**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

Кафедра “Вища математика”

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Частина I

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання контрольних робіт
для студентів загальнотехнічних спеціальностей
заочної форми навчання**

Харків 2003

Методичні вказівки розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 6 жовтня 2003 р.

Призначені для студентів-заочників загальнотехнічних спеціальностей та відповідають робочій програмі з курсу “Вища математика”.

Укладачі
доц. О.А. Осмаєв
ст.викл. О.О. Думіна
асист. Ю.С. Шувалова

Рецензент
доц. Р.О. Єфременко

ВСТУП

Дані методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу “Вища математика” – інтегральному численню. В частині I розглянуті основні методи знаходження невизначених та визначених інтегралів функцій однієї змінної. Робота містить програму, розв’язки типових прикладів та варіанти контрольних робіт для заочників загальнотехнічних спеціальностей.

Розділ програми курсу вищої математики

1. Первісна функція та невизначений інтеграл, основні властивості.
2. Основні методи інтегрування: заміна змінної та метод інтегрування частинами.
3. Інтегрування раціональних функцій.
4. Інтегрування ірраціональних функцій.
5. Інтегрування тригонометричних функцій.
6. Поняття визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца.
7. Заміна змінної та інтегрування частинами в визначеному інтегралі.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна функції. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то існує нескінченно багато первісних для $f(x)$, і всі вони мають вигляд $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Сукупність первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом від цієї функції* і позначається символом $\int f(x)dx$, де $\int$ *– знак інтеграла,* $f(x)$ *– підінтегральна функція,* $f(x)dx$ *– підінтегральний вираз,* x *– змінна інтегрування.*

Можна довести, що будь-яка функція, неперервна на замкненому інтервалі, має на ньому первісну.

Інтегрування представляє собою операцію, що зворотня до диференціювання, тому результат знаходження невизначеного інтеграла завжди можна перевірити, взявши похідну від $F(x)+C$, при цьому повинна бути отримана підінтегральна функція $f(x)$.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$
де k – константа.
2. Невизначений інтеграл від суми неперервних функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій:
$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$
3. Невизначений інтеграл від похідної неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:
$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$
4. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:
$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1.	$\int 0dx = C$	2.	$\int dx = x + C$
3.	$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	4.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
5.	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	6.	$\int e^x dx = e^x + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9.	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	10.	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
11.	$\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln\|\cos x\| + C$	12.	$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln\|\sin x\| + C$
13.	$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$	14.	$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$
15.	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$	16.	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth}\, x + C$
17.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$	18.	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
19.	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$	20.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + k}\right\| + C$

Методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування.

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні основних властивостей і таблиці невизначених інтегралів, а також тотожних перетворень підінтегральної функції.

Приклади:

a) $$\int\left(8x^3-\frac{5}{x^2}+3\sqrt[4]{x^3}-x+2\right)dx=\int 8x^3dx-\int\frac{5}{x^2}dx+\int 3\sqrt[4]{x^3}dx-\int xdx+\int 2dx=$$

$$=8\int x^3dx-5\int x^{-2}dx+3\int x^{\frac{3}{4}}dx-\int x^1dx+2\int dx=$$

$$=8\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-5\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}-\frac{x^{1+1}}{1+1}+2x+C=$$

$$=\frac{8}{4}x^4-\frac{5}{-1}x^{-1}+3\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\frac{x^2}{2}+2x+C=2x^4+\frac{5}{x}+\frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{x^2}{2}+2x+C;$$

b) $$\int\left(\frac{5}{x}-4\cos x+6\cdot 4^x-\frac{7}{8+x^2}\right)dx=5\int\frac{dx}{x}-4\int\cos xdx+6\int 4^xdx-7\int\frac{dx}{\left(\sqrt{8}\right)^2+x^2}=$$

$$=5\ln|x|-4\sin x+6\cdot\frac{4^x}{\ln 4}-7\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{8}}+C.$$

c) $$\int(x-2)^2dx=\int\left(x^2-4x+4\right)dx=\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+4x+C=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+C.$$

2. Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки).

Основою цього методу є таке твердження:

якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u(t))u'(t)dt=F(u(t))+C$.

