ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні вказівки і завдання

до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика” для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання

Харків 2000

Методичні вказівки призначені для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної форми навчання. Розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики ХарДАЗТ,

протокол № 13 від 4 липня 2000 р.

Склали: доценти Р.Н. Давидов, В.В. Науменко

Рецензент доц. Ю.В. Куліш

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики – вступу до математичного аналізу. Контрольна робота № 2 з вищої математики для студентів-заочників присвячена цьому розділу і охоплює такі теми:

1. Функція дійсної змінної. Елементарні функції, їхні властивості і графіки.
2. Теорія границь.
3. Неперервність функцій.
4. Комплексні числа і дії над ними в алгебраїчній, показниковій і тригонометричній формах .

Вказівки містять питання по програмі цього розділу, список навчальної літератури, основні теоретичні відомості, приклади розв'язання задач із розгорнутими поясненнями і завдання контрольної роботи.

Вказівки рекомендовані студентам заочної форми навчання, але можуть бути використані при вивченні цього розділу і студентами денної форми навчання.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

У зв'язку з невеликим обсягом аудиторних занять (лекційних і практичних) основним джерелом знань для студентів заочної форми навчання є не конспект лекцій, а підручник. Читання підручника рекомендується супроводжувати складанням свого конспекту, що обов'язково повинен містити відповіді на теоретичні питання, наведені в даних методичних вказівках. Особливу увагу варто звертати на означення основних понять курсу, а при вивченні теорем – на їхні формулювання, прагнути до чіткого з'ясування припущень і стверджень теорем.

Вивчення теоретичного матеріалу треба супроводжувати розв'язанням задач, корисно для закріплення навичок, крім свого варіанта, розв’язати завдання ще одного варіанта.

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем. Залік контрольних робіт відповідно до навчальної програми є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики (математичного аналізу). Контрольна робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не зараховується.

При вивченні даного розділу курсу вищої математики може бути використана така література:

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1966-1973.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980-1998.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1986.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч.II. Практические занятия по дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных. – Харьков: ХГУ, 1963-1967.
5. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1964-1986.
6. Мантуров О.В., Матвеева Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1978-1987.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1. – М.: Наука, 1964-1985.

9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981-1990.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1 Дійсні числа. Функція, область визначення та область значень. Способи завдання функцій. Складна функція, взаємнообернені функції, обмежені функції, монотонні функції, парність і непарність функцій.

2 Основні елементарні функції і їхні графіки. Графіки функцій, здобутих найпростішими перетвореннями основних елементарних.

3 Границя функції. Дві теореми про функції, що мають границю (обмеженість і збереження знака). Арифметичні теореми про границі функцій, теореми про порівняння, властивості границі монотонних функцій.

4 Нескінченно малі і нескінченно великі величини і їхні властивості.

5 Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих величин. Еквівалентні функції.

6 Перша і друга визначні границі. Число e, натуральний логарифм.

7 Неперервність функцій. Дії над неперервними функціями. Неперервність складної та оберненої функцій. Точки розриву, їхня класифікація. Неперервність елементарних функцій.

8 Властивості функцій, неперервних на відрізку.

9 Комплексні числа і їхнє зображення на комплексній площині. Алгебраїчні дії над комплексними числами. Модуль і аргумент.

10 Показникова і тригонометрична форми комплексного числа, формули Ейлера. Піднесення до степеня. Формула Муавра.

11 Добування кореня з комплексного числа.

ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ

Нехай $D \subset \mathrm{R}$ – деяка множина дійсних чисел.

Означення. Якщо кожному числу $x \in D$ по деякому правилу “ f ” ставиться у відповідність число y, то кажуть, що y є ***функцією*** від x і пишуть $y=f(x)$. Множина D називається ***областю визначення*** функції, а множина всіх значень y – ***областю значень*** функції. Змінна x називається ***аргументом*** функції або незалежною змінною, а y – функцією або залежною змінною.

Частіше усього функцію задають аналітично, тобто за допомогою однієї або декількох формул. Наприклад, $y = \sqrt{2x+3}$. Множина тих чисел x, для яких права частина такої рівності може бути обчислена, називається ***природною областю визначення*** функції. Якщо множина D не вказана спеціально, то припускається, що функція задана в природній області визначення.

Функція може бути задана також за допомогою її графіка. ***Графіком*** функції $y=f(x)$ називається множина точок на площині Oxy із координатами $(x; y)$, де $x \in D$, а $y=f(x)$.

Основні елементарні функції:

1. Степенева $y = x^a \quad (a \in \mathrm{R})$.
2. Показникова $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$.
3. Логарифмічна $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$.
4. Тригонометричні $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \mathrm{tg}\, x, \quad y = \mathrm{ctg}\, x$.
5. Обернені тригонометричні

   $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \mathrm{arctg}\, x, \quad y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Властивості цих функцій відомі з курсу середньої школи і розглядаються також, наприклад, у [1, 2, 5, 8].

Елементарною називається функція, отримана з основних елементарних за допомогою скінченого числа алгебраїчних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій функцій (взяття функції від функції).

Так, наприклад, функція $y = 5^x \cdot \sqrt{\lg \sin 2x}$ є елементарною.

Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий. Розглянемо деякі найпростіші перетворення цієї функції і з'ясуємо, як буде змінюватися при цьому графік.

$\boxed{\text{I}}$ Графік функції $y=f(x-a)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ паралельним переносом уздовж осі Ox на a одиниць (праворуч на $|a|$ одиниць, якщо $a > 0$, і ліворуч на $|a|$ одиниць, якщо $a < 0$ (рисунок 1)).

$\boxed{\text{II}}$ Графік функції $y=f(x)+B$ одержується з графіка функції $y=f(x)$

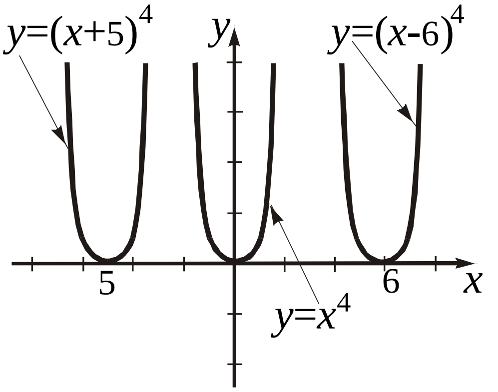

Рисунок 1

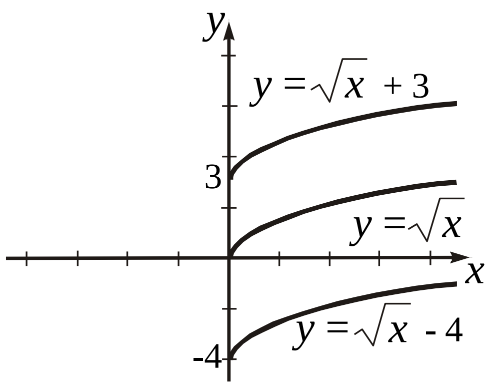

Рисунок 2

паралельним переносом уздовж осі Oy на B одиниць (вгору на $|B|$ одиниць, якщо $B > 0$, і вниз на $|B|$ одиниць, якщо $B < 0$ (рисунок 2)).

$\boxed{\text{III}}$ Графік функції $y=f(kx)$ $(k>0)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ стиском графіка уздовж осі Ox до осі Oy у k разів (якщо $k<1$, то стиск у k разів треба розуміти як розтяг у $1/k$ разів).

Зауваження. $y = f(kx+b) = f(k(x+b/k))$. Тому графік цієї функції одержуємо з графіка функції $y=f(x)$ послідовно стиском уздовж осі Ox до осі Oy у k разів і паралельним переносом уздовж осі Ox на $(-b/k)$ одиниць.

$\boxed{\text{IV}}$ Графік функції $y=Af(x)$, де $A > 0$, одержується з графіка функції $y=f(x)$ розтягом графіка уздовж осі Oy відносно осі Ox у A разів (якщо $A<1$, то розтяг у A разів треба розуміти як стиск у $1/A$ разів.

$\boxed{\text{V}}$ Графік функції $y=f(-x)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ відображенням симетрії відносно осі Oy.

$\boxed{\text{VI}}$ Графік функції $y=-f(x)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ відображенням симетрії відносно осі Ox.

Приклад 1. Для даної функції $f(x) = \sin x$ побудувати графіки функцій: 1) $y=f(x)$; 2) $y=f(kx)$; 3) $y=f(kx+b)$; 4) $y=Af(kx+b)$;
5) $y=Af(kx+b)+B$, де $k=-2$, $b=\pi/3$, $A=2$, $B=-1$.

Таким чином, треба послідовно побудувати графіки таких функцій (рисунок 3):

1) $y = \sin x$ – будуємо синусоїду.

2) $y = \sin(-2x) = -\sin 2x$ – графік одержуємо, стискаючи попередній графік у два рази уздовж осі Ox до осі Oy (частота коливань збільшилася в два рази, виходить, період зменшився в два рази) і застосовуючи перетворення симетрії щодо осі Oy.

3) $y = \sin(-2x+\pi/3) = -\sin 2(x-\pi/6)$ – графік одержуємо із попереднього паралельним переносом уздовж осі Ox на $\pi/6$ праворуч.

4) $y = 2\sin(-2x+\pi/3)$ – графік одержуємо з попереднього розтягом уздовж осі Oy в два рази (амплітуда коливань збільшилася в два рази).

5) $y = 2\sin(-2x + \pi/3) - 1$ – паралельний перенос попереднього графіка уздовж осі Oy на 1 одиницю униз.

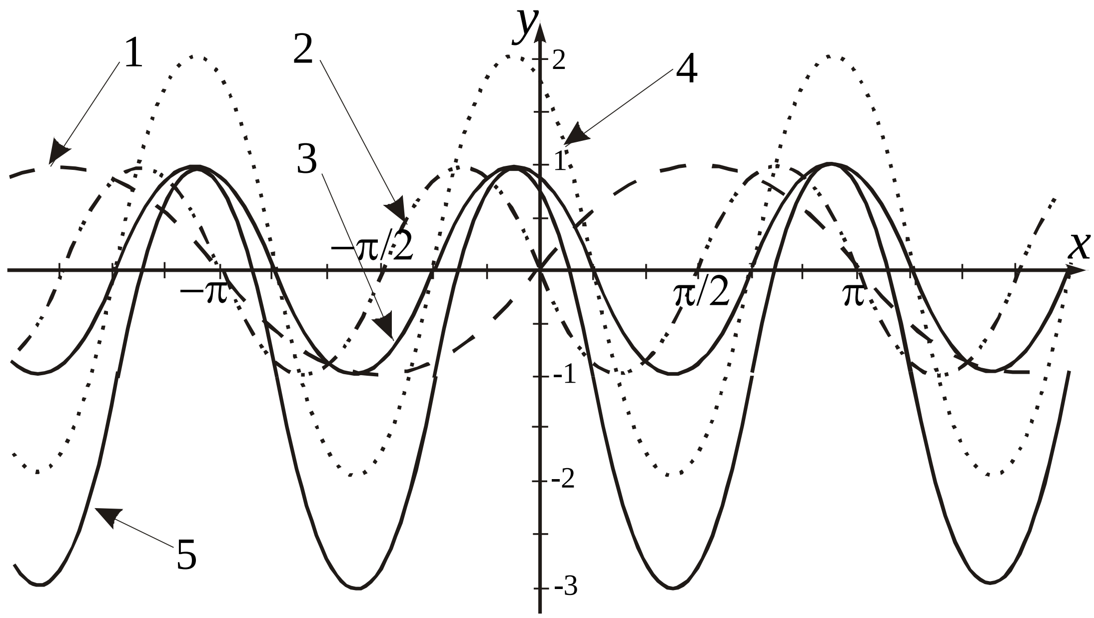

Рисунок 3

ГРАНИЦІ

Окіл точки

Нагадаємо означення і властивості модуля (абсолютної величини) $|x|$ дійсного числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}.$$

<u>Властивості:</u> 1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 2) $|a / b| = |a| / |b|$;

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$; 4) $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Модуль має простий геометричний зміст: $|x|$ дорівнює відстані числа x на числовій осі від нуля (рисунок 4). Тому нерівності $|x| < \delta$ задовольняють усі точки x, відстань яких від нуля менше δ (рисунок 5).

