українська державна академія залізничного транспорту

факультет управління процесами перевезень

кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до виконання розрахунково-графічних і домашніх робіт для студентів денної форми навчання та до виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання факультету економіки транспорту

Харків – 2007

Методичні вказівки призначені для студентів економічних спеціальностей денної та безвідривної форми навчання. Розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № __ від 26 листопада 2007 р.

Укладачі: доцент Юрчак Н.С.,
доцент Акімова Ю.О.,
ст. викл. Волохова Н.І.
асистент Жулід Т.І.

Рецензент доцент Бородай Г.П.

ВСТУП

У зв'язку з вимогами програми вивчення курсу вищої математики на економічному факультеті протягом тільки одного семестру виявилась необхідність у створенні методичних вказівок та завдань, що охоплюють багато розділів курсу, мають нескладний рівень розглянутих прикладів. Завдання, що пропонуються, мають за мету закласти основу необхідних знань із вищої математики, які будуть використовуватися в прикладних задачах спеціальних економічних курсів.

Методичні вказівки охоплюють такі розділи програми вищої математики:

- лінійна алгебра;
- векторна алгебра;
- аналітична геометрія на площині;
- границі функції;
- похідні функції однієї змінної;
- застосування похідної для повного дослідження функції;
- основні методи інтегрального числення;
- частинні похідні функції багатьох змінних.

Методичні вказівки містять теоретичні питання із програми курсу, список учбової літератури, зразки розв'язання задач із розгорнутими поясненнями, індивідуальні домашні завдання й завдання розрахунково-графічної роботи.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

У зв'язку з дуже стислою і спрощеною формою викладання курсу вищої математики на економічних спеціальностях конспект лекцій разом з класичними підручниками є основними джерелами знань для студентів. Конспект повинен містити відповіді на теоретичні питання, наведені в даних методичних вказівках. Особливу увагу слід звертати на визначення основних понять курсу, на їх застосування для виконання практичних завдань.

Методичні вказівки є основою для виконання індивідуальних домашніх завдань та розрахунково-графічних робіт для студентів денної форми навчання, а також для виконання контрольних робіт для студентів безвідривної форми навчання.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1 Лінійна алгебра

Основна мета вивчення цього розділу курсу – оволодіння методами розв'язання *систем лінійних алгебраїчних рівнянь.* До цих методів належать:

- метод Крамера;
- матричний метод;
- метод Гауса.

При застосуванні перелічених методів використовуються обчислення *визначників* та дії з *матрицями.* Таким чином, основними темами розділу лінійної алгебри вважаються такі:

- визначники, їх властивості та способи обчислення;
- матриці, дії з матрицями, обернена матриця;
- дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання;
- однорідні системи лінійних рівнянь;
- розв'язання матричних рівнянь.

У належному обсязі *частина I завдання 1* та їх обговорення по цьому розділу надані в методичних вказівках [8], але в них не приділено уваги методам спрощення визначників, яки принципово дозволяють обчислювати визначники будь-яких порядків. Ці методи обговорюються в методичних вказівках [9].

Розглянемо обчислення визначника із приклада 1 [8] пункту 2) розв'язання за допомогою властивості про розкладання визначника за елементами будь-якого ряду, попередньо скориставшися можливістю спрощення визначника, перетворюючи всі, за виключенням одного, елементи будь-якого ряду в нулі. Для цього застосуємо властивість визначника не змінюватись, якщо до елементів будь-якого ряду додати відповідні елементи паралельного ряду помноженого на один і той же множник.

Приклад 1 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ має вже розряджені ряди (ті, що мають нульовий елемент) – третій рядок або перший стовпчик, в яких достатньо отримати ще один нуль.

1-й спосіб. Помножимо перший рядок на *(-2)* і додамо його елементи до елементів другого рядка, а потім розвинемо його за елементами першого стовпця

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

2-й спосіб. Помножимо другий стовпець на *2* і додамо його елементи до відповідних елементів третього стовпця, а потім розвинемо визначник за елементами третього рядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2.$$

Цей спосіб обчислення визначників треба обов'язково використати для розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера при виконанні *завдання 1* із методичних вказівок [8].

В *частині II завдання 1* пропонується розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь, тобто такі, в яких праві частини всіх рівнянь дорівнюють нулю. Особливістю дослідження таких систем є тільки два можливих випадки при їх розв'язанні. Якщо *головний визначник* системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний *тривіальний* розв'язок – всі невідомі дорівнюють нулю. Якщо $\Delta = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків. Приклади розв'язання таких систем розглядаються в методичних вказівках [9].

2 Векторна алгебра

Метою виконання *завдання 2* є отримання навиків задання *векторів* та оперування *векторними величинами*.

Основні питання, що розглядаються в цьому розділі, такі:

- лінійні дії з векторами;
- поняття лінійної залежності та незалежності векторів, базис вектору;
- способи задання векторів, координати та модуль вектора;
- скалярний добуток векторів.

Візьмемо за основу *завдання №2* із методичних вказівок [8] п. 1) – 4), але внесемо уточнення у виконання пункту 3) у межах того матеріалу, що викладається на економічних спеціальностях.

Приклад 2 Знайти площу грані ABC, якщо задані точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$

Знайдемо площу грані ABC за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|\sin(\vec{AB},\vec{AC}),$$

де

$$\sin(\vec{AB},\vec{AC}) = \sqrt{1-\cos^2\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)},$$

а косинус кута між двома векторами знаходиться з означення скалярного добутку цих векторів

$$\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}.$$

Знайдемо координати векторів

$$\vec{AB} = (3-1;0-2;-3-0) = (2;-2;-3),\ \vec{AC} = (5-1;2-2;6-0) = (4;0;6),$$

їх модулі

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17};$$

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}.$$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{2\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + (-3)\cdot 6}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{52}} = \frac{-10}{\sqrt{17}\sqrt{52}} \approx -0{,}34,$$

тоді

$$\sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \sqrt{1-(-0{,}34)^2} \approx \sqrt{1-0{,}12} \approx 0{,}94.$$

Таким чином, площа грані ABC дорівнює

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{52}\cdot 0{,}94 \approx 14 \text{ од}^2,$$

що збігається з відповідним результатом у п. 3) [8].

Розглянемо виконання пункту 5) завдання 2.

Приклад 3 Розкласти вектор $\vec{BC}$ за базисом $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, якщо A(1;-1;1), B(4;5;4), C(2;2;-2), D(3;1;3)

Сукупність лінійно незалежних векторів простору називається *базисом.*

Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються *лінійно залежними,* якщо існують такі числа α, β, γ, які одночасно не дорівнюють нулю, що

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0.$$

У протилежному випадку вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються *лінійно незалежними.*

Геометричною ознакою лінійної незалежності трьох векторів є їх *некомпланарність* (нерозміщення в одній площині).

Розкласти вектор $\vec{BC}$ за базисом $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ означає представити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів

$$\vec{BC} = \alpha\,\vec{AB} + \beta\,\vec{AC} + \gamma\,\vec{AD},$$

тобто знайти невідомі коефіцієнти α, β, γ.

Розв'язання задачі в першу чергу повинно включати доведення лінійної незалежності базисних векторів.

Система лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів розвинення створюється за умовою, що лінійні дії з векторами переносяться на дії з їх проекціями. Отже, якщо

$$\vec{AB} = \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{AC} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{AD} = \vec{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

$$\vec{BC} = \vec{d} = (d_x, d_y, d_z),$$

то відповідна система рівнянь має такий вигляд

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = d_x \\ \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = d_y \\ \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = d_z \end{cases}.$$

Знайдемо координати векторів

$$\vec{AB} = (3;6;3), \quad \vec{AC} = (1;3;-2), \quad \vec{AD} = (2;2;2), \quad \vec{BC} = (-2;-3;-5),$$

запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = -2 \\ 6\alpha + 3\beta + 2\gamma = -3 \\ 3\alpha - 2\beta + 2\gamma = -5 \end{cases}.$$

Проведемо дослідження розв'язку системи методом Крамера. Її головний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0,$$

тобто система має єдиний розв'язок, а це означає що існує єдина трійка чисел (α, β, γ) для розвинення вектора за базисом, і тому *нерівність нулю головного визначника системи*, а саме визначника, що створений з координат базисних векторів

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta^T = -18 \neq 0,$$

є умовою лінійної незалежності векторів.

Допоміжні визначники

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо невідомі за формулами Крамера

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{18}{-18} = -1, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{-18}{-18} = 1, \quad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{0}{-18} = 0.$$

Таким чином, вигляд розкладання вектора $\vec{BC}$ за базисом є таким

$$\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$$

або інакше (-1;1;0) - координати вектора $\vec{BC}$ в базисі $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

3 Аналітична геометрія на площині

Основними об'єктами ознайомлення в цьому розділі є *пряма лінія* і *основні криві другого порядку,* з якими пов'язані такі теоретичні питання:

- загальне рівняння прямої, тлумачення коефіцієнтів та часткові випадки рівняння;
- рівняння прямої через точку перпендикулярно нормальному вектору;
- рівняння прямої через дві точки;
- канонічне рівняння прямої або рівняння прямої через точку паралельно напрямному вектору;
- рівняння прямої через точку з кутовим коефіцієнтом або рівняння пучка прямих, тлумачення кутового коефіцієнта;
- рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
- рівняння прямої у відрізках на осях;
- формула тангенса кута між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих
- довжина відрізку;
- формула відстані між точкою та прямою;
- знаходження точки перетину двох прямих;
- коло: означення, канонічні рівняння;
- еліпс: означення, канонічні рівняння, основні параметри і зв'язок між ними;
- гіпербола: означення, канонічні рівняння, основні параметри і зв'язок між ними, правило побудування;
- парабола: означення, канонічні рівняння;

- загальне рівняння кривої другого порядку, дискримінант кривої, приведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду.