Мета заміни – підібрати функцію $x=u(t)$ таким чином, щоб при підстановці її замість x в підінтегральний вираз $f(x)dx$ отримати більш простий інтеграл $\int f(u(t))u'(t)dt$. Після його знаходження треба повернутися до вихідної змінної.

Приклади:

a) $$\int 2^{9x-1}dx = \left| \begin{array}{l} t = 9x-1 \\ dt = (9x-1)'\,dx = 9dx \\ dx = \frac{1}{9}dt \end{array} \right| = \int 2^t \cdot \frac{1}{9}dt = \frac{1}{9}\int 2^t\,dt = \frac{1}{9}\cdot\frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{9x-1}}{9\ln 2} + C;$$

Перевіримо результат диференціюванням:

$$\left(\frac{2^{9x-1}}{9\ln 2} + C\right)' = \frac{1}{9\ln 2}\cdot 2^{9x-1}\ln 2\cdot(9x-1)' = \frac{1}{9}\cdot 2^{9x-1}\cdot 9 = 2^{9x-1},$$

Отримали підінтегральну функцію, тобто інтегрування здійснено правильно.

b) $$\int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \arcsin 2x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin 2x \\ dt = (\arcsin 2x)'\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2dx \\ \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arcsin 2x)^2}{4} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами

Якщо u, v – дві диференційовані функції від x, то за правилом диференціювання добутку маємо:

$$(uv)' = u'v + v'u \text{ або } d(uv) = vdu + udv.$$

Інтегруючи обидві частини, отримуємо

$$\int d(uv) = \int (vdu + udv),\ uv = \int vdu + \int udv.$$

Виразимо звідси один з інтегралів, що стоять в правій частині, наприклад $\int udv$, тоді знайдемо

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Отримана формула називається *формулою інтегрування частинами*.

Розбиття підінтегрального виразу на множники u та dv обирають таким чином, щоб, по-перше, можна було знайти $v = \int dv$, а по-друге, отриманий інтеграл $\int vdu$ був не складніший за вихідний інтеграл $\int udv$.

Типи функцій, що інтегруються частинами, та рекомендовані розбиття

I тип: $\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)\cos mx dx\\ \int P_n(x)\sin nx dx\\ \int P_n(x)a^{\alpha x}dx\end{array}\right\}$, $u = P_n(x)$, за dv вибираємо все, що залишилось,

де $P_n(x)$ – поліном степеня n від x;

II тип: $\left.\begin{array}{l}\int P_n(x)\ln^m x dx\\ \int P_n(x)\arccos x dx\\ \int P_n(x)\arcsin x dx\\ \int P_n(x)\operatorname{arctg} x dx\\ \int P_n(x)\operatorname{arcctg} x dx\end{array}\right\}$, $dv = P_n(x)dx$, за u вибираємо все, що залишилось;

III тип: $\left.\begin{array}{l}\int a^{\alpha x}\cos mx dx\\ \int a^{\alpha x}\sin nx dx\end{array}\right\}$, розбиття довільне.

В багатьох випадках для отримання відповіді формулу інтегрування частинами треба використати декілька разів поспіль.

Приклади:

a) $$\int\left(2x^2-3\right)\cos 4x dx = \left|\begin{array}{l} u = 2x^2-3\\ dv = \cos 4x dx\\ du = \left(2x^2-3\right)' dx = 4x dx\\ v = \int \cos 4x dx = \dfrac{\sin 4x}{4}\end{array}\right| = \left(2x^2-3\right)\cdot\frac{\sin 4x}{4} - \int\frac{\sin 4x}{4}\cdot 4x dx =$$

$$= \frac{\left(2x^2-3\right)\sin 4x}{4} - \int x\sin 4x dx = \left|\begin{array}{l} u = x\\ dv = \sin 4x dx\\ du = (x)' dx = dx\\ v = \int \sin 4x dx = -\dfrac{\cos 4x}{4}\end{array}\right| = \frac{\left(2x^2-3\right)\sin 4x}{4} -$$

$$-\left(x\cdot\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right) - \int\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)dx\right) = \frac{\left(2x^2-3\right)\sin 4x}{4} + \frac{x\cos 4x}{4} - \frac{\sin 4x}{16} + C;$$

