УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для студентів 1 курсу загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання

Харків 2000

Методичні вказівки розглянуті та рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики 31 серпня 2000 року, протокол № 1.

Методичні вказівки підготовлені з метою допомогти студентам в їх самостійній роботі при вивченні тем:

- "Лінійна та векторна алгебри",
- "Аналітична геометрія на площині та в просторі",

а також при виконанні контрольної роботи №1 студентами заочної форми навчання та розрахункових робіт для студентів денної форми навчання.

Склали: ст. викл. Н.І. Волохова, доц. Р.М. Давидов,
ст. викл. Л.І. Макаренко, доц. Н.С. Юрчак

Рецензент: доц. В.А. Таратушка

ЗМІСТ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Матриці та дії над ними

Визначення

Матрицею розміру $m \times n$ називається упорядкована множина з $m \times n$ елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що на відміну від визначника матриця – це лише упорядкована таблиця елементів, а не результат виконання певних операцій; робити будь-які перестановки в ній не можна.

Приклади матриць: (a), $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Визначення

Матриця, всі елементи якої є нулі, називається **нульовою матрицею** відповідного розміру.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad , \ldots$$

Якщо $m = n$, то матриця **A** – *квадратна*.

Визначення

Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої є одиниці, а решта – нулі, називається **одиничною** (відповідного розміру).

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Матриці однакового розміру $m \times n$ можна додавати і віднімати за правилом:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Матриці довільного розміру можна умножити на число за правилом:

$$\lambda \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Матрицю $\mathbf{A}$ розміру $m \times k$ можна умножити на матрицю $\mathbf{B}$ розміру $k \times n$ якщо їх розміри узгоджені: кількість стовпців $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків $\mathbf{B}$. При цьому добутком $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ є така матриця $\mathbf{C}$ розміру $m \times n$, елементи якої c_{ij} є сумами попарних добутків елементів i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ на j-й стовпець матриці $\mathbf{B}$, тобто для всіх $i = 1, 2, 3, \ldots m$, $j = 1, 2, 3, \ldots m$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

4. Операція транспонування полягає в тому, що стовпці матриці замінюються рядками:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

транспонована матриця.

Приклад

Знайти $\mathbf{C}=\mathbf{B}\times\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}$, $\mathbf{D}=\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}\times\mathbf{B}$, якщо $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо:

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}\times\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot(-2) & 1\cdot0-2\cdot3\\ 0\cdot1+3(-2) & 0\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -6 & 9\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}\times\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot(-2)+0\cdot3\\ -2\cdot1+3\cdot0 & -2\cdot(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 13\end{pmatrix}.$$

Отже: $\mathbf{B}\times\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}\neq\mathbf{B}^{\boldsymbol{\tau}}\times\mathbf{B}.$

Для добутку матриць не має місця комутативний закон.

5. Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність певне число, яке називається визначником матриці. Позначається визначник матриці $\mathbf{A}$ – $\det\mathbf{A}$ і може записуватись у вигляді таблиці з елементів матриці, але у прямих рамках. Обчислюється визначник за наступними правилами:

Для матриці другого порядку $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=ad-bc$.

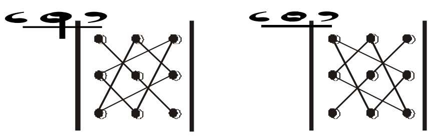
Наприклад, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot(-3)=4+6=10$.

Для матриці третього порядку

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ця формула ілюструється схемою, яка демонструє, які доданки при



обчисленні визначника беруть зі знаком “+”, а які зі знаком “–” і зветься “правилом трикутників”.

Наприклад,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot(-2)+(-1)\cdot 3\cdot 0+$$

$$+1\cdot 4\cdot 1-1\cdot(-2)\cdot 0-2\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 4=8+0+4-0-6-8=-2.$$

Визначники більш високого порядку обчислюються за допомогою так званого розкладання по елементах деякого рядка, або стовпчика.

<u>Визначення</u>

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці **A** n-го порядку називається число, яке дорівнює добутку визначника (n-1)-го порядку, отриманого із цієї матриці викресленням i-го рядка, та j-го стовпчика, на $(-1)^{i+j}$.

Визначник квадратної матриці n-го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь якого рядка (або стовпчика) матриці та їх алгебраїчних доповнень.

$$\det\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}.$$

Це правило відноситься рівною мірою і до визначників третього порядку. Найчастіше визначники обчислюють розкладанням по першому рядку, наприклад,

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2(-2\cdot(-2)-3\cdot 1)+(4\cdot(-2)-3\cdot 0)+(4\cdot 1-(-2)\cdot 0)=2-8+4=-2.$$

Визначення

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається **невиродженою (неособливою)**, якщо її визначник $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Визначення

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається **оберненою** до невиродженої матриці A, якщо $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Обернену матрицю можна обчислити за формулою: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{\tau}}$,

де $\widetilde{\mathbf{A}}$ – матриця, яка складається із алгебраїчних доповнень елементів матриці $\mathbf{A}$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Матриця $\mathbf{A}^{*} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\boldsymbol{\tau}}$ називається приєднаною до матриці $\mathbf{A}$. Таким чином, маємо таку формулу для $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{*} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад

Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ до матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обернену матрицю мають тільки квадратні невироджені матриці. Визначник цієї матриці обчислювався в двох попередніх прикладах і $\det \mathbf{A} = -2 \neq 0$. Отже матриця $\mathbf{A}$ неособлива і має обернену $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо всі її алгебраїчні доповнення.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-3=1,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=(-8-0)=8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=4-0=4,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-(2-1)=-1,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4-0=-4,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(2-0)=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-3+2=-1,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(6-4)=-2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-4+4=0.$$

Отже

$$\mathbf{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 8 & -4 & -2\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{8}{2} & \frac{4}{2} & \frac{2}{2}\\ -\frac{4}{2} & \frac{2}{2} & \frac{0}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тепер потрібно перевірити, що побудована матриця дійсно є оберненою до матриці $\mathbf{A}$, тобто перевірити, що $\mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1}$ або $\mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{A}$ дорівнює одиничній матриці.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1+4-2 & 1-2+1 & 1-1+0 \\ -2+8-6 & 2-4+3 & 2-2+0 \\ 0-4+4 & 0+2-2 & 0+1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

Відповідь:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо деякі методи розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, для чого розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_2+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Треба перевірити, чи має вона розв'язок, а якщо так, то знайти його. Одним із способів розв'язання цієї системи є ***правило Крамера:***

Якщо головний визначник (детермінант) системи $\Delta \neq 0$*, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом:*

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Головний визначник (детермінант) системи в нашому випадку є визначник третього порядку, який утворений із коефіцієнтів при невідомих, тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Щоб одержати визначники Δx_1, Δx_2 та Δx_3, треба замінити в головному визначнику відповідно стовпець коефіцієнтів при невідомому на стовпець вільних членів

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta = 0$, то можливі два випадки (при умові, що не всі $b_i = 0$, тобто система неоднорідна):

1) $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ – то система має безліч розв'язків або не має жодного розв'язку;
2) хоча б один із детермінантів Δx_1, Δx_2, Δx_3 не дорівнює нулю – то система несумісна, тобто не має жодного розв'язку.

<u>Приклад</u>

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Спочатку запишемо та обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 0 - 0 - 6 - 8 = -2 \neq 0$$

Система має єдиний розв'язок. Обчислимо Δx_1, Δx_2 та Δx_3.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 9 + 6 - 3 - 4 = -4,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 12 + 0 - 0 - 18 = -6,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 4 + 0 - 0 - 4 + 12 = 0\,.$$

За правилом Крамера знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0$$

Відповідь: $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 0.$

Розглянемо ще один із методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь – **метод Гаусса** або метод послідовних виключень невідомих.

Метод Гаусса полягає в тому, що за допомогою так званих еквівалентних перетворень система (1) перетворюється в еквівалентну систему, яка має трикутний вигляд

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ \qquad\quad x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = b'''_3 \end{cases}.$$

Продемонструємо це перетворення на прикладі.

<u>Приклад</u>

Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язання

Поділимо перше рівняння системи на $a_{11} = 3$, а далі виключимо невідоме x_1, із другого та третього рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \Big| \div 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 = \dfrac{5}{3} & \Big| \times\ (-2) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 & \Big| + \hookleftarrow \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 & \Big| + \quad \hookleftarrow \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{7}{3} & \Big| \div \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{23}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

поділимо друге рівняння системи на $5/3$ та виключимо невідоме x_2 з третього рівняння

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{23}{3} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{3} \\ + \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{7}{5} \\ \frac{12}{5}x_3 = \frac{36}{5} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \div\frac{12}{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{7}{5} \\ x_3 = 3 \end{cases} .$$

Систему лінійних рівнянь привели до трикутного вигляду, закінчився прямий хід методу Гаусса, а далі розв'язуємо систему з кінця, тобто з третього рівняння $x_3 = 3$. Підставимо значення $x_3 = 3$ в друге рівняння і одержимо $x_2 = -7/5 - 1/5 \times 3 = -10/5 = -2$. З першого рівняння знайдемо $x_1 = 5/3 - 2/3 \times (-2) - 1/3 \times 3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = 2,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 3$. Зробимо перевірку:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 3 = 6 - 4 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 3 = 4 - 6 + 3 = 1 \\ 2 \cdot 2 + (-2) + 3 \cdot 3 = 4 - 2 + 9 = 11 \end{cases} .$$

<u>Примітка</u>

метод Гаусса можна застосовувати і для випадку, коли число рівнянь не дорівнює числу невідомих, а також коли $\Delta = 0$.

Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему (1) можна записати у вигляді матричного рівняння: $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B},$ де матриця $\mathbf{A}$ утворена із коефіцієнтів при невідомих

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$ матриця X– матриця-стовпець із невідомих

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$ та матриця $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – теж матриця-стовпець із вільних членів системи.

Помножимо матричне рівняння системи зліва на $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}.$$

Звідси матриця невідомих

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B},$$

де $\mathbf{A}^{-1}$ – обернена до матриці **А,** тобто їх добуток $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – одинична матриця).

Отже, виходить, що для того, щоб знайти розв'язок системи (1), треба побудувати обернену матрицю і домножити її на матрицю $\mathbf{B}$.

<u>Приклад</u>

Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання

Запишемо цю систему у вигляді матричного рівняння

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Отже, рівняння має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю невідомих знайдемо за формулою $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}$, де матриця $\mathbf{A}^{-1}$ обчислена раніше у прикладі на сторінці 8 і дорівнює

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

тоді $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \\ -4+4+3 \\ -2+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отже розв’язок системи: $x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0.$

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

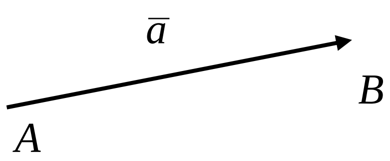
Вектори. Лінійні операції над векторами

Визначення

Вектором називається величина, яка характеризується як числовим значенням, так і напрямом у просторі.

Числове значення вектора зветься ***довжиною*** або ***модулем вектора.***

Звичайно вектор позначають однією $(\vec{a}, \vec{F}, \vec{V})$ або двома латинськими літерами зі стрілкою $\overrightarrow{AB}$, або жирними літерами.



$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, точка A – початок вектора, точка B – його кінець.

Модулем або довжиною вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називається число $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$, яке дорівнює довжині відрізку AB. В фізиці часто модулі векторів позначають відповідними літерами без стрілки:

$$|\vec{a}| = a, \quad |\overrightarrow{AB}| = AB.$$

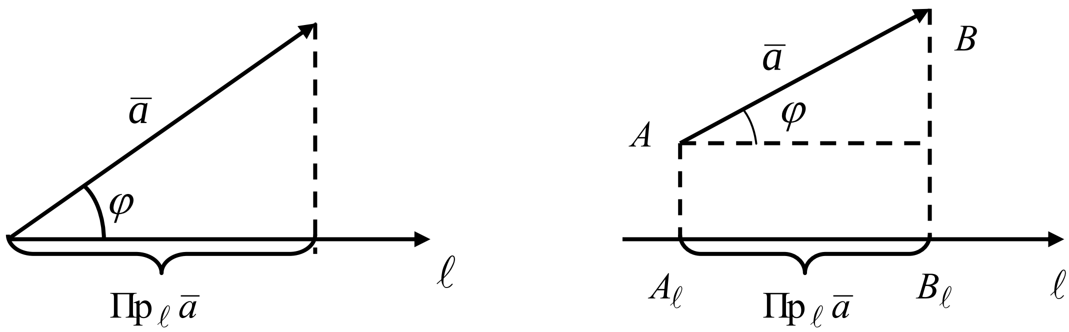
Визначення

Одиничним вектором або **ортом** $\vec{a}_0$ **даного вектора** $\vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці довжини (при даному масштабі), а напрям збігається з напрямом $\vec{a}$, тобто $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ або $\vec{a} = |\vec{a}| \times \vec{a}_0$.

Орти осей декартових координат позначаються $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$.

Визначення

Проекцією вектора $\vec{a}$ **на вісь** ℓ $(\text{Пр}_{\ell}\,\vec{a})$ називається довжина відрізка, який з'єднує проекції на цю вісь початку й кінця даного вектора, взята зі знаком "+", якщо кут між вектором і віссю гострий, і знаком "–", якщо цей кут тупий.



Із вище наведеного рисунку ясно, що

$$Пр_{\ell}\vec{a} = |\,\vec{a}\,| \cdot \cos\varphi.$$

Будемо у подальшому позначати проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy, Oz відповідно a_x, a_y та a_z. Вектор можна задати цими проекціями, які називаються координатами вектора,

$$\vec{a} = \left(a_x, \quad a_y, \quad a_z\right),$$

або розкладанням за координатним базисом

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

<u>Визначення</u>

> Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними $\left(\vec{a}\,||\,\vec{b}\right)$, якщо вони лежать на паралельних прямих або на прямих, які збігаються.

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a} = \left(a_x, \quad a_y, \quad a_z\right)$ та $\vec{b} = \left(b_x, \quad b_y, \quad b_z\right)$ рівносильна умові їх пропорційності $\vec{a} = k\vec{b}$, тобто або $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = k \neq 0$, або обидві відповідні координати цих векторів одночасно дорівнюють нулю.

<u>Приклад</u>

Обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок його початку та кінця: $A\left(x_1; \quad y_1; \quad z_1\right)$ та $B\left(x_2; \quad y_2; \quad z_2\right)$.

Розв'язання

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Тому $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1; \quad y_2 - y_1; \quad z_2 - z_1\}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; \quad y_2 - y_1; \quad z_2 - z_1\}$.

При додаванні, відніманні та множенні вектора на число відповідно додаються, віднімаються та множаться на це число одноіменні координати.

<u>Приклад</u>

Обчислити суму та різницю двох векторів $\vec{a} = \{2; \ -3; \ 0\}$ та $\vec{b} = \{1 \quad 2 \quad 5\}$.

Розв'язання

$$\vec{a} + \vec{b} = \{2+1; \ -3+2; \ 0+5\} = \{3; \ -1; \ 5\}.$$
$$\vec{a} - \vec{b} = \{2-1; \ -3-2; \ 0-5\} = \{1; \ -5; \ -5\}.$$

Відповідь: $\vec{a} + \vec{b} = \{3; \ -1; \ 5\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{1; \ -5; \ -5\}$.

<u>Приклад</u>

Обчислити добутки вектора $\vec{a} = \{2; \ -3; \ 0\}$ на числа $k = 4$ та $k = -2$.

Розв'язання

$$4\vec{a} = \{4 \cdot 2; \ 4 \cdot (-3); \ 4 \cdot 0\} = \{8; \ -12; \ 0\},$$
$$-2\vec{a} = \{-2 \cdot 2; \ -2 \cdot (-3); \ -2 \cdot 0\} = \{-4; \ 6 \quad 0\}.$$

Відповідь: $4\vec{a} = \{8; \ -12; \ 0\}$, $-2\vec{a} = \{-4; \ 6; \ 0\}$.

Розрізняють два види добутків двох векторів: скалярний та векторний.

Скалярний добуток

<u>Визначення</u>

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів співмножників на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\varphi.$$

Використовуючи визначення проекції вектора, скалярний добуток можна записати так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\,\vec{b}\,| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

За допомогою скалярного добутку можна обчислити:

а) косинус кута між двома векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot \left|\,\vec{b}\,\right|};$$

б) довжину вектора

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

в) проекцію одного вектора на напрям іншого

$$\Pi p_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,|}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні $(\varphi = \pi/2)$, їх скалярний добуток дорівнює нулю. Використовуючи це, можна довести, що скалярний добуток $\vec{a} = \{a_x; \quad a_y; \quad a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; \quad b_y; \quad b_z\}$ дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Звідси маємо ознаку перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих координатами

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Приклад

Обчислити внутрішній кут при вершині A трикутника ABC, якщо відомі його вершини: A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), та C(1; -2; 1).

Розв'язання

Внутрішній кут при вершині А утворюється двома векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Обчислимо їх координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{5-3; \quad 1-2; \quad -1-(-3)\} = \{2; \quad -1; \quad 2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{1-3; \quad -2-2; \quad 1-(-3)\} = \{-2; \quad -4; \quad 4\}.$$

Їх модулі: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Скалярний добуток

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4=-4+4+8=8,$$

тоді $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{8}{3\cdot 6}=\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}$, $\qquad\varphi=\arccos\dfrac{4}{9}\approx 63°36'$.

Відповідь: $\angle A=63°36'$.

Визначення

Напрямними косинусами вектора називають косинуси кутів між вектором $\vec{a}$ і координатними осями, тобто $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, де $\alpha=(\vec{a};\hat{Ox})$; $\beta=(\vec{a};\hat{Oy})$; $\gamma=(\vec{a};\hat{Oz})$.

Якщо $\vec{a}=\{a_x;\quad a_y;\quad a_z\}$, тоді $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$;

$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, причому, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, причому, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Приклад

Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a}=\{-2;\quad 2;\quad 1\}$.

Розв'язання

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|};$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3;$$

$$\cos\alpha=\frac{-2}{3};\quad \cos\beta=\frac{2}{3};\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Перевіримо що

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1.$$

Відповідь: $\cos\alpha=-2/3;\quad \cos\beta=2/3;\quad \cos\gamma=1/3$.