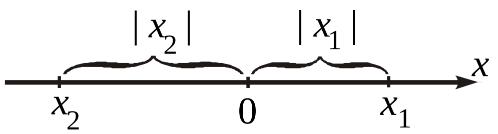

Рисунок 4

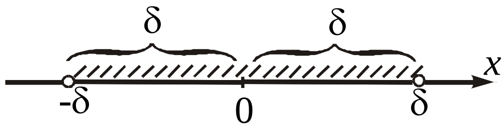

Рисунок 5

Аналогічно, $|x - a|$ дорівнює відстані точки x від точки a, отже, нерівності $|x - a| < \delta$ задовольняють усі точки числової осі, відстань яких від точки a менше δ.

Околом точки x_0 називається всякий інтервал $(a;b)$, що містить точку x_0.

Множина значень x, що задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, називається ***δ-околом*** точки x_0. Будемо позначати δ-окіл $U_\delta(x_0)$.

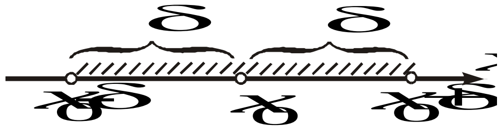

Рисунок 6

Таким чином, $U_\delta(x_0)$ – це інтервал довжини 2δ з центром у точці x_0 з усунутою (виколотою) точкою x_0 (рисунок 6):

$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$.

Правим δ–околом $U^{+}_{\delta}(x_0)$ точки x_0 називається інтервал $(x_0; x_0+\delta)$, а ***лівим δ-околом*** $U^{-}_{\delta}(x_0)$ – інтервал $(x_0-\delta; x_0)$.

Околом нескінченно віддаленої точки $+\infty$ називається всякий інтервал виду $U(+\infty)=(N;+\infty)$.

Околом нескінченно віддаленої точки $-\infty$ називається всякий інтервал виду $U(-\infty)=(-\infty; M)$.

Околом нескінченно віддаленої точки ∞ називається зовнішність будь-якого відрізка $[M;N]$, тобто $U(\infty)=(-\infty;M)\bigcup(N;+\infty)$ (рисунок 7).

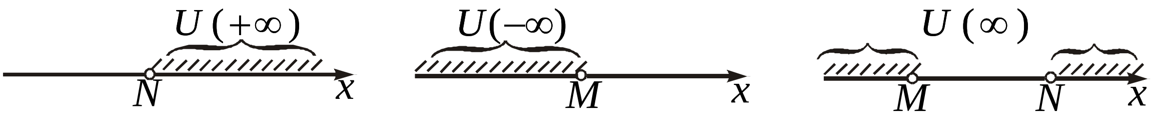

Рисунок 7

Границя функції в точці

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі скінченої точки x_0 (у самій точці x_0 функція може бути і невизначена).

Число b називається ***границею*** функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, знайдеться такий δ-окіл $U_{\delta}(x_0)$ цієї точки, що для всіх значень x із цього околу виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. При цьому пишуть $b=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (читається: “b дорівнює границі [*)] функції $f(x)$, коли x прямує до x_0”) або $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} b$ (читається: “$f(x)$, прямує до b, коли x прямує до x_0).

Означення означає, що значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа b, коли x стає достатньо близьким до x_0.

[*)] Позначення lim походить від латинського limes – границя, межа.

Односторонні границі функції в точці

Число b_1 називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, знайдеться такий лівий δ-окіл $U_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)$ цієї точки, що для всіх значень $x \in U_\delta^-(x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ (тобто $x \to x_0$, залишаючись менше x_0). При цьому пишуть $b_1 = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Число b_2 називається ***правою границею*** функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, знайдеться такий правий δ-окіл $U_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)$ цієї точки, що для всіх значень $x \in U_\delta^+(x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - b_2| < \varepsilon$ (тобто $x \to x_0$, залишаючись більше x_0). При цьому пишуть $b_2 = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Ліва границя в точці x_0 позначається також $f(x_0 - 0)$, а права границя – $f(x_0 + 0)$. Вони називаються односторонніми границями. На рисунку 8 наведений графік функції, що має в точці x_0 різні односторонні границі $f(x_0 - 0) = b_1 \neq b_2 = f(x_0 + 0)$, а на рисунку 9 – функції, що має в точці x_0 однакові односторонні границі, але в самій точці x_0

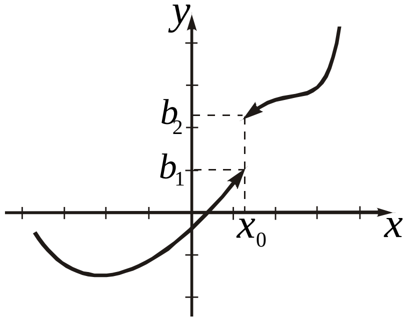

Рисунок 8

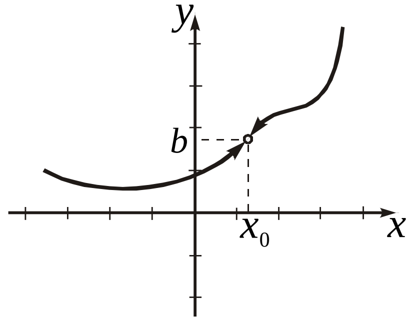

Рисунок 9

невизначеної.

Теорема. *Про зв’язок границь.*

Для того, щоб існував $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необхідно і достатньо, щоб існували односторонні границі $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та $f(x_0 + 0) = = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ і вони дорівнювали одна одній $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Границя функції в нескінченно віддаленій точці

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі нескінченно віддаленої точки $+\infty$ або $-\infty$.

Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ (або при $x \to -\infty$), якщо для будь-якого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, знайдеться такий окіл цієї нескінченно віддаленої точки $U(+\infty) = (N; +\infty)$ (відповідно, $U(-\infty) = (-\infty; M)$), що для всіх значень x із цього околу виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. При цьому пишуть $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (відповідно, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$).

Означення означає, що для достатньо віддалених від початку координат у відповідну сторону осі Ox значень аргументу x значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа b, тобто точки графіка як завгодно близькі до горизонтальної прямої $x = b$. Така пряма називається горизонтальною ***асимптотою***. На рисунку 10 наведено графік деякої функції, що має різні границі

$b_1 = f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ і

$b_2 = f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$,

і, виходить, дві різні асимптоти при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$.

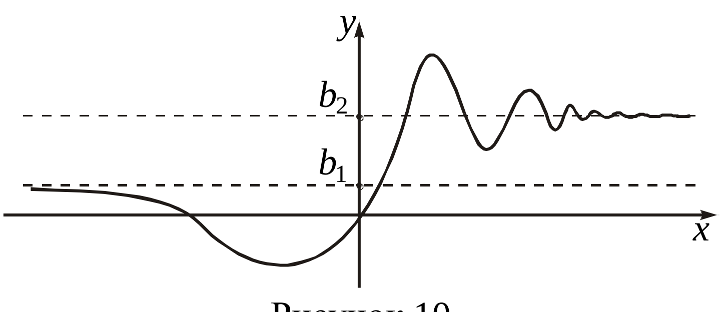

Рисунок 10

Як приклад конкретної функції, що має скінчені границі при $x \to \pm\infty$, можна навести $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (рисунок 11).

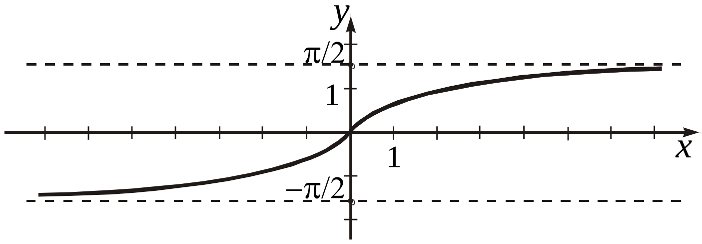

Рисунок 11

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

Правила граничного переходу

Сформулюємо основні властивості границь у виді теорем. Надалі для стислості будемо позначати $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim u$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \lim v$ і т.п., де в кожному конкретному твердженні будемо розуміти, що змінна x прямує до одного і того ж скінченого або нескінченого значення a $(-\infty \le a \le \infty)$.

Теорема 1. Якщо $u(x) \equiv C$ $(C = const)$ в околі точки $x = a$, то $\lim u(x) = C$, тобто границя постійної величини дорівнює цій же постійній ($\lim C = C$).

Теорема 2. Границя алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій же сумі границь доданків, якщо останні границі існують. Наприклад, для двох функцій

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v.$$

Теорема 3. Границя добутку скінченої кількості функцій дорівнює добутку границь співмножників, якщо останні границі існують. Наприклад, для двох функцій

$$\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v.$$

Теорема 4. Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто

$$\lim(Cu) = C \lim u,$$

якщо $\lim u$ існує.

Теорема 5. Границя цілого додатного степеня деякої функції дорівнює тому ж степеню її границі, якщо ця границя існує

$$\lim(u^n) = (\lim u)^n.$$

Теорема 6. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо останні границі існують і границя знаменника не дорівнює нулю

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \quad (\lim v \neq 0).$$

Використовуючи наведені властивості, можна обчислювати границі достатньо складних функцій.

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2}{5x^4-70} = \dfrac{\lim(x^3-3x^2)}{\lim(5x^4-70)} = \dfrac{\lim x^3 - \lim(3x^2)}{\lim(5x^4) - \lim 70} =$

$$= \frac{(\lim x)^3 - 3(\lim x)^2}{5(\lim x)^4 - 70} = \frac{2^3 - 3\cdot 2^2}{5\cdot 2^4 - 70} = \frac{8-12}{80-70} = \frac{-4}{10} = -0{,}4.$$

Тут використовувалося без доказу, як практично очевидне, те, що $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Ми переконалися, що для обчислення границі раціональної функції при $x \to a$, де a – скінчене число, достатньо підставити у функцію це граничне значення аргументу $x = a$. Виявляється, що це правило можна застосовувати і для всіх елементарних функцій, тобто справедливе наступне твердження.

Теорема 7. Про границю елементарної функції.

Якщо елементарна функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, включаючи саму цю точку [*)], то

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}.$$

*) Тобто точка $x=a$ є внутрішньою точкою області визначення функції.

Теорема 8. *Про границю складної функції.*

Якщо $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, і $f(t)$ – функція, визначена в околі точки $t = b$, включаючи саму точку b, для якої існує $\lim\limits_{t\to b} f(t) = f(b)$, то

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x\to a} u(x)\right) = f(b)}.$$

Приклад 3. а) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = \cos\pi = -1$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg} \log_3(x+1) = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{x\to 2} \log_3(x+1)\right) =$

$= \operatorname{arctg} \log_3\left(\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\right) = \operatorname{arctg} \log_3(2+1) = \operatorname{arctg} \log_3 3 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4.$

Розкриття невизначеностей

Часто при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ виявляється, що значення функції $f(a)$ у граничній точці не визначено, і застосувати теорему 7 не вдається. Але границя й у цьому випадку може існувати, а її знаходження, як кажуть, потребує розкриття невизначеності.