b) $$\int\left(x^3-4\right)\ln x dx = \left|\begin{array}{l} dv = \left(x^3-4\right)dx\\ u = \ln x\\ v = \int\left(x^3-4\right)dx = \dfrac{x^4}{4} - 4x\\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x}\end{array}\right| = \ln x\cdot\left(\frac{x^4}{4} - 4x\right) - \int\left(\frac{x^4}{4} - 4x\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-4x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^3}{4}-4\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-4x\right)\ln x-\frac{x^4}{16}+4x+C;$$

c) $\int e^x\sin 5x dx=\left|\begin{matrix} u=e^x \\ dv=\sin 5x dx \\ du=e^x dx \\ v=-\dfrac{\cos 5x}{5}\end{matrix}\right|=e^x\cdot\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)-\int\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)\cdot e^x dx=$

$$=-\frac{e^x\cos 5x}{5}+\frac{1}{5}\int e^x\cos 5x dx=\left|\begin{matrix} u=e^x \\ dv=\cos 5x dx \\ du=e^x dx \\ v=\dfrac{\sin 5x}{5}\end{matrix}\right|=-\frac{e^x\cos 5x}{5}+\frac{1}{5}\left(e^x\cdot\frac{\sin 5x}{5}-\right.$$

$$\left.-\int\frac{\sin 5x}{5}\cdot e^x dx\right)=-\frac{e^x\cos 5x}{5}+\frac{1}{25}\cdot e^x\sin 5x-\frac{1}{25}\int e^x\sin 5x dx.$$

В результаті, отримали вихідний інтеграл з коефіцієнтом. Розв’яжемо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\int e^x\sin 5x dx=-\frac{e^x\cos 5x}{5}+\frac{1}{25}\cdot e^x\sin 5x-\frac{1}{25}\int e^x\sin 5x dx;$$

$$\int e^x\sin 5x dx+\frac{1}{25}\int e^x\sin 5x dx=-\frac{e^x\cos 5x}{5}+\frac{1}{25}\cdot e^x\sin 5x;$$

$$\frac{26}{25}\int e^x\sin 5x dx=-e^x\cdot\frac{5\cos 5x-\sin 5x}{25};$$

$$\int e^x\sin 5x dx=-e^x\cdot\frac{5\cos 5x-\sin 5x}{26}+C.$$

Цей приклад можна ще розв’язати іншим способом – за допомогою функцій комплексної змінної. Помітимо, що підінтегральна функція є уявною частиною функції $f(x)=e^{(1+5i)x}=e^x(\cos 5x+i\sin 5x)$, тобто інтеграл від неї

$$\int e^x\sin 5x dx=\int\mathrm{Im}\left(e^{(1+5i)x}\right)dx=\mathrm{Im}\int e^{(1+5i)x}dx=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+5i)x}}{1+5i}+C\right)=$$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{e^x(\cos 5x+i\sin 5x)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}\right)+C=$$

$$+\mathrm{Im}\left(\frac{e^x(\cos 5x+5\sin 5x)+ie^x(-5\cos 5x+\sin 5x)}{26}\right)+C=\frac{e^x(-5\cos 5x+\sin 5x)}{26}+C.$$

Паралельно ми знайшли також інтеграл від дійсної частини цієї функції:

$$\int e^x\cos 5x dx=\int\mathrm{Re}\left(e^{(1+5i)x}\right)dx=\mathrm{Re}\int e^{(1+5i)x}dx=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+5i)x}}{1+5i}+C\right)=$$

$$+\operatorname{Re}\left(\frac{e^{x}(\cos 5x+5\sin 5x)+ie^{x}(-5\cos 5x+\sin 5x)}{26}\right)+C=\frac{e^{x}(\cos 5x+5\sin 5x)}{26}+C\,.$$

4. Інтегрування раціональних функцій

Раціональна функція – це частка двох многочленів (*раціональний дріб*). Будь-який раціональний дріб за допомогою ділення многочлена на многочлен можна звести до суми многочлена та *правильного дробу* – дробу, у якого степінь многочлена у чисельнику менший за степінь многочлена у знаменнику. В свою чергу, правильний дріб можна розкласти в суму *елементарних дробів* вигляду:

$$\text{I тип: } \frac{A}{(x-a)^m}, \qquad \text{II тип: } \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$