Усі перелічені питання охоплені завданнями 3 методичних вказівок [8], які утворюють *частину I завдання 3*.

За основу *частини II завдання 3* приймемо завдання 4 методичних вказівок [2], де геометрично знаходиться область розв'язків системи лінійних нерівностей. Ця задача безпосередньо пов'язана з навичками побудування прямої на площині й використовується при графічному розв'язку задач лінійного програмування.

Частина III завдання 3 пов'язана з типами кривих другого порядку і засновується на завданні 5 методичних вказівок [9].

4 Функції. Границі функції. Методи розкриття невизначеностей

Цей розділ є вступом до математичного аналізу *функції однієї змінної*, який містить у собі безпосередньо поняття *функції* та способи її завдання і поняття *границь функції* , їх властивостей та типів. Огляд відповідних теоретичних питань можна знайти в методичних вказівках [10]. Виконання *завдання 4* базується на знанні таких теоретичних питань:

- означення функції, її області визначення та області значень, способи завдання функції;
- означення границі функції в точці $(x \to x_0)$, означення границі функції на нескінченності ($x \to \infty$);
- односторонні границі функції в точці;
- означення обмежених, нескінченно малих та нескінченно великих функцій;
- властивості нескінченно малих, еквівалентні нескінченно малі;
- властивості границь функцій;
- типи невизначеностей $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, $\left|\frac{0}{0}\right|$, $\left|\infty - \infty\right|$ та прийоми їх розкриття;
- перша стандартна (визначна) границя та наслідки з неї;
- друга стандартна (визначна) границя та наслідки з неї;

- таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій;
- неперервність функції, класифікація точок розривів функції.

Частина 1 завдання 4 складається із прикладів знаходження границь функцій.

Розглянемо приклади розкриття невизначеностей.

Приклад 4 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x+7}{3-x^2-2x^3}\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Поведінка багаточленів на нескінченності визначається старшим степенем багаточлена, на чому і базується метод розкриття невизначеності $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$. Ділимо чисельник і знаменник дробу на старший степінь дробу - x^3, далі користуючись властивостями нескінченно малих ($\dfrac{1}{\infty}\to 0$) і теоремами о границях, отримаємо результат:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x+7}{3-x^2-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x}-2}=-\frac{5}{2}.$$

Приклад 5 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2-4}\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

У цьому прикладі невизначеність $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ утворюється за рахунок того, що граничне значення $x_0=-2$ є коренем багаточленів чисельника і знаменника. Це означає, що при розвиненні цих багаточленів на простіші множники в чисельнику і знаменнику з'явиться множник $(x+2)$, скоротивши на який, усунемо причину невизначеності, тобто

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(2x-3)}{(x-2)}=\frac{-7}{-4}=\frac{7}{4}.$$

Зазначимо, що розвинення чисельника проведено за допомогою розв'язку квадратного рівняння

$$2x^2+x-6=0$$

і знаходження його коренів $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -2$. Знаменник розвинуто за формулами скороченого множення.

Приклад 6 Знайти границю функції $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - x - 2} \left| \frac{0}{0} \right|$.

Спосіб обчислення границі також, як у попередньому прикладі, базується на виділенні множника $(x - x_0)$, де x_0 - граничне значення, але наявність радикалів у виразі потребує для отримання відповідного множника множення чисельника і знаменника дробу на вираз, спряжений радикальному, тобто такий, при множенні на який вдається усунути корінь.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 3)\left(\sqrt{x} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x + 3)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{1}{28}.$$

Приклад 7 Знайти границю функції $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) \left| \infty - \infty \right|$.

Розкриття невизначеності $\left| \infty - \infty \right|$ потребує перетворень, що приведуть вираз, не змінюючи його, до відомих типів невизначеностей $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, $\left| \frac{0}{0} \right|$, або зовсім позбавить від невизначеності. У даному випадку помножимо і розділимо вираз на спряжений

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + 3} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 3} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $x \to -\infty$ означена границя дорівнює ∞.

Приклад 8 Знайти границю функції $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{arctg 6x} \left| \frac{0}{0} \right|$.

Знаходження границі функції, що містить тригонометричні функції, базується на застосуванні *першої стандартної границі*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

наслідків із неї

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

та відповідної таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій

sinα(x)~α(x); tgα(x)~α(x); arcsinα(x)~α(x); arctgα(x)~α(x);

$$1\text{-}cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2},$$

де *α(x)* - нескінченно мала функція, тобто можливі такі способи знаходження границі:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{arctg6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{6x}{arctg6x}\cdot\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{arctg6x}=\frac{1}{2}$$

(штучно представили вираз як добуток перших стандартних границь або її наслідків, що дорівнюють одиниці);

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{arctg6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$$

(скористалися таблицею еквівалентних нескінченно малих функцій).

Приклад 9 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos 4x}{tg^2 2x}\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Аналогічно попередньому прикладу розглянемо два способи розв'язання цього прикладу.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 4x}{tg^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos 4x)}{(tg2x)^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\frac{(4x)^2}{2}}\cdot\left(\frac{2x}{tg2x}\right)^2\cdot\frac{16x^2}{2}\cdot\frac{1}{4x^2}=$$

$$=3\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\frac{(4x)^2}{2}}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{tg2x}\right)^2=6;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos 4x}{tg^2 2x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg2x\cdot tg2x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(4x)^2}{2}}{2x\cdot 2x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x^2}{8x^2}=6$.

Приклад 10 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-5}\left|1^{\infty}\right|$.

Представлений у прикладі тип невизначеності пов'язаний із *другою стандартною границею*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

де e – стала, значення якої є нескінченним неперіодичним десятковим дробом $e\approx 2{,}7183$. Таким чином, прийом, що застосовується при розкритті невизначеності, спрямований на виділення одиниці в дужках та використання теореми про границю степенево-показникової неперервної функції.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-2}{3x+4}-1\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-2-3x-4}{3x+4}\right)^{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-6}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-6}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{3x+4}\cdot(x-5)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x+30}{3x+4}}=e^{-2}.$$

Приклад 11 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{2-x}}\left|1^{\infty}\right|$.

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{2-x}}=\lim_{x\to 2}(1+2x-3-1)^{\frac{x}{2-x}}=\lim_{x\to 2}\left((1+(2x-4))^{\frac{1}{2x-4}}\right)^{\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)\frac{x}{2-x}}=.$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x(x-2)}{-(x-2)}}=e^{-4}.$$

Приклад 12 Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Знайти цю границю можна за допомогою другої стандартної границі або скориставшись наслідками з неї

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

і відповідною таблицею еквівалентних нескінченно малих функцій

$$ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x); \quad e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x); \quad a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a.$$

а) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+5x)=\lim_{x\to0}\ln(1+5x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to0}\left((1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^5=\ln e^5=5\ln e=5.$$

б) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot5=5;$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{x}=5.$$

5 Похідна функції та її застосування для дослідження функції

Похідна функції $y=f(x)$ є основним поняттям диференціального числення, яка вводиться як границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

(де $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ - приріст функції),

і має зміст *швидкості змінення функції*. Щоб освоїти техніку диференціювання і зрозуміти можливості використання похідної треба оволодіти такими теоретичними поняттями:

- означення похідної, її геометричне та механічне тлумачення;
- зв'язок між диференційованістю та неперервністю функції;
- правила диференціювання;
- диференціювання основних елементарних функцій;
- логарифмічне диференціювання, диференціювання неявних та

параметричних функцій;
- диференціал, його геометричне тлумачення;
- похідні вищих порядків;
- основні тереми математичного аналізу;
- правило Лопіталя;
- монотонність функції, екстремум функції, необхідна та достатні умови екстремуму;
- опуклість і угнутість функції, точки перегину;
- асимптоти функції;
- загальна схема дослідження функції;
- задачі на найбільше та найменше значення функції.

Техніка диференціювання базується на знанні та правильному використанні *правил диференціювання* і *таблиці похідних основних елементарних функцій.*

Правила диференціювання
диференційованих функцій

1) *Похідна сталої*	$C' = 0$
2) *Похідна суми*	$\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$
3) *Похідна добутку*	$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
3а) *Правило винесення сталої за знак похідної*	$\left(c\cdot u(x)\right)' = c\cdot u'(x)$
4) *Похідна частки* $\left(v(x)\neq 0\right)$	$\left(\dfrac{u(x)}{y(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$
4а) *Похідна частки сталої і функції* $\left(v(x)\neq 0\right)$	$\left(\dfrac{c}{v(x)}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'(x)}{v^2(x)}$
5) *Похідна складеної функції* $y(x) = f\left(\varphi(x)\right)$	$y'(x) = f'_\varphi\cdot\varphi'_x$

Похідні основних елементарних функцій теж зведемо в таблицю, розглядаючи відповідні функції також як складені.

Таблиця похідних

основних елементарних функцій

№ п/п	$y = f(u)$; $u = u(x)$	$u(x) = x$; $y' = f'(x)$	$y' = f'(u) \cdot u'_x$	Деякі окремі випадки
1.	$y = u^{\alpha}$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	$x' = 1$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2.	$y = a^u$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
3.	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4.	$y = \sin u$	$y' = \cos x$	$y' = \cos u \cdot u'$	
5.	$y = \cos u$	$y' = -\sin x$	$y' = -\sin u \cdot u'$	
6.	$y = tgu$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	
7.	$y = ctgu$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	
8.	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	
9.	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	
10.	$y = arctgu$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	
11.	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	

Розглянемо приклади знаходження похідних функцій, що складають *частину 1 завдання 5*.