Теорема 9. Якщо $f(x) \equiv g(x)$ в околі точки $x = a$ (за винятком можливо самої точки $x = a$), то

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Приклад 4. Функція $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ визначена при всіх $x \neq 2$, причому, для всіх інших значень аргументу $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. Таким чином, функції $f(x)$ і $g(x) = x+2$ відрізняються тільки значенням в одній точці $x = 2$, тому $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$.

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{2\cdot 2^2-3\cdot 2+1}{2^2-5\cdot 2+6}=\dfrac{0}{0}\right).$

При обчисленні границі виникла невизначеність виду 0/0. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник дробу в добуток лінійних співмножників, знаходячи корені квадратних тричленів x_1, x_2 і, скориставшись відомою формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, а потім скоротимо спільні множники:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-0{,}5)}{(x-3)}=\frac{2(2-0{,}5)}{2-3}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Аналогічно обчислюються границі, що містять найпростіші ірраціональні вирази, і які також приводять до невизначеностей типу 0/0. При цьому на попередньому етапі треба “позбутися ірраціональності” в ірраціональному виразі, який має нульове граничне значення, домножаючи і чисельник і знаменник дробу на так званий спряжений ірраціональний вираз та використовуючи формули скороченого множення:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$;

$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$.

Приклад 6.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{3}-\sqrt{x})(\sqrt{3}+\sqrt{x})(\sqrt{2x+3}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+3-9)(\sqrt{3}+\sqrt{x})}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2(3-x)(\sqrt{3}+\sqrt{x})}{(3-x)(\sqrt{2x+3}+3)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}+3}=-2\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3+3}+3}=\frac{-4\sqrt{3}}{6}=-\frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

Обмежені функції

Функція $f(x)$ називається ***обмеженою*** на множині D, якщо існує таке число $M>0$, що для усіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Функція $f(x)$ називається ***напівобмеженою*** на множині D, як-от,

а) обмеженою знизу, якщо існує таке число M_1, що для усіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \geq M_1$;

б) обмеженою зверху, якщо існує таке число M_2, що для усіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \leq M_2$.

Функція $f(x)$ називається ***обмеженою*** при $x \to a$ (у точці $x=a$), якщо вона обмежена в деякому околі цієї точки.

Приклад 7. Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (рисунок 12). Область визначення $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Очевидно, що ця функція обмежена знизу в області визначення, тому що $f(x)>0$. На кожному замкнутому відрізку, що не містить нуля, функція обмежена також і зверху, а значить просто обмежена. Наприклад, для усіх $x \in [1;3]$ виконується $f(x) \leq 1$. Функція обмежена також і при $x \to \pm\infty$. Проте ця функція необмежена в нулі (при $x \to 0$), тому що для будь-якого як завгодно великого числа M завжди знайдеться в околі нуля таке число x_0, що $\dfrac{1}{x_0^2} > M$.

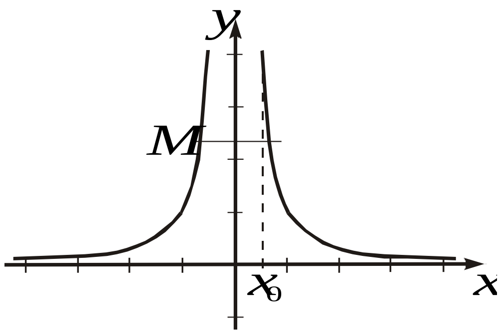

Рис.12

Нескінченно великі і нескінченно малі величини

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою (НВ)*** при $x \to a$ $(-\infty \le a \le \infty)$, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться такий окіл $U(a)$ цієї точки, що для всіх значень x із цього околу виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Означення означає, що модуль функції стає більше будь-якого наперед заданого числа, тобто необмежено зростає, коли $x \to a$. Отже, в силу означення границі нескінченно велика при $x \to a$ функція не має границі в цій точці. При цьому пишуть

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{або} \qquad f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Якщо нескінченно велика в точці $x = a$ функція $f(x)$ зберігає знак в околі цієї точки, і цей знак важливий, то пишуть

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \text{якщо } f(x) < 0;$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \text{якщо } f(x) > 0.$$

Приклад 8. $f(x) = x$ – нескінченно велика, коли $x \to \pm\infty$, тому що для будь-якого $M > 0$ виконується $|f(x)| = |x| > M$, як тільки $x \in (-\infty; -M) \cup (M; +\infty)$. Цілком зрозуміло також, що $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Приклад 9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ – нескінченно велика, коли $x \to 0$ (рисунок 13), тому що для будь-якого $M > 0$ виконується

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} > M,$$

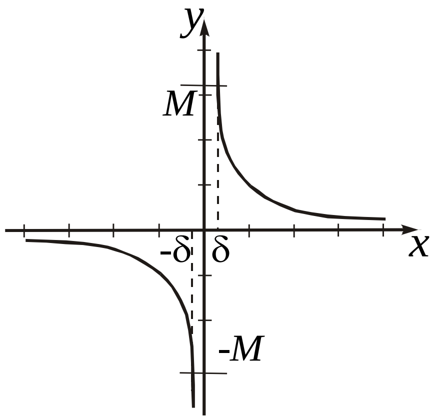

Рисунок 13

як тільки $x \in (-\delta;\ \delta)$, де $\delta = \dfrac{1}{M}$. Причому $\lim\limits_{x\to-0} 1/x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} 1/x = +\infty$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою (НМ)*** у точці $x = a$ $(-\infty \le a \le \infty)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ($f(x) \to 0$, коли $x \to a$).

Означення означає, що модуль функції стає менше будь-якого наперед заданого числа, коли $x \to a$.

Приклад 10. а) $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, отже, $f(x) = x$ – н .м. при $x \to 0$. У той же час $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$, отже, $f(x) = x$ – НВ при $x \to \infty$.

Зауваження. Поняття НВ і НМ – локальні, тому що характеризують поведінку функції поблизу конкретної граничної точки. Не слід також плутати НВ із дуже великим по модулю постійним числом, а НМ із дуже малим по модулю постійним числом.

Теорема 10. *Про зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими.*

♦ Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$ ($\alpha(x) \ne 0$ для $x \ne 0$), то обернена до неї величина $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика при $x \to a$.

♦ Якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to a$, то величина, обернена до неї, $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала при $x \to a$.

Приклад 11. а) $\alpha(x) = x$ – НМ при $x \to 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ – НВ, тобто $\dfrac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$.

б) $f(x) = x$ – НВ при $x \to \infty$, $\Rightarrow \alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ – НМ, тобто $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.

Для нескінченно великих правила обчислення границь (теореми 2-6) у загальному випадку не мають місця. Нехай у точці $x = a$ функції $f(x)$, $g(x)$ – НВ, а функція $\alpha(x)$ – НМ ($f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to a$). Тоді при обчисленні границь можна керуватися такими правилами:

1) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо} \quad C \neq 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad C = 0 \end{cases}$;

2) якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) + g(x) \right) = [+\infty + (+\infty)] = +\infty;$$

3) якщо існує $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \quad (b \neq \infty)$, то

$$\lim_{x\to a} \left(u(x) + f(x) \right) = [b + \infty] = \infty;$$

4) $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = [\infty \cdot \infty] = \infty$;

5) якщо в околі точки $x = a$ існує $f^{p}(x)$, то для всіх $p > 0$

$$\lim_{x\to a} f^{p}(x) = [\infty^{p}] = \infty;$$

6) зокрема, якщо в околі точки $x = a$ існує $\sqrt[n]{f(x)}$, то

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = [\sqrt[n]{\infty}] = \infty$;

7) якщо існує $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \quad (b \neq \infty,\ b \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to a} \left(u(x) \cdot f(x) \right) = [b \cdot \infty] = \infty;$$

8) якщо існує $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \quad (b \neq \infty)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{f(x)} = \left[\frac{b}{\infty} \right] = 0, \text{ зокрема, } \lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)} = \left[\frac{C}{\infty} \right] = 0;$$

9) якщо існує $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \quad (b \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{\alpha(x)} = \left[\frac{b}{0} \right] = \infty, \text{ зокрема, } \lim_{x\to a} \frac{C}{\alpha(x)} = \left[\frac{C}{0} \right] = \infty;$$

10) якщо $|u(x)|<M$ в околі точки $x=a$ (функція $u(x)$ обмежена), то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}u(x)\cdot\alpha(x)=0$.

Приклад 12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=[\infty^2]=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^4+x^2-4)=5\cdot(+\infty)+(+\infty)-4=+\infty-4=+\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-5x^2)=(+\infty)-(+\infty)$ – невизначеність типу $\infty-\infty$. Для обчислення границі винесемо множник x^4 (старший степінь) за дужки. З огляду на те, що $1/x^n\to 0$, коли $x\to\infty$, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}(x^4-5x^2)=\lim_{x\to\infty}x^4(1-5/x^2)=+\infty\cdot(1-0)=+\infty;$$

г) аналогічно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2-4}{x^3+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(3-5/x^2-4/x^4)}{x^3(1+5/x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(3-5/x^2-4/x^4)}{(1+5/x^3)}=\frac{\infty(3-0)}{1+0}=\infty\cdot 3=\infty.$$

На закінчення цього розділу зауважимо, що наявність тієї чи іншої границі (а також її відсутність), як правило, легко побачити на графіку функції. Наведемо графіки деяких елементарних функцій та опишемо їх поведінку у характерних точках (включаючи нескінченно віддалену) за допомогою границь.

1 Степенева функція $y=x^\alpha$. У випадку $\alpha>0$ маємо (рисунок 14)

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty,\quad \lim_{x\to 0}x^\alpha=0.$$

У випадку $\alpha<0$ маємо (рисунок 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha=+\infty$.

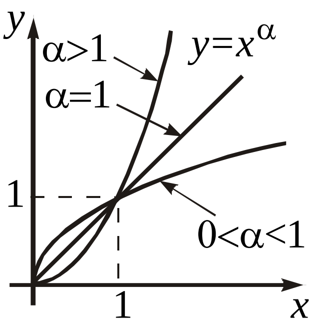

Рисунок 14

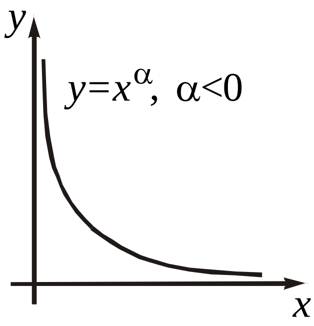

Рисунок 15

2 Показникова функція $y = a^x$ (рисунок 16). У випадку $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

У випадку $0 < a < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

3 Логаріфмічна функція (рисунок 17) $y = \log_a x, \quad (a > 1)$

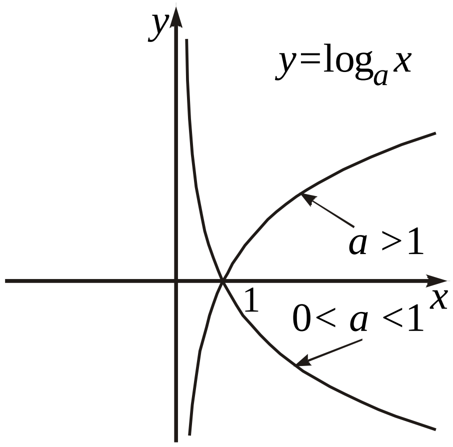

Рисунок 16

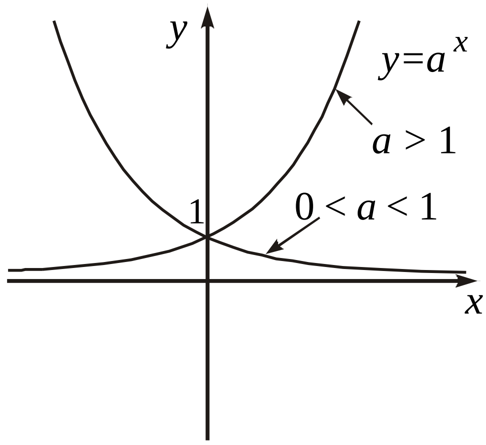

Рисунок 17

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$$

4 Тригонометричні функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ (рисунок 18).

