \lim_{x\to 0} (tg\; x)^{x^2} .$$

Завдання 3

1 Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} \; .$$

2 Для функції $z = \ell n(4x^2 - 5y)$ довести, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

3 Знайти:

а) $grad\; z$ в точці A ; *б*) похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$, якщо

$$z = arccos(xy), \qquad A(½, ½), \;\; \vec{a} = \vec{i} - 7\vec{j} \; .$$

4 Знайти екстремум функції

$$z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 3x + 2y - 1.$$

5 Експериментально отримано п'ять значень шуканої функції $y = f(x)$ при п'яти значеннях аргументу, які розташовані в таблиці. Методом найменших квадратів знайти функцію $y = f(x)$ у вигляді багаточлена першого порядку $y = ax + b$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	3,9	4,2	5,0	4,8

Розв'язання

Завдання 1

1 Обчислити границі функцій

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}.$$

Використаємо означення і правила підрозділу 1.1.

У нашому прикладі розшукується границя частки двох послідовностей, але використати правило отримання границі частки в нашому випадку неможливо, тому що границя знаменника не існує $(\to\infty)$. Крім того, границя чисельника теж не визначена $(\to|\infty\ -\infty|)$.

Тому спочатку перетворимо чисельник, використовуючи відому алгебраїчну формулу

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[(x+7)-(x+2)]\left[(x+7)^2+(x+7)(x+2)+(x+2)^2\right]}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\left[(x+7)^2+(x+7)(x+2)+(x+2)^2\right]}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(Ми бачимо тепер, що чисельник теж прямує до нескінченності, тобто ми маємо невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

Застосовуючи далі зв'язок між нескінченно великою величиною $x\to\infty$ і нескінченно малою $\frac{1}{x}\to 0$, поділимо чисельник і знаменник на старший степінь знаменника, тобто на x^2)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\left[\left(1+\frac{7}{x}\right)^2+\left(1+\frac{7}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)+\left(1+\frac{2}{x}\right)^2\right]}{\left(3+\frac{2}{x}\right)^2+\left(4+\frac{1}{x}\right)^2}=$$

(але $\frac{7}{x}\to 0,\ \frac{2}{x}\to 0,\ \frac{1}{x}\to 0$ і тому залишається)

$$=\frac{5\left[1^2+1\cdot 1+1^2\right]}{3^2+4^2}=\frac{5\cdot 3}{25}=\frac{3}{5}.$$

Таким чином,

$$\underline{\lim_{x\to\infty}\frac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}=\frac{3}{5}.}$$

$$б)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}.$$

Використаємо формули і означення підрозділу 1.2, а саме: чисельник і знаменник дробу мають границі, які дорівнюють нулю, тобто ми маємо справу з невизначеністю $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Перетворимо чисельник цього дробу так, щоб він став добутком двох множників

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-4x\right)+\left(x-2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^2-4\right)+\left(x-2\right)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)+(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left[x(x+2)+1\right]}{\cancel{x-2}}=$$

(скоротимо далі дріб на $(x-2)$, вважаючи, що $x\to 2$, але $x\neq 2$, і тоді $x-2\neq 0$)

$$=\lim_{x\to 2}\left[x(x+2)+1\right]=2\cdot 4+1=9.$$

Таким чином,

$$\underline{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=9.}$$

$$\text{в) }\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Помножимо чисельник і знаменник на $\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x}{9}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{x}{9}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)$, щоб використати відому алгебраїчну формулу $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$ і знищити корені у чисельнику.

Одночасно помножимо знаменник і чисельник дробу на суму $\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}$, щоб використати формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ і знищити корені у знаменнику

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{9}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{9}}+\frac{1}{9}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{9}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{9}}+\frac{1}{9}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\left[\frac{x}{9}-\frac{1}{3^3}\right]\left(\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{9}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{9}}+\frac{1}{9}\right)\left[\left(\frac{1}{3}+x\right)-2x\right]}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{9}\cancel{\left(x-\frac{1}{3}\right)}\left(\sqrt{\frac{1}{3}+x}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{9}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{9}}+\frac{1}{9}\right)\left[-\cancel{\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right]}=$$

(знову скорочуємо дріб на $\left(x-\frac{1}{3}\right)$, вважаючи, що $x\to\frac{1}{3}$, але $x\neq\frac{1}{3}$, і переходимо у залишку дробу на границі частки)

$$=\frac{\frac{1}{9}\left(\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+\sqrt{2\cdot\frac{1}{3}}\right)}{-\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{9\cdot 3}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{9\cdot 3}}+\frac{1}{9}\right)}=-\frac{\frac{1}{9}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{-2\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$г)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}.$$

Перетворимо чисельник, використовуючи властивості функції $\sin x$:

$$\sin 5(x+\pi)=\sin(5x+5\pi)=\sin(5x+\pi)=-\sin 5x.$$

Ми бачимо, що $\sin 5x$ і $\left(e^{3x}-1\right)$ є нескінченно малими функціями в околі точки x_0= 0. Використовуючи зауваження до означення 4 підрозділу 1.2, ми можемо замінити $\sin 5x$ і $\left(e^{3x}-1\right)$ еквівалентними нескінченно малими функціями $\sin 5x\sim 5x$ і $e^{3x}-1\sim 3x$; тоді після скорочення дробу на x ($x\neq 0$) отримаємо результат

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{3x}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=-\frac{5}{3}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x}-1}=-\frac{5}{3}.$$

$$д)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3-2x}.$$

Перейдемо у дробі, який розташовано в дужках, від нескінченно великих $x\to\infty$ до нескінченно малих $\frac{1}{x}\to 0$, поділяючи чисельник і знаменник цього дробу на *x*. Одночасно використаємо властивості показника степеня і запишемо вираз так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{3}}\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{-2x}=$$

(далі використовуємо властивість функцій, які мають границі, а саме: границя добутку дорівнює добутку границь)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-2x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-2x}}=1\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-2x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-2x}}=$$

(перший множник має границю 1, тому що $\frac{2}{x}\to 0,\ -\frac{3}{x}\to 0$, а далі границя частки дорівнює частці границь, і за формулою (1.6) підрозділу 1.2 отримаємо результат)

$$=\frac{e^{2(-2)}}{e^{(-3)(-2)}}=\frac{e^{-4}}{e^{6}}=e^{-4}\cdot e^{-6}=e^{-10}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3-2x}=e^{-10}.$$

Завдання 2

1 Обчислити похідні функцій

$$а)\ y = \ell n\left(\sqrt{2}\ tgx + \sqrt{\cos\ 2x}\right).$$

Для розв'язання задачі використовуємо таблицю 2.1 і правило диференціювання складеної функції (підрозділ 2.1)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}tgx + \sqrt{\cos 2x}} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2\right).$$

$$б)\ y = \frac{\ell n\ x}{\left(x^2 + 3\right)\sqrt{x-1}}.$$

Для спрощення обчислень похідної спочатку прологарифмуємо (підрозділ 2.1) обидві частини рівності і використаємо відповідні властивості логарифмів

$$\underline{\ell n\ y} = \ell n\left(\frac{\ell n\ x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x-1}}\right) = \underline{\ell n\ (\ell n\ x) - \ell n\ \left(x^2+3\right) - \frac{1}{2}\ell n\ (x-1)}.$$

Далі обчислюємо похідну від обох частин підкресленої рівності, вважаючи y функцією від аргументу x (тобто $\ell n\ y$ – складена функція)

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\ell n\ x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Із основної рівності знаходимо y'

$$y' = \left[\frac{1}{x\ell n\ x} - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{2(x-1)}\right] \cdot y,$$

або

$$y' = \left[\frac{1}{x\ell n\, x} - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{2(x-1)}\right] \cdot \frac{\ell n\, x}{(x^2+3)\cdot\sqrt{x-1}}.$$

в) $y = (\sin 2x)^{x^2}$.