Приклад 13 Знайти похідну функції $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right)$.

$$y' = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right)\right)' = 2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{7} - 5x\right)' =$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right) \cdot (-5) = 10\sin\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right).$$

Приклад 14 Знайти похідну функції $y = \ln\left(4x^3 + x^2 - 7x - 3\right)$.

$$y' = \frac{1}{4x^3 + x^2 - 7x - 3} \cdot \left(4x^3 + x^2 - 7x - 3\right)' = \frac{1}{4x^3 + x^2 - 7x - 3} \cdot \left(12x^2 + 2x - 7\right)$$

Приклад 15 Знайти похідну функції $y = e^{\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}}$.

$$y' = e^{\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}} \cdot \left(\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}\right)' = e^{\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}} \cdot \left(\arcsin x + \sqrt{4}\right)' =$$

$$= e^{\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x + \sqrt{4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

У прикладах 13 ÷ 15 застосовувалось правило диференціювання складеної функції.

Приклад 16 Знайти похідну функції $y = ctg\left(x^2\right) \cdot tg^2 x$

$$y' = \left(ctg\left(x^2\right)\right)' \cdot tg^2 x + ctg\left(x^2\right) \cdot \left(tg^2 x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(x^2\right)} \cdot 2x \cdot tg^2 x + ctg\left(x^2\right) \cdot 2tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Функція диференційована за правилом похідної добутку.

Приклад 17 Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt[3]{(\sin 3x)^5}}{2\sqrt{2}} + \frac{\log_2 x}{x + 1}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(\sin 3x)^5}\right)' + \frac{\left(\log_2 x\right)' \cdot (x + 1) - \log_2 x \cdot (x + 1)'}{(x + 1)^2} =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{3}(\sin 3x)^{\frac{2}{3}}\cdot 3+\frac{\frac{1}{x\cdot\ln 2}(x+1)-\log_2 x}{(x+1)^2}.$$

При диференціюванні першого доданку сталий множник виносимо за знак похідної, другий доданок диференціюємо як частку.

Приклад 18 Знайти похідну функції $y=x^{\frac{1}{x}}$.

Для диференціювання заданої степенево-показникової функції застосуємо прийом логарифмічного диференціювання. Тобто логарифмуємо обидві частки рівності

$$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}} \quad\Rightarrow\quad \ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln x;$$

Диференціюємо рівність, враховуючи, що ліва частина рівності є складеною функцією

$$(\ln y)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot(\ln x)+\frac{1}{x}\cdot(\ln x)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}(\ln x-1);$$

$$y'=-\frac{1}{x^2}(\ln x-1)\cdot y=-\frac{1}{x^2}(\ln x-1)\cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

Приклад 19 Знайти похідну функції y', що задана неявно

$$x^3y^2-x^2+3y=\cos(x+y).$$

Диференціюємо вираз, причому саму неявну функцію – як складену

$$3x^2\cdot y^2+x^3\cdot 2y\cdot y'-2x+3y'=-\sin(x+y)\cdot(1+y');$$

З отриманого рівняння виражаємо $y'=\varphi(x,y)$

$$\left(2x^3y+3+\sin(x+y)\right)y'=2x-3x^2y^2-\sin(x+y);$$

$$y'=\frac{2x-3x^2y^2-\sin(x+y)}{2x^3y+3+\sin(x+y)}.$$

Приклад 20 Знайти похідну параметрично заданої функції

$$\begin{cases} x=-1+2t-t^2 \\ y=2-3t+t^3 \end{cases};$$

За правилом диференціювання параметричних функцій

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

тоді

$$y'_x = \frac{-3+3t^2}{2-2t}.$$

Частина II завдання 5 присвячена дослідженню функції за допомогою диференціального числення та побудуванню її графіка.

Розглянемо відповідні приклади проведення повного дослідження за пропонованою схемою.

Приклад 21 Провести повне дослідження функції

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

і побудувати її графік

1) Знаходження *області визначення функції* $D(y)$ і *області значень функції* $E(y)$

$$D(y):\quad x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty);$$
$$E(y):\quad y \in (-\infty;+\infty).$$

2) Знаходження "нулів" функції (*точок перетину з осями координат*) та *інтервалів знакосталості*

Знайдемо координати точок перетину з осями координат.

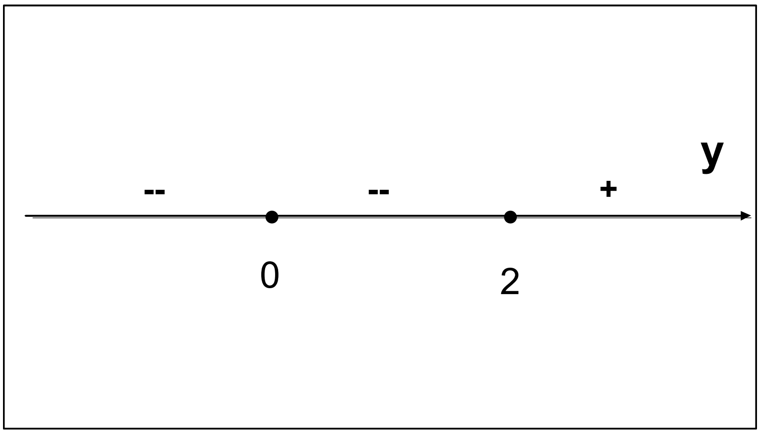
$$x = 0 \Rightarrow y(0) = 0,$$

тобто точка $(0{,}0)$ - єдина точка перетину графіка функції з осями координат.

Для визначення інтервалів знакосталості, тобто інтервалів розташування графіка функції над чи під віссю абсцис (віссю *Ox*) визначимо значення x, при якому дорівнює нулю знаменник, і включимо це значення для знаходження інтервалів знакосталості. Функція може мати три інтервали знакосталості:

$$-\infty < x < 0; \quad 0 < x < 2; \quad 2 < x < +\infty.$$

Підстановка довільних значень із цих інтервалів показує, що в першому та другому інтервалі функція від'ємна, а в третьому – додатна.



3) <u>Дослідження особливих властивостей функції (*парність, непарність, періодичність*)</u>

Перевіримо умови парності або непарності функції.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-2} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases},$$

тобто функція не є парною (не є симетричною відносно осі *Oy*) і непарною (не є симетричною відносно початку координат), а належить до функцій загального вигляду.

Задана функція також не відноситься до періодичних.

4) <u>Знаходження *асимптот* функції</u> – прямих, до яких необмежено наближується графік функції при віддаленні його від початку координат

Розрізняють два типи асимптот.

а) <u>*Вертикальні асимптоти*</u>, рівняння яких $x = a$, якщо $y \to \pm\infty$, коли $x \to a$ (точка $x = a$ - точка нескінченного розриву функції).

Для заданої функції $x = 2$ - точка розриву функції. Розглянемо поведінку функції в *околі* точки розриву, для чого знайдемо *однобічні границі функції* (коли x прямує до точки 2 *зліва* - "$x \to 2-0$" та *справа* - "$x \to 2+0$")

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{-0} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

(символи "-0" і "$+0$" означають відповідно від'ємну та додатну нескінченно малі). Тобто доведено, що точка $x = 2$ - точка нескінченого розриву функції, а відповідна пряма є вертикальною асимптотою кривої графіка функції.

б) <u>*Похилі асимптоти*</u>, рівняння яких знаходиться у вигляді $y = kx + b$, причому коефіцієнти k і b знаходяться за відповідними формулами

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right),$$

де $y = f(x)$ - задана функція.

Тобто

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2.$$

Таким чином, рівняння похилої асимптоти кривої заданої функції

$$y = x + 2.$$

Зауваження 1. Якщо $k = 0$, то отримаємо рівняння $y = b$ *горизонтальної асимптоти* як окремого випадку похилої.

Зауваження 2. Якщо хоча б один із параметрів прямої k чи b дорівнює ∞, або границя для їх находження не існує, то графік заданої функції не має похилої асимптоти.

5) <u>Дослідження функції на екстремум, знаходження інтервалів монотонного зростання та спадання функції</u>

Використаємо *необхідні умови* існування *екстремуму* функції: якщо диференційована функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то $f'(x) = 0$.

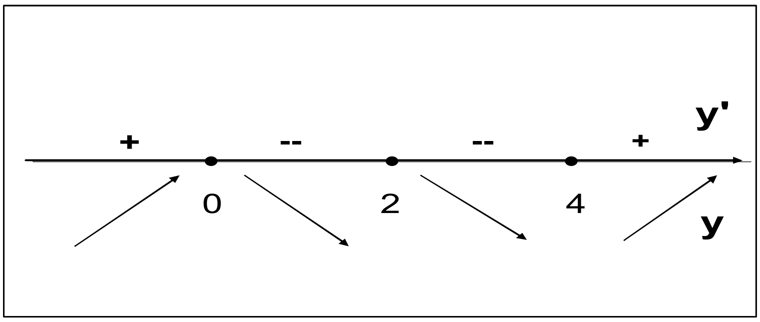
$$y' = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0.$$

Остаточно отримаємо рівняння відносно *критичних точок*, тобто таких, які можуть бути точками екстремуму

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

Додамо до цих точок значення змінної $x_3 = 2$ таке, що $y'(2) = \infty$, та перевіримо *достатні умови* існування *екстремуму*, а саме, чи змінює знак похідна (відповідно, чи змінює характер монотонності функція) при переході через критичні точки. Покажемо результати цього дослідження на числовій осі.