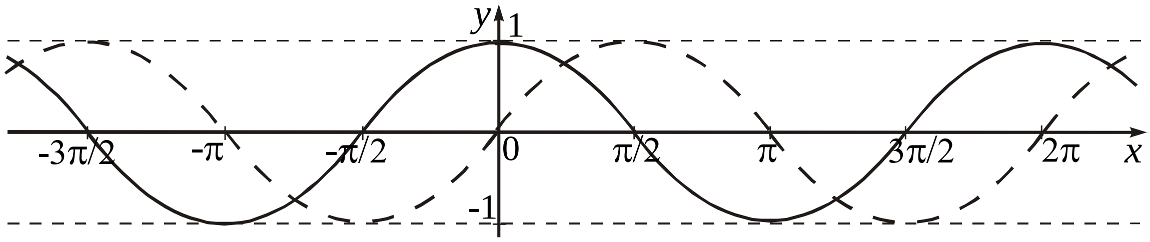

Рисунок 18

$\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ – не існує, $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ – не існує.

5 Тригонометричні функції $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ (рисунок 19).

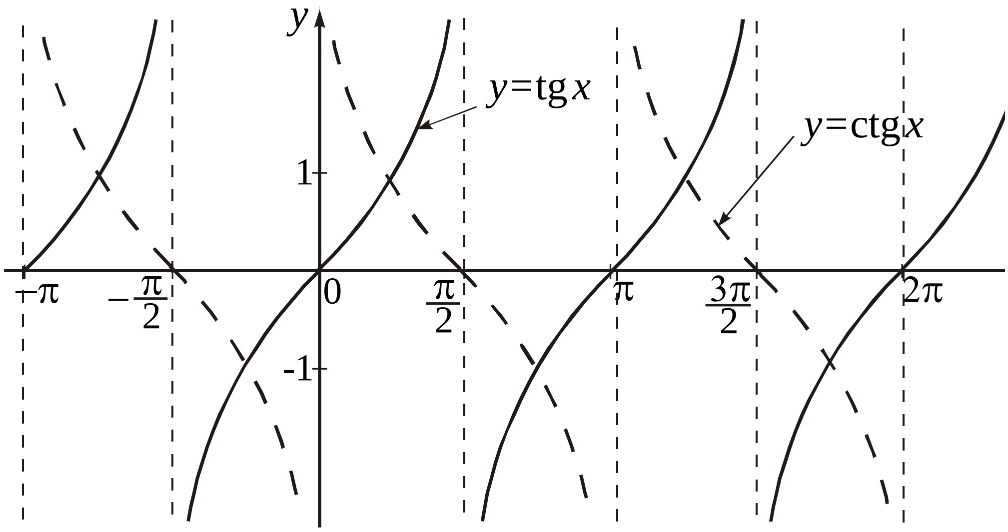

Рисунок 19

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg} x$ – не існує, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{ctg} x$ – не існує, $\lim\limits_{x\to k\pi+0} \operatorname{ctgx} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to k\pi-0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

6 Обернені тригонометричні функції $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$ (рисунок 20).

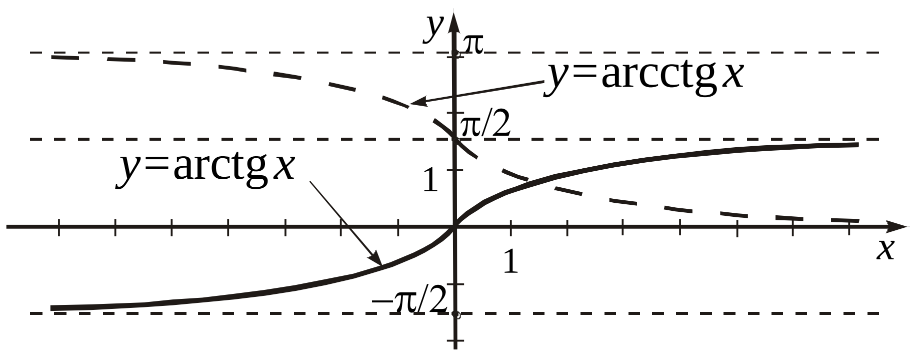

Рисунок 20

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

Порівняння нескінченно великих і нескінченно малих

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені в околі точки $x=a$ і $v(x)\neq 0$ у цьому околі.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$, то кажуть, що $u(x)$ є ***"o"-мале*** від $v(x)$ і пишуть $u(x)=o(v(x))$.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ - нескінченно малі при $x\to a$, і $u(x)=o(v(x))$, то кажуть, що $u(x)$ є ***нескінченно малою більш високого порядку відносно нескінченно малої*** $v(x)$.

Приклад 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=o(x),$ коли $x\to 0$. Взагалі, $x^n=o(x^m)$ при $x\to 0$, якщо $n>m$.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ - нескінченно великі при $x\to a$, і $u(x)=o(v(x))$, то кажуть, що $u(x)$ є ***нескінченно великою більш низького порядку відносно нескінченно великої*** $v(x)$.

Приклад 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\infty}=0 \quad\Rightarrow\quad x=o(x^3),$ при $x\to\infty$. Взагалі, $x^n=o(x^m)$ при $x\to\infty$, якщо $n<m$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=1$, то кажуть, що $u(x)$ й $v(x)$ еквівалентні при $x\to a$ і пишуть $u(x)\sim v(x)$.

Нехай $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ – многочлен степеня n. Як ми бачили раніше в прикладі 12, $\lim\limits_{x\to\infty}P_n(x)=\infty$ і, швидкість росту визначаться старшим членом a_nx^n многочлена. Дійсно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{a_nx^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{a_nx^n}=\frac{a_n+0}{a_n}=1.$$

Таким чином, $P_n(x)\sim a_nx^n$, при $x\to\infty$.

Наприклад, $3x^2+5x-6\sim 3x^2$ ($x\to\infty$).

Теорема 11. Якщо $u(x)\sim v(x)$ при $x\to a$, а $w(x)$ – довільна функція, то

$$\lim_{x\to a}(w(x)\cdot u(x))=\lim_{x\to a}(w(x)\cdot v(x)) \quad \text{і} \quad \lim_{x\to a}\frac{w(x)}{u(x)}=\lim_{x\to a}\frac{w(x)}{v(x)},$$

коли хоча б одна з границь в кожній рівності існує.

Остання теорема дозволяє в багатьох випадках, використовуючи відомі еквівалентні НВ і НМ, істотно спростити обчислення границь. Розглянемо задачу з прикладу 12 г).

Приклад 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^2-4}{x^3+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\left|\begin{array}{l}3x^4-5x^2-4\sim 3x^4\\ x^3+5\sim x^3\end{array}\;(x\to\infty)\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^3}=3\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Важливий приклад еквівалентних нескінченно малих дає нам так звана ***перша визначна границя***

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1}.$$

Таким чином, $\sin\alpha\sim\alpha$, коли $\alpha\to 0$. Виходячи з цього, можна також показати, що

$$\boxed{\sin\alpha\sim\operatorname{tg}\alpha\sim\arcsin\alpha\sim\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha,\quad(\alpha\to 0)}.$$

Приклад 16.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x^2}{x\sin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}5x^2\sim 5x^2\\ \sin 2x\sim 2x\end{array}\;(x\to 0)\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2}{x\cdot 2x}=\dfrac{5}{2}.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\arcsin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}1-\cos 6x=2\sin^2 3x\sim 2(3x)^2 \\ \arcsin 3x\sim 3x\end{matrix}\quad (x\to 0)\right|=$

$=6\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=6\cdot 0=0.$

Друга визначна границя

Так називають границю (невизначеність типу 1^{∞})

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}},$$

де e – постійна введена Л. Ейлером (ірраціональне число, що записується у виді нескінченного неперіодичного десяткового дробу),

$$\mathrm{e}=2{,}7182818284590\ldots\approx 2{,}72\,.$$

Друга визначна границя може бути записана і в таких формах:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1-\alpha)^{\frac{-1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}\,.$$

<u>Приклад 17.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]==\left|\begin{matrix}\dfrac{2}{x}=\alpha;\quad x=\dfrac{2}{\alpha}\\ \alpha\to 0,\ \text{коли}\ \ x\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}(1-\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to\infty}(1-\alpha)^{\frac{-1}{\alpha}\cdot(-2)}=\left[\lim_{\alpha\to\infty}(1-\alpha)^{-1/\alpha}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

Логарифм за основою e називається ***натуральним логарифмом*** і позначається $\ln x$. Таким чином $\ln x=\log_{\mathrm{e}}x$.

Нагадаємо основні властивості логарифмів ($a>0,\ a\neq 1,\ \ u>0,\ v>0$):

1) $\log_a a^x=x$ (зокрема, $\log_a a=1;\quad \log_a 1=\log_a a^0=0$);

2) $a^{\log_a x} = x$;
3). $\log_a u + \log_a v = \log_a (u \cdot v)$;
4). $\log_a u - \log_a v = \log_a (u / v)$;
5). $p \cdot \log_a u = \log_a u^p$;
6). $\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$.

Приклад 18.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = z; \quad x = \ln(1+z) \\ z \to 0, \text{ коли } x \to 0 \end{array} \right| = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \cdot \ln(1+z) = \lim_{z\to 0} \ln(1+z)^{\frac{1}{z}} = \ln\left(\lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}\right) = \ln e = 1.$$

Отже, ми встановили, що

$$\boxed{e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x, \quad \text{коли} \quad x \to 0}.$$

Узагальнимо ці співвідношення еквівалентності на будь-які основи:

$$a^x - 1 = e^{\ln a^x} - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a, \quad \text{коли} \quad x \to 0,$$

$$\log_a (1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a} = x \log_a e, \quad \text{коли} \quad x \to 0.$$

Теорема 12. Якщо $u(x) \to 0$, $v(x) \to 0$ при $x \to a$, і існує границя їх відношення в цій точці, то

$$\lim_{x\to a} (1 + u(x))^{1/v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}}.$$

Доказ: $\lim\limits_{x\to a} (1 + u(x))^{1/v(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln(1+u(x))^{1/v(x)}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(1+u(x))}{v(x)}} = \left| \begin{array}{l} \ln(1+u(x)) \sim u(x) \\ x \to a \Rightarrow u(x) \to 0 \end{array} \right| = e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}}.$$

Наведемо ще декілька прикладів, що демонструють використання еквівалентних величин, пов'язаних із другою визначною границею і теоремою 12.

Приклад 19.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\arcsin 3x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\arcsin 2x}{x}}=\left|\begin{matrix}\arcsin 3x\sim 3x\\ x\to 0\end{matrix}\right|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x}}=e^{-3}.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}\pi x\cdot\left(5^x-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}\cdot\left(5^x-1\right)=$

$$=\left|\begin{matrix}\cos\pi x\to 1,\\ \sin\pi x\sim\pi x, \quad x\to 0\\ 5^x-1\sim x\ln 5,\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x\ln 5}{\pi x}=\frac{\ln 5}{\pi}.$$

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0, якщо

1) $f(x)$ визначена в точці x_0;

2) існує границя функції в цій точці $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Це формулювання, внаслідок теореми про зв'язок границь (стор.14), можна викласти так: функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Функція $f(x)$ називається ***неперервною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Неперервна в інтервалі функція має своїм графіком неперервну лінію, яку можна намалювати, не відриваючи ручки від паперу.