де $m=1,2,3,\ldots$, квадратний тричлен у знаменнику дробу другого типу не має дійсних коренів. Елементарні дроби знаходять, розклавши знаменник вихідного дробу на незвідні множники: якщо у знаменнику вихідного дробу присутній множник $(x-a)^n$, то до суми елементарних дробів входять дроби першого типу з показниками степеню m від 1 до n включно, наявність множника $\left(x^2+px+q\right)^n$ потребує наявності аналогічної суми дробів другого типу, тобто

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_k\left(\frac{A_{k1}}{x-a_k}+\frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_{kn}}{(x-a_k)^{n_k}}\right)+$$

$$+\sum_k\left(\frac{B_{k1}x+C_{k1}}{x^2+p_kx+q_k}+\frac{B_{k2}x+C_{k2}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^2}+\ldots+\frac{B_{km}x+C_{km}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{m_k}}\right),$$

A_{kl},B_{kl},C_{kl} – деякі числові коефіцієнти. Коефіцієнти A_{kl},B_{kl},C_{kl} можна знайти одним з таких методів або комбінацією цих методів:

1. Помножимо обидві частини рівності на $f(x)$ і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах отриманої рівності (метод невизначених коефіцієнтів).
2. Якщо в знаменнику вихідного дробу $\frac{g(x)}{f(x)}$ є множник $(x-a)^n$ ($f(x)=s(x)(x-a)^n$), тоді вихідний дріб можна записати у вигляді $\frac{h(x)}{(x-a)^n}$, де $h(x)=\frac{g(x)}{s(x)}$. В розвиненні на елементарні дроби будуть присутні доданки вигляду $\frac{A_k}{(x-a)^k}$, $k=1,2,\ldots n$, коефіцієнти A_k для них

можна знайти за формулою:

$$A_k = \frac{h^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}.$$

В окремому випадку $n = 1$ (a – простий корінь) $A_1 = h(a)$.

Після розкладення раціональної функції в суму многочлена та елементарних дробів кожний доданок інтегрують безпосередньо та за допомогою методу заміни змінної.

Приклади:

а) $\int \frac{x-5}{(x-7)(x^2+11)} dx$.

Підінтегральна функція – правильний дріб, його знаменник вже розкладений на незвідні множники, кожний з яких входить до дробу у першому степені. Тому підінтегральна функція розкладається в таку суму елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{x-5}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+11}.$$

Коефіцієнт A знайдемо другим методом, підставивши $x = 7$ ($h(x) = \frac{x-5}{x^2+11}$):

$$A = \left.\frac{x-5}{x^2+11}\right|_{x=7} = \frac{7-5}{7^2+11} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів B, C використаємо перший метод. Помножимо обидві частини рівності на $(x-7)(x^2+11)$:

$$x - 5 = A(x^2+11) + (Bx+C)(x-7).$$

Розкриємо дужки в правій частині і приведемо подібні доданки:

$$x - 5 = (A+B)x^2 + (-7B+C)x + 11A - 7C.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему:

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad 0 = A + B, \\ x &: \quad 1 = -7B + C, \\ x^0 &: -5 = 11A - 7C, \end{aligned}$$

Для її розв’язання використовуємо вже знайдене значення $A = \frac{1}{30}$, одержуємо $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{23}{30}$.

Таким чином,

$$\int \frac{(x-5)dx}{(x-7)(x^2+11)} = \int \left(\frac{\frac{1}{30}}{x-7} + \frac{-\frac{1}{30}x + \frac{23}{30}}{x^2+11} \right) dx = \frac{1}{30}\int \frac{dx}{x-7} - \frac{1}{30}\int \frac{xdx}{x^2+11} +$$

$$+\frac{23}{30}\int \frac{dx}{x^2+11}.$$

Для знаходження першого інтеграла зробимо заміну $t = x-7$, $dt = dx$:

$$\int \frac{dx}{x-7} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-7| + C.$$

В другому інтегралі робимо заміну $t = x^2+11$, $dt = 2xdx$:

$$\int \frac{xdx}{x^2+11} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+11\right) + C.$$

Третій інтеграл є табличним:

$$\int \frac{dx}{x^2+11} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{11}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{11}} + C.$$

Остаточно отримуємо

$$\int \frac{(x-5)dx}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{1}{30}\ln|x-7| - \frac{1}{60}\ln\left(x^2+11\right) + \frac{23}{30\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{11}} + C.$$

b) $\int \frac{3x^2+1}{x^2+16x+65}dx$.