За результатами дослідження робимо висновки:
функція монотонно *зростає* на інтервалах $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$;
функція монотонно *спадає* на інтервалі $(0;4)$;
точка $x=0$ є *точкою максимуму* функції, $y_{\max}(0)=0$;
точка $x=4$ є *точкою мінімуму* функції, $y_{\min}(4)=8$.

6) <u>Знаходження точок перегину функції, інтервалів опуклості та угнутості</u>

Використаємо *необхідні умови* існування *точки перегину* функції $y=f(x)$: якщо функція двічі диференційована на деякому інтервалі, то в точках перегину на цьому інтервалі друга похідна функції дорівнює нулю. Із цих умов знайдемо точки, у яких можуть бути точки перегину.

$$y''=0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)'=0 \;\Rightarrow\; \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{(x-2)^4}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{2(x-2)(x^2-4x+4-x^2+4x)}{(x-2)^4}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{(x-2)^3}=0.$$

З отриманої умови для знаходження точки перегину бачимо, що ні при яких значеннях x друга похідна не дорівнює нулю, тобто графік заданої функції не має точок перегину.

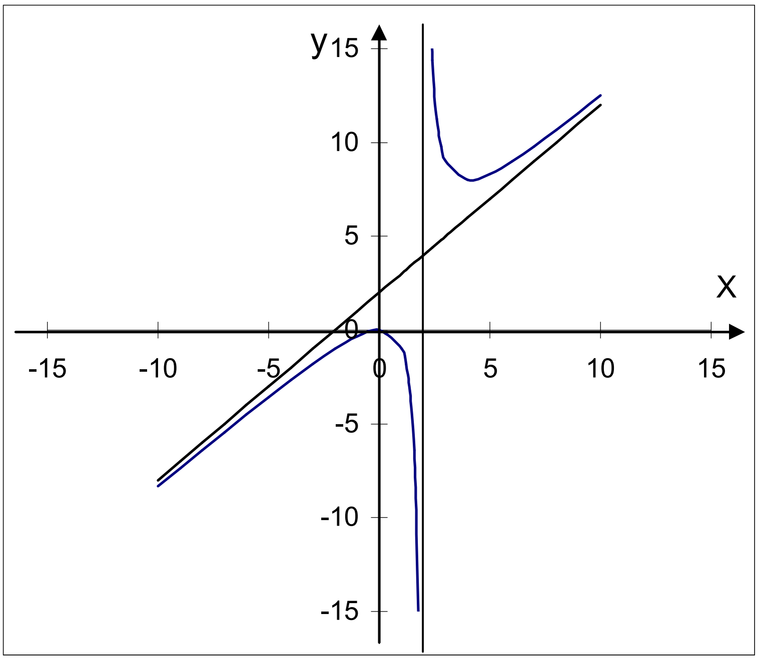
Якщо таке значення змінної існувало, то треба було його перевірити за *допомогою достатніх умов точок перегину*, які потребують дослідити зміну знаку другої похідної при переході через точку, в якій друга похідна дорівнює нулю.

В даному випадку слід відзначити, що

$y''(x)<0$ коли $x\in(-\infty;2)$ - інтервал опуклості функції;

$y''(x)>0$ коли $x\in(2;+\infty)$ - інтервал угнутості функції.

7) Поєднуючи результати дослідження функції в кожному пункті, побудуємо її графік.



Зауваження. Для уникнення помилок при побудуванні графіка функції радимо результати дослідження функції в кожному пункті поступово наносити на графік, перевіряючи узгодженість результатів і прогнозуючи результати наступного пункту.

Приклад 22 Провести повне дослідження функції

$$y = (x-1)e^{-x}$$

і побудувати її графік

1) Область визначення , область значень

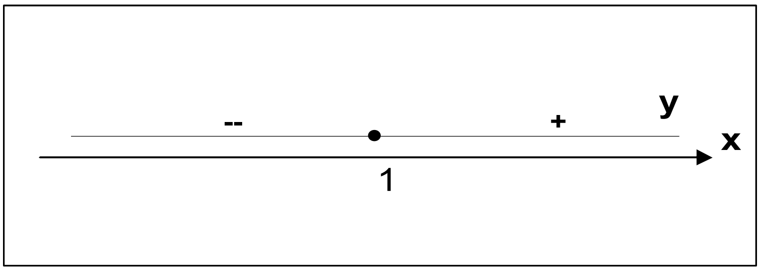
$$D(y): \quad x \in (-\infty;+\infty);$$

$$E(y): \quad y \in (-\infty;+\infty).$$

2) Нулі функції. Інтервали знакосталості

Коли $x=0$ $y=-1$; коли $y=0$ $x=1$, тобто точки $(0;-1)$, $(1;0)$ - точки перетину з осями координат.

Знаходимо інтервали знакосталості



Таким чином, на інтервалі $x \in (-\infty;1)$ функція від'ємна; на інтервалі $x \in (1;+\infty)$ функція додатна.

3) <u>Особливі властивості</u>

Функція не є парною, непарною, періодичною.

4) <u>Асимптоти функції</u>

а) <u>вертикальних асимптот</u> немає, тому що немає точок розриву функції;

б) <u>похила асимптота</u> $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 1\cdot\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = \infty\end{cases},$$

тобто похила асимптота може існувати тільки тоді, коли $x \to +\infty$ (у правій півплощині).

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{-x} - 0\right)\left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{x}}\left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

(за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|,\left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$)

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отримали випадок, коли похила асимптота перетворилась на свій окремий випадок – *горизонтальну асимптоту*

$y = 0$, причому тільки коли $x \to +\infty$.

5) <u>Екстремуми функції. Інтервали монотонності</u>

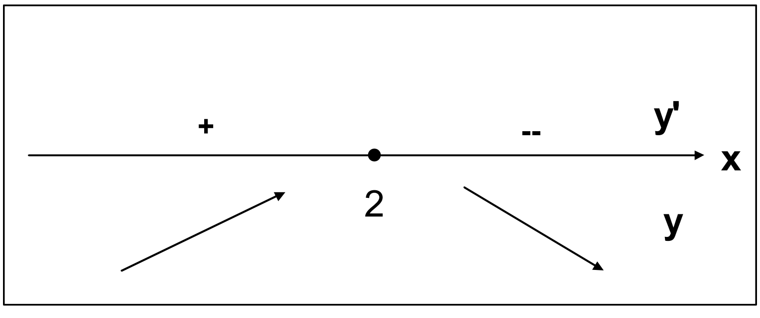
а) Необхідні умови екстремуму

$$y' = 0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)'\cdot e^{-x} + (x-1)\cdot\left(e^{-x}\right)' = 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-x} - (x-1)e^{-x} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$e^{-x}(2-x) = 0 \quad\Rightarrow$$

$x = 2$ - критична точка;

б) Достатні умови екстремуму



тобто

точка $x = 2$ є точкою максимуму функції, $y_{\max}(2) = e^{-2} \approx 0{,}14$;

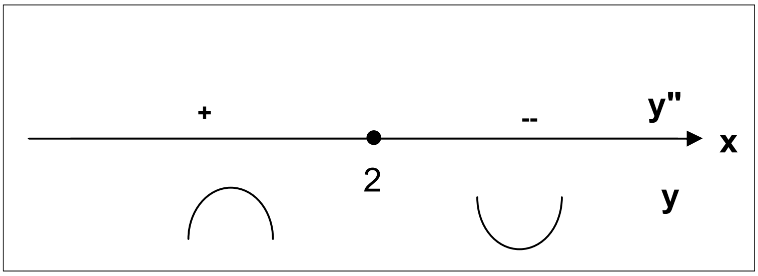
на інтервалі $x \in (-\infty;2)$ функція монотонно зростає;
на інтервалі $x \in (2;+\infty)$ функція монотонно спадає.

6) <u>Точки перегину функції. Інтервали опуклості та угнутості</u>

а) Необхідні умови точки перегину

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \left(e^{-x}\right)' \cdot (2-x) + e^{-x}(2-x)' = 0 \;\Rightarrow\; -e^{-x}(2-x) - e^{-x} = 0 \;\Rightarrow$$
$$-e^{-x}(3-x) = 0 \;\Rightarrow$$
$$x = 3 \text{ - очікувана точка перегину;}$$

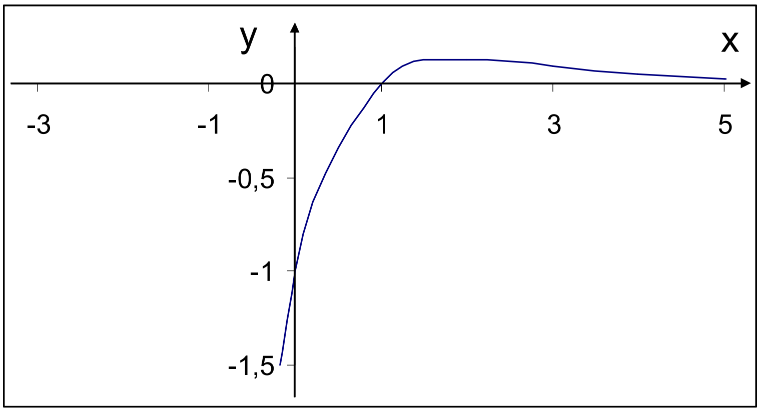
б) Достатні умови точки перегину



тобто

$x = 3$ - точка перегину функції, $y_{пер} \approx 0{,}1$;
на інтервалі $x \in (-\infty;3)$ функція опукла;
на інтервалі $x \in (3;+\infty)$ функція угнута.