Теорема. *Про неперервність складної функції.*

Нехай $g(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(u)$ неперервна в точці $u_0=g(x_0)$, тоді складна функція $h(x)=f\left(g(x)\right)$ теж неперервна в точці x_0.

З правил граничного переходу (теореми 2, 3, 6) випливає також, що, якщо $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні в точці x_0 функції, то їхня сума $f(x)+g(x)$, різниця $f(x)-g(x)$, добуток $f(x)\cdot g(x)$ і частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $g(x_0)\neq 0$) теж неперервні в цій точці. Відомо, що всі основні елементарні функції неперервні у внутрішніх точках області визначення. А оскільки елементарні функції по визначенню утворені з основних елементарних за допомогою скінченого числа алгебраїчних дій і взяття функції від функції, то звідси випливає важливе твердження.

Теорема. *Про неперервність елементарних функцій.*

Кожна елементарна функція неперервна в усіх внутрішніх точках області визначення.

Зауваження. Це твердження означає, що якщо точка x_0 – внутрішня точка області визначення елементарної функції, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, що є доказом теореми 7 (про границю елементарної функції).

Приклад 20. $f(x)=\cos\sqrt{x-2}$ – елементарна функція визначена при $x\in[2;\infty)$. Всі точки області визначення за винятком $x=2$ внутрішні, виходить, ця функція неперервна в інтервалі $(2;\infty)$.

Точки розриву і їх класифікація

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 за винятком, може бути, точки x_0.

Точка x_0 називається ***точкою розриву*** функції $f(x)$, а функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, якщо в цій точці не виконується хоча б одна з трьох умов означення неперервності функції.

Проте характер розриву функцій може бути різноманітним і потребує більш детального опису.

Точка x_0 називається ***точкою усувного розриву***, якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \neq \infty$, але або значення $f(x_0)$ не визначене, або $f(x_0) \neq b$.

Усувний розрив можна ліквідувати (усунути), довизначивши або перевизначивши функцію усього в одній точці x_0, покладаючи $f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Приклад 21. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x - 2}$. Область визначення цієї функції $D(f) = (-\infty;2) \bigcup (2;\infty)$. Функція елементарна, тому у всіх точках області визначення функція неперервна. Причому, для всіх $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{x(x-2)^2}{x-2} = x(x-2) = x^2 - 2x.$$

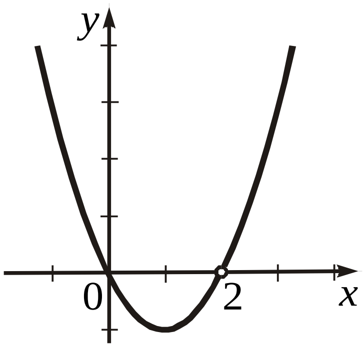

Рисунок 21

Оскільки існує

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 0 \neq \infty ,$$

то функція має в точці $x = 2$ усувний розрив. Графік цієї функції – парабола (рисунок 21) із “виколотою” точкою $(2;0)$. Достатньо покласти додатково $f(2) = 0$, і функція стане неперервною.

Інші типи розривів – неусувні.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції $f(x)$, якщо в цій точці функція має різні односторонні границі, тобто $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1 \neq \infty$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2 \neq \infty$, але $b_1 \neq b_2$.

У цьому випадку кажуть також, що функція $f(x)$ має в точці x_0 скінчений стрибок $\delta = f(x_0+0) - f(x_0-0) = b_2 - b_1$.

<u>Приклад 22.</u> $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$. Область визначення цієї функції[*)] співпадає з усією віссю $(x \in (-\infty;\infty))$, але функція не є елементарною, отже, може мати розриви (рисунок 22). В інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$ вона задана елементарними функціями (окремий випадок лінійної функції $y = \pm 1$), тому неперервна. В точці $x=0$ маємо різні односторонні границі $f(-0) = \lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sign} x = -1$, $f(+0) = \lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sign} x = 1$. Виходить, точка $x=0$ – точка розриву першого роду. У цій точці функція має стрибок $\delta = f(+0) - f(-0) = 1-(-1) = 2$.

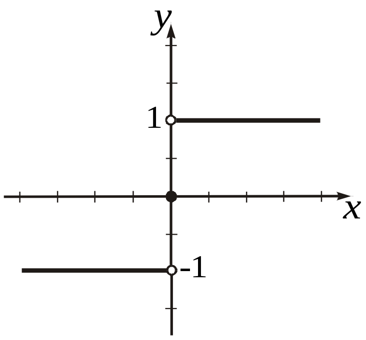

Рисунок 22

Всі інші точки розриву називаються ***точками розриву другого роду***. Зауважимо, що в точках розриву як першого, так і другого роду границя функції не існує.

<u>Приклад 23.</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (рисунок 23). Область визначення $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$, значить, функція, як елементарна, неперервна в кожному з інтервалів $(-\infty;0)$ и $(0;\infty)$. Як ми вже переконалися раніш (приклад 9), односторонні границі при $x \to \pm 0$ не існують $\lim\limits_{x\to -0} 1/x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} 1/x = +\infty$, отже точка $x=0$ – точка розриву другого роду .

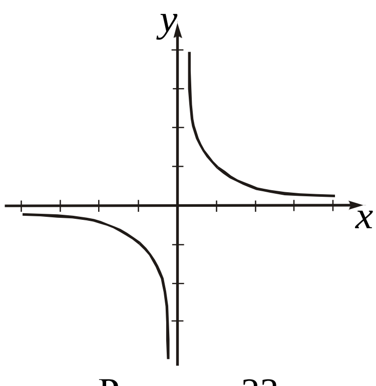

Рисунок 23

---

*) Назва функції “sign” походить від латинського signum – знак.

Приклад 24. Задано функцію $y = 8^{\frac{1}{2x-4}}$ і два значення аргументу $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Потрібно: 1) знайти границі функції при наближенні до кожного з заданих значень x зліва і справа; 2) встановити, чи є дана функція неперервною або розривною для кожного з даних значень x; 3) побудувати ескіз графіка поблизу точки розриву.

Розв'язання. Функція елементарна і визначена всюди за винятком $x = 2$ (у цій точці знаменник показника степеня перетворюється в нуль), тобто область визначення функції $D(f) = (-\infty;2) \bigcup (2;\infty)$. Виходить, функція неперервна в кожній точці $x \in (-\infty;2) \bigcup (2;\infty)$, в тому числі в точці $x = 5$, і

$$\lim_{x \to 5-0} f(x) = \lim_{x \to 5+0} f(x) = f(5) = 8^{\frac{1}{2 \cdot 5 - 4}} = 8^{1/6} = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}.$$

Знайдемо односторонні границі в точці $x_1 = 2$.

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2 \cdot (2-0) - 4} = \frac{1}{-0} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2-0} f(x) = 8^{-\infty} = \frac{1}{8^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2 \cdot (2+0) - 4} = \frac{1}{+0} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2+0} f(x) = 8^{+\infty} = +\infty.$$

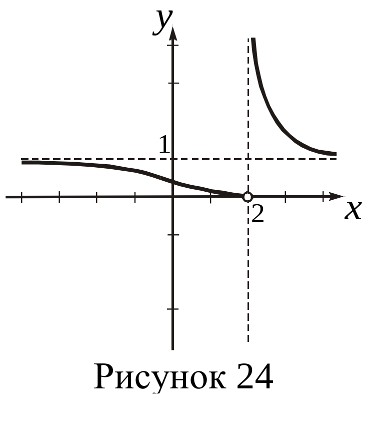

Рисунок 24

Оскільки одна з односторонніх границь не існує, то точка $x_1 = 2$ – точка розриву другого роду. Поведінку функції поблизу точки розриву наведено на рисунку 24.

Приклад 25. Функція $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ если } x\le 0 \\ 3-x^2, \text{ если } 0<x\le 2 \\ (x-4)^2, \text{ если } x>2 \end{cases}$ задається різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Потрібно знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і визначити їх тип. Побудувати графік функції.

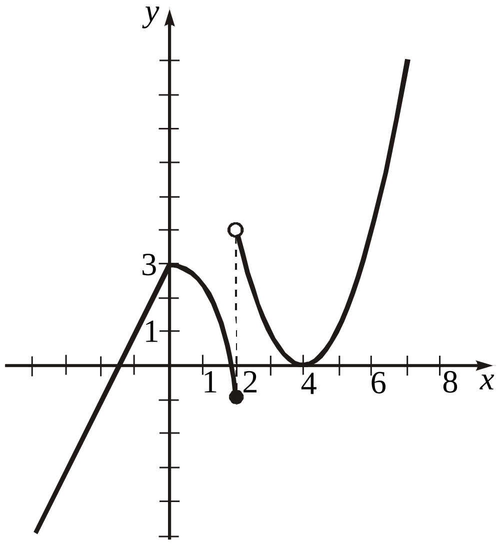

Рисунок 25

Розв'язання. Кожна з функцій $y=2x+3$, $y=3-x^2$, $y=(x-4)^2$ – елементарна і, отже, неперервна в усіх внутрішніх точках відповідного інтервалу. Виходить, $f(x)$ неперервна для всіх значень $x\in(-\infty;0)\bigcup(0;2)\bigcup(2;\infty)$.

Залишається перевірити неперервність $f(x)$ у граничних точках $x=0$ і $x=2$. Знайдемо односторонні границі і значення функції в цих точках.

$$f(-0)=\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(2x+3)=2\cdot 0+3=3,$$

$$f(+0)=\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(3-x^2)=3-0=3,$$

$f(0)=(2x+3)\big|_{x=0}=2\cdot 0+3=3$. Оскільки $f(-0)=f(+0)=f(0)=3$, то функція $f(x)$ неперервна в точці $x=0$.

Аналогічно $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(3-x^2)=3-2^2=3-4=-1$,

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x-4)^2=(2-4)^2=4.$$

Оскільки обидві границі існують, але $f(2-0)\ne f(2+0)$, то функція має в точці $x=2$ розрив першого роду (стрибок $\delta=f(2+0)-f(2-0)=3-1=2$). Будуємо графік функції $f(x)$ (рисунок 25). На інтервалі $(-\infty;0]$ графік – пряма $y=2x+3$, на інтервалі $(0;2]$ – парабола $y=3-x^2$, на інтервалі $(2;\infty)$ – парабола $y=(x-4)^2$.

Властивості функцій неперервних на відрізку

Функція $f(x)$ називається ***неперервною на замкнутому відрізку*** $[a;b]$, якщо вона неперервна у відкритому інтервалі $(a;b)$, а на кінцях відрізка, у точках $x=a$ і $x=b$ вона ***неперервна справа і зліва*** відповідно, тобто односторонні границі функції в граничних точках зсередини відрізка рівні значенням функції в цих точках

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a), \qquad \lim_{x\to b-0} f(x)=f(b).$$

Теорема *Вейєрштрасса.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкнутому відрізку $[a;b]$, то хоча б в одній точці $x=\alpha$ цього відрізка вона приймає (рисунок 26) найбільше значення $f(\alpha)=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=M$ і хоча б в одній точці $x=\beta$ – найменше значення

$$f(\beta)=\min_{x\in[a;b]} f(x)=m.$$

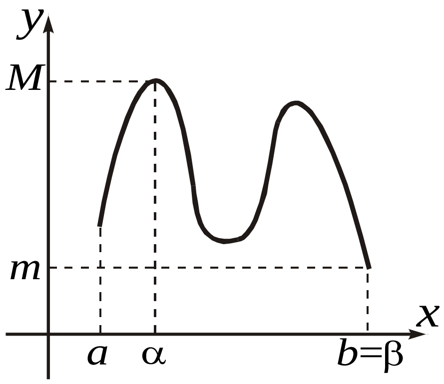

Рисунок 26

Наслідок. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку. Дійсно, для всіх значень $x\in[a;b]$ виконується

$$m\le f(x)\le M \;\Rightarrow\; |f(x)|\le A \text{, де } A=\max(|m|;|M|).$$

Теорема *Больцано-Коші (про проміжне значення).*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкнутому відрізку $[a;b]$ і приймає на його кінцях значення різних знаків ($f(a)\cdot f(b)<0$), то всередині відрізка є хоча б одна точка $\gamma\in(a;b)$, у якій функція перетворюється в нуль $f(\gamma)=0$. Зміст теореми ілюструє рисунок 27.