Знову використовуємо попереднє логарифмування

$$\underline{\ell n\; y} = \ell n(\sin 2x)^{x^2} = \underline{x^2 \cdot \ell n \sin 2x},$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ell n \sin 2x + x^2 \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2,$$

$$y' = \left(2x \cdot \ell n \sin 2x + 2x^2 ctg 2x\right) y,$$

або

$$\underline{y' = \left(2x \cdot \ell n \sin 2x + 2x^2 ctg 2x\right) \cdot (\sin 2x)^{x^2}}.$$

г) $x\;\sin y + y\;\sin x = 0, \quad y' = ?$

Використовуємо правило відшукування похідної неявної функції (зауваження підрозділу 2.1), тобто знаходимо похідну обох частин рівності, вважаючи y функцією від x:

$$1 \cdot \sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x = 0,$$
$$y'(x\cos y + \sin x) = -(\sin y + y\cos x),$$
$$\underline{y' = -\frac{\sin y + y\cos x}{x\cos y + \sin x}}.$$

д) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases} \quad y'_x = ?$

За таблицею 2.1 (підрозділ 2.1) похідна функції, яка задається у параметричній формі, дорівнює $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, тобто

$$\underline{y'_x = \frac{(2-\cos t)'_t}{(t-\sin t)'_t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.}$$

2 Знайти диференціал dy функції y, якщо

$$y = \ell n\left(x^2-1\right) - \frac{1}{x^2-1}.$$

За підрозділом 2.2 диференціал функції дорівнює у точці x

$$dy = f'(x)dx\,.$$

Обчислюємо похідну даної функції

$$f'_x = y' = \left\{\ell n\left(x^2-1\right) - \frac{1}{x^2-1}\right\}' = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x - (-1)\left(x^2-1\right)^{-2}\cdot 2x =$$

$$= \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} = 2x\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Тоді

$$\underline{dy = \frac{2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}\cdot dx.}$$

3 Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \frac{1}{3x+2}$ у точці, абсциса якої дорівнює $x_0 = 2$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

тому обчислимо $f(x)$ і $f'(x_0)$:

$$f(x_0)=y\big|_{x_0=2}=\frac{1}{3\cdot 2+2}=\frac{1}{8},$$
$$f'(x_0)=y'\big|_{x_0=2}=-\frac{3}{(3x+2)^2}\bigg|_{x_0=2}=-\frac{3}{(3\cdot 2+2)^2}=-\frac{3}{64}.$$

Далі рівняння дотичної має вигляд

$$y-\frac{1}{8}=-\frac{3}{64}(x-2)$$

або

$$\underline{y=-\frac{3}{64}x+\frac{7}{32}.}$$

4 Знайти похідну другого порядку від функції

$$y=(3x-7)\cdot 5^x \qquad y''=?$$

За означенням 2 (підрозділ 2.2)

$$y''=(y')',$$

тому обчислюємо спочатку y' як похідну добутку, а потім вже похідну від похідної

$$y'=3\cdot 5^x+(3x-7)5^x\ell n5=[3+\ell n5(3x-7)]\cdot 5^x,$$
$$y''=(y')'=\{[3+\ell n5(3x-7)]5^x\}'=$$
$$=3\ell n5\cdot e^x+[3+\ell n5(3x-7)]5^x\cdot \ell n5.$$

Таким чином,

$$\underline{y''=[6+\ell n5(3x-7)]5^x\cdot \ell n5.}$$

5 Знайти найбільше і найменше значення функції y на сегменті, якщо

$$y=-\frac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5} \qquad ,[-5;1].$$

За правилами (підрозділ 2.4) найбільше і найменше значення функції на сегменті $[a,\ b]$ розташовані або в критичних точках, які містяться на цьому сегменті, або на його кінцях.

Знайдемо спочатку критичні точки даної функції, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y'=-2\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+5}\right)'=-2\frac{2x\left(x^2+2x+5\right)-\left(x^2+3\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=$$

$$=-4\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=-4\frac{(x-1)(x+3)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$x_1=-3; \qquad\qquad x_2=1.$$

Знаменник дробу завжди не дорівнює нулю і тому критичних точок, для яких не існує похідна, для даної функції нема.

Таким чином, функція $y=-\dfrac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5}$ має дві критичні точки, причому обидві належать сегменту $[-5;\ 1]$.

Далі обчислюємо значення функції y в критичних точках і на кінцях сегмента: $y(-5)$, $y(-3)$, $y(1)$

$$y(-5)=-2\cdot\frac{(-5)^2+3}{(-5)^2+2\cdot(-5)+5}=-2\cdot\frac{28}{20}=-\frac{14}{5}=-2{,}8;$$

$$y(-3)=-2\cdot\frac{(-3)^2+3}{(-3)^2+2\cdot(-3)+5}=-2\cdot\frac{12}{8}=-3\ ;$$

$$y(1)=-2\cdot\frac{1^2+3}{1^2+2\cdot1+5}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1.$$

А також обираємо серед них <u>найменше</u>

$$\underline{y(-3)=-3}$$

і <u>найбільше</u>

$$\underline{y(1)=-1.}$$

6 Провести повне дослідження функції за допомогою диференціального числення і побудувати її графік, якщо

$$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2.$$

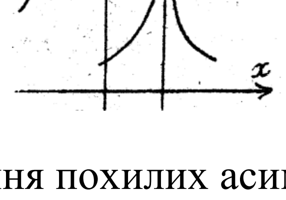
Використаємо схему дослідження підрозділу 2,5.

1 Природна область існування функції y – вся числова вісь за виключенням точки x= 1. В точці x= 1 функція y має нескінченний розрив другого роду, а її графік – вертикальну асимптоту.

Дослідимо поведінку функції в околі точки розриву, для чого обчислимо ліву і праву границі

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=+\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=+\infty$$

Графік функції біля вертикальної асимптоти наведено нижче



2 Знайдемо рівняння похилих асимптот за формулами

$$y = kx + b;\ k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^3-2x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}+4\cdot\frac{1}{x^3}}{1-2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

(ми поділили чисельник і знаменник дробу на x^3 – найбільший степінь знаменника, і перейшли від нескінченно великих величин $x \to \infty$ до нескінченно малих $\frac{1}{x} \to 0$);

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = 1.$$

Таким чином, крива має похилу асимптоту з рівнянням

$$y = 0\cdot x + 1, \quad \text{або} \quad \underline{y = 1.}$$

3 За допомогою похідної y' знайдемо інтервали монотонності і точки екстремуму

$$y' = \left\{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\right\}' = 2\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = -6\frac{x+2}{(x-1)^3}.$$

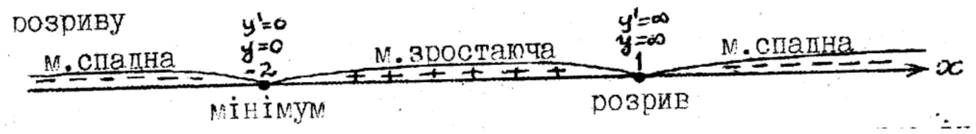
Наша функція має дві критичні точки

$$x = -2(y' = 0);\ \ x = 1(y' = \infty).$$

Далі рисуємо схему, яка допоможе з’ясувати, які саме інтервали монотонності і чи буде в критичних точках екстремум?

В інтервалі $(-\infty, -2)$ $y' < 0$ і тому на цьому інтервалі функція монотонно спадає; в інтервалі $(-2,\ 1)$ $y' > 0$ і функція монотонно зростає; у критичній точці $x=-2$ знак похідної змінюється з„– “ на „+ “, тобто за першою достатньою ознакою екстремуму (підрозділ 2.4) у цій точці функція y має мінімум.

Далі в інтервалі $(1,+\infty)$ $y'<0$ – функція монотонно спадає, але не зважаючи на те, що в критичній точці $x=1$ знак похідної змінився, у цій точці нема екстремуму, тому що це точка розриву.