7) <u>Побудування графіка функції</u>



Приклад 23 Провести повне дослідження функції

$$y = 2^{\frac{1}{x-3}}$$

1) <u>Область визначення , область значень</u>

$$D(y):\quad x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty),$$
$$E(y):\quad y \in (0;+\infty).$$

2) Нулі функції. Інтервали знакосталості

Згідно зі властивостями показникової функції задана функція додатна на всій області визначення, тобто точок перетину з віссю OX немає.

Точка перетину з віссю OY - $(0;0{,}79)$.

3) Особливі властивості

Функція не є парною, непарною, періодичною.

4) Асимптоти функції

а) Вертикальні асимптоти

Точка $x=3$ є точкою розриву функції, знайдемо однобічні границі

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0; \qquad \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = \infty,$$

тобто точка $x=3$ є точкою нескінченного розриву, а пряма $x=3$ - вертикальною асимптотою функції.

б) Похилі асимптоти

Знайдемо параметри рівняння похилої асимптоти

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x-3}}}{x} = \frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \frac{2^0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0; \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{x-3}} - 0\cdot x\right) = 2^{\frac{1}{\infty}} = 2^0 = 1.$$

Таким чином, отримали рівняння $y=1$ - горизонтальної асимптоти.

5) Екстремуми функції. Інтервали монотонності

а) Необхідні умови екстремуму

$y'=0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-3}}\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right)=0 \Rightarrow y'\neq 0$ ні при якому значенні x,

тобто функція не має точок екстремуму.

$y' = -\ln 2\dfrac{2^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} < 0$, тобто функція монотонно спадає при всіх значеннях x, що належать області визначеності.

6) Точки перегину функції. Інтервали опуклості та угнутості

а) Необхідні умови точки перегину

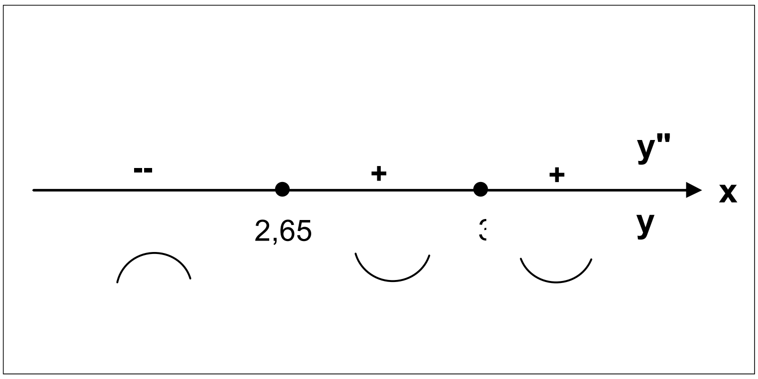
$$y''=0 \quad\Rightarrow\quad -\ln 2\cdot\frac{2^{\frac{1}{x-3}}\ln 2\dfrac{-1}{(x-3)^2}(x-3)^2 - 2^{\frac{1}{x-3}}\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$-\ln 2 \cdot 2^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-2x - \ln 2 + 6}{(x-3)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 \cdot 2^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{2x - (6 - \ln 2)}{(x-3)^4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$x = \dfrac{6 - \ln 2}{2} \approx 2{,}65$ - критична точка.

б) Достатні умови точки перегину

Для дослідження на інтервали опуклості включаємо точку $x = 3$

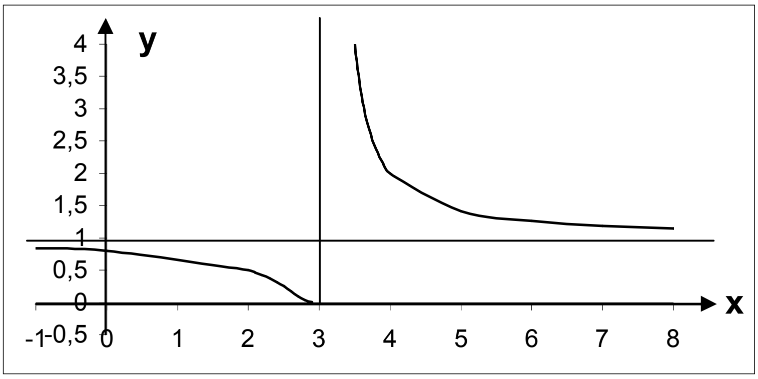


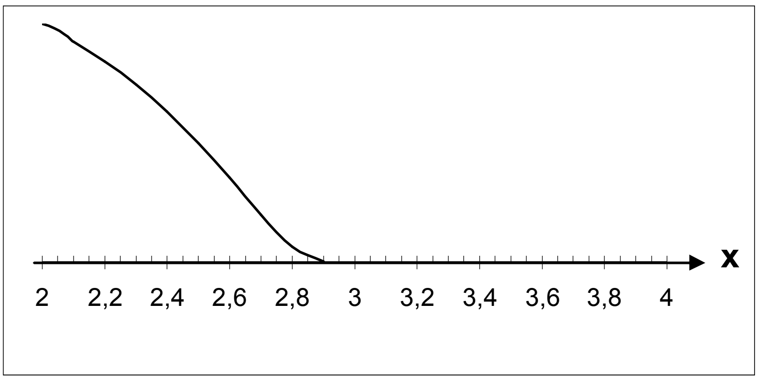
Отже $x \approx 2{,}65$ - точка перегину функції, $y_{пер} \approx 0{,}14$;

на інтервалі $x \in (-\infty; 2{,}65)$ функція опукла;

на інтервалі $x \in (2{,}65; 3) \cup (3; +\infty)$ функція угнута.

7) Побудування графіка функції





6 Інтегральне числення функції однієї змінної

Задачею інтегрального числення є знаходження функції за відомим значенням її похідної, тобто здійснення операції оберненої до диференціювання.

Основні теоретичні питання цього розділу:

- первісна функція та невизначений інтеграл, основні властивості;
- метод заміни змінної інтегрування;
- метод інтегрування частинами;
- поняття визначеного інтеграла, формула Ньютона – Лейбница.
- заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Невизначеним інтегралом від деякої функції називається множина всіх первісних функцій, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad .$$

Функція $F(x)$ є *первісною* до функції $f(x)$, тобто такою, що

$$F'(x) = f(x),$$

причому весь клас первісних обмежується функціями $F(x)+C$, де C - стала величина.

Основні інтеграли утворюють *таблицю інтегралів.*

Таблиця інтегралів

№ п/п	Основні інтеграли	Деякі окремі випадки
1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int dx = x + C$ $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	

3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
5.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	
6.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	
7.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	
8.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$
9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
10.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x+a}{x-a} \right\| + C$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\| + C$	

Відзначимо, що невизначеному інтегралу притаманна властивість лінійності

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx .$$

Техніка інтегрування базується на знанні таблиці інтегралів та двох методів інтегрування.

Метод заміни змінної інтегрування виражається формулою

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(t) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt ,$$

тобто ознакою застосування цього методу є наявність у підінтегральному виразі в якості множника (з точністю до сталої) похідної від функції (аргументу складеної функції), яку можна обирати новою змінною інтегрування.

Формула *методу інтегрування частинами* є такою

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ - диференційовані функції. Інтеграл в лівій частині рівності штучно структурується "частинами" як добуток однієї функції та диференціалу другої функції, що дає можливість інтеграл $\int udv$ виразити через інтеграл $\int vdu$, який повинен бути не складнішим від першого.

На базі зазначених методів розроблені *прийоми інтегрування* для конкретних типів функцій – *тригонометричних, раціональних, ірраціональних*.

Визначений інтеграл вводиться як *границя інтегральних сум*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

за умовою довільного розбиття інтервалу (a,b) на n частин (Δx_i - довжина i-того інтервалу) та вибору точок ξ_i всередині цих інтервалів.

Хоча невизначений і визначений інтеграли - це різні поняття за суттю (невизначених інтеграл – це множина інтегральних кривих, а визначений – це число), методи обчислення визначеного інтеграла збігаються з методами знаходження невизначеного інтеграла, оскільки для знаходження визначеного інтеграла треба спочатку знайти невизначений (первісну), а потім скористатися *формулою Ньютона-Лейбниця*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ є первісною для неперервної функції $f(x)$.

Опис основних методів та прийомів інтегрування наведені в методичних вказівках [11]. Варіанти *завдання 6* теж базуються на завданнях, що пропонуються в [11], але в більш спрощеному вигляді. В зв'язку з чим розглянемо деякі приклади, що є окремими випадками інтегрування раціональних функцій.