Векторний добуток

Визначення

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє умовам:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$;

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника

З умови 2 випливає геометричний зміст векторного добутку векторів: модуль векторного добутку векторів дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори.

Векторний добуток двох векторів $\vec{a} = \{a_x; \quad a_y; \quad a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; \quad b_y; \quad b_z\}$ дорівнює:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

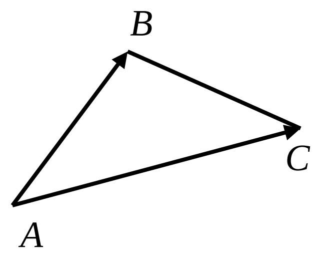
Тобто координати вектора $\vec{c}$ дорівнюють

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

а довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \quad (S_{nap} = |\vec{c}|)$.

Приклад

Обчислити площу трикутника ABC, якщо відомі його вершини: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ та $C(5; 2; 6)$.



Розв'язання.

Скористаємося тим фактом, що $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot S_{nap}$, $S_{nap} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{3-1;\quad 0-2;\quad -3-0\}=\{2;\quad -2;\quad -3\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{5-1;\quad 2-2;\quad 6-0\}=\{4;\quad 0;\quad 6;\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=\{-12;\quad -24;\quad 8\},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{784}=28,$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

Відповідь: $S_\Delta=14$ (кв. од.).

Мішаний добуток

Розглянемо тепер добуток трьох векторів.

Визначення

> **Мішаним добутком трьох векторів** $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ та $\vec{c}$ зветься число, що дорівнює векторно-скалярному добутку цих векторів
>
> $$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right].$$

Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що мішаний добуток векторів з точністю до знака дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$V_{пар}=\pm\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ і $\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$, то мішаний добуток може бути записаним у такому вигляді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Визначення

> Вектори, які паралельні будь-якій площині (або лежать в одній площині), звуться **компланарними.**

Умова компланарності векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 .$$

Приклад

Обчислити об’єм піраміди, вершини якої знаходяться у точках *A*(1; -1; 1), *B*(4; 5; 4), *C*(2; 2; -1), *D*(3; 1; 3).

Розв’язання

Відомо, що об’єм піраміди дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда

$$V_{піp} = \frac{1}{6} V_{пap}.$$

Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$, які є ребрами піраміди:

$$\overrightarrow{AB} = \{4-1;\quad 5-(-1);\quad 4-1\} = \{3;\quad 5;\quad 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{2-1;\quad 2-(-1);\quad -1-1\} = \{1;\quad 3;\quad -2\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{3-1;\quad 1-(-1);\quad 3-1\} = \{2;\quad 2;\quad 2\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 6 - 24 - 18 + 12 - 12 = -18,$$

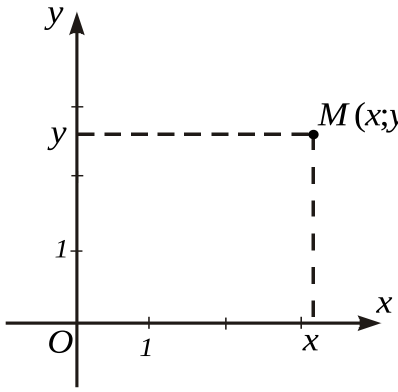
$$V_{піp} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-18| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3\,(\text{куб. од.}).$$

Відповідь: $V_{пup} = 3$(куб. од.).

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

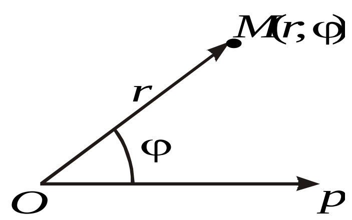
Прямокутна та полярна система координат. Побудова лінії за її рівнянням

Положення точки на площині визначається однозначно, якщо задати її координати в якій-небудь системі координат. Найбільш поширеними є прямокутна та полярна системи координат.



Прямокутна система координат визначається двома взаємно перпендикулярними прямими Ox та Oy, на яких вибраний додатний напрям. Точка O їх перетину зветься початком координат.

Полярна система координат визначається променем Op (полярна вісь), на якій вибраний початок відліку O (полюс) та додатний напрям.



Зв'язок між прямокутними та полярними координатами точки M (якщо ці системи узгоджені, тобто полюс збігається з початком декартової прямокутної системи координат, а полярна вісь – з віссю Ox) виглядає так:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} + k\pi \end{cases},$$

де $k = 0$, якщо точка M знаходиться в 1-й чверті, $k = 1$, якщо M – в 2-й або 3-й чвертях та $k = 2$, якщо M – в 4-й чверті.

Таким чином, положення точки M на площині визначається упорядкованою парою чисел, які є координатами цієї точки. Кожну лінію на площині ми будемо розглядати як геометричне місце точок, які мають загальну для них геометричну властивість, при цьому точки, які не належать лінії, такої властивості не мають. Записуючи цю властивість в алгебраїчній формі, ми отримаємо рівняння лінії. В прямокутній системі координат у загальному вигляді рівняння лінії записується або $y = f(x)$, або $F(x, y) = 0$. В полярній системі координат відповідно $r = f(\varphi)$, $F(r;\varphi) = 0$

Тут можуть стати у нагоді такі співвідношення:

а) відстань d між точками $M(x_1; y_1)$ та $N(x_2; y_2)$ обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ;$$

б) координати точки $P(x_0; y_0)$, яка поділяє проміжок MN у відношенні $\lambda = \dfrac{MP}{PN}$ $(\lambda \neq -1)$, обчислюється за формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{та} \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Зауважимо, що коли точка P ділить проміжок MN навпіл $(\lambda = 1)$, формули приймають вигляд

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{та} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

в) якщо точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$ - вершини трикутника, його площу можна обчислити за формулою

$$S = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

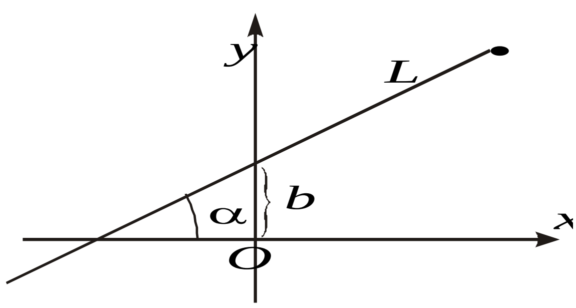
Знак в правій частині береться той же, що й знак визначника.

Пряма лінія на площині

Існують такі форми запису рівняння прямої:

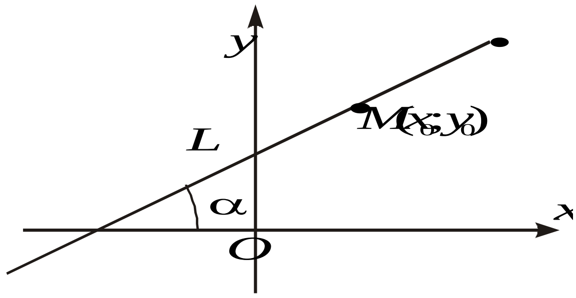
1) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

де $k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт,

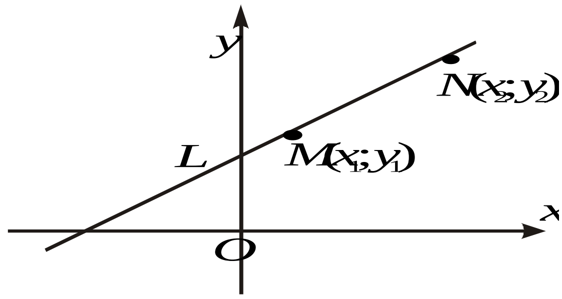


b – відрізок, який пряма відтинає на осі OY.

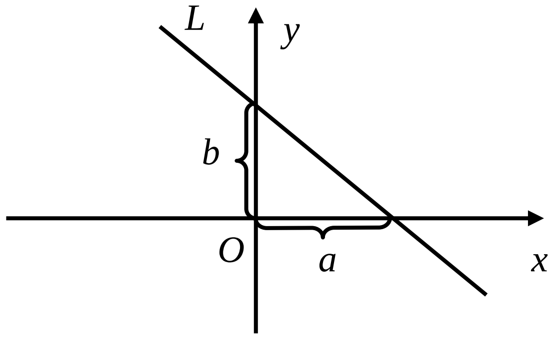
2) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить через задану точку $P(x_0 y_0)$ під заданим кутом α до осі Ox ($k = \mathrm{tg}\alpha$).



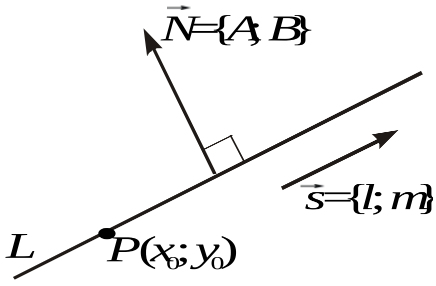
3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M(x_1; y_1)$ та $N(x_2; y_2)$.



4) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях, де a та b – величини відрізків, які пряма відтинає на осях координат.