4 За допомогою похідної другого порядку визначимо інтервали опуклості, увігнутості і точки перегину кривої.

$$y''=(y')'=\left\{-6\frac{x+2}{(x-1)^3}\right\}'=-6\frac{1\cdot(x-1)^3-(x+2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$

$$=-6\frac{(x-1)^2[x-1-3(x+2)]}{(x-1)^6}=-6\frac{-2x-7}{(x-1)^4}=12\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)^4}.$$

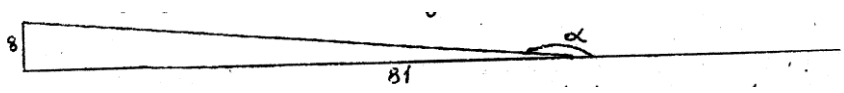
Очевидно, $y''=0$, якщо $x=-\frac{7}{2}$, і $y''=\infty$, якщо $x=1$, тобто $x_1=-\frac{7}{2}$, $x_2=1$ – критичні точки другого роду, у відповідних точках кривої можливо буде перегин, але зауважимо знову, що в точці $x=1$ – розрив.

Далі знаходимо інтервали, в яких y'' зберігає свій знак: в інтервалі $\left(-\infty,\ -\frac{7}{2}\right)$ $y''<0,$ тобто крива опукла в ньому, в інтервалі $\left(-\frac{7}{2},\ 1\right)$ $y''>0$ і крива увігнута в ньому, в інтервалі $(1,\ +\infty)$ $y''>0$ і крива увігнута.

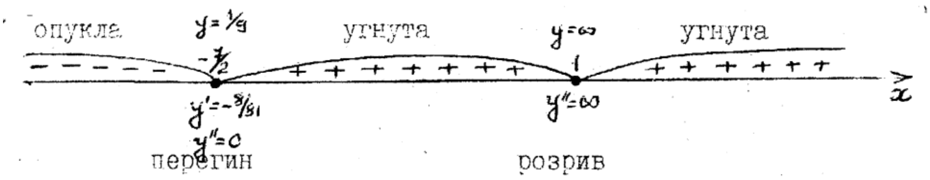
За першою достатньою умовою перегину (підрозділ 2.4) в точці $M_0\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{9}\right)$ крива має перегин. Для його правильного будування обчислимо значення похідної першого порядку в точці $\left(-\frac{7}{2}\right)$.

$$y'\left(-\frac{7}{2}\right)=-6\frac{-\frac{7}{2}+2}{\left(-\frac{7}{2}-1\right)^3}=-6\frac{-\frac{3}{2}}{\left(-\frac{9}{2}\right)^3}=-\frac{8}{81}.$$

y' визначає кут нахилу дотичної до кривої в точці перегину (пряму, паралельну дотичній, можна накреслити окремо за допомогою трикутника $y'=k=tg\alpha=-\frac{8}{81}$).



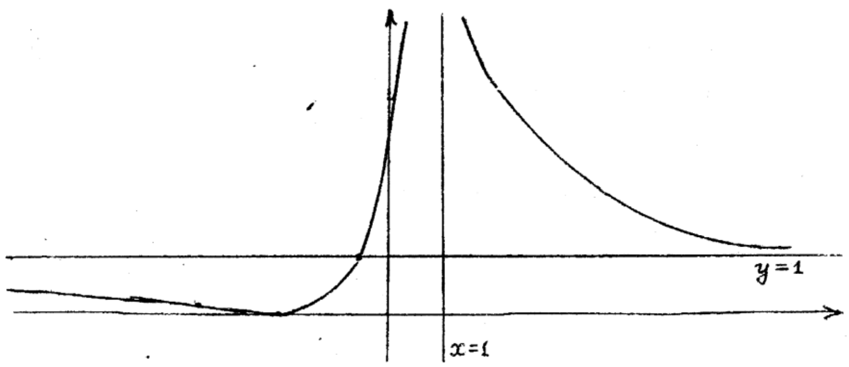
Всі відомості, які ми отримали в пункті 4, можна зобразити на схемі, наведеній нижче:



5 Обчислимо ще точки перетину кривої з осями координат OX і OY і з горизонтальною асимптотою $y=1$: з віссю OX: $y=0;x=-2$; з віссю OY: $x=0;y=4;$ з асимптотою $y=1$:

$$1=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\Rightarrow\frac{x+2}{x-1}=-1\Rightarrow x+2=-x+1\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

За результатами дослідження будуємо графік функції y в такій послідовності: а) будуємо асимптоти; б) будуємо точки екстремуму; в) будуємо точки перегину, починаючи з побудови дотичної; г) будуємо точки перетину кривої з осями координат і асимптотою $y=1$; д) з’єднуємо ці точки плавною кривою, враховуючи її монотонність, опуклість і увігнутість, а також поведінку в околі вертикальної асимптоти.



6 Обчислити границі функцій, використовуючи правила Лопіталя (підрозділ 2.3):

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n\sin x}{\ell nx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\ell n\sin x)'}{(\ell nx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\cdot 1=1;$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\ell n\sin x}{\ell nx}=1.}$$

б) $$\lim_{x\to 0}(tgx)^{x^2}=\left[0^0\right]=A.$$

Позначимо шукану границю через A і знайдемо спочатку ℓnA:

$$\underline{\underline{\ell n A}} = \ell n \lim_{x\to 0} (tgx)^{x^2} = \lim_{x\to 0} \ell n (tgx)^{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[x^2 \cdot \ell n tgx\right] =$$

$$= \left[0 \cdot \infty\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ell n tgx}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\wedge}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ell n tgx)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\frac{x^3}{\cos x \cdot \sin x}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}.$$

Таким чином, $\ell n A = 0$, тобто $A = e^0 = 1$;

$$\underline{\lim_{x\to 0} (tgx)^{x^2} = 1.}$$

Завдання 3

1 Знайти і зобразити на рисунку область визначення функції

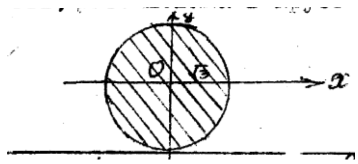
$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$$

Функція z буде існувати (підрозділ 3.1), якщо підкореневий вираз буде невід’ємним, тобто

$$3 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 3 \quad \text{або} \quad \underline{x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Множина точок $M(x, y)$, яка задовольняє підкреслену нерівність, розташована в крузі радіуса $\sqrt{3}$ з центром у точці $O(0{,}0)$.

Точки кола $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ теж належать області визначення функції



$$\underline{z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}}.$$

2 Для функції $z = \ell n\left(4x^2 - 5y^2\right)$ довести, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Використовуємо означення (підрозділ 3.2) похідних другого порядку, а саме: $z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y, z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x$, і обчислюємо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{1}{4x^2 - 5y^2} \cdot 4 \cdot 2x = \frac{8x}{4x^2 - 5y^2};$$

$$z'_y = \frac{1}{4x^2 - 5y^2}\left(-5 \cdot 2y\right) = -\frac{10y}{4x^2 - 5y^2}.$$

Далі обчислюємо мішані частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(\frac{8x}{4x^2 - 5y^2}\right)'_y = \frac{0\left(4x^2 - 5y^2\right) - 8x(-10y)}{\left(4x^2 - 5y^2\right)^2} = \frac{80xy}{\left(4x^2 - 5y^2\right)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(\frac{-10y}{4x^2 - 5y^2}\right)'_x = \frac{0\left(4x^2 - 5y^2\right) - (-10y)8x}{\left(4x^2 - 5y^2\right)^2} = \frac{80xy}{\left(4x^2 - 5y^2\right)^2}.$$

Таким чином, дійсно

$$\underline{z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{80xy}{\left(4x^2 - 5y^2\right)^2}.}$$