Приклад 26. Розглянемо многочлен $P(x)=4x^3+x^2+1$.

$P(1)=6$, $P(-1)=-2$, виходить, на відрізку $[-1;1]$ є хоча б один корінь рівняння $4x^3+x^2+1=0$.

<u>Наслідок.</u> Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ приймає на ньому хоча б в одній точці будь-яке значення між її найменшим $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ і найбільшим $M=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ значеннями (рисунок 28), тобто $\forall C\in[m;M],\ \exists x_0\in[a;b]:\ \ f(x_0)=C$.

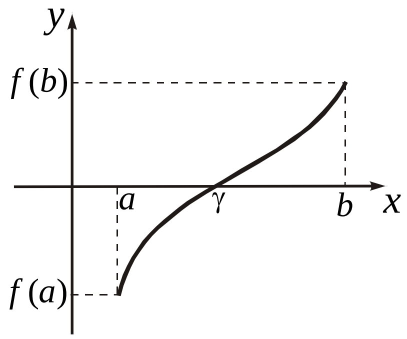

Рисунок 27

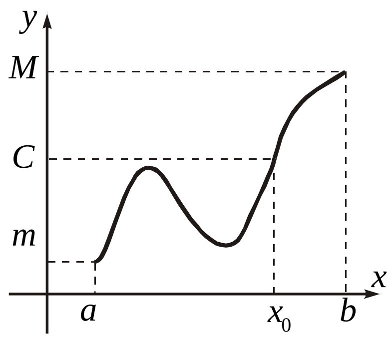

Рисунок 28

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Відомо, що квадратне рівняння не має дійсних коренів, якщо його дискримінант менше нуля, наприклад, не має їх найпростіше рівняння $x^2=-1$, тому що $\sqrt{-1}$ не визначений. Введемо ***уявну одиницю*** - число "i", що задовольняє умову

$$\boxed{i^2=-1 \quad \text{або} \quad i=\sqrt{-1}}\ .$$

Тепер можна добути корінь із будь-якого від’ємного числа *), наприклад, $\sqrt{-16}=\sqrt{-1\cdot 16}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}=i\cdot 4=4i$.

Комплексним числом називається вираз $z=x+yi$, де x і y - дійсні (реальні) числа. Число x називається ***дійсною частиною*** z і позначається $\operatorname{Re} z=x$, а число y - ***уявною частиною*** і позначається $\operatorname{Im} z=y$. **)

---

*) Тут розглядається одне з двох значень квадратного кореня. Нижче буде показано, що квадратний корінь із будь-якого числа має два значення і $\sqrt{-1}=\pm i$.

**) Позначення походять від латинських слів realis – дійсний та imaginarius – уявний.

Наприклад,

$z = 2 - 3i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 2, \ \operatorname{Im} z = -3;$

$z = 4i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 0, \ \operatorname{Im} z = 4; \qquad z = 5 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 5, \ \operatorname{Im} z = 0.$

Множину дійсних чисел можна розглядати як підмножину комплексних чисел, у яких $\operatorname{Im} z = 0$.

Комплексне число $z=x+yi$ зображують на координатній площині Oxy точкою з координатами $(x;y)$. Ця площина називається ***комплексною площиною*** C (рисунок 29), вісь Ox називається ***дійсною віссю***, а вісь Oy – ***уявною віссю***. Таким чином, дійсному числу $z = x + 0i = x$ відповідає точка на дійсній осі, а ***уявному*** числу $z = 0 + iy = iy$ – точка на уявній осі.

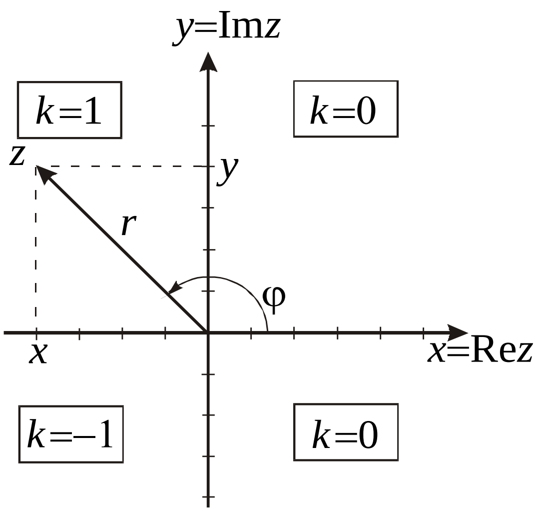

Рисунок 29

Можна також зображувати комплексне число у вигляді радіус-вектора $\{x;y\}$ і визначати його, задаючи його довжину r і кут φ між віссю Ox і вектором. Довжина цього вектора називається ***модулем комплексного числа***

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0,$$

а кут φ називається ***аргументом комплексного числа*** і позначається $\operatorname{Arg} z$. Аргумент визначається з точністю до доданка $2\pi k$ (k=0, ±1, ±2, ±3,…) і для додатних значень відлічується від осі Ox до вектора проти годинникової стрілки, а для від’ємних значень – за годинниковою стрілкою. Значення аргументу, що належать інтервалу $(-\pi; \pi]$, називається головним значенням аргументу і позначається $\arg z$. Головне значення аргументу числа $z = x + iy$ можна обчислювати за формулою

$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$, де $k = 0$, якщо z знаходиться в першій або четвертій чвертях, $k = 1$, якщо z знаходиться в другій чверті, $k = -1$, якщо z знаходиться в третій чверті. Якщо $x = \operatorname{Re} z = 0$, то $\varphi = \pi/2$, коли $y = \operatorname{Im} z > 0$, і $\varphi = -\pi/2$, коли $y = \operatorname{Im} z < 0$.

Наведемо таблицю значень $\operatorname{arctg} a$ для деяких значень аргументу.

a	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Нагадаємо також, що ця функція непарна, тобто $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Наприклад,

$$z = -2 + 2i \in \text{2-й чверті, } k = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg(-2 + 2i) = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi = -\operatorname{arctg}1 + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4.$$

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли рівні відповідно їх дійсні і уявні частини ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$), тобто вони зображуються однією і тією ж точкою, а значить, у них рівні відповідно аргументи та модулі ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ та $|z_1| = |z_2|$). Якщо $z = 0 + 0i$, то пишуть $z = 0$. Ясно, що $z = 0$ тоді і лише тоді, коли $|z| = 0$. Це єдине комплексне число, аргумент якого не існує.

Числа $z = x + yi$ і $\bar{z} = x - yi$ називаються комплексно спряженими, вони відрізняються знаком уявної частини. Наприклад, $z = 2 - 5i \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$; $z = 3 \Rightarrow \bar{z} = 3$; $z = 2i \Rightarrow \bar{z} = -2i$. Зрозуміло, що комплексно спряжені числа зображуються на комплексній площині точками, симетричними відносно дійсної осі, і $\arg z = -\arg \bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$. Зауважимо, що множина комплексних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами завжди має парне число коренів, що входять комплексно спряженими парами. Наприклад, квадратне рівняння має один або два дійсних кореня (якщо його дискримінант $D \geq 0$) або два комплексно спряжених кореня (якщо $D < 0$), що знаходяться за відомою формулою.

Приклад 27. Знайти корені квадратного рівняння $x^2 - 14x + 53 = 0$.

Розв'язання. $D = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 53 = -16 < 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{14 \pm 4i}{2} = 7 \pm 2i.$$

Дії над комплексними числами

1. Додавання і віднімання комплексних чисел проводиться за правилом:

$$(a+bi) \pm (c+d\,i) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i.$$

Наприклад, $(2+5i)+(4-3i)=(2+4)+(5-3)i=6+2i$.

2. Множення комплексних чисел проводиться за звичними правилами множення многочленів, враховуючи, що $i^2 = -1$:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Наприклад,

$$(2+5i)(3-4i) = 6+15i-8i-20i^2 = (6+20)+(15-8)i = 26+7i,$$

$$0{,}3\cdot(5-3i) = 0{,}3\cdot 5 - 0{,}3\cdot 3i = 1{,}5 - 0{,}9i.$$

Добуток двох комплексно спряжених чисел дорівнює квадрату їхнього модуля – є невід'ємним дійсним числом:

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2 = |z| \geq 0.$$

3. Ділення комплексного числа на дійсне число a зводиться до операції множення на обернене число $1/a$. Наприклад

$$\frac{(7-2i)}{5} = \frac{1}{5}\cdot(7-2i) = \frac{1}{5}\cdot 7 - \frac{1}{5}\cdot 2i = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}i = 1{,}4 - 0{,}4i.$$

Ділення комплексного числа на комплексне число також може бути введено через операцію множення. Помножимо чисельник і знаменник на число спряжене до знаменника

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}.$$

Наприклад,

$$\frac{2+5i}{3-4i}=\frac{(2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{6+15i+8i+20i^2}{3^2+4^2}=\frac{-14+23i}{25}=-0{,}56+0{,}92i.$$

Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Крім алгебраїчної форми комплексного числа $z=x+iy$ використовується так звана тригонометрична форма його запису. Позначимо через r модуль комплексного числа $z=x+iy$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Нехай $\varphi=\arg z$. Тоді $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$ (рисунок 29), значить

$$z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (*)$$

Запис комплексного числа у виді (*) називається ***тригонометричною формою*** цього числа.

Зручно користуватися також показниковою формою запису комплексного числа $z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, що випливає з ***формул Ейлера***:

$$\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\qquad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.}$$

Наприклад, $1+i=\sqrt{2}(\cos{}^{\pi}\!/_4+i\sin{}^{\pi}\!/_4)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$. При цьому, оскільки $\arg\bar{z}=-\varphi$, то

$$\bar{z}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r\,\mathrm{e}^{-i\varphi}.$$

Алгебраїчні дії з комплексною показниковою функцією $\mathrm{e}^{i\varphi}$ аналогічні діям із звичайною показниковою функцією e^{x}. Нехай

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тоді їхній добуток дорівнює

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Виходить, модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їхніх модулів, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2; \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi.$$

Наслідок. $|z^n| = |z|^n$; $\operatorname{Arg}(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi$, і справедлива ***формула Муавра***: $\boxed{z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$, яка практично очевидна для показникової форми $z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.

Частка двох комплексних чисел дорівнює

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Виходить, модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, а аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = r_1/r_2, \quad \operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + 2k\pi.$$

Приклад 28. Записати в алгебраїчній формі

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{10} \cdot (3-i\sqrt{3})^9}{(-2-2i)^{15}}.$$

Розв’язання. Розглянемо $z_1 = 1 + i\sqrt{3} \in 1$-й чверті (рисунок 30).

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \arg z_1 = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + 0\cdot\pi = \pi/3 \Rightarrow z_1 = 2e^{i\pi/3}.$$

Аналогічно $z_2 = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6}$, $z_3 = -2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$.