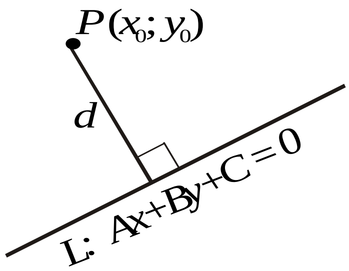


5) $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – канонічне рівняння прямої, де $\vec{S} = \{\ell; m\}$ – напрямний вектор прямої, тобто вектор паралельний прямій ($\vec{S} = \{\ell; m\} \,||\, L$), точка $P(x_0; y_0) \in L$.



6) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $P(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \{A; B\}$. Вектор $\vec{N}$ називається нормальним вектором прямої.

7) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої, де $\overline{N}=\{A;B\}$ – нормальний вектор прямої ($\overline{N}\perp L$).



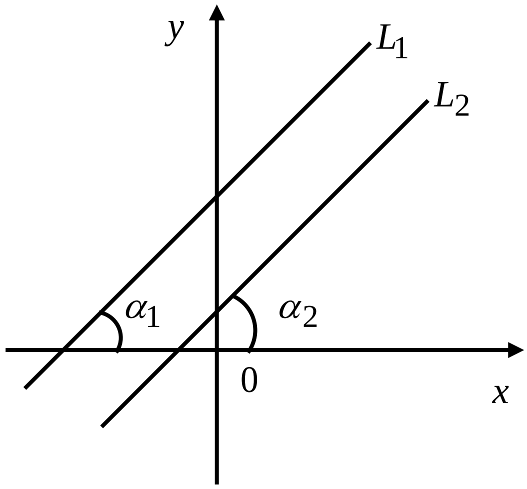
Відстань від точки $P(x_0 y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ (L) обчислюється за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

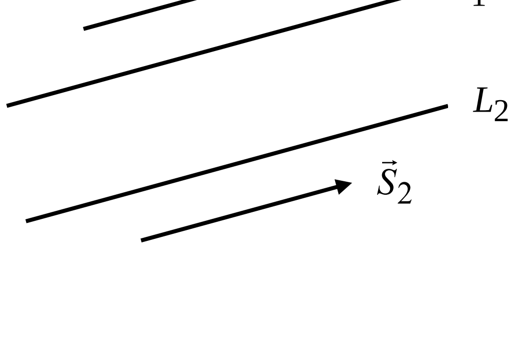
Розташування двох прямих на площині

<u>Умови паралельності двох прямих:</u>

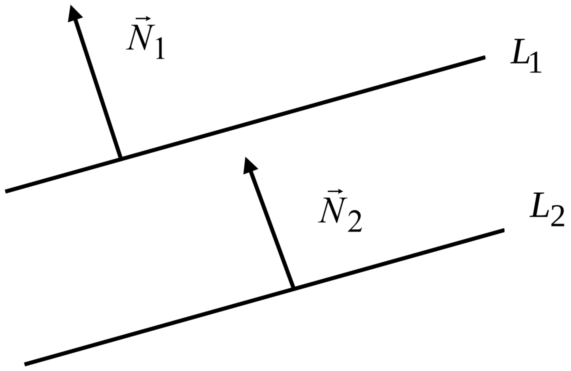
1) $\left.\begin{array}{lll} L_1: & y=k_1x+b_1, & k_1=\mathrm{tg}\,\alpha_1 \\ L_2: & y=k_2x+b_2, & k_2=\mathrm{tg}\,\alpha_2 \end{array}\right\} L_1\,||\,L_2 \Leftrightarrow k_1=k_2;$



2) $\left.\begin{array}{lll} L_1: & \dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}, & \vec{S}_1=\{\ell_1;m_1\} \\ L_2: & \dfrac{x-x_2}{\ell_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}, & \vec{S}_2=\{\ell_2;m_2\} \end{array}\right\} L_1\,||\,L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1\,||\,\vec{S}_2 \Leftrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{m_1}{m_2};$

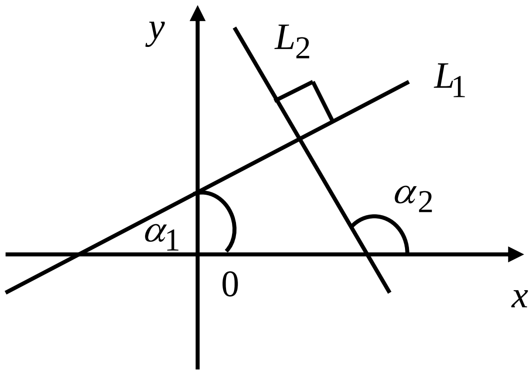


3) $$\left.\begin{array}{l} L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,\quad \vec{N}_1=\{A_1;B_1\} \\ L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,\quad \vec{N}_2=\{A_2;B_2\} \end{array}\right\} L_1 \,||\, L_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \,||\, \vec{N}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};$$



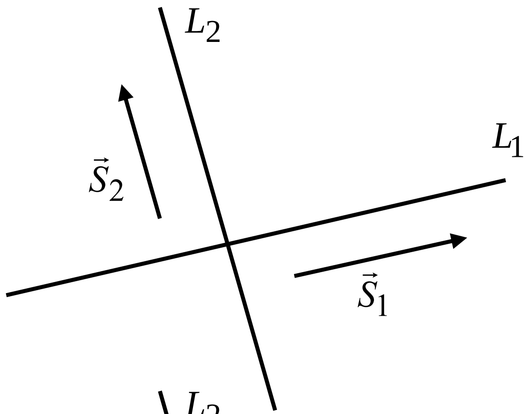
Умови перпендикулярності двох прямих:

1) $$\left.\begin{array}{lll} L_1: & y=k_1x+b_1, & k_1=tg\alpha_1 \\ L_2: & y=k_2x+b_2, & k_2=tg\alpha_2 \end{array}\right\} L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1;$$



2)

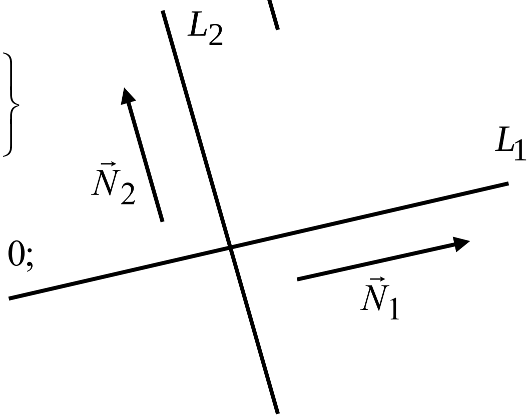
$$\left.\begin{array}{l} L_1: \dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1},\quad \vec{S}_1=\{\ell_1;m_1\} \\ L_2: \dfrac{x-x_2}{\ell_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2},\quad \vec{S}_2=\{\ell_2;m_2\} \end{array}\right\}$$



$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Leftrightarrow \ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2=0$$

3)

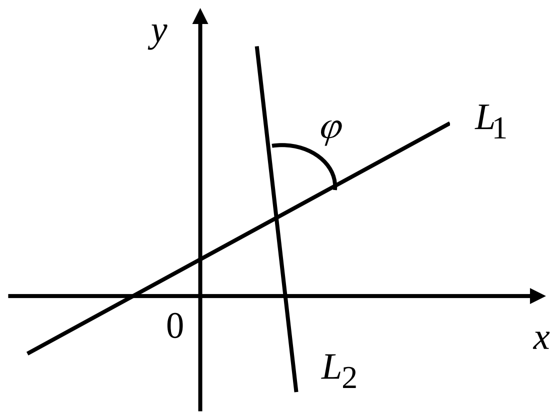
$$\left.\begin{array}{l} L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,\quad \vec{N}_1=\{A_1;B_1\} \\ L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,\quad \vec{N}_2=\{A_2;B_2\} \end{array}\right\}$$



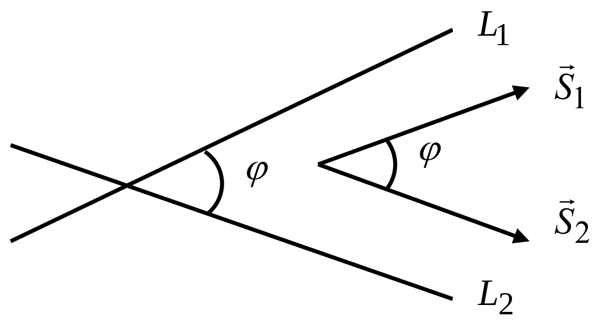
$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0;$$

Кут між двома прямими:

1) $$\left.\begin{array}{ll} L_1: \quad y = k_1 x + b_1, & k_1 = tg\alpha_1 \\ L_2: \quad y = k_2 x + b_2, & k_2 = tg\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

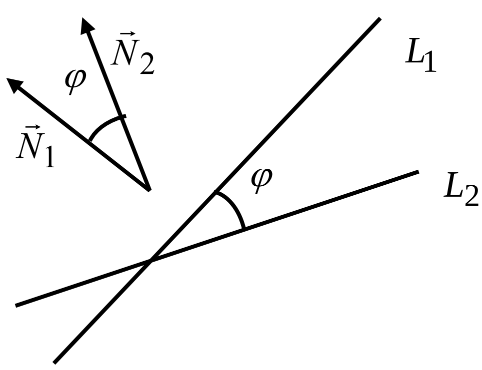


2)
$$\left.\begin{array}{l} L_1: \dfrac{x - x_1}{\ell_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1}, \ \vec{S}_1 = \{\ell_1; m_1\} \\ L_2: \dfrac{x - x_2}{\ell_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2}, \ \vec{S}_2 = \{\ell_2; m_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\varphi_{1,2} = \frac{\ell_1 \cdot \ell_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2}}$$