3 Знайти: а) $grad\ z$ в точці *А*; б) похідну в точці *А* у напрямі вектора $\vec{a}$, якщо

$$z = \arccos(xy),\ A\left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right),\ \vec{a} = \vec{i} - 7\vec{j}.$$

а) $grad\ z$ обчислюється за формулою (3.3) підрозділу 3.2

$$grad\ z\Big|_A = z'_x\Big|_A \cdot \vec{i} + z'_y\Big|_A \cdot \vec{j},$$

тому обчислимо частинні похідні в точці A (зауважимо, що при обчисленні частинної похідної за аргументом x вважаємо, що в цей момент аргумент y відіграє роль сталої величини; для частинної похідної за аргументом y так само себе поводить аргумент x):

$$z'_x\Big|_A = -\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\cdot y\Big|_A = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{2}{\sqrt{15}};$$

$$z'_y\Big|_A = -\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\cdot x\Big|_A = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{15}},$$

тобто

$$\underline{grad\ z\Big|_A = -\frac{2}{\sqrt{15}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{15}}\vec{j}.}$$

б) Похідна функції $z = f(M)$ у точці M_0 у напрямі вектора $\vec{a}$ обчислюється за формулою (3.2) підрозділу 3.2

$$f'_{\vec{a}}(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta.$$

У нашому випадку ця формула виглядає так:

$$z'_{\vec{a}}(A) = z'_x(A)\cos\alpha + z'_y(A)\cos\beta.$$

Частинні похідні ми вже визначили в пункті а), залишилося знайти $\cos\alpha$ і $\cos\beta$

$$\cos\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}};$$

$$\cos\beta = -\frac{7}{|\vec{a}|} = -\frac{7}{\sqrt{50}} = -\frac{7}{5\sqrt{2}};$$

$$z'_{\vec{a}}(A) = -\frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{15}}\left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{12}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}};$$

$$\underline{z'_{\vec{a}}(A) = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}.}$$

4 Знайти екстремум функції

$$z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 3x + 2y - 1.$$

Користуючись правилами підрозділу 3.4, знайдемо спочатку критичні точки, тобто точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю або не існують (саме в цих точках може міститися екстремум функції):

$$z'_x = 4x - 3y - 3; \qquad z'_y = -3x + 10y + 2.$$

Розв’язуємо систему

$$\begin{cases} 4x - 3y - 3 = 0 \\ -3x + 10y + 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 31y - 1 = 0 \\ 31x - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1/31 \\ x = 24/31 \end{matrix}$$

і отримуємо координати критичної точки

$$M_0\left(24/31; 1/31\right).$$

Далі перевіряємо за допомогою достатньої умови існування екстремуму, чи буде в точці M_0 екстремум. З цією метою обчислюємо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(4x - 3y - 3\right)'_x = 4;$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x - 3y - 3\right)'_y = -3;$$
$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-3x + 10y + 2\right)'_x = -3;$$
$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-3x + 10y + 2\right)'_y = 10,$$

складаємо визначник другого порядку з цих похідних в точці M_0. У нашому випадку частинні похідні другого порядку виявляються сталими величинами і тому

$$H\left(M_0\right) = H = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 9 = 31 > 0.$$

Таким чином, в критичній точці $M_0\left(24/31;\, 1/31\right)$ функція z має <u>мінімум,</u> тому що $z''_{xx}\big|_{M_0} = 4 > 0.$

Обчислимо мінімальне значення функції

$$z_{\min} = 2\left(\frac{24}{31}\right)^2 - 3\cdot\frac{24}{31}\cdot\frac{1}{31} + 5\left(\frac{1}{31}\right)^2 - 3\cdot\frac{24}{31} + 2\cdot\frac{1}{31} - 1 = -\frac{2046}{961}.$$

5 Експериментально отримано п’ять значень шуканої функції $y = f(x)$ при п’яти значеннях аргументу, які розташовані у нижченаведеній таблиці. Методом найменших квадратів знайти функцію $y = f(x)$ у вигляді багаточлена першого порядку $y = ax + b$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	3,9	4,2	5,0	4,8

Для відшукання параметрів a і b складаємо систему (***) підрозділу 3.5, а саме:

$$(***)\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i + 5b = \sum_{i=1}^{5} y_i. \end{cases}$$

Для обчислення коефіцієнтів цієї системи складаємо таблицю.

i	1	2	3	4	5	Σ
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	4	3,9	4,2	5,0	4,8	21,9
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$x_i y_i$	4	7,8	12,6	20	24	68,4

Тобто система (***) має вигляд

$$\begin{cases} 55a + 15b = 68{,}4; \\ 15a + \ \ 5b = 21{,}9. \end{cases}$$

Розв’язуємо її методом алгебраїчного додавання

$$\begin{cases} 55a + 15b = 68{,}4 \\ 15a + \ \ 5b = 21{,}9 \end{cases}\left|\begin{matrix} \\ -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 \\ -11 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 10a = 68{,}4 - 21{,}9 \cdot 3 = 2{,}7 \\ -10b = 68{,}4 \cdot 3 - 21{,}9 \cdot 11 = -35{,}7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}27; \\ b = 3{,}57. \end{cases}$$

Таким чином, аналітичний вираз функції $y = f(x)$ такий:

$$\underline{y = 0{,}27x + 3{,}57.}$$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Завдання 1

Обчислити границі функцій.

1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{3x^2-5x}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$	в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n\left(x^2+1\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$	д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	
2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+1}+\sqrt[3]{x^6-3}}{\sqrt{3x^3+5}+\sqrt[3]{3x^5+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{17-x}-4}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\sin 3x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2+1}$	
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2+(x+1)^2}{(x+3)^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$	в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2-3}-1}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg3x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}$	
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2+(x+1)^2}{(x+3)^3-(x-1)^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$	в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2-9}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3(x+\pi)}{\sin 2x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{3x-1}$	
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+1}{3x^2+7x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$	
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^3+15x}$	б) $\lim\limits_{x\to +1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$	в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+a)-\sin(a-x)}{x}$	д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$	

7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3-(x-2)^3}{5x^2+4}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$	
8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^4+2x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	
	в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{2+\sqrt[3]{x-6}}$	г) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2 x}{\alpha^2-x^2}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$
9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+5x+5}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$
	г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x+2a}{x+a}\right)$	
10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3+3x+1}{x^3-x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-5x-14}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$
	г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$	д) $\lim\limits_{x\to0}(1+tgx)^{2ctgx}$	
11	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^4-1}+\sqrt[3]{3x^6+1}}{3x^2+7}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$	
12	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{5x^6-1}}{7x^2+x}$	б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-16}$	
	в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-1}{xtg2x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^{5x^2-1}$

13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+5^x}{2^{x+1}+5^{x+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-5x^2+x-1}{x^3-x^2+4x-4}$	в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-4}\right)^{3x-1}$	
14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{3x^4-2x+5}}{17x^2-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$
	г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{x-a}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{3x+1}$	
15	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x+3^x}{4^{x+1}+3^{x+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
	г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$	д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$	
16	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+4}{4x^4+x^3-1}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-7x+10}$	в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x+5}-2\sqrt{2}}$
	г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ctgx-ctga}{x-a}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}.\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$	
17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2+2}{3x^4-x^2+1}$	б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-17x+72}{x^2-64}$	в) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
	г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$	
18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-5x^3+7}{7x^3-3}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$	в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
	г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{3x+4}$	