Приклад 24 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 5x - 8}$

Цей інтеграл відноситься до типу інтегралів з квадратним тричленом у знаменнику, і пов'язаний з цим прийом інтегрування базується на виділенні у знаменнику повного квадрату. Отже

$$\int \frac{dx}{x^2+5x-8} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x-8} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}-8} =$$

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{57}{4}} = \left|\begin{matrix} t = x+\frac{5}{2} \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2-\frac{57}{4}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{57}{4}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{57}{4}}}{t+\sqrt{\frac{57}{4}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{57}}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{57}}{2t+\sqrt{57}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{57}}\ln\left|\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)-\sqrt{57}}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{57}}\right| = \frac{1}{\sqrt{57}}\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{57}}{2x+5+\sqrt{57}}\right| + C .$$

Приклад 25 Знайти інтеграл $\int \frac{3x-1}{x+4}dx$

Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, з якого можна виділити цілу частину за допомогою ділення чисельника на знаменник, щоб інтегрувати правильний дріб. Але в даному випадку, коли чисельник і знаменник відрізняються тільки сталими, зробимо виділення цілої частини таким чином

$$\int \frac{3x-1}{x+4}dx = 3\int \frac{x-\frac{1}{3}}{x+4}dx = 3\int \frac{(x+4)-4-\frac{1}{3}}{x+4}dx = 3\int \frac{(x+4)-\frac{13}{3}}{x+4}dx =$$

$$= 3\int \left(\frac{x+4}{x+4} - \frac{\frac{13}{3}}{x+4}\right)dx = 3\left(\int dx - \frac{13}{3}\int \frac{dx}{x+4}\right) = 3x - \frac{13}{3}\ln|x+4| + C .$$

7 Диференціальне числення функції багатьох змінних

Основними поняттями, які треба засвоїти при вивченні цього розділу, є *частинні похідні*, які визначаються за допомогою понять частинних приростів функції. Наприклад, для функції двох змінних $z = f(x, y)$ *повний і частинні прирости* у відповідних точках визначаються як

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x),$$
$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x).$$

Частинні похідні для функції двох змінних визначаються через відповідні частинні прирости як і для функції однієї змінної

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Отже теоретичні питання, які створюють основу знання цього розділу такі

- функція двох змінних, область визначення;
- частинні похідні;
- похідні складеної і неявної функції;
- частинні похідні вищих порядків: *однойменні і мішані;*
- *похідна за напрямом, градієнт;*
- диференційованість функції двох змінних, повний диференціал;
- екстремум функції двох змінних: необхідні й достатні умови;
- умовний екстремум, глобальний екстремум;
- метод найменших квадратів.

Завдання 7 потребує освоєння техніки знаходження частинних похідних. На базі знання таблиці та правил диференціювання функції однієї змінної необхідно використовувати правило, що витікає з визначення частинних похідних: при диференціюванні за однією змінною всі інші сприймаються як сталі.

Приклад 26 Знайти частинні похідні z'_x, z'_y для функції

$$z = x^2 y^3 + 2xy^2 - 3x + y - 7$$

$$z'_x = |y - const| = y^3 \left(x^2\right)'_x + 2y^2 (x)'_x - 3(x)'_x + (y-7)'_x = 2xy^3 + 2y^2 - 3,$$
$$z'_y = |x - const| = x^2 \left(y^3\right)'_y + 2x\left(y^2\right)'_y + (y)'_y - (3x+7)'_y = 3x^2 y^2 + 4xy + 1.$$

Приклад 27 Знайти частинні похідні z'_x, z'_y для функції

$$z = \sqrt[3]{y} \sin(3x + 5y)$$

$$z'_x = |y - const| = \sqrt[3]{y}\left(\sin(3x+5y)\right)'_x = 3\cdot\sqrt[3]{y}\cos(3x+5y);$$

$$z'_y = |x - const| = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)'_y \sin(3x+5y) + \sqrt[3]{y}\left(\sin(3x+5y)\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\sin(3x+5y) + 5\cdot\sqrt[3]{y}\cos(3x+5y).$$

Приклад 28 Знайти частинні похідні z'_x, z'_y для функції

$$z = arctg\,\frac{x+y}{1-xy} + \frac{\cos x^2}{y}$$

$$z'_x = \frac{1}{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2 + 1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x + \frac{1}{y}\left(\cos x^2\right)'_x =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2}\,\frac{(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} + \frac{1}{y}\left(-\sin x^2\right)2x =$$

$$= \frac{1+y^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2} - \frac{2x\sin x^2}{y},$$

$$z'_y = \frac{1}{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2 + 1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y + \cos x^2\left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2}\,\frac{(1-xy) - (x+y)(-x)}{(1-xy)^2} + \cos x^2\left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{1+x^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2} - \frac{\cos x^2}{y^2}.$$

ЗАВДАННЯ

***Завдання 1,** частина I*

Дано матриці A и B. Потрібно:

1) обчислити матриці $C = B^T \cdot B$, $D = B \cdot B^T$, $G = A \cdot D$;

2) знайти матрицю A^{-1}. Зробити перевірку;

3) записати матричне рівняння $A \cdot X = B$, де $X = (x_1; x_2; x_3)^T$, у вигляді системи лінійних рівнянь;

4) розв’язати систему матричним методом;

5) розв’язати систему методом Крамера;

6) розв’язати систему методом Гаусса.

№	A	*B*	№	A	*B*	№	A	*B*	№	A	*B*
1	1 -2 3 2 3 -4 3 -2 5	6 18 6	**9**	2 0 -8 -1 5 1 2 3 -45	0 14 20	**17**	-3 0 2 4 1 -3 4 2 -3	-2 3 -1	**25**	2 1 3 1 1 -2 3 4 -1	1 -3 -4
2	3 2 1 2 3 3 2 1 3	5 1 11	**10**	3 0 2 2 2 2 2 -1 2	-1 2 -4	**18**	-2 1 4 0 6 7 3 1 1	-4 -12 1	**26**	2 2 1 1 2 4 3 -1 1	4 9 5
3	4 -3 2 2 5 -3 5 6 -2	0 8 9	**11**	1 -1 5 0 6 -6 3 1 1	7 0 11	**19**	9 -2 4 2 3 7 11 -5 11	11 -1 16	**27**	1 -1 0 2 1 3 0 -2 2	2 -1 -2
4	1 1 2 2 -1 2 4 1 4	-1 -4 -2	**12**	2 -1 1 1 -6 -4 2 -1 -3	-3 9 11	**20**	6 1 5 8 0 3 -4 1 2	41 39 2	**28**	-2 1 2 -4 1 2 12 -1 1	2 2 37
5	2 -1 1 3 4 -2 3 -2 4	4 11 11	**13**	1 1 -1 8 3 -6 -4 -1 3	1 2 -3	**21**	3 2 1 2 3 1 2 1 3	5 3 1	**29**	2 -1 -5 7 1 4 6 4 -7	4 -3 11
6	3 4 2 2 -1 -3 1 5 1	8 1 3	**14**	1 -4 -2 3 1 1 -3 5 6	4 6 -5	**22**	4 -3 2 2 5 -3 5 6 -2	1 7 11	**30**	4 5 -3 1 -1 1 7 0 4	7 -2 -3
7	1 1 -2 2 1 3 0 2 -2	0 6 0	**15**	7 -5 0 4 0 11 2 3 4	31 -43 -20	**23**	2 -1 1 5 3 -3 3 -2 4	5 7 10	**31**	2 -8 1 2 5 -3 3 1 1	0 5 12
8	-1 -9 4 3 1 1 2 5 -3	-9 14 4	**16**	1 2 4 5 1 2 3 -1 1	31 29 10	**24**	1 1 2 3 0 4 2 -1 -2	9 15 2	**32**	2 -1 1 3 4 -4 1 -1 3	-7 -5 -2

Завдання 1, *частина II*

Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 11x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + +2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 10x_1 - 17x_2 + 20x_3 = 0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 10x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 29) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 30) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Завдання 2.

Задано координати вершин піраміди A, B, C, D. Використовуючи методи векторної алгебри, знайти:

1) скалярний добуток $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ і кут між ребрами AB і AC;
2) проекцію вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$;
3) площу грані ABC;
4) напрямні косинуси вектора $\vec{AB}$;
5) розкладання вектора $\vec{BC}$ за базисом $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

№	*A*	*B*	*C*	*D*
1.	(4;0;0)	(-2;1;2)	(-5;-3;2)	(3;2;-7)
2.	(2;1;2)	(-3;2;7)	(-4;0;0)	(1;3;-2)
3.	(1;3;2)	(-4;0;0)	(-3;-2;7)	(2;1;-2)
4.	(3;2;7)	(-1;3;2)	(-2;-1;2)	(4;0;0)
5.	(3;1;2)	(-1;2;1)	(-2;-1;0)	(6;2;-2)
6.	(1;2;1)	(-2;1;0)	(-6;-2;2)	(3;1;-2)
7.	(2;1;0)	(-6;2;2)	(-3;-1;2)	(1;2;-1)
8.	(6;2;2)	(-3;1;2)	(-1;-2;1)	(2;1;0)
9.	(2;3;5)	(-1;4;1)	(-3;-2;1)	(3;4;-1)
10.	(1;4;1)	(-3;2;1)	(-3;-4;1)	(2;3;-5)
11.	(3;2;1)	(-3;4;1)	(-2;-3;5)	(1;4;-1)
12.	(3;4;1)	(-2;3;5)	(-1;2;-1)	(3;2;-1)
13.	(1;1;6)	(-1;5;2)	(-3;0;-1)	(6;1;-5)
14.	(1;5;2)	(-3;0;1)	(-6;1;-5)	(1;1;-6)
15.	(3;0;1)	(-6;1;5)	(-1;1;-6)	(1;5;-2)

№	*A*	*B*	*C*	*D*
16.	(6;1;5)	(-1;1;6)	(-1;5;-2)	(3;0;-1)
17.	(2;5;4)	(-3;2;2)	(-4;5;-3)	(2;1;-3)
18.	(3;2;2)	(-4;5;3)	(-2;1;-3)	(2;5;-4)
19.	(4;5;3)	(-2;1;3)	(-2;5;-4)	(3;2;-2)
20.	(2;1;3)	(-2;5;4)	(-3;2;-2)	(4;5;-3)
21.	(2;4;1)	(-3;4;2)	(-6;3;-1)	(6;2;-5)
22.	(3;4;2)	(-6;3;1)	(-6;2;-5)	(2;4;-1)
23.	(6;3;1)	(-6;2;5)	(-2;4;-1)	(3;4;-2)
24.	(6;2;5)	(-2;4;1)	(-3;4;-2)	(6;3;-1)
25.	(2;5;3)	(-2;3;3)	(-1;4;-3)	(2;4;-6)
26.	(2;3;3)	(-1;4;3)	(-2;4;-6)	(2;5;-3)
27.	(1;4;3)	(-2;4;6)	(-2;5;-3)	(2;3;-3)
28.	(2;4;6)	(-2;5;3)	(-2;3;3)	(1;4;-3)
29.	(6;3;3)	(-4;5;1)	(-2;1;-2)	(2;3;-4)
30.	(2;1;2)	(-2;3;4)	(-6;-3;3)	(4;5;-1)

Завдання 3, *частина I*

Задано координати вершин трикутника ABC. Знайти:

1) довжину сторони BC;
2) рівняння прямої BC;
3) рівняння висоти AD на сторону BC;
4) довжину висоти AD;
5) рівняння медіани BE;
6) точку перетину M висоти AD і медіани BE;
7) кут між прямими AD і BE;
8) навести креслення.