Виходить,

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{(2e^{i\pi/3})^9 \cdot (2\sqrt{3}e^{-i\pi/6})^{10}}{(2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4})^{15}} = \frac{2^9 2^{10} 3^5 e^{i9\pi/3} \cdot e^{-i10\pi/6}}{(2\sqrt{2})^{15} e^{-i45\pi/4}} =$$

$$= \frac{3^5 e^{i151\pi/12}}{2^3\sqrt{2}} = \frac{3^5}{2^3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{151\pi}{12} + i\sin\frac{151\pi}{12}\right) =$$

$$=\frac{3^5}{2^3\sqrt{2}}\left[\cos\left(12\pi+\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(12\pi+\frac{7\pi}{12}\right)\right]=\frac{3^5}{2^3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\approx$$

$$\approx 21{,}478\,(-0{,}259+i\,0{,}966)\approx -5{,}563+20{,}746\,i\,.$$

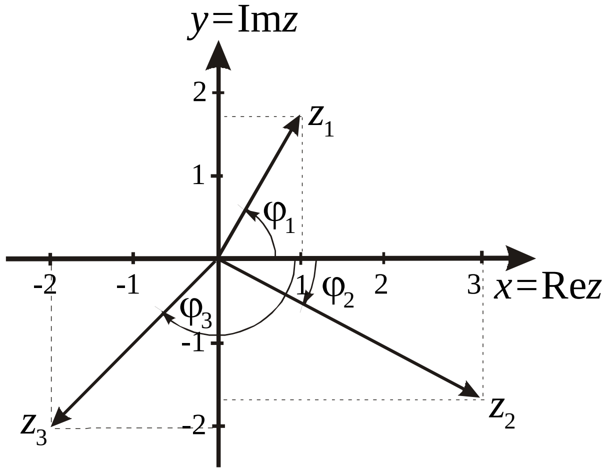

Рисунок 30

Добування кореня n-го степеня з комплексного числа

Нехай комплексне число $z=r\,e^{i\varphi}$. Коренем n-го степеня з числа z називається таке комплексне число $\omega=\sqrt[n]{z}=\rho\,e^{i\psi}$, що $\omega^n=\left(\rho\,e^{i\psi}\right)^n=\rho^n\,e^{in\psi}=z$. Звідси випливає, що

$$r=\rho^n\Rightarrow|\omega|=\rho=\sqrt[n]{r};\quad n\psi=\varphi+2k\pi\Rightarrow \operatorname{Arg}\omega=\psi_k=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\,.$$

Таким чином, ми одержали нескінченну кількість коренів $\omega_k==\rho\,e^{i\psi_k}$. Проте можна побачити, що ψ_{k+n} відрізняється від ψ_k на доданок, рівний 2π. Звідси випливає, з огляду на періодичність з періодом 2π тригонометричних функцій $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а, отже, і показникової функції $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, що $\omega_{k+n}=\omega_k$. Виходить, існує точно n різних значень ω_k $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ кореня n-го степеня з комплексного числа, які знаходяться за формулою

$$\boxed{\begin{gathered}\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, \mathrm{e}^{i(\varphi+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right] \\ (k = 0, 1, 2, ..., n-1).\end{gathered}}$$

Всі вони лежать на колі радіуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ ($\sqrt[n]{r}$ – арифметичний корінь із дійсного додатного числа) у вершинах правильного n-кутника.

Приклад 29. Знайти всі значення $\sqrt[3]{-2+2i}$. Зобразити їх на комплексній площині.

Розв’язання.

$z = -2+2i, \quad r = |z| = \sqrt{8}$,

$$\varphi = \arg z = 3\pi/4 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\, \mathrm{e}^{\frac{i(3\pi/4+2k\pi)}{3}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right].$$

Для значень k=0, 1, 2 знаходимо (рисунок 31)

$$\omega_0 = \sqrt{2}\left[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right] = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2\right) = 1+i,$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}\left[\cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12)\right] \approx 1{,}41(-0{,}97 + i0{,}26) \approx -1{,}37 + 0{,}37i,$$

$$\omega_2 = \sqrt{2}\left[\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12)\right] \approx 1{,}41(0{,}26 - i0{,}97) \approx 0{,}37 - 1{,}37i.$$

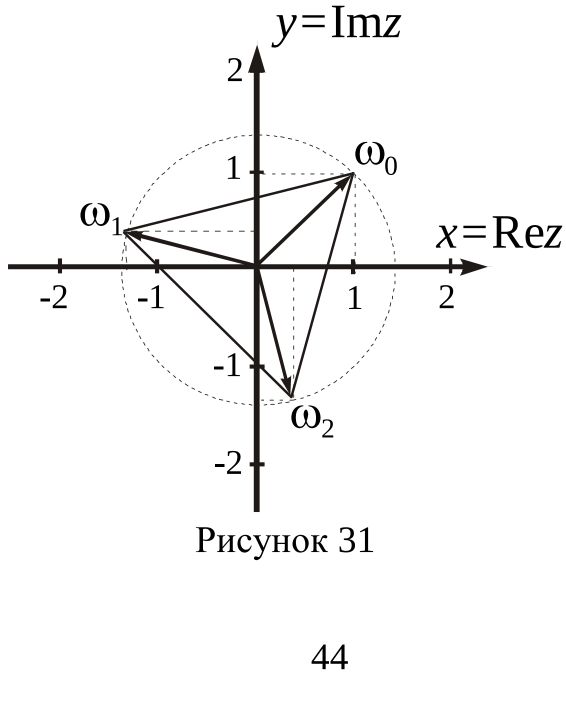

Рисунок 31

ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Задано функцію $y = f(x)$. Побудувати графіки функцій:

1) $y = f(x)$; 2) $y = f(ax)$; 3) $y = f(ax+b)$; 4) $y = A\cdot f(ax+b)$; 5) $y = A\cdot f(ax+b)+B$

№	*f(x)*	*a*	*b*	*A*	*B*
1	sin *x*	1/3	π/2	3	1
2	cos *x*	2	π/4	2	2
3	sin *x*	0.5	-π/2	1/3	-5
4	cos *x*	1/3	π	0.5	-2
5	sin *x*	2	-π/4	-3	-0.5
6	cos *x*	3	-π	-2	2
7	sin *x*	1/3	-π/2	-1	-1
8	cos *x*	2	-π/4	-0.5	3
9	sin *x*	0.5	π/2	3	-3
10	cos *x*	1/3	-π	2	2.5
11	sin *x*	2	π/2	1/3	-2.5
12	cos *x*	3	π/4	-0.5	0.5
13	sin *x*	-0.5	π/2	1.5	1.5
14	cos *x*	-1	-π/2	-1.5	2.5
15	sin *x*	-2	π/4	2.5	-2.5
16	cos *x*	-3	-π/4	-1	2
17	sin *x*	-1.5	π	2	-1
18	cos *x*	-0.5	-π	-0.5	0.5
19	sin *x*	-1	π/2	3	-1
20	cos *x*	-2	π/4	-3	1
21	sin *x*	-1.5	-π/4	-2	3
22	cos *x*	-3	-π/2	-2.5	-1
23	sin *x*	0.5	π	-3	0.5
24	cos *x*	-0.5	π/2	2	-1.5
25	sin *x*	2	-π	-2	2
26	cos *x*	1.5	π/4	1.5	-1.5
27	sin *x*	1/3	π	-3	-1
28	cos *x*	-1	π/2	2.5	0.5
29	sin *x*	2	π	-2	1.5
30	cos *x*	0.5	π/4	-1	-1.5

Завдання 2. Обчислити границі

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+1)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x+2}{4x^2+12}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+3x^2-2x}{5x^4-x^3+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$

3. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{(x-4)(x+2)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{2x+9}$

4. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{(x-5)(2x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{(x-3)(x+2)}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{-2x^2-x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^{2x+6}$

5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+12x-64}{(x-4)(x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5+2x}-3}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^3+3x^2+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{9x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x-5}\right)^{3x+1}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{(x-2)(5x+6)}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{(x-5)(x+1)}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3+x^2+1}{-3x^4-x^3+x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{4x-1}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3+1}{x^4-2x^2+3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x(x+4)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+2}{2x^2+4x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$

9. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-9x+8}{(x-8)(x+1)}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{2x^4+3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x}{3x(x+1)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{x}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+5}{-x^5+x^2+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)(x+3)}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{5x^4-x+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x+1}$

12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{(x-3)(x+2)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x+2}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^3-2x^2}{9x^4-2x^3+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{2x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)(x-3)}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{10}-x^9+x^2}{3x^{11}-x^8}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^4-2}{-2x^5+3x^4+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{x+2}$

15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(2x+5)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{(x-3)(x+2)}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^4+3x^2+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg} 3x}{x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$

16.а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x+4}{4x^2-2x-1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x}$

17.а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{1+2x}-1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3x}{3x^4+3x^3+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\sin 2x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$

18.а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{4x^2-12x-16}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 3x}{\sin x\cdot\mathrm{tg}\,2x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{2/x+3}$

19.а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-2x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{x^4-3x+5}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x}{\mathrm{tg}\,3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x-2}$

20.а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+6x^2+5x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+2x}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+3}{5x^3+7x^2+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\arcsin 9x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2-4}$

21.а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-2x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{6x^4-x^3+5x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos^2 5x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+3}{x+3}\right)^{1-2/x}$

22.а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+2x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{3x-2}-1}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x^2+1}{x^4-3x^2+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,5x}{\sin x/2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2-3}$

23.а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-\sqrt{3x+4}}{x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+3}{4x^2-5x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{(x^2-x)\,\mathrm{tg}\,3x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{3+2/x}$

24.а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5-x}-3}{\sqrt{1-2x}-3}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+12x-3}{2x^2+3x-5}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin 3x}-\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{x}\right)$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{x+3}$

25.а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{7-x}-3}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+6}{3-2x^3-4x^5}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\arcsin 2x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{x+2}$

26.а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-3x^2+4}{-2x^4-x+2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arctg}(x/2)}{1-\cos 3x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+1}\right)^{5/\sqrt{x}}$

27.а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2-3x-15}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2}{9x-2x^3+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{2x\operatorname{arctg}3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{2x^2-1}\right)^{2x-3}$

28.а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$ б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6}}{x^2+2x-8}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7-x^3+x}{10+3x^5-x^7}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos 5x}{\operatorname{tg}3x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{4-5x}$

29.а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{3x+4}-4}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{1+2x-2x^3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{x\operatorname{arctg}2x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2+3}\right)^{5-x}$

30.а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-8x-16}{x^2-6x+8}$ б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2\sqrt{4+x}-\sqrt{1-x}}{x^2-9}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^3-1}{x^2+3x^3+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$ д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)^{3+\sqrt{x}}$

Завдання 3. Задано функцію $y = f(x)$ і два значення аргументу x_1 і x_2. Потрібно: 1) знайти границі функції при наближенні до кожного з заданих значень x ліворуч і праворуч; 2) установити, чи є дана функція неперервною або розривною для кожного з даних значень x; 3) побудувати ескіз графіка функції поблизу точки розриву.