№	а)	б)	в)	г)	д)
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+4}{3x^3+x-7}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3-3x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{5x^8-3x^5}}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-13x+40}{x^2-14x+48}$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x}-2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\left(x^2\right)}{5x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)^{4\sqrt[3]{x}+1}$
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x+8^x}{5^{x+1}+8^{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-8x-7}$	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x^2+15}-5}$	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\arcsin(x+3)}{4(x+3)}$	$\lim\limits_{x\to0}(1+5\sqrt{x})^{\frac{1}{3\sqrt{x}}}$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^3-(x-4)^3}$	$\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-3x+40}{x^2-4x-45}$	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{\sqrt{6-x}-3}$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{arctg(x+2)}{5(x+2)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+1}\right)^{x^2+5}$
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+5^x}{2^{x+1}+5^{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-2x-24}{x^2-3x-28}$	$\lim\limits_{x\to2\sqrt{6}}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-7}{\sqrt{x^2+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg 5x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{5\sqrt[4]{x}+4}$
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^6-7x^5+4}}{\sqrt{3x^4-5x^3}}$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-6x-16}$	$\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x^2-36}-8}{\sqrt{x-1}-3}$	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\arcsin(x+1)}{5(x+1)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5\sqrt[3]{x}}$

25	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3x^8+1}-\sqrt{5x^4+1}}{5x^2+8}$	б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x-24}$	в) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{x^2+36}-10}{\sqrt{x+1}-3}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{tg^2\frac{x}{2}}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{5x+1}$	
26	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3-(x+1)^3}{(x+3)^2}$	б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-1}$	в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2-1}-2}{\sqrt{x^2+4}-3}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{x^2}$	д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{5\sqrt{x}+4}$	
27	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{4^{x+1}+5^{x+1}}$	б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-12x+35}{x^2-49}$	в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{9-x}-2}{\sqrt{x^2-9}-4}$
	г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$	д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}}}$	
28	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^6-7x^5+4}}{\sqrt{3x^4-5x^3}}$	б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-4x-21}{x^2+x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x-2}-5}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{5x}$	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{3x+4}$	
29	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3x^8+1}-\sqrt{5x^4+1}}{5x^2+8}$	б) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$	в) $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x^2-24}-5}{\sqrt{x+9}-4}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{5x^2}$	д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{4\sqrt{x}+1}$	
30	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2+(2x+3)^2}{\sqrt{(3x-1)^4+2}}$	б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-11x+28}{x^2-49}$	в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x^2-16}-3}{\sqrt{x+4}-3}$
	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos4x-1}{xtg3x}$	д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3\sqrt{x}}}$	

Завдання 2

1 Обчислити похідні таких функцій:

1	$а)\, y = 3\arcsin\sqrt[3]{\ln x};$ $\quad б)\, y = \dfrac{e^{3x}(x+1)^3}{tg 2x};$ $\quad в)\, y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}};$ $г)\, 2y\ln y = x;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = arctg t; \end{cases}\; y'_x = ?$
2	$а)\, y = tg^3\sqrt[4]{\ln(x+1)};$ $\quad б)\, y = \dfrac{10^x \cos x}{(x+1)^3};$ $\quad в)\, y = (\sin 3x)^{x^2};$ $г)\, x^2 y + \sin(x+y) = 0;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = \sin t; \\ y = t - \cos t; \end{cases}\; y'_x = ?$
3	$а)\, y = \ln^2 tg\sqrt{x};$ $\quad б)\, y = \dfrac{(x-1)^2}{\cos x \cdot \ln x};$ $\quad в)\, y = (\cos 3x)^{x^3};$ $г)\, xy + e^y = 0;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \cos t; \end{cases}\; y'_x = ?$
4	$а)\, y = \cos\sqrt[3]{arctg x};$ $\quad б)\, y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}\cdot \ln x}{x\cdot(x+1)^2};$ $\quad в)\, y = (tg 3x)^{\frac{1}{x}};$ $г)\, xy^2 + x^2 y + x^3 y^3 = 0;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = e^t; \\ y = \ln(1+t); \end{cases}\; y'_x = ?$
5	$а)\, y = \ln\; \sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x;$ $\quad б)\, y = \ln 2x \cdot arctg 3x \cdot (x+1)^3;$ $в)\, y = \sqrt[x]{\arccos x};$ $\quad г)\, x^2 y + arcctg\dfrac{y}{x} = 0;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = e^t; \\ y = \arcsin t; \end{cases}\; y'_x = ?$
6	$а)\, y = 4^{arctg\sqrt{x^2-1}};$ $\quad б)\, y = \ln\sqrt{1ctg^3 x};$ $\quad в)\, y = (\cos x)^{\arcsin x};$ $г)\, x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^3 - 3 = 0;\; y'_x = ?$ $\quad д)\begin{cases} x = a\;\cos^3 t; \\ y = a\;\sin^3 t; \end{cases}\; y'_x = ?$

7	$а)\, y=\frac{1}{4}tg^4x-\frac{1}{2}tg^2x-\ln\cos x;$ $б)\, y=\ln\frac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}};$ $в)\, y=x^{\sin x};$ $г)\, x^3y^2+5xy+4=0;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=\sqrt{t};\\ y=\sqrt[3]{t};\end{cases}\ y'_x=?$
8	$а)\, y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}};$ $б)\, y=e^{x^2}\cdot tg^3x+arctgx;$ $в)\, y=\left(x^2+3\right)^{\sqrt{x}};$ $г)\, x\ y^3+2y-x^3=0;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=\ln t;\\ y=\sin 2t;\end{cases}\ y'_x=?$
9	$а)\, y=e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x;$ $б)\, y=\frac{(x+5)^3\cdot 2^x}{\sqrt{x^2-1}};$ $в)\, y=x^{x^3};$ $г)\, x+\sqrt{xy}+y=0;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=t^2;\\ y=2t;\end{cases}\ y'_x=?$
10	$а)\, y=\left(\arccos\frac{x}{x+1}\right)^3;$ $б)\, y=\frac{10^x\cdot\cos^3 x}{(x+1)^3};$ $в)\, y=(\ln x)^{\frac{1}{x}};$ $г)\, xy+x^2y^2+xe^y=0;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=arctgt;\\ y=t^2;\end{cases}\ y'_x=?$
11	$а)\, y=\ln\left(\arccos\sqrt{x}\right);$ $б)\, y=\frac{\cos^2 x\cdot 10^x}{\sqrt{x-1}};$ $в)\, y=(tg2x)^{\sqrt{x}};$ $г)\, y^2x+x^2y+e^{xy}=0;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=t^2;\\ y=\ln t;\end{cases}\ y'_x=?$
12	$а)\, y=arctg\, e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}};$ $б)\, y=\frac{\sqrt{x+5}}{e^{3x}\cdot\cos x};$ $в)\, y=(\ln x)^x;$ $г)\, x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3};\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=\cos t;\\ y=t+\sin t;\end{cases}\ y'_x=?$
13	$а)\, y=x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2};$ $б)\, y=\frac{\ln x}{e^{3x}\cdot tgx};$ $в)\, y=x^{\sin x};$ $г)\, \sqrt{x}+\sqrt{y}=4;\ y'_x=?$ $д)\begin{cases}x=a\sin^2 t;\\ y=b\cos^2 t;\end{cases}\ y'_x=?$