3)

$$\left.\begin{array}{ll} L_1: \ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, & \vec{N}_1 = \{A_1; B_1\} \\ L_2: \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, & \vec{N}_2 = \{A_2; B_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\varphi_{1,2} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$



Приклад

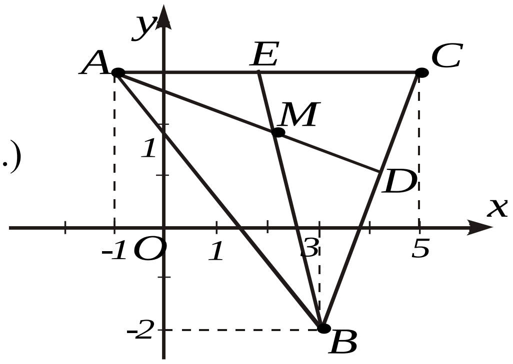
Відомі координати вершин трикутника ABC. Обчислити:

1) довжину сторони BC;
2) рівняння прямої BC;
3) рівняння висоти AD на сторону BC;
4) довжину висоти AD;
5) рівняння медіани BE;
6) точку перетину M висоти AD і медіани BE;
7) кут між прямими AD і BE;
8) накреслити рисунок.

$$A(-1;3),\quad B(3;-2),\quad C(5;3)$$

Розв'язання

1. Обчислимо довжину сторони BC за формулою
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$:



$$BC=\sqrt{(3-5)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\ \text{(од.)}$$

2. Запишемо рівняння прямої BC за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:$$

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+2}{3+2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{5}\quad\Rightarrow\quad\vec{S}=\{2;5\},$$

$$BC:\ 5x-2y-19=0.$$

3. $AD\perp BC\quad\Rightarrow\quad AD\perp\vec{S}$.

Запишемо рівняння висоти AD за формулою

$$\widetilde{A}(x-x_0)+\widetilde{B}(y-y_0)=0,$$

де $(x_0; y_0)$ координати точки A, $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ – координати вектора, перпендикулярного до AD, тобто $\{\widetilde{A}; \widetilde{B}\} = \vec{S} = \{2; 5\}$:

$$2\cdot(x+1)+5\cdot(y-3)=0 \quad \text{або} \quad 2x+5y-13=0 \ - \ AD.$$

4. Обчислимо довжину висоти AD за формулою

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|:$$

$$AD = \left| \frac{5\cdot(-1)-2\cdot 3-19}{\sqrt{5^2+(-2)^2}} \right| = \frac{30}{\sqrt{29}} \ \text{(од.)}.$$

5. Обчислимо координати точки E – середини відрізку AC

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2; \quad y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3; \ \Rightarrow \quad E(2;3).$$

6. Запишемо рівняння медіани BE за формулою

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}:$$

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{3+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x+y-13=0 \ - \ BE.$$

7. Визначимо точку перетину висоти AD і медіани BE, розв'язуючи систему, складену з рівнянь цих прямих:

$$+\begin{cases} 2x+5y-13=0 \Big| & \Big| \cdot(-5) \\ 5x+y-13=0 \Big| \cdot(-5) & \Big| \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -23x+42=0; & -23x=-42; & x=\dfrac{52}{23} \\ -23y+39=0; & -23y=-39; & y=\dfrac{39}{23} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{точка } M\left(\frac{52}{23}; \frac{39}{23}\right).$$

8. Обчислимо кут між прямими AD і BE:

AD: $\quad 2x+5y-13=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{N}_1 = \{2;5\}$,

BE: $\quad 5x+y-13=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{N}_2 = \{5;1\}$,

$$\cos\varphi = \cos\left(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} =$$

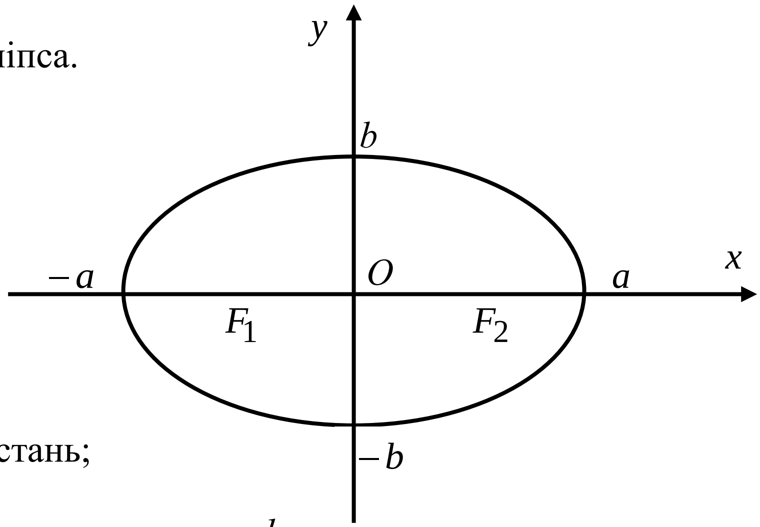
$$= \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26}} = 0.5463 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 56{,}89^\circ .$$

Криві другого порядку

Розглянемо так звані канонічні рівняння ліній (кривих) другого порядку:

а) еліпс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, тут a і b – піввісі еліпса, $a > 0,\ b > 0$.

Точки F_1 і F_2 – фокуси еліпса.



$F_1\,F_2 = 2c$ – фокальна відстань;

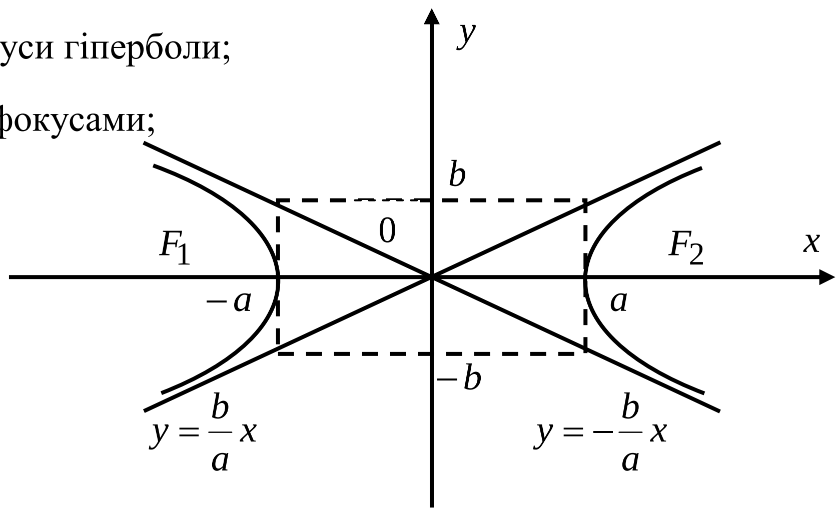
$c^2 = a^2 - b^2$ – зв’язок між параметрами a, b, c;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса ($0 \le \varepsilon < 1$).

б) гіпербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, тут a і b – відповідно дійсна та уявна піввісі;

точки F_1 та F_2 – фокуси гіперболи;

F_1F_2 – відстань між фокусами;

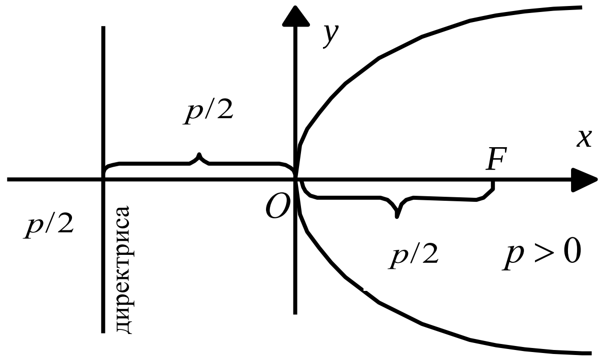


$c^2 = a^2 + b^2$ – зв’язок між параметрами a, b, c;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет ($\varepsilon > 1$);

$y = \pm \dfrac{b}{a} x$ – рівняння асимптот.

в) парабола: $y^2 = 2px$;

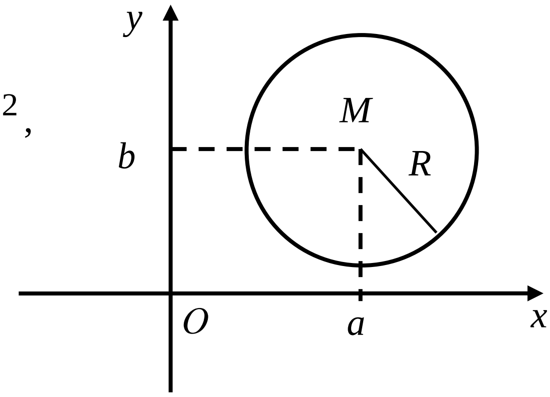


$F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ — фокус;

$x = -\dfrac{P}{2}$ – рівняння директриси;

$\varepsilon = 1$ – ексцентриситет.