Підінтегральна функція є неправильним дробом, тому що степінь чисельника не менша за степінь знаменника. Виділимо цілу частину цього дробу (многочлен) за допомогою ділення чисельника на знаменник "кутом" (так само, як і при діленні натуральних багатозначних чисел):

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 3x^2+1 \\ 3x^2+48x+195 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+16x+65 \\ \hline 3 \end{array} \\ \hline -48x-194 & \end{array}$$

Таким чином, ціла частина дробу дорівнює 3, а залишок від ділення $-48x-194$, тобто $\frac{3x^2+1}{x^2+16x+65} = 3 + \frac{-48x-194}{x^2+16x+65}$, а інтеграл дорівнює

$$\int \frac{3x^2+1}{x^2+16x+65}dx = \int \left(3 - \frac{48x+194}{x^2+16x+65}\right)dx = 3x - \int \frac{48x+194}{x^2+16x+65}dx.$$

Тепер функція під інтегралом вже є правильним дробом, більш того, вона вже є елементарним дробом другого типу. Для його інтегрування виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$x^2+16x+65 = x^2+2\cdot 8x+8^2+1 = (x+8)^2+1.$$

В чисельнику виділимо $2(x+8)$ (похідна від функції у знаменнику дробу):

$$48x+194=48(x+8)-3\cdot 48+194=24\cdot 2(x+8)+50.$$

Таким чином,

$$\int\frac{48x+194}{x^2+16x+65}dx=\int\frac{24\cdot 2(x+8)+50}{(x+8)^2+1}dx=24\int\frac{2(x+8)dx}{(x+8)^2+1}+50\int\frac{dx}{(x+8)^2+1}.$$

Зробивши в першому інтегралі заміну $t=(x+8)^2+1$, а в другому – $t=x+8$, знаходимо, що шуканий інтеграл дорівнює $24\ln\left(x^2+16x+65\right)+50\,\mathrm{arctg}(x+8)+C$. Остаточно отримуємо:

$$\int\frac{3x^2+1}{x^2+16x+65}dx=3x-24\ln\left(x^2+16x+65\right)-50\,\mathrm{arctg}(x+8)+C.$$

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x-13)^2}dx$.

В знаменнику цієї раціональної функції знаходиться двочлен у другому степені. Тому в розкладанні дробу на елементарні повинні бути присутніми дроби зі знаменниками $x-13$ та $(x-13)^2$, тобто

$$\frac{x-1}{(x-13)^2}=\frac{A_1}{x-13}+\frac{A_2}{(x-13)^2}$$

Коефіцієнти A_1 і A_2 знаходимо другим методом:

$$h(x)=x-1,\ A_1=h(13)=13-1=12,$$

$$A_2=\frac{h'(13)}{1!}=1.$$

Остаточно знаходимо:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x-13)^2}=\int\left(\frac{1}{x-13}+\frac{12}{(x-13)^2}\right)dx=\begin{vmatrix}t=x-13\\ dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}+12\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\ln|t|-\frac{12}{t}+C=\ln|x-13|+\frac{12}{x-13}+C.$$

3. Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтеграли вигляду $\int\cos^m x\sin^n x dx$ знаходять в залежності від парності степенів m і n таким чином:

   a) якщо m або n – непарне, то використовують заміну змінної:

   $t=\sin x$, при непарному m

   $t=\cos x$, при непарному n,

   та формули $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ або $\cos^2 x=1-\sin^2 x$;

   b) якщо m та n – парні, то використовують формули зниження степенів:

   $$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

2. Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$ обчислюють за допомогою перетворень підінтегральної функції за такими формулами:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

3. Інтеграли вигляду $\int \mathrm{tg}^m xdx$ та $\int \mathrm{ctg}^m xdx$ знаходять, використовуючи формули $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

4. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція від $\sin x$, $\cos x$ приводять до інтегралів від раціональних функцій змінної t за допомогою підстановки $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тоді

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, для яких $R(-u,-v) = R(u,v)$, тобто під знаком інтеграла є тільки комбінації функцій $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ та $\sin x \cos x$, знаходять за допомогою підстановки $t = \mathrm{tg}\, x$, причому

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

Аналогічні методи з використанням відповідних формул застосовуються для інтегрування гіперболічних функцій $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{th}\, x$, $\mathrm{cth}\, x$.