14	$а) y = arctg\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; $б) y = \frac{5^x \cdot \ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$; $в) y = (\ln x)^x$; $г) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ $y'_x = ?$
15	$а) y = arctg(tg^2 x)$; $б) y = \frac{\sqrt[3]{x+3} \cdot \cos^2 x}{\ln x}$; $в) y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$; $г) e^{xy} + x^2 - y^2 = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = t^2; \\ y = \ln t; \end{cases}$ $y'_x = ?$
16	$а) y = \ln \arcsin(tgx)$; $б) y = \frac{10^x \cdot \sin^2 x}{\sqrt{x+1}}$; $в) y = (tg2x)^{x^2}$; $г) xy^2 + yx^2 - x + 1 = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = \ln t; \\ y = \frac{1}{t}; \end{cases}$ $y'_x = ?$
17	$а) y = ctg^2 \ln\frac{x+1}{x-1}$; $б) y = \frac{\arcsin x}{2^x \cdot \sqrt[3]{x}}$; $в) y = (\sin x)^{\ln x}$; $г) y^3 x + e^{xy} = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = e^t; \\ y = t^3 + 1; \end{cases}$ $y'_x = ?$
18	$а) y = ctg^3 \ln\sqrt{x^2+1}$; $б) y = \frac{5^{2x} \cdot tgx}{\sqrt[3]{x+5}}$; $в) y = (arctgx)^{x^2}$; $г) xy + \frac{1}{xy} + e^y = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = 2^t; \\ y = \ln t; \end{cases}$ $y'_x = ?$
19	$а) y = \ln\left(arctg\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $б) y = \frac{\sin^3 x \cdot 4^x}{\sqrt[3]{x-1}}$; $в) y = (x^2+1)^{\ell nx}$; $г) \sin(x+y) + \cos(x-y) = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = t^2; \\ y = \frac{1}{t^2+1}; \end{cases}$ $y'_x = ?$
20	$а) y = \sqrt[3]{\cos\frac{x-1}{x+1} + tg(\ln x)}$; $б) y = \frac{ctg^3 x \cdot \sqrt{x}}{2^x}$; $в) y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ell nx}$; $г) tg(x+y) + ctg(x-y) = 0$; $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = t^3; \\ y = \cos t; \end{cases}$ $y'_x = ?$

21	а) $y=\ln\cos\frac{x}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$; б) $y=\frac{\sin^3 x}{\ln x\cdot e^{2x}}$; в) $y=(arctgx)^x$; г) $xy+\cos(x-y)=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=\frac{1}{t}; \\ y=\sin t; \end{cases}\ y'_x=?$
22	а) $y=tg^2\frac{x}{3}+4ctg^3\frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{7^{2x}\cdot\cos 2x}{\sqrt[3]{x+1}}$; в) $y=(x)^{arctgx}$; г) $y^2x^2+\sin(x+y)=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=t^3; \\ y=\frac{1}{\ln t}; \end{cases}\ y'_x=?$
23	а) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$; б) $y=\frac{2^x\cdot\sqrt{x}}{ctg^3\frac{x}{2}}$; в) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; г) $tg(x+y)+ctg(xy)=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t}; \\ y=t^2; \end{cases}\ y'_x=?$
24	а) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\frac{\ln x}{1+x}$; б) $y=\frac{3^{2x}\cdot\sqrt{x^2+1}}{tgx}$; в) $y=(x)^{\ln x}$; г) $\sin(x-y)+\cos(x+y)=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}; \\ y=e^t; \end{cases}\ y'_x=?$
25	а) $y=\arcsin\sqrt{\ln x}$; б) $y=\frac{tg^2x\cdot\sqrt{x^2+1}}{3^{2x}}$; в) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\ln(x+y)+\frac{1}{(x-y)}=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}; \\ y=\sin t; \end{cases}\ y'_x=?$
26	а) $y=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y=\frac{\sin 3x\cdot e^{2x}}{\sqrt[3]{x-3}}$; в) $y=\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}$; г) $(x+y)^{-3}+\arcsin(yx)=0;\ y'_x=?$ д) $\begin{cases} x=t^3; \\ y=\ln t; \end{cases}\ y'_x=?$

27	$а) y = \arcsin(\sin x - \cos x);$ $б) y = \frac{tg3x \cdot 2^{3x}}{\sqrt{x}};$ $в) y = (tgx)^{\frac{1}{x}};$	
	$г) \frac{1}{(x+y)^2} + arctg(xy) = 0;$ $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = \sqrt[4]{t}; \\ y = \cos t; \end{cases}$ $y'_x = ?$	
28	$а) y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right);$ $б) y = \frac{\sqrt[4]{x+4}}{\cos 4x \cdot e^{4x}};$ $в) y = (\ln x)^{-tgx};$	
	$г) \frac{x}{x+y} + \arcsin\frac{x}{y} = 0;$ $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = t^4; \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$ $y'_x = ?$	
29	$а) y = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1} + ctg^2\frac{x}{2};$ $б) y = \frac{tg2x \cdot 8^{2x}}{(x-1)^4};$ $в) y = (x^2+1)^{-\sin x};$	
	$г) \frac{1}{x+y} + \arccos\frac{x}{y} = 0;$ $y'_x = ?$ $д) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \frac{1}{t}; \end{cases}$ $y'_x = ?$	

2 Визначити диференціал dy функції y , якщо функція y має такий вигляд:

1	$y = (\arcsin x)^5$	2	$y = 10^{2x} - arctg3x$	3	$y = 5\sqrt{arctg2x}$
4	$y = \sin x + \sqrt[3]{x}$	5	$y = \sin x - x\cos x$	6	$y = \ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$
7	$y = (x^2 - x + 1) \cdot tg^2 x$	8	$y = arctg\frac{1}{x}$	9	$y = \sqrt{1 + arctgx}$
10	$y = (1 + x^2) \cdot arctgx$	11	$y = \sqrt{3 + x^2} - x\ln x$	12	$y = arctg2x - \frac{1}{4x^2+1}$
13	$y = \arccos 3x + \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$	14	$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	15	$y = \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$
16	$y = \sqrt[3]{x^2+4}$	17	$y = \sqrt[3]{arcctgx}$	18	$y = \sqrt[4]{arctgx}$
19	$y = \arcsin\sqrt{x}$	20	$y = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$	21	$y = arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)$
22	$y = (\arcsin x)^2$	23	$y = \arcsin(2\sin x)$	24	$y = \arcsin\left(2\sqrt[3]{x}\right)$

25	$y = x \cdot e^{x^2+1}$	26	$y = \cos(\ln x)$	27	$y = arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)$
28	$y = e^{x^2-2x+3}$	29	$y = \ln(\cos x)$	30	$y = arcctg\left(\frac{x^3}{3}\right)$

3 Скласти рівняння дотичної до кривої y в точці M_0, якщо абсциса точки M_0 дорівнює x_0 і якщо:

1	$y = \ln(\sin x); \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$	2	$y = \frac{x}{x+2}; \quad x_0 = 3$
3	$y = \frac{1}{1+x^2}; \quad x_0 = 2\sqrt{2}$	4	$y = \frac{1}{x+1}; \quad x_0 = 1$
5	$y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{3-x}; x_0 = -1$	6	$y = x^4 - 3; \quad x_0 = 1$
7	$y = x^3 + 2x^2 - 1; \quad x_0 = -2$	8	$y = x^2 + 5x - 1; \quad x_0 = 1$
9	$y = \frac{\ln x}{x}; \quad x_0 = 1$	10	$y = \ln(1 + 2^x); \quad x_0 = 2$
11	$y = \frac{1}{3}(3x - 2x^3); \quad x_0 = 1$	12	$y = \frac{1}{5x-1}; \quad x_0 = 1$
13	$y = x^3 - 1; \quad x_0 = 2$	14	$y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}; \quad x_0 = 1$
15	$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}; \quad x_0 = -1$	16	$y = \sqrt{1-x^2}; \quad x_0 = \frac{1}{2}$
17	$y = \sqrt{4-x^2}; \quad x_0 = 1$	18	$y = \frac{5}{x}; \quad x_0 = -1$
19	$y = \frac{1}{x^2+1}; \quad x_0 = 1$	20	$y = \sqrt[3]{x} + 1; \quad x_0 = -1$
21	$y = \frac{1}{x+1}; \quad x_0 = 3$	22	$y = 2 + x - x^2; \quad x_0 = 1$
23	$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1; \quad x_0 = 0$	24	$y = 2\sqrt{x}; \quad x_0 = 4$

25	$y=3\sqrt{x}; \quad x_0=9$	26	$y=3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}; \quad x_0=2$
27	$y=\sqrt{25-x^2}; \quad x_0=3$	28	$y=2\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}; \quad x_0=3$
29	$y=\sqrt{6x}; \quad x_0=6$	30	$y=-3\sqrt{1+\frac{x^2}{25}}; \quad x_0=0$

4 Знайти похідну даного порядку від функції y.