1. $y = 2^{\frac{1}{x-5}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 5$
2. $y = 4^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
3. $y = 12^{\frac{1}{x-1}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1$
4. $y = 3^{\frac{1}{4-x}}, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 4$
5. $y = 8^{\frac{1}{5-x}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 5$
6. $y = 10^{\frac{1}{7-x}}, \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 7$
7. $y = 14^{\frac{1}{6-x}}, \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 6$
8. $y = 15^{\frac{1}{x-8}}, \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 8$
9. $y = 4^{\frac{1}{x+4}}, \quad x_1 = -4; \quad x_2 = -2$
10. $y = 3^{\frac{1}{x+5}}, \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -5$
11. $y = 2^{\frac{2}{x-1}}, \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3$
12. $y = 5^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 3$
13. $y = 6^{\frac{1}{2-2x}}, \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 4$
14. $y = 7^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3$
15. $y = 8^{\frac{1}{1+x}}, \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1$
16. $y = 9^{\frac{1}{4+2x}}, \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 0$
17. $y = 7^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
18. $y = 8^{\frac{2}{3-2x}}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3/2$
19. $y = 7^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
20. $y = 3^{\frac{1}{4-x}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 4$
21. $y = 2^{\frac{3}{3+x}}, \quad x_1 = -3; \quad x_2 = 0$
22. $y = 6^{\frac{2}{3+x}}, \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -1$
23. $y = 9^{\frac{3}{x-4}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 4$
24. $y = 8^{\frac{3}{1+3x}}, \quad x_1 = -1/3; \quad x_2 = 0$
25. $y = 6^{\frac{1}{4x-6}}, \quad x_1 = 3/2; \quad x_2 = 2$
26. $y = 9^{\frac{3}{x+3}}, \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -1$

27. $y = 8^{\frac{2}{4x-5}}$, $x_1 = 5/4$; $x_2 = 2$

28. $y = 3^{\frac{5}{3+2x}}$, $x_1 = -3/2$; $x_2 = 1$

29. $y = 4^{\frac{2}{2+x}}$, $x_1 = -2$; $x_2 = 0$

30. $y = 5^{\frac{2}{3x-6}}$, $x_1 = 2$; $x_2 = 4$

31. $y = 3^{\frac{4}{2x-5}}$, $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 4$

32. $y = 8^{\frac{1}{2x-4}}$, $x_1 = 5$; $x_2 = 2$

Завдання 4. Функція $f(x)$ задається різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Потрібно знайти точки розриву функції, якщо вони існують і визначити їх тип. Побудувати графік функції.

1. $f(x) = \begin{cases} x+4, \text{ якщо } x < -1 \\ x^2+2, \text{ якщо } -1 \le x < 1 \\ 2x, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ якщо } x < -1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1 \le x < 1 \\ -x+3, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ якщо } x \le 0 \\ (x-1)^2, \text{ якщо } 0 \le x < 2 \\ 3-x, \text{ якщо } x \ge 2 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0 \\ x^2+1, \text{ якщо } 0 < x < 1 \\ x, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ якщо } x \le 0 \\ x^2, \text{ якщо } 0 < x \le 2 \\ x+1, \text{ якщо } x > 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -2x+1, \text{ якщо } x < 0 \\ \cos x, \text{ якщо } 0 \le x < \pi \\ 2-x, \text{ якщо } x \ge \pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, \text{ якщо } x < -1 \\ (x+1), \text{ якщо } -1 \le x < 0 \\ 3x, \text{ якщо } x \ge 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ якщо } x \le 0 \\ \operatorname{tg} x, \text{ якщо } 0 \le x < \pi/4 \\ 2, \text{ якщо } x \ge \pi/4 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x \le 0 \\ x^2+1, \text{ якщо } 0 < x \le 2 \\ 2x+1, \text{ якщо } x > 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -3x-2, \text{ якщо } x < -1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1 \le x < 1 \\ 2x, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ якщо } x < 0 \\ x^3+2, \text{ якщо } 0 \le x < 1 \\ 3x, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \le 0 \\ (x+1)^2, \text{ якщо } 0 < x \le 2 \\ 4-x, \text{ якщо } x > 2 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x\le -1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1<x\le 1 \\ 3-x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0 \\ (x-2)^2, \text{ якщо } 0<x<2 \\ x-2, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), \text{ якщо } x\le -1 \\ x^3, \text{ якщо } -1<x<0 \\ x, \text{ якщо } x\ge 0 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 1-x, \text{ якщо } x<-1 \\ x^2+1, \text{ якщо } -1\le x<2 \\ 2x-3, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x\le 0 \\ 1-x^2, \text{ якщо } 0<x\le 1 \\ x-1, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} -2x+4, \text{ якщо } x\le -2 \\ -x^3, \text{ якщо } -2<x\le 1 \\ x-2, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\le 1 \\ (x-2)^2, \text{ якщо } 1<x<3 \\ 6-x, \text{ якщо } x\ge 3 \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, \text{ якщо } x\le -1 \\ 2x^2, \text{ якщо } -1\le x<1 \\ 2x-1, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x<1 \\ 3x^2-2, \text{ якщо } 1\le x<2 \\ 2x+6, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, \text{ якщо } x<-1 \\ x^2-2, \text{ якщо } -1\le x<2 \\ x, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x^3, \text{ якщо } x\le -1 \\ x-1, \text{ якщо } -1<x<1 \\ 5-x, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} x^3+8, \text{ якщо } x<-2 \\ 2-2x, \text{ якщо } -2\le x<2 \\ x^2-1, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ якщо } x\le 0 \\ 4-x^2, \text{ якщо } 0<x<2 \\ 2-x, \text{ якщо } x\ge 2 \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le -2 \\ 5-x^2, \text{ якщо } -2<x\le 1 \\ 2x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, \text{ якщо } x<0 \\ x^2+1, \text{ якщо } 0\le x\le 1 \\ 1, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ якщо } x\le 1 \\ 2x, \text{ якщо } 1<x\le 2 \\ 2+x, \text{ якщо } x>2 \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ якщо } x<0 \\ x^2, \text{ якщо } 0\le x<2 \\ 2x, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} x-3, \text{ якщо } x\le 0 \\ x+1, \text{ якщо } 0<x<4 \\ 3+\sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 4 \end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, \text{ якщо } x\le 0 \\ 1-x^2, \text{ якщо } 0<x\le 2 \\ 2x-7, \text{ якщо } x>2 \end{cases}$

32. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ якщо } x\le 0 \\ 3-x^2, \text{ якщо } 0<x\le 2 \\ 2x^2-1, \text{ якщо } x>2 \end{cases}$

Завдання 5. Знайти комплексні корені квадратного рівняння

1. $x^2-2x+5=0$	12. $x^2-6x+45=0$	23. $x^2+10x+34=0$
2. $x^2+4x+13=0$	13. $x^2+10x+26=0$	24. $x^2-12x+40=0$
3. $x^2-6x+25=0$	14. $x^2-10x+61=0$	25. $x^2+4x+5=0$
4. $x^2+8x+41=0$	15. $x^2+2x+26=0$	26. $x^2-6x+13=0$
5. $x^2+2x+10=0$	16. $x^2-4x+40=0$	27. $x^2+8x+25=0$
6. $x^2-4x+20=0$	17. $x^2+8x+17=0$	28. $x^2-10x+41=0$
7. $x^2+6x+34=0$	18. $x^2-10x+29=0$	29. $x^2+12x+45=0$
8. $x^2+8x+52=0$	19. $x^2+12x+37=0$	30. $x^2-4x+8=0$
9. $x^2-10x+50=0$	20. $x^2-2x+37=0$	31. $x^2+6x+18=0$
10. $x^2-2x+17=0$	21. $x^2+6x+10=0$	32. $x^2-14x+53=0$
11. $x^2+4x+29=0$	22. $x^2-8x+20=0$	

Завдання 6. Представити в алгебраїчній формі такі вирази

1. $\dfrac{(1+i)^{13}\left(\sqrt{3}+i\right)^{13}}{(-2i)^{25}}$

2. $\dfrac{(2-2i)^{8}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{9}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{20}}$

3. $\dfrac{(2+2i)^{5}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{9}}$

4. $\dfrac{(4-4i)^{11}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{9}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}$

5. $\dfrac{(-1+i)^{21}\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}}{(-2-2i)^{25}}$

6. $\dfrac{(2\mathrm{e}^{i\pi})^{11}\left(3+i\sqrt{3}\right)^{15}}{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^{17}(2-2i)^{13}}$

7. $\dfrac{(1-i)^{29}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{17}}{\left(2+i2\sqrt{3}\right)^{10}(2i)^{11}}$

8. $\dfrac{(2+2i)^{10}\left(\sqrt{3}-3i\right)^{8}}{\left(4\sqrt{3}-4i\right)^{9}}$

9. $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{31}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}(-2+2i)^{11}}$

10. $\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{7}\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{11}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$

11. $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{20}(1+i)^{21}}{\left(3+i\sqrt{3}\right)^{19}}$

12. $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{7}(2-2i)^{9}}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{17}}$

13. $\dfrac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{13}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{9}}{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{11}}$

14. $\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{15}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{20}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{16}(2i)^{27}}$

15. $\dfrac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)^{40}}{\left(-3+3i\right)^{13}\left(\sqrt{3}-i\right)^{37}}$

16. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{5}(-2-2i)^{7}}{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{11}}$

17. $\dfrac{(24i)^{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{6}}{\left(1+i\right)^{5}\left(-3-i\sqrt{3}\right)^{8}}$

18. $\dfrac{(-4i)^{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{9}}{\left(1+i\right)^{12}\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}$

19. $\dfrac{(2+2i)^{17}\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{9}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{29}}$

20. $\dfrac{(2+2i)^{21}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{19}}$

21. $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{12}(1-i)^{15}}{(2+2i)^{14}}$

22. $\dfrac{(4e^{i\pi})^{11}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^{10}\left(2+2i\right)^{15}}$

23. $\dfrac{\left(-1+i\right)^{9}\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}{\left(2-i2\sqrt{3}\right)^{11}(2i)^{-5}}$

24. $\dfrac{\left(-2+2i\right)^{16}\left(\sqrt{3}+3i\right)^{12}}{\left(4\sqrt{3}+4i\right)^{13}}$

25. $\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{37}}{\left(2+2i\right)^{11}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}$

26. $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{17}\left(-\sqrt{3}-3i\right)^{6}}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{16}}$

27. $\dfrac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)^{17}\left(-1+i\right)^{12}}{\left(3+i\sqrt{3}\right)^{22}(3i)^{7}}$

28. $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{11}\left(-2+2i\right)^{9}}{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{21}}$

29. $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{13}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{11}}{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{15}}$

30. $\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{27}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{20}}{\left(2-2i\right)^{11}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{7}}$

31. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{10}\cdot(3-i\sqrt{3})^{9}}{(-2-2i)^{15}}$

32. $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{10}\left(3-i\sqrt{3}\right)^{7}}{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^{12}(i)^{27}}$

Завдання 7. Знайти всі значення кореня n-го степеня з комплексного числа. Зобразити отримані значення на комплексній площині.

1. $\sqrt[3]{-i}$
2. $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$
3. $\sqrt[6]{64}$
4. $\sqrt{-2-2i}$
5. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$
6. $\sqrt[3]{27i}$
7. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{-16+16i}}$
8. $\sqrt{-9i}$
9. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$
10. $\sqrt[4]{8-8i}$
11. $\sqrt[5]{-32i}$
12. $\sqrt[5]{-32}$
13. $\sqrt{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{16}}$
15. $\sqrt[4]{\dfrac{-81+81i}{32}}$
16. $\sqrt[5]{-i}$
17. $\sqrt[3]{16-16i}$
18. $\sqrt[6]{-64}$
19. $\sqrt[3]{-4+i4\sqrt{3}}$
20. $\sqrt{-5-5i}$
21. $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$
22. $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}-8i}$
23. $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$
24. $\sqrt[4]{8\sqrt{2}-i8\sqrt{2}}$
25. $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$
26. $\sqrt[3]{-4-i4\sqrt{3}}$
27. $\sqrt{\dfrac{16}{1+i\sqrt{3}}}$
28. $\sqrt[5]{\dfrac{32}{i}}$
29. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8-8i}}$
30. $\sqrt[3]{-27}$
31. $\sqrt[6]{32-i32\sqrt{3}}$
32. $\sqrt[3]{-2+2i}$