Як правило, щоб побудувати лінію, її спочатку зводять до канонічного вигляду. Коло є частинним випадком еліпса, в якого півосі однакові $a = b = R$. Часто використовують так зване нормальне рівняння кола.



г) коло: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$,

тут точка $M(a;b)$ – центр кола,

R – його радіус;

<u>Приклад</u>

Привести рівняння лінії до канонічного вигляду та зробити рисунок лінії

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

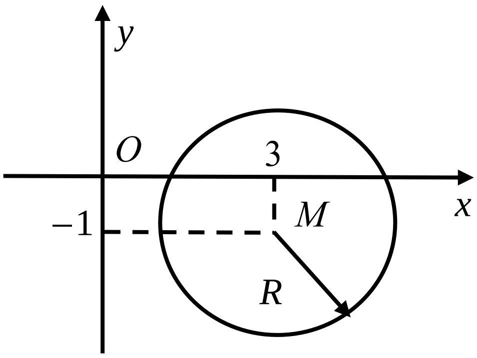
<u>*Розв’язання*</u>

Приведемо рівняння лінії до канонічного вигляду, вилучивши повні квадрати

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = \left(x^2 - 6x\right) + \left(y^2 + 2y\right) + 6 = \left(x^2 - 6x + 9\right) +$$
$$+ \left(y^2 + 2y + 1\right) - 9 - 1 + 6 = (x-3)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0,$$

$(x-3)^2+(y+1)^2=4$ – це коло, центр якого знаходиться в точці $M(3;-1)$ і радіус якого дорівнює $R=2$.

Залишилось зробити рисунок.



Для побудови лінії в полярній системі координат $r=f(\varphi)$, складаємо таблицю значень r в залежності від φ через деякий проміжок, наприклад, через $\Delta\varphi=\pi/8$, за допомогою якої будуємо криву, відкладаючи значення r на відповідних радіусах. Зауважимо, що полярний радіус r може приймати тільки додатні значення.

Приклад

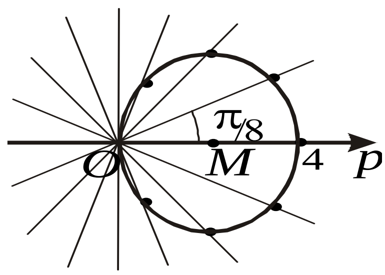
Побудувати лінію $r=4\cos\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi)$. Записати рівняння лінії у прямокутній системі координат.

Розв'язання

Складаємо таблицю значень φ та r, даючи φ значення через проміж $\frac{\pi}{8}$.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{8\pi}{8}=\pi$
r	4	3,70	2,83	1,53	0	-1,53	-2,83	-3,70	-4

Зобразимо криву у полярній системі координат.



Для переходу до прямокутної системи координат скористаємося співвідношеннями:

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ та } \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Маємо такий результат:

$$\sqrt{x^2+y^2}=4\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{або} \quad x^2+y^2=4x.$$

Вилучивши повні квадрати, записуємо рівняння у вигляді $(x-2)^2 + y^2 = 4$ – це коло, центр якого знаходиться в точці $M(2;0)$ і радіус якого $R = 2$. Отримане рівняння відповідає зробленому рисунку.

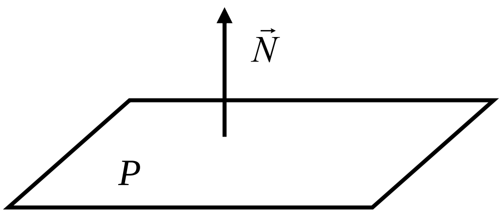
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Рівняння площини

Рівняння $F(x;\quad y;\quad z;)=0$ зв’язує три змінні, дві з яких незалежні. Якщо вибрати незалежними x та y, то ця пара визначає точку на площині XOY, якій відповідає (згідно з рівнянням) значення змінної величини z. Таким чином, трійка чисел x, y та z визначає точку у просторі, а саме рівняння – геометричне місце точок, координати яких йому задовольняють. Це рівняння називають ***рівнянням поверхні у просторі.***

Найпростішою поверхнею у просторі є площина.

1) $Ax+By+Cz+D=0$ – загальне рівняння площини P,

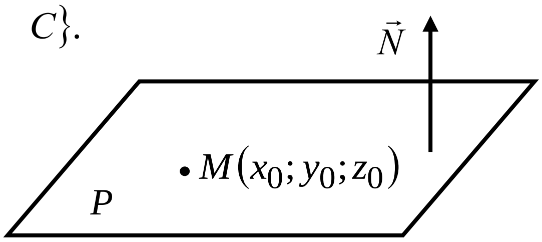


$\vec{N}=\{A;\quad B;\quad C\}\perp P$ – нормальний вектор площини;

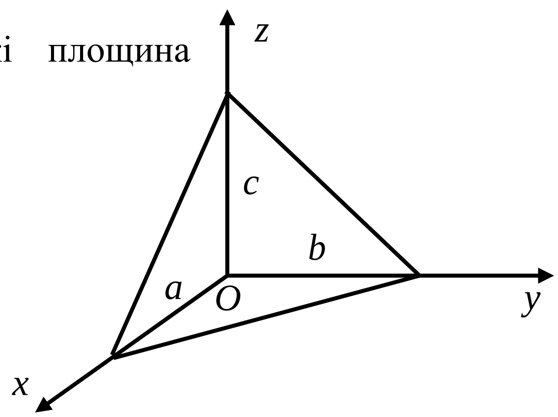
2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – рівняння площини, яка проходить через задану точку $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ (центр жмутка площин) перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{A;\quad B;\quad C\}$.

$\vec{N}=\{A;\quad B;\quad C\}\perp P$,

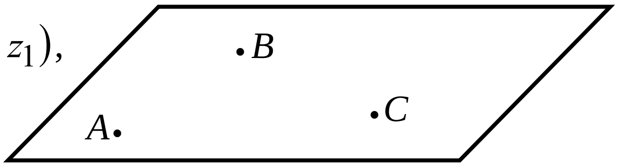
точка $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)\in P$;



3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – рівняння площини у відрізках на осях, де a, b, c – величини відрізків, які площина відтинає на осях координат;



4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини, яка проходить через три задані точки $A(x_1;\ \ y_1;\ \ z_1)$, $B(x_2;\ \ y_2;\ \ z_2)$ та $C(x_3;\ \ y_3;\ \ z_3)$.



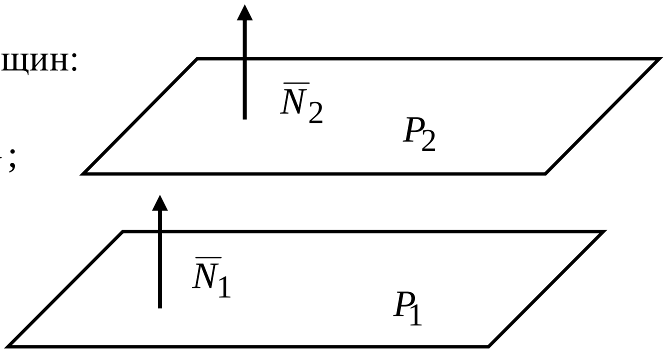
Взаємне розташування двох площин у просторі

$P_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{N}_1=\{A_1;\ \ B_1;\ \ C_1\}\perp P_1,$

$P_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \ \Rightarrow\ \vec{N}_2=\{A_2;\ \ B_2;\ \ C_2\}\perp P_2.$

1) Умова паралельності двох площин:

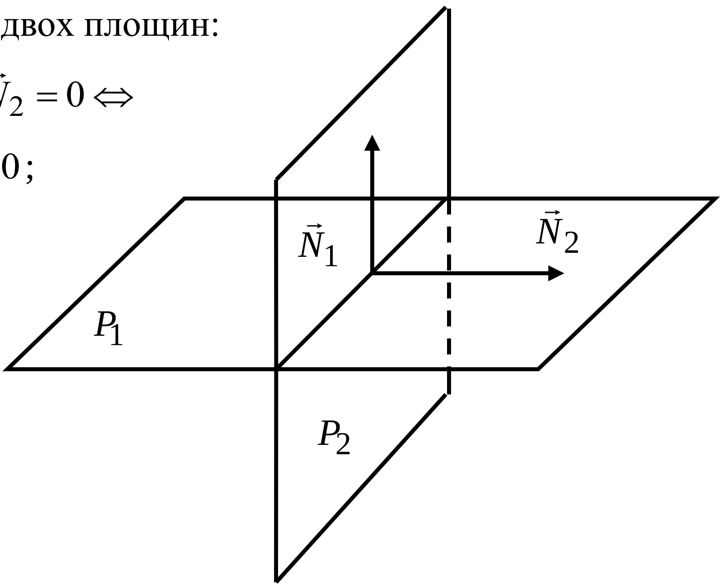
$P_1\,||\,P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1\,||\,\vec{N}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2};$



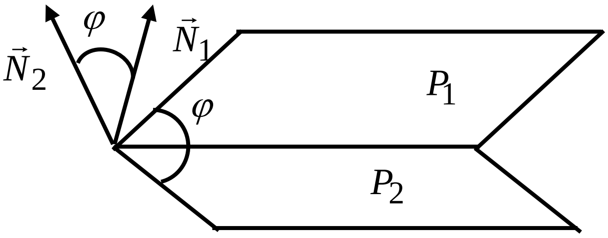
2) Умова перпендикулярності двох площин:

$P_1\perp P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1\perp\vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0;$

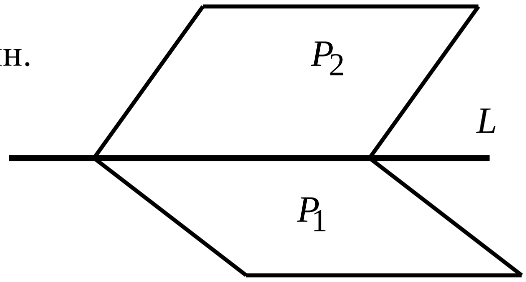


3) Кут між площинами: $\cos\varphi_{1,2}=\dfrac{\pm\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\dfrac{\pm(A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$



Пряма у просторі

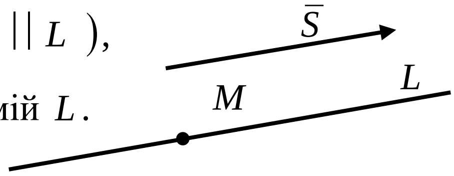
1) $L:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (P_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (P_2) \end{cases}$ – загальне рівняння прямої L у просторі, як лінії перетину двох площин.



2) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ – канонічне рівняння прямої (L).

$\vec{S}=\{m;\ \ n;\ \ p\}$ – напрямний вектор прямої $\left(\vec{S}\ \ ||\ L\ \right)$,

точка $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка, яка належить прямій L.



3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;\ \ y_1;\ \ z_1)$ та $M_2(x_2;\ \ y_2;\ \ z_2)$.

4) Прирівнюючи кожну з частин канонічного рівняння 2 до параметра t, отримуємо параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+p\cdot t \end{cases}$.

Взаємне розташування двох прямих у просторі

$$L_1:\quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad \vec{S}_1=\{m_1;\ \ n_1;\ \ p_1\}\ ||\ L_1,$$

$$L_2:\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},\qquad \vec{S}_2=\{m_2;\ \ n_2;\ \ p_2\}\ ||\ L_2.$$

1) умова паралельності двох прямих:

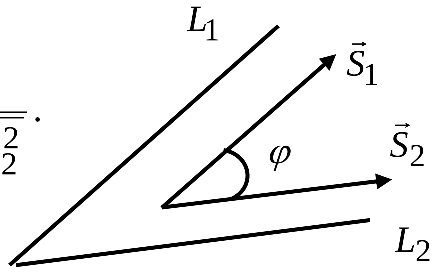
$$L_1\ ||\ L_2 \iff \vec{S}_1\ ||\ \vec{S}_2 \iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2};$$

2) умова перпендикулярності двох прямих:

$$L_1\perp L_2 \iff \vec{S}_1\perp\vec{S}_2 \iff \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=0 \iff m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0;$$

3) кут між двома прямими:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$



Взаємне розміщення прямої та площини

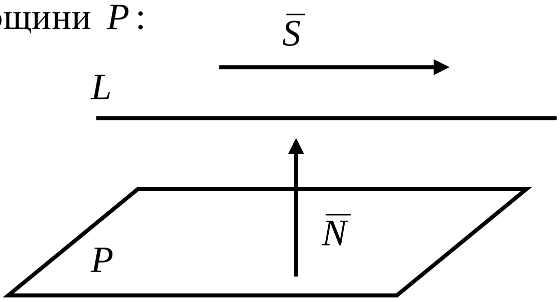
$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad \bar{S} = \{m;\quad n;\quad p\} \ || \ L,$$

$$P: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \vec{N} = \{A;\quad B;\quad C\} \perp P.$$

1) умова паралельності прямої L та площини P:

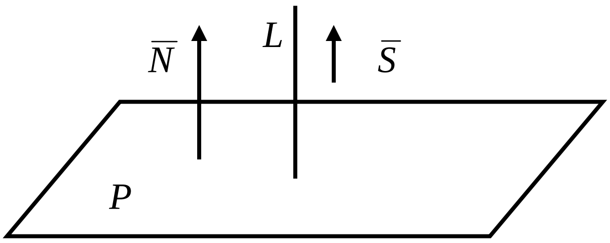
$L || P \Leftrightarrow \vec{S} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{S} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0;$

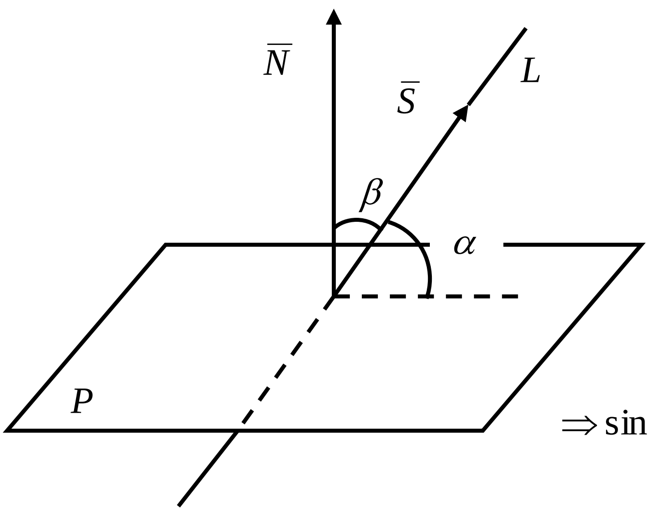


2) умова перпендикулярності прямої та площини: $L \perp P \Leftrightarrow \vec{N} \,||\, \vec{S} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$



3) кут між прямою та площиною: $\sin\alpha = |\cos\beta|$; $\cos\beta = \dfrac{\bar{N} \cdot \bar{S}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{S}|} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Приклад

Обчислити точку перетину прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ і площини $x-y+z-3=0$.

Розв'язання

Розв'язок системи, складеної з цих рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \\ x-y+z-3=0 \end{cases}$$

і є координатами шуканої точки перетину. Для зручності розв'язання системи запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2t \\ y=3t+1 \\ z=4t+1 \end{cases}$$

і підставимо в рівняння площини

$$2t-(3t+1)+(4t+1)-3=0$$
$$2t-3t-1+4t+1-3=0 \quad \Rightarrow \quad 3t=3 \quad \Rightarrow \quad t=1,$$

тоді $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases} \quad \Rightarrow$ точка перетину прямої і площини $M(2;\quad 4;\quad 5)$.

Приклад

Обчислити відстань від точки $M(1;\quad 2;\quad 4)$ до площини $2x+2y-z-11=0$.

Розв'язання

Для обчислення відстані від цієї точки до площини скористаємося формулою

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|,$$

тут $M\ (x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ – точка, яка знаходиться поза площиною. Значить,

$$d=\left|\frac{2\cdot 1+2\cdot 2-4-11}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{-9}{\sqrt{9}}\right|=3 \quad \text{(од.)}.$$

ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

Дано матриці A и B. Потрібно:

1) обчислити матриці $C = B^T \cdot B$, $D = B \cdot B^T$, $G = A \cdot D$;

2) знайти матрицю A^{-1}. Зробити перевірку;

3) записати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $X = (x_1; x_2; x_3)^T$, у виді системи лінійних рівнянь;

4) розв’язати систему матричним методом;

5) розв’язати систему методом Крамера;

6) розв’язати систему методом Гаусса.

№	A	B
1	1 -2 3	6
	2 3 -4	18
	3 -2 5	6
2	3 2 1	5
	2 3 3	1
	2 1 3	11
3	4 -3 2	0
	2 5 -3	8
	5 6 -2	9
4	1 1 2	-1
	2 -1 2	-4
	4 1 4	-2
5	2 -1 1	4
	3 4 -2	11
	3 -2 4	11
6	3 4 2	8
	2 -1 -3	1
	1 5 1	3
7	1 1 -2	0
	2 1 3	6
	0 2 -2	0
8	-1 -9 4	-9
	3 1 1	14
	2 5 -3	4

№	A	B
9	2 0 -8	0
	-1 5 1	14
	2 3 -45	20
10	3 0 2	-1
	2 2 2	2
	2 -1 2	-4
11	1 -1 5	7
	0 6 -6	0
	3 1 1	11
12	2 -1 1	-3
	1 -6 -4	9
	2 -1 -3	11
13	1 1 -1	1
	8 3 -6	2
	-4 -1 3	-3
14	1 -4 -2	4
	3 1 1	6
	-3 5 6	-5
15	7 -5 0	31
	4 0 11	-43
	2 3 4	-20
16	1 2 4	31
	5 1 2	29
	3 -1 1	10

№	A	B
17	-3 0 2	-2
	4 1 -3	3
	4 2 -3	-1
18	-2 1 4	-4
	0 6 7	-12
	3 1 1	1
19	9 -2 4	11
	2 3 7	-1
	11 -5 11	16
20	6 1 5	41
	8 0 3	39
	-4 1 2	2
21	3 2 1	5
	2 3 1	3
	2 1 3	1
22	4 -3 2	1
	2 5 -3	7
	5 6 -2	11
23	2 -1 1	5
	5 3 -3	7
	3 -2 4	10
24	1 1 2	9
	3 0 4	15
	2 -1 -2	2

№	A	B
25	2 1 3	1
	1 1 -2	-3
	3 4 -1	-4
26	2 2 1	4
	1 2 4	9
	3 -1 1	5
27	1 -1 0	2
	2 1 3	-1
	0 -2 2	-2
28	-2 1 2	2
	-4 1 2	2
	12 -1 1	37
29	2 -1 -5	4
	7 1 4	-3
	6 4 -7	11
30	4 5 -3	7
	1 -1 1	-2
	7 0 4	-3
31	2 -8 1	0
	2 5 -3	5
	3 1 1	12
32	2 -1 1	-7
	3 4 -4	-5
	1 -1 3	-2

Завдання 2.