1	$y=\sqrt{x^2+1}; \quad y''=?$	2	$y=(5x+1)\cdot 2^x; y''=?$	3	$y=\ln x; \quad y^{(4)}=?$
4	$y=e^{x+x^2}; \quad y''=?$	5	$y=\frac{\ln x}{x}; y'''=?$	6	$y=x^2\ln x; \quad y'''=?$
7	$y=\ln\sin x; \quad y^{(4)}=?$	8	$y=x^4\ln x; \quad y^{(4)}=?$	9	$y=x^6+5x^4+2x^3-x^2;$ $y^{(4)}=?$
10	$y=\frac{x^2+1}{x-1}; \quad y''=?$	11	$y=\sqrt[3]{x^2-3}; y'''=?$	12	$y=(7x-1)^2\cdot tgx; y''=?$
13	$y=\ln(3x-2); \quad y'''=?$	14	$y=\frac{e^x}{x}; \quad y'''=?$	15	$y=arctgx; \quad y'''=?$
16	$y=x^2\cdot e^x; \quad y^{(4)}=?$	17	$y=x\cdot e^{2x}; \quad y^{(4)}=?$	18	$y=x^5\ln x; \quad y''=?$
19	$y=e^{x^2}; \quad y'''=?$	20	$y=3^x\cdot\sin x; \quad y''=?$	21	$y=e^x\cdot x^3; \quad y'''=?$
22	$y=e^x\cos x; \quad y''=?$	23	$y=x\ln x; \quad y^{(5)}=?$	24	$y=\arcsin x; \quad y''=?$
25	$y=e^x\sin x; \quad y''=?$	26	$y=e^{2x}\sin x; \quad y''=?$	27	$y=xe^{x^2}; \quad y^{(4)}=?$
28	$y=e^x\sin 2x; \quad y''=?$	29	$y=e^x\cos 3x; \quad y'''=?$	30	$y=\frac{\ln x}{x^2}; \quad y'''=?$

5 Знайти найбільше і найменше значення функції y даному сегменті, якщо:

1	$y = x^4 - 2x^2 + 3; \quad [-2;1]$	2	$y = \frac{x^2+4}{x^2+2x+5}; \quad [-3;2]$
3	$y = tgx - x; \quad \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$	4	$y = \arccos(x^2); \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
5	$y = \sqrt{5-4x}; \quad [-1;1]$	6	$y = x + \sqrt{x}; \quad [-1;4]$
7	$y = \sqrt{4-x^2}; \quad [-1;2]$	8	$y = x^3 - 3x^2 + 1; \quad [-1;4]$
9	$y = \frac{4-x^2}{4+x^2}; \quad [-1;3]$	10	$y = \sqrt[3]{2x^2} + 1; \quad [-2;1]$
11	$y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2}; \quad [-1;2]$	12	$y = \frac{x+1}{x^2+4}; \quad [0;3]$
13	$y = \sqrt{x^2-9}; \quad [3;5]$	14	$y = e^x(x-1); \quad [0;1]$
15	$y = 2x^5 - 5x^4 + 3; \quad [-1;3]$	16	$y = 3x^4 - 6x^2 + 5; \quad [-2;4]$
17	$y = 5x^4 + 10x^2 - 7; \quad [-1;3]$	18	$y = 7x^3 - 21x + 3; \quad [-2;2]$
19	$y = 5x^4 - 10x^2 + 1; \quad [0;3]$	20	$y = 2x^3 - 3x^2; \quad [-1;3]$
21	$y = \ln(x^2+16); \quad [-1;3]$	22	$y = \sqrt{5+4x}; \quad [-1;1]$
23	$y = x^2 - 4x + 6; \quad [-3;10]$	24	$y = 2x^5 - 7x^4 + 3; \quad [-1;3]$
25	$y = \sqrt{4+x^2}; \quad [-1;3]$	26	$y = 2x^5 - 5x^3 + 1; \quad [-1;3]$
27	$y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}; \quad [-1;2]$	28	$y = \sqrt{9+x^2}; \quad [-2;4]$
29	$y = \sqrt{16-x^2}; \quad [-1;3]$	30	$y = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}; \quad [-1;2]$

6 Провести повне дослідження функції y за допомогою диференціального числення і побудувати її графік.

1	$y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$	2	$y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$	3	$y=x^5-x^3-2x$
4	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	5	$y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$	6	$y=\dfrac{1}{x(x-1)}$
7	$y=x+\dfrac{x}{3x-1}$	8	$y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$	9	$y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$
10	$y=\dfrac{e^x}{x+1}$	11	$y=\dfrac{5x-3}{x^3}$	12	$y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
13	$y=\dfrac{x-3}{x+3}$	14	$y=x+\dfrac{1}{x}$	15	$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$
16	$y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$	17	$y=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$	18	$y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$
19	$y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$	20	$y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$	21	$y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$
22	$y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$	23	$y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$	24	$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
25	$y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$	26	$y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$	27	$y=\dfrac{1}{x^2-7x+10}$
28	$y=\dfrac{1}{x^2-8x+15}$	29	$y=\dfrac{1}{x^2-7x+12}$	30	$y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

Завдання 3

1) Знайти і зобразити на рисунку область визначення функції z.

1 $z=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$	2 $z=\sqrt{x+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$	3 $z=\dfrac{1}{2-x^2-y^2}$
4 $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$	5 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$	6 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

7 $z = \ln x + \ln y$	8 $z = \ln(4 + 4x - y^2)$	9 $z = \sqrt{x+y} \cdot \ln(x^2 - y^2)$
10 $z = \sqrt{1 + x - y^2}$	11 $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$	12 $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$
13 $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$	14 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$	15 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{x+y}$
16 $z = \sqrt{y} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$	17 $z = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$	18 $z = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$
19 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 4x + 20}}$	20 $z = \ln\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$	21 $z = \sqrt{y+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}}$
22 $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$	23 $z = \dfrac{\sqrt{-y} + 3}{\sqrt{x+y-1}}$	24 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-y}$
25 $z = \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$	26 $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$	27 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 2x + 4}}$
28 $z = \sqrt{y} + \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$	29 $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$	30 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

2 Для функції z визначити такі частинні похідні:

1 $z = arctg\dfrac{x+y}{x-y}$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	2 $z = \sin(x^2 + y)$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?
3 $z = e^x \cdot \cos y$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	4 $z = x \cdot e^y \cos(xy)$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?
5 $z = x^2 - 2xy - 3y^2$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	6 $z = y^{\ln x}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?
7 $z = tg(x^2 + y^2)$; z''_{xy} ? z''_{yy} ?	8 $z = \sqrt{2xy + y^2}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?
9 $z = x \cdot \ln\dfrac{y}{x}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?	10 $z = \sqrt{x} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$; z'_x ? z''_{xy} ?

11 $z=\sin^2(xy)$; z''_{xy} ? z''_{yy} ?	12 $z=\ln(e^x+e^y)$; $z'_x+z'_y\overset{?}{=}1$
13 $z=\ln(5x^2-3y)$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?	14 $z=x\cdot\ln(xy)$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?
15 $z=\sqrt{x+y^2}$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	16 $z=\arcsin(xy)$; z'_x ? z''_{xy} ?
17 $z=\sqrt[3]{x^2+y^3}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?	18 $z=y\cdot\ln(xy)$; z'_y ? z'''_{xxy} ?
19 $z=x\cdot\ln\frac{x}{y}$; z'_y ? z''_{xx} ?	20 $z=\sqrt{x^3+y^2}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?
21 $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	22 $z=x^{y^2}$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?
23 $z=x^3\sin y+y^3\sin x$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	24 $z=x^3+y^3+x^3y^3$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?
25 $z=e^{xy}$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	26 $z=xy\ \ln x$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?
27 $z=xe^y+ye^x$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?	28 $z=e^x\cos y$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?
29 $z=\sqrt{x^2+y^4}$; z''_{xx} ? z''_{yy} ?	30 $z=arctg(xy)$; z''_{xy} ? z''_{yx} ?