Приклади:

a) $$\int \sin^3 x \cos^3 xdx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cdot \cos xdx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos xdx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int t^3(1-t^2)dt == \int (t^3 - t^5)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C;$$

b) $$\int \mathrm{tg}^5 xdx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^3 xdx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \mathrm{tg}^3 xdx = \int \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx - \int \mathrm{tg}^3 xdx =$$

$$=\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\cdot \operatorname{tg} x dx=\int \frac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx+\int \operatorname{tg} x dx=\begin{vmatrix} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\left(t^3-t\right)dt-\ln|\cos x|=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-\ln|\cos x|+C=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C;$$

c) $$\int \frac{\cos x}{3-2\cos x}dx=\begin{vmatrix} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{3-2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int \frac{1-t^2}{\left(1+5t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt.$$

Отримали раціональний дріб, який розкладаємо на елементарні дроби:

$$\frac{1-t^2}{\left(1+5t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{At+B}{1+5t^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2};$$

$$1-t^2=(At+B)\left(1+t^2\right)+\left(1+5t^2\right)(Ct+D);$$

$$\begin{aligned} t^3 &: \ 0=A+5C, \\ t^2 &: -1=B+5D, \\ t &: \ 0=A+C, \\ t^0 &: \ 1=B+D; \end{aligned} \qquad C=0,\ A=0,\ D=-\frac{1}{2},\ B=\frac{3}{2}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти, отримуємо

$$2\int \frac{1-t^2}{\left(1+5t^2\right)\left(1+t^2\right)}dt=2\left(\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+5t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}\right)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\sqrt{5}t\right)}{1+\left(\sqrt{5}t\right)^2}-\operatorname{arctg} t=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}t\right)-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C=\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}+C.$$

4. Інтегрування ірраціональних функцій.

1. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ – раціональна функція від x, $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ приводять до інтегралів від раціональних функцій змінної t за допомогою заміни $t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, де k –найменше спільне кратне m і n.
2. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{a^2\pm x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів попереднього розділу за допомогою тригонометричних або

гіперболічних підстановок:

$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ підстановка $x=a\sin t$ або $x=a\cos t$ або $x=a\,\mathrm{th}\,t$;

$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ підстановка $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ або $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$ або $x=a\,\mathrm{sh}\,t$;

$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ підстановка $x=\dfrac{a}{\cos t}$ або $x=\dfrac{a}{\sin t}$ або $x=a\,\mathrm{ch}\,t$.

<u>Приклади:</u>

a) $$\int\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}+1}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{2x+3}\\ x=\dfrac{t^6-3}{2}\\ dx=3t^5\\ \sqrt{2x+3}=t^3\\ \sqrt[3]{2x+3}=t^2\end{array}\right|=\int\frac{t^3}{t^2+1}\cdot 3t^5dt=\int\frac{t^8}{t^2+1}dt=\int\left(3t^6-3t^4+3t^2-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{t^2+1}\right)dt=\frac{3t^7}{7}-\frac{3t^5}{5}+\frac{3t^3}{3}-3\,\mathrm{arctg}\,t+C=\frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x+3)^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+3)^5}+3\sqrt{2x+3}-$$

$$-3\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{2x+3}+C.$$

b) $$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t\\ 4-x^2=4-4\sin^2 t=4\cos^2 t\\ dx=2\cos t dt\end{array}\right|=\int(2\sin t)^2\sqrt{4\cos^2 t}\cdot 2\cos t dt=$$

$$=\int 16\sin^2 t\cos^2 t dt=\int 4\sin^2 2t dt=\int 2(1-\cos 4t)dt=2t-\frac{\sin 4t}{2}+C$$

Зробимо зворотню заміну, враховуючи, що $t=\arcsin\dfrac{x}{2}$, $\sin 4t=4\sin t\cos t\cos 2t=$

$$=4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\left(1-2\sin^2 t\right)=2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}x\left(2-x^2\right)\sqrt{4-x^2}$$, тобто

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{4}x\left(2-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+C.$$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Поняття визначеного інтегралу

До поняття визначеного інтеграла приводять різноманітні задачі з геометрії, механіки та фізики. Розглянемо дві з них.