№	A	B	C
1.	(0,1)	(3,-5)	(-2,-3)
2.	(0,2)	(-12,-9)	(-5,15)
3.	(0,3)	(-2,1)	(-7,-1)
4.	(0,4)	(-15,11)	(8,-13)
5.	(0,5)	(-10,3)	(8,-7)
6.	(0,6)	(-5,4)	(9,-1)
7.	(0,7)	(-18,11)	(11,-3)
8.	(0,8)	(-2,6)	(6,-3)
9.	(0,9)	(-12,11)	(6,-3)
10.	(1,0)	(-4,5)	(8,-2)
11.	(1,1)	(-2,7)	(-10,-9)
12.	(1,2)	(-2,9)	(-6,-2)
13.	(1,3)	(-6,2)	(10,-5)
14.	(1,4)	(-5,5)	(4,-3)
15.	(1,5)	(-8,2)	(4,-10)

№	A	B	C
16.	(1,6)	(-9,1)	(7,-1)
17.	(1,7)	(-11,3)	(2,-1)
18.	(1,8)	(-6,3)	(10,-1)
19.	(1,9)	(-6,2)	(2,-6)
20.	(2,0)	(-8,2)	(1,-8)
21.	(2,1)	(-6,2)	(3,-5)
22.	(2,2)	(-4,3)	(2,-9)
23.	(2,3)	(-1,7)	(11,-2)
24.	(2,4)	(-1,1)	(5,-1)
25.	(2,5)	(-4,-10)	(10,-3)
26.	(2,6)	(-7,1)	(5,-4)
27.	(2,7)	(-1,2)	(7,-10)
28.	(2,8)	(-10,1)	(2,-5)
29.	(2,9)	(-2,6)	(-2,-5)
30.	(3,0)	(-8,4)	(4,-5)

Завдання 3, *частина II*

Побудувати на площині область розв’язків системи лінійних нерівностей

1) $\begin{cases} -x+y\le 3 \\ 5x+3y\le 27 \\ 3x+2y\ge -6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y\ge 9 \\ 2x+3y\le 6 \\ -x+4y\ge 8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+4y\le 12 \\ x-y\le 3 \\ -7x+3y\ge 21 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-5y\ge 18 \\ x+2y\le 24 \\ -4x+10y\ge 17 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -3x+14y\le 78 \\ 5x-6y\le 26 \\ x+4y\ge 26 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 11x-3y\ge 24 \\ 9x+4y\le 108 \\ -2x+7y\ge 14 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -4x+5y\le 30 \\ 3x-y\le 12 \\ 5x+2y\ge 38 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x-y\ge 6 \\ 9x+8y\le 144 \\ 3x+11y\ge 16 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 10x-y\ge 50 \\ 2x+3y\le 54 \\ 6x-7y\le 15 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x-y\ge 4 \\ x+3y\le 36 \\ -4x+9y\ge 20 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3x+4y\ge 5 \\ x+3y\le 5 \\ 2x+y\le 5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -2x+y\ge -1 \\ 3x+4y\ge 7 \\ x+5y\le 17 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y\ge -4 \\ x+6y\ge -4 \\ 2x+7y\le -3 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} -x+y\le 2 \\ -x+4y\ge -7 \\ -x+7y\le -10 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} -2x+y\ge -1 \\ x+4y\ge 5 \\ -x+5y\le 13 \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x+2y\ge -1 \\ 3x+2y\ge -5 \\ x+6y\le 9 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} -x+y\le -1 \\ x+2y\ge -8 \\ 5x+y\le 5 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 2x+y\ge -5 \\ -xx+3y\le 13 \\ -4x+5y\ge 17 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x+3y\ge -5 \\ -2x+y\ge -7 \\ y\le -1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x+7y\le 11 \\ 5x+y\ge -13 \\ -2x+3y\ge -5 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} -x+y\le 3 \\ 5x+3y\le 97 \\ x+7y\ge 77 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3x-y\ge 9 \\ 2x+3y\le 50 \\ -x+4y\ge 19 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x+3y\le 53 \\ x-y\le 3 \\ 7x+3y\ge 71 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} 6x-5y\ge 17 \\ x+2y\le 34 \\ -4x+9y\ge 17 \end{cases}$

25) $\begin{cases} -3x+14y\le 78 \\ 5x-6y\le 26 \\ x+4y\ge 26 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} 11x-3y\ge 24 \\ 9x+4y\le 110 \\ -2x+7y\ge 15 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} -4x+5y\le 29 \\ 3x-y\le 14 \\ 5x+2y\ge 38 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x-y\ge 4 \\ x+3y\le 37 \\ -4x+9y\ge 20 \end{cases}$ 29) $\begin{cases} 10x-y\ge 57 \\ 2x+3y\le 53 \\ 6x-7y\le 15 \end{cases}$ 30) $\begin{cases} 4x-y\ge 6 \\ 9x+8y\le 157 \\ -3x+11y\ge 16 \end{cases}$

Завдання 3, *частина III*

Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку та побудувати криву:

1) $x^2+4y^2-6x+8y+9=0$ 16) $3x^2+6y^2+8x+7y-8=0$

2) $y^2-4x+4y+16=0$ 17) $4x^2+7x+5y-10=0$

3) $x^2+2y+4x+4=0$ 18) $x^2+y^2-10x+9y-11=0$

4) $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$ 19) $2x^2-2y^2-3x-5y-12=0$

5) $x^2+9y^2-4x+18y+4=0$ 20) $2x^2+3y^2+4x-5y-10=0$

6) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 21) $x^2+y^2+10x-6y+25=0$

7) $4x^2-9y^2+24x+18y-9=0$ 22) $y^2+4y-8x+12=0$

8) $x^2+6x-2y+5=0$ 23) $9x^2-16y^2-18x+32y-151=0$

9) $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$ 24) $8x^2+24x+12y+11=0$

10) $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 25) $4x^2+y^2+2x-14y+14=0$

11) $2x^2+7y^2-4x+2y-10=0$ 26) $y^2-10y+2x+31=0$

12) $x^2+5y^2-10x-3y-12=0$

13) $x^2-4y^2+8x-12y+5=0$

14) $3x^2-y^2+7x-5y-11=0$

15) $4x^2-2y^2+7x-4y-10=0$

27) $16x^2+4y^2+64x+8y+4=0$

28) $25x^2+4y^2-50x+24y+11=0$

29) $y^2+4y-8x+12=0$

30) $25y^2-16x^2+50y+128x-631=0$

Завдання 4

Знайти границі функцій

Варіант 1	Варіант 2
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-7}{5x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+10x+7}{x^4-3x+1}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+8}{x^2-5x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x^2+6x-1}{6x^3+x-1}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+10x+x}{x^2+2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+8}{3x^3-x^2+x}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+14}{2x^2+7x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2x^2+3x+1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$	**6.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{1-\sqrt{5-x}}$	**7.** $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x-3}-2}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{arctg\,3x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{4/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to0}(1-6x)^{1/7x}$
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot tg\,3x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{arctg\,10x}$

Варіант 3	Варіант 4
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+5}{3x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+10}{4x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x+16}{24x^2+3x+17}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^2+8x-5}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+9}{3x^4+11x+4}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2+1}{3x^6+4x^5-7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+12}{7x^4+12x+5}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+2}{x^4+2x+5}$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-x}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg\,4x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,10x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+4}\right)^{x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{5/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{5}\right)^{3/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{5x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{7x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\sin 2x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 3x}{1-\cos 4x}$

Варіант 5	Варіант 6
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+15}{3x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x+18}{6x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x-3}{8x^2+4}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{x^3-2x+8}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+3x-2}{5x^2+2x+4}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x}{5x^6+7x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x+1}{6x^5+4x^3-2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+4x+8}{x^3+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$
7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\arcsin 4x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{10x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+1}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{5/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{1/2x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{4x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{3x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tgx}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{arctg\,4x}$

Варіант 7	Варіант 8
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-5}{6x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+3}{4x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-8x^2+1}{2-x^3}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+16x+19}{4x^3+18x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x+2}{2x^7+3x^2+x}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+8x+1}{3x^4+12x^2+7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^7-2x+5}{2x+1}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+12}{x^2+16x+8}$
5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$	**5.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$	**6.** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}$
7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{4x-x^2}$	**7.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,5x}{2x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{x+1}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x-3}\right)^{x}$
10. $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{1/3x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{3/x}$
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+7x)}{5x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-8x)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2tg\,3x}{\arcsin 12x}$

Варіант 9	Варіант 10
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+7}{3x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x+5}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4x^2-5x^5}{8-6x-x^5}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+5}{2x^2+3x+8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-2x^3+1}{2x^6+x+3}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{3x^3+2x^2+4}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+8}{4-x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2-3x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$	**6.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+10x+8}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3+3x^2}$	**7.** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+17x+8}{\sqrt{1-x}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tg^2 3x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-7}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x}\right)^{3x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{1/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{5/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-9x)}{2x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-10x)}{5x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg 2x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin 4x}{1-\cos 8x}$