Задано координати вершин піраміди A, B, C, D. Використовуючи методи векторної алгебри, знайти:

1) скалярний добуток $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ і кут між ребрами AB і AC;

2) проекцію вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$;

3) площу грані ABC;

4) напрямні косинуси вектора $\vec{AB}$;

5) об'єм піраміди.

№	*A*	*B*	*C*	*D*	№	*A*	*B*	*C*	*D*
1.	(4;0;0)	(-2;1;2)	(-5;-3;2)	(3;2;-7)	16.	(6;1;5)	(-1;1;6)	(-1;5;-2)	(3;0;-1)
2.	(2;1;2)	(-3;2;7)	(-4;0;0)	(1;3;-2)	17.	(2;5;4)	(-3;2;2)	(-4;5;-3)	(2;1;-3)
3.	(1;3;2)	(-4;0;0)	(-3;-2;7)	(2;1;-2)	18.	(3;2;2)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)	(2;5;-4)
4.	(3;2;7)	(-1;3;2)	(-2;-1;2)	(4;0;0)	19.	(4;5;3)	(-2;1;3)	(-2;5;-4)	(3;2;-2)
5.	(3;1;2)	(-1;2;1)	(-2;-1;0)	(6;2;-2)	20.	(2;1;3)	(-2;5;4)	(-3;2;-2)	(4;5;-3)
6.	(1;2;1)	(-2;1;0)	(-6;-2;2)	(3;1;-2)	21.	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)	(6;2;-5)
7.	(2;1;0)	(-6;2;2)	(-3;-1;2)	(1;2;-1)	22.	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)	(2;4;-1)
8.	(6;2;2)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)	(2;1;0)	23.	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)	(3;4;-2)
9.	(2;3;5)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)	(3;4;-1)	24.	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;-1)
10.	(1;4;1)	(-3;2;1)	(-3;-4;1)	(2;3;-5)	25.	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)
11.	(3;2;1)	(-3;4;1)	(-2;-3;5)	(1;4;-1)	26.	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)	(2;5;-3)
12.	(3;4;1)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)	(3;2;-1)	27.	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-3)
13.	(1;1;6)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)	(6;1;-5)	28.	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)	(1;4;-3)
14.	(1;5;2)	(-3;0;1)	(-6;1;-5)	(1;1;-6)	29.	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;-4)
15.	(3;0;1)	(-6;1;5)	(-1;1;-6)	(1;5;-2)	30.	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)	(4;5;-1)

Завдання 3.

Задано координати вершин трикутника *ABC*. Знайти:

1) довжину сторони *BC*;
2) рівняння прямої *BC*;
3) рівняння висоти *AD* на сторону *BC*;
4) довжину висоти *AD*;
5) рівняння медіани *BE*;
6) точку перетину *M* висоти *AD* і медіани *BE*;
7) кут між прямими *AD* і *BE*;
8) навести креслення.

№№	*A*	*B*	*C*
1.	(0,1)	(3,-5)	(-2,-3)
2.	(0,2)	(-12,-9)	(-5,15)
3.	(0,3)	(-2,1)	(-7,-1)
4.	(0,4)	(-15,11)	(8,-13)
5.	(0,5)	(-10,3)	(8,-7)
6.	(0,6)	(-5,4)	(9,-1)
7.	(0,7)	(-18,11)	(11,-3)
8.	(0,8)	(-2,6)	(6,-3)
9.	(0,9)	(-12,11)	(6,-3)
10.	(1,0)	(-4,5)	(8,-2)
11.	(1,1)	(-2,7)	(-10,-9)
12.	(1,2)	(-2,9)	(-6,-2)
13.	(1,3)	(-6,2)	(10,-5)
14.	(1,4)	(-5,5)	(4,-3)
15.	(1,5)	(-8,2)	(4,-10)

№№	*A*	*B*	*C*
16.	(1,6)	(-9,1)	(7,-1)
17.	(1,7)	(-11,3)	(2,-1)
18.	(1,8)	(-6,3)	(10,-1)
19.	(1,9)	(-6,2)	(2,-6)
20.	(2,0)	(-8,2)	(1,-8)
21.	(2,1)	(-6,2)	(3,-5)
22.	(2,2)	(-4,3)	(2,-9)
23.	(2,3)	(-1,7)	(11,-2)
24.	(2,4)	(-1,1)	(5,-1)
25.	(2,5)	(-4,-10)	(10,-3)
26.	(2,6)	(-7,1)	(5,-4)
27.	(2,7)	(-1,2)	(7,-10)
28.	(2,8)	(-10,1)	(2,-5)
29.	(2,9)	(-2,6)	(-2,-5)
30.	(3,0)	(-8,4)	(4,-5)

Завдання 4.

Дано рівняння лінії в полярній системі координат. Побудувати графік функції по точках, надаючи полярному куту φ значення, починаючи від 0 через π/8 у проміжку $0 \le \varphi \le 2\pi$ і знайти рівняння цієї лінії в прямокутній декартовій системі координат.

1. $r=6/(2+\cos\varphi)$	11. $r=4/(2+\cos\varphi)$	21. $r=4/(3+2\cos\varphi)$
2. $r=1/(2+\cos\varphi)$	12. $r=1/(2+\sin\varphi)$	22. $r=8/(3+\cos\varphi)$
3. $r=3\sin^2 2\varphi$	13. $r=4\cos^2 2\varphi$	23. $r=5/(4+3\cos\varphi)$
4. $r=9\cos^2 2\varphi$	14. $r=1/(9+3\sin\varphi)$	24. $r=3/(2+\sin\varphi)$
5. $r=1/(9+3\cos\varphi)$	15. $r=3/(1.5+\cos\varphi)$	25. $r=1/(2+\sin\varphi)$
6. $r=4(1+\cos\varphi)$	16. $r=9\sin^2 2\varphi$	26. $r=8/(2+\sin\varphi)$
7. $r=4\cos 2\varphi$	17. $r=2\cos\varphi+4$	27. $r=4/(3+\sin\varphi)$
8. $r=3(2+\cos\varphi)$	18. $r=2(2+\sin\varphi)$	28. $r=5/(4+2\cos\varphi)$
9. $r=1+\cos 2\varphi$	19. $r=5/(2+\cos\varphi)$	29. $r=1/(4+2\sin\varphi)$
10. $r=5/(2+\sin\varphi)$	20. $r=1/(2+\cos\varphi)$	30. $r=2/(5+\cos\varphi)$

Завдання 5.

Задано координати точок *A*, *B*, *C*. Знайти:

1) рівняння площини P_1, що проходить через точку *A* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$;
2) відстань від точки *C* до цієї площини;
3) рівняння площини P_2, що проходить через точки *A*, *B*, *C*;
4) канонічні рівняння прямої L_1, що проходить через точки *B* і *C*;
5) точку перетину прямої L_1 із площиною P_1;
6) кут між площиною P_1 і прямою L_2, що проходить через точки *A* і *C* (у градусах).

№№	*A*	*B*	*C*
1.	(4;0;0)	(-2;1;2)	(-5;-3;2)
2.	(2;1;2)	(-3;2;7)	(-4;0;0)
3.	(1;3;2)	(-4;0;0)	(-3;-2;7)
4.	(3;2;7)	(-1;3;2)	(-2;-1;2)
5.	(3;1;2)	(-1;2;1)	(-2;-1;0)
6.	(1;2;1)	(-2;1;0)	(-6;-2;2)
7.	(2;1;0)	(-6;2;2)	(-3;-1;2)
8.	(6;2;2)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)
9.	(2;3;5)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)
10.	(1;4;1)	(-3;2;1)	(-3;-4;1)
11.	(3;2;1)	(-3;4;1)	(-2;-3;5)
12.	(3;4;1)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)
13.	(1;1;6)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)
14.	(1;5;2)	(-3;0;1)	(-6;1;-5)
15.	(3;0;1)	(-6;1;5)	(-1;1;-6)

№№	*A*	*B*	*C*
16.	(6;1;5)	(-1;1;6)	(-1;5;-2)
17.	(2;5;4)	(-3;2;2)	(-4;5;-3)
18.	(3;2;2)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)
19.	(4;5;3)	(-2;1;3)	(-2;5;-4)
20.	(2;1;3)	(-2;5;4)	(-3;2;-2)
21.	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)
22.	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)
23.	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)
24.	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)
25.	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)
26.	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)
27.	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)
28.	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)
29.	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)
30.	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1976 (гл. 2, 3).
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984 (§ 8, §§ 15-19).
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967.
5. Кулініч Г.Л. Вища математика. – К., 1995.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высшая школа, 1999.