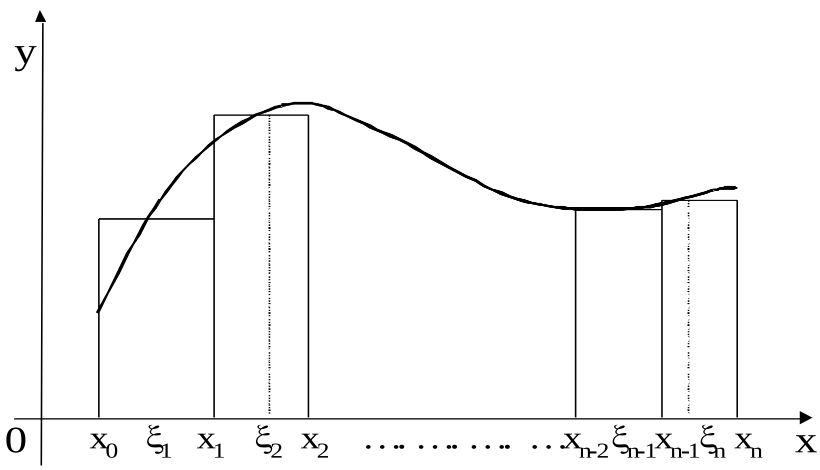
<u>Задача про обчислення площі криволінійної трапеції</u>

Нехай на відрізку $[a,b]$ *задана невід'ємна функція* $y=f(x)$. *Криволінійною трапецією називається фігура, яка обмежена кривою* $y=f(x)$, *віссю* Ox, *прямими* $x=a$ *та* $y=b$. *Потрібно визначити площу криволінійної трапеції.*

Для розв'язання цієї задачі розіб'ємо відрізок $[a,b]$ (основу трапеції) на n рівних або нерівних частин за допомогою точок: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Прямі, що відповідають точкам розбиття, розбивають криволінійну трапецію на n рівних або нерівних смужок. Відмітимо на кожному з відрізків $[x_{i-1},x_i]$ довільну точку ξ_i: $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, $(i=1,2,\ldots,n)$. Замінимо тепер приблизно i-ту смужку прямокутником з основою $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ та висотою рівною $y_i=f(\xi_i)$.

Таким чином, криволінійна трапеція заміниться деякою ступінчастою фігурою, що складається з прямокутників. Площа ступінчастої фігури буде дорівнювати

$$f(\xi_0)\Delta x_1+f(\xi_1)\Delta x_2+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$



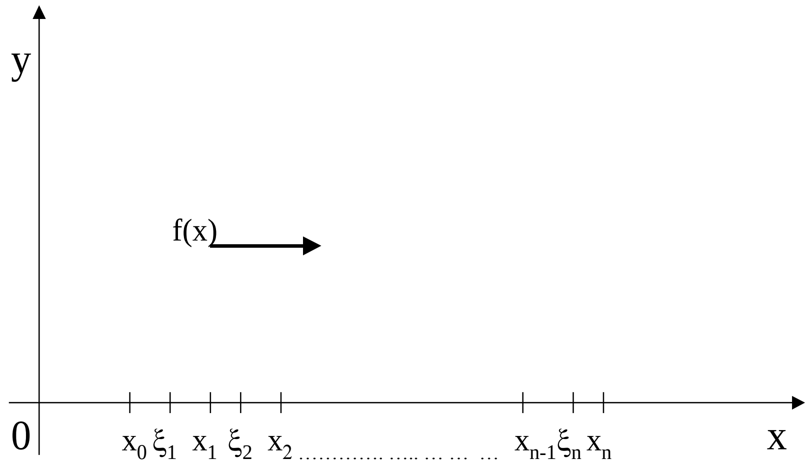
Ця наближена рівність буде тім точніша, чим дрібніше розбиття відрізку $[a,b]$ на частини, тобто чим менша довжини Δx_i. Тому за точне значення площі S криволінійної трапеції візьмемо значення ступінчастої фігури при умові, що довжина найбільшого відрізку розбиття $d=\max\{\Delta x_i\}$,

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ прямує до нуля, тобто маємо

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Задача про обчислення роботи змінної сили

Нехай матеріальна точка переміщується з точки a *вісі* Ox *в точку* b *цієї вісі під дією змінної сили* $f(x)$, *паралельної вісі* Ox. *Потрібно визначити роботу* A *цієї сили.*



Розділимо шлях $[a, b]$ на n рівних або нерівних ділянок за допомогою точок $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ та складемо суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$. Оскільки кожний доданок цієї суми є наближеним значенням роботи змінної сили $f(x)$ на ділянці $[x_{i-1}, x_i]$, то всю суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ природно прийняти за наближене значення роботи A сили $f(x)$ на шляху $[a, b]$, яке прямує до точного значення роботи, якщо довжина усіх ділянок прямує до нуля. Маємо $A = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$, де $d = \max\{\Delta x_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Бачимо, що розв'язок обох задач приводить до розглядання границі вигляду $\lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Введемо поняття визначеного інтеграла. Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$.

1. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин довільно точками x_i:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

2. Відмітимо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(i = 1,2,...,n)$.
3. Обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ та помножимо його на різницю $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
4. Складемо суму $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Інтегральна сума залежить від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на частини та вибору точок ξ_i.

Нехай $d = \max\{\Delta x_i\}$ – найбільше з чисел Δx_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$; d називається *діаметром розбиття*.

Нехай існує скінчена границя інтегральних сум при $d \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини та від вибору точок ξ_i. Тоді ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$ та позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Тобто, за визначенням

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .}$$

Якщо ця границя існує і скінчена, то функція $f(x)$ називається *інтегрованою на відрізку* $[a,b]$. Числа a та b – відповідно *нижня та верхня границі інтегрування*, відрізок $[a,b]$ – *проміжок інтегрування*.

Можна довести, що якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку, та існує $\int\limits_a^b f(x)dx$. Можна також довести, що обмежена функція, яка має скінчену кількість розривів на відрізку, завжди інтегрована на цьому відрізку.

Таким чином, неперервність функції на відрізку є достатньою умовою того, що вона інтегрується. Будь-яка необмежена функція не інтегрується, тобто для функції $f(x)$, яка необмежена на відрізку $[a,b]$, визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не існує як границя інтегральних сум.

У визначенні поняття інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, припускаємо, що $a < b$. У випадку $b < a$ приймемо за визначення $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Якщо $a = b$, то $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

З означення визначеного інтеграла витікає, що визначений інтеграл, якщо він існує, є числом, тому він не залежить від змінної інтегрування, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(\xi)d\xi = \int\limits_a^b f(t)dt = \ldots = \int\limits_a^b f(u)du.$$

Повертаючись до задач розглянутих на початку розділу, можна записати отримані формули для площі S криволінійної трапеції та роботи A змінної сили у такому виді:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx; \quad A = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Перша з цих формул дає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Основні властивості визначеного інтеграла та його обчислення

1. Властивості визначеного інтеграла.

1. Винесення сталого множника за знак інтеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, \quad k = const.$$

2. Інтеграл від суми інтегрованих функцій:

$$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

3. При перестановці границь інтегрування інтеграл змінює знак:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

4. Адитивність інтеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \text{ для будь-яких } a, b, c.$$

5. Якщо $a < b$ та $f(x) \geq 0$, то завжди $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Якщо $a < b$ та $f(x) \le g(x)$, то завжди $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

7. Якщо $a < b$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

8. Якщо $a < b$ та $m \le f(x) \le M$, $m = const$, $M = const$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

9. Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. *Теорема про середнє значення інтеграла.* Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то знайдеться така точка $c \in [a,b]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ називається *середнім значенням функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$.

2. Формула Ньютона – Лейбніца.

Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Знайдемо первісну функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ за таблицею інтегралів: $F(x) = \arcsin x$. Тому за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi - 0 = \pi .$$

3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Якщо

1) $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi(t) \in [a,b]$ коли $t \in [\alpha, \beta]$;

3) $f(x)$ неперервна на $[a,b]$,

то
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Приклад: $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx$.

Зробимо підстановку $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$. Знаходимо нові границі інтегрування: нижня границя $x = 0$, тоді для нижньої границі змінної t повинно виконуватись $0 = \sin t$, тобто $t = 0$; верхня границя $x = 1/2$, тоді для верхньої границі маємо $1/2 = \sin t$, розв'язуємо це рівняння і отримуємо $t = \pi/6$. Таким чином,

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ t_1 = 0, t_2 = \pi/6 \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/6} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) - 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

4. Формула інтегрування частинами.

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні, тоді
$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Приклад:

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Згідно формули інтегрування частинами

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$