3 Знайти: *а*) $grad\ z$ в точці A ; *б*) похідну z в точці A у напрямі вектора $\vec{a}$, якщо:

1 $z=\ln(x^2+y^2)$;	$A(3;4)$;	$\vec{a}=\sqrt{3}\ \vec{i}-\vec{j}$
2 $z=arctg(xy)$;	$A(1;1)$;	$\vec{a}=2\vec{i}+\sqrt{12}\,\vec{j}$
3 $z=arctg\frac{x+1}{y}$;	$A(0;1)$;	$\vec{a}=-3\vec{i}+3\sqrt{3}\vec{j}$
4 $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}$;	$A(1;1)$;	$\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}$
5 $z=\ln(x^2+y^3)$;	$A(1;2)$;	$\vec{a}=5\ \vec{i}+12\,\vec{j}$

6	$z = 3x^4 + xy + y^3$;	$A(1;2)$;	$\vec{a} = -\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$
7	$z = x^2 + xy + y^2$;	$A(-1;2)$;	$\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$
8	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$;	$A(3;-4)$;	$\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$
9	$z = e^{2x^2 - 2y^2}$;	$A(1;0)$;	$\vec{a} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$
10	$z = 2x^2 y + 3xy^2 + x^3$;	$A(1;-1)$;	$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
11	$z = \sqrt[3]{5x - 4y}$;	$A(1;1)$;	$\vec{a} = \vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}$
12	$z = arctg\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;	$A(1;1)$;	$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
13	$z = \sqrt[3]{5x - 2y^2}$;	$A(2;1)$;	$\vec{a} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$
14	$z = \arcsin\dfrac{y}{x}$;	$A(2;1)$;	$\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$
15	$z = y^x$;	$A(2;2)$;	$\vec{a} = 12\vec{i} + 5\vec{j}$
16	$z = \arcsin\dfrac{x+y}{x}$;	$A(1;0)$;	$\vec{a} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$
17	$z = x^2 + xy + y^2$;	$A(6;5)$;	$\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$
18	$z = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$;	$A(1;1)$;	$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\sqrt{6}\vec{j}$
19	$z = 3x^4 + xy + y^3$;	$A(1;2)$;	$\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$
20	$z = arcctg(xy)$;	$A\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$;	$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
21	$z = xy + \dfrac{x}{y^2}$;	$A(3;2)$;	$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
22	$z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;	$A(3;4)$;	$\vec{a} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$
23	$z = e^{x^2 - xy + y^2}$;	$A(1;0)$;	$\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$

24	$z = y^{\ln x}$;	$A(2;2)$;	$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
25	$z = x + y + \dfrac{xy}{x+y}$;	$A(1;2)$;	$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\sqrt{6}\vec{j}$
26	$z = \ln\left(x + e^{xy}\right)$;	$A(0;1)$;	$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
27	$z = \sqrt[3]{x+y}$;	$A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$;	$\vec{a} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$
28	$z = arctg\,\dfrac{x+y}{x}$;	$A(1;2)$;	$\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$
29	$z = tg\left(x^2 + y^2\right)$;	$A(0;1)$;	$\vec{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$
30	$z = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;	$A(1;1)$;	$\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$

4 Знайти екстремум функції z.

1 $z = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 7x - y + 1$	2 $z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x - y + 5$
3 $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$	4 $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
5 $z = 5x^2 - 7xy + 9y^2 - x - y + 1$	6 $z = 6x^2 - 8xy + 5y^2 + 2x + y + 3$
7 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	8 $z = 6x^2 + 4xy + 3y^2 - x - y + 1$
9 $z = 3x^2 - 5xy + 8y^2 - x - 2y + 1$	10 $z = 5x^2 - 6xy + 9y^2 - x - y + 3$
11 $z = 4x^2 - 3xy + 5y^2 - x + y - 2$	12 $z = 4x^2 - 6xy + 7y^2 - 4x - y + 1$
13 $z = x^2 - 2xy + 7y^2 - x - y$	14 $z = 8x^2 - 3xy + y^2 - x + 5y - 1$
15 $z = 5x + y - x^2 - xy + y^2 + 1$	16 $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 5$
17 $z = 3x^2 + xy + 4y^2 - x - 2y$	18 $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$
19 $z = x^2 - xy + 3y^2 + 2x - y + 5$	20 $z = 5x^2 - 6xy + 3y^2 - x - y + 1$
21 $z = 4x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x + y$	22 $z = 5x^2 - xy + y^2 - x - 2y - 1$

23 $z=4x^2-3xy+2y^2-x+3y$	24 $z=7x^2-2xy+3y^2+x+y+5$
25 $z=x^2+xy+y^2-4x-y+1$	26 $z=5x^2-xy+y^2-x-y-1$
27 $z=x^2-xy+7y^2+5x+y+1$	28 $z=6x^2-3xy+y^2-x-y+1$
29 $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+3$	30 $z=x^2-2xy+3y^2-4x+5y+2$

5 Експериментально отримано п’ять значень шуканої функції $y=f(x)$ при п’яти значеннях аргументу, які розташовані у таблиці. Методом найменших квадратів визначити функцію $y=f(x)$ у вигляді багаточлена першого ступеня $y=ax+b$.

1

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,2	1,7	2,3	1,9	2,1

2

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,0	4,9	5,2	6,0	5,8

3

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,7	1,1	1,9	2,5	2,9

4

x_i	2	3	4	5	6
y_i	0,3	0,9	0,7	1,1	1,5

5

x_i	2	3	4	5	6
y_i	4,3	3,9	4,7	5,1	5,5

6

x_i	3	4	5	6	7
y_i	0,5	1,1	2,7	2,1	3,2

7

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,5	1,7	2,5	2,3

8

x_i	0	1	2	3	4
y_i	5,0	5,2	4,8	4,7	5,1

9

x_i	1	3	5	7	9
y_i	3,2	4,0	3,8	4,5	4,2

10

x_i	1	3	5	7	9
y_i	2,7	3,1	2,9	3,3	3,2

11

x_i	0	2	4	6	8
y_i	3,5	4,0	4,2	4,9	4,7

12

x_i	2	3	4	5	6
y_i	2,7	3,1	2,9	3,3	3,4

13

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,7	1,1	0,8	1,9	2,1

14

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,3	1,5	1,3	2,3	2,1

15

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,1	6,2	5,7	5,9	6,5

16

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,7	3,4	3,3	4,1	4,8

17

x_i	3	4	5	6	7
y_i	4,2	4,9	5,1	5,8	6,1

18

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1,9	2,7	2,5	3,0	4,5

19

x_i	0	1	2	3	4
y_i	5,1	5,7	6,4	7,1	7,3

20

x_i	3	4	5	6	7
y_i	3,1	4,0	3,9	4,5	4,4

21

x_i	1	3	5	7	9
y_i	1,5	2,1	1,9	2,7	2,8

22

x_i	2	3	4	5	6
y_i	1,1	1,8	1,7	2,1	2,3

23

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2,1	2,7	2,5	3,2	4,5

24

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,7	4,2	4,0	5,3	6,1

25

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,5	2,7	3,5	4,2	5,1

26

x_i	2	3	4	5	6
y_i	1,1	1,8	2,3	2,9	3,0

27

x_i	2	3	4	5	6
y_i	2,3	3,1	4,7	4,4	5,1

28

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0,5	0,9	1,6	1,3	2,1

29

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,7	1,4	2,0	2,1	3,4

30

x_i	1	3	5	7	9
y_i	5,1	5,7	6,8	7,7	8,7

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.

3 Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука.

4 Пак В.В., Косенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996.

5 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

6 Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1975.