Варіант 11	Варіант 12
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+7}{4x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x+9}{6x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^2+8x+1}{5x^2+11x+7}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5+x-10}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+17}{13x^2+9}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+11}{3x^2+2x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+12}{8x^2+2x+4}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7}{8x^4+x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-49}$
7. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{25\left(\sqrt{x+1}-3\right)}{3x^2-23x-8}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot arctg 3x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{5x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+2}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{2/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/4x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+15x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+12x)}{-4x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x\cdot \arcsin x}{1-\cos 4x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 2x}$

Варіант 13	Варіант 14
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x-17}{7x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-14x}{7x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+5}{6x^2-3x-1}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+11x^2+4x+3}{x^3+7x^2+9}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x^2+3x+1}{4x^5+2x+7}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+16x+25}{x^3+4x+7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+1}{3x^2+2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+8x+9}{3x+6}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$	**6.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-8x-9}{\sqrt{x}-3}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,3x}{\sin 7x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot \arcsin 6x}{1-\cos x}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{5/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{5/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+13x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-14x)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot tg\,3x}{\cos x-1}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{arctg\,7x}$

Варіант 15	Варіант 16
1. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{15x+20}{5x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{16x+9}{8x}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^2+3x+8}{10x^2+11x+2}$	**2.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^3+7}{14x^2+19x+7}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^4+9}{12x^2+1}$	**3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2+4x+7}{6x^2+4x+11}$
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+11x+3}{x^5+8x^2+7}$	**4.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^5+x^3-1}{x^7-x^5+x^3+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-3x-9}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-9}{x^2-3x+2}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{2-\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{tg 4x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{6x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{2x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{5/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-8x)^{3/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+15x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-16x)}{4x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\cdot tgx}{1-\cos x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{arctg 9x}$

Варіант 17	Варіант 18
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x+10}{5x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x+12}{6x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x-7x^2}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x^2+1}{x^4+x^3+x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+1}{2x^3+x^2-5}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-4}{x^2+5x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x^2+2}{6x^4+2x^2+1}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x+17}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^{2}-25}{x^{2}+8x+15}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^{2}-10x+3}{x^{2}-2x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x^{2}-9}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{arctg\, 3x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^{2}\, 4x}{x\sin 3x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{5x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{4/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{2/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+17x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-18x)}{3x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x\left(e^{x}-1\right)}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x\left(e^{x}-1\right)}$

Варіант 19	Варіант 20
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x+10}{5x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10-20x}{4x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{3}+9}{14x^{3}+7x}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^{3}+2x+5}{4x^{3}+1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{2}+6x+9}{2x+3}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{2}+11x+17}{7x^{5}+3}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{2}+19}{15x^{4}+2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{4}+13x^{2}+2}{5x^{2}+16}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}-x-2}{x^{2}-4}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-1}{2x^{2}-x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+x-6}$	**6.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{3x^2-x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{arctg 5x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2arctg 7x}{\sin 3x}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x/2}$	**9.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{1/3x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{1/3x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+19x)}{7x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+20x)}{10x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x tg 2x}{1-\cos x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x tg 3x}{1-\cos x}$

Варіант 21	Варіант 22
1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{21x+7}{7x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3-22x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x^2-7x+14}$	**2.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+21x^2+7}{4x^3+12}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-2x^2}{x^2-7x+14}$	**3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{11x^2+7}{2x^5+15x+8}$
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+5}{x^2-7}$	**4.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4+x^2+3}{2x+9}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$	**5.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-4x-6}$	**6.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{2x^2+x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{5x}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{arcsin\,6x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x-1}{x\,sin\,4x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{3x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x}\right)^{3x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/6x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1-21x)}{3x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+22x)}{11x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x-1}{x\,sin\,2x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{arcsin\,4x}$

Варіант 23	Варіант 24
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-23x}{5x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+24x}{6x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-2x^2+4x^3}{5+2x-x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^2+1}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-3x+1}{3x^3+x2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+7}{2x^4+x+5}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+7}{x^4+11x^2+6}$
5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x-4}{x^2-16}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$	**6.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2-9}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{5-x}}{x^2-3x-4}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{3x-6}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\arcsin 8x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,arctg\,3x}{\sin 5x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{2x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{2x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/5x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{7/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+23x)}{4x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-24x)}{4x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg\,3x}{1-\cos x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{x\,tg\,2x}$

Варіант 25	Варіант 26
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x+30}{15x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{39-26x}{13x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+1}{x^2+2x+1}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+2}{x^5+1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+8x+16}{x-2}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x+6}{9x^3+3x+6}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+10}{10x^2-5x+25}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+20x+5}{x+4}$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{tg^2 5x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 5x}{\sin 2x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{1/3x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{4/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-25x)}{5x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+26x)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1}{x^2}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{tgx\left(e^{7x}-1\right)}$

Варіант 27	Варіант 28
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x+30}{3x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-28x}{7x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-5}{x+7}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x+8}{x^3+2x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x-5}{4x^5+2x^2+1}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8}{4x^6+5x^3+1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^4+2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+x^2}{9x^3+11}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+9x+10}$	**5.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-5x+5}{x^2-2x+1}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{3x^2-8x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{3x^2-7x+2}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\operatorname{arctg} 4x}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+8}\right)^{x}$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-2}\right)^{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{7/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{2/x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-27x)}{9x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+28x)}{14x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{3x\left(e^{x}-1\right)}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin 3x}$

Варіант 29	Варіант 30
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{29x+15}{17x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10-30x}{10x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{4}+5x^{2}+7}{2x^{4}+4}$	**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{2}-3x+4}{\sqrt{x^{4}+1}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{7}+3x^{5}+1}{2x+3}$	**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{5}+4x+5}{x^{7}+9}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{8}+4x^{4}+8}{2x^{10}+14}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7}{x^{6}+3x^{3}+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}-4x+3}$	**5.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^{2}\ 3x-4}{x^{2}-16}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^{2}+10x+8}{2x^{2}+7x+6}$	**6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}+4x-5}{x^{2}+x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{x^{2}-16}$	**7.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x^{2}-36}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\,\mathrm{arctg}\,3x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+2}\right)^x$	**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{2/x}$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{x/6}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+29x)}{5x}$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+30x)}{3x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\sin 4x}{\mathrm{tg}^2\, 3x}$	**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{5x}-1}$

Завдання 5, *частина I*

Знайти похідні функцій

Варіант 1	Варіант 2
1. $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{7}-2x\right)$	**1.** $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $y=\mathrm{tg}(5x+3)$	**2.** $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$
3. $y=e^{-x^3}$	**3.** $y=\arccos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $y=\ln\left(3x^5+5x-1\right)$	**4.** $y=\mathrm{tg}\left(4x^2+5\right)$
5. $y=\arcsin(\ln x)$	**5.** $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\ln x}$
6. $y=\sin\sqrt{7x+8}$	**6.** $y=\cos\left(e^x+4\right)$
7. $y=x^2\cos\left(x^3\right)$	**7.** $y=x\arcsin x$
8. $y=x^7\ln x$	**8.** $y=\left(2x^3+7\right)e^{5x}$
9. $y=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,2x$	**9.** $y=\sin 5x\cdot 7^{3x}$
10. $y=\dfrac{x^2+5}{x}$	**10.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

11. $y=\dfrac{ln(7x+1)}{\sqrt{x+7}}$	**11.** $y=\dfrac{ctgx+1}{4cos\,x}$
12. $y=\dfrac{5^x+9x}{sin^3 x+1}$	**12.** $y=\dfrac{ln(\sqrt{x}+2)}{(x+3)^2}$
13. $y=x^{x^2+1}$	**13.** $y=(1+2x)^{tgx}$
14. $2x^2-3xy^2=sin(x+y)$	**14.** $y^2+cos(x+y)-x^2y=0$
15. $\begin{cases} x=ln\,t \\ y=t^3-3t-2 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3+t \end{cases}$

Варіант 3	Варіант 4
1. $y=sin\left(\dfrac{\pi}{4}-5x\right)$	**1.** $y=cos\left(3x+\dfrac{\pi}{12}\right)$
2. $y=ln(\sqrt{x}+3x)$	**2.** $y=(x+4)^2$
3. $y=e^{-(x^2+1)}$	**3.** $y=arccos(x-5)$
4. $y=ctg(x^3+9)$	**4.** $y=ln(x^5+x^3+2x)$
5. $y=\sqrt{cos5x}$	**5.** $y=arctg(e^{2x})$
6. $y=arcsin\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right)$	**6.** $y=e^{\sqrt{x-7}}$
7. $y=2^{7x}\cdot tg\,2x$	**7.** $y=ln\,x\cdot ln\,2x$
8. $y=(x^2+4)\cdot e^{4x+8}$	**8.** $y=(x^2+7)sin\,3x$
9. $y=\sqrt{x}\cdot sin\,7x$	**9.** $y=3x\cdot arcsin\,x$
10. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x+2}$	**10.** $y=\dfrac{x^3+11}{x-5}$
11. $y=\dfrac{cos\,4x}{log_2 x}$	**11.** $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$
12. $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{tg^3 x}$	**12.** $y=\dfrac{7^x+e^{3x}}{cos^2 x}$

13. $y=\sqrt[x]{\sin x}$	**13.** $y=\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$
14. $xy^3+x^2\sin y=\ln(x+y)$	**14.** $\sqrt{x}y+x\sqrt{y}=tgx$
15. $\begin{cases}x=1-t+t^3\\ y=3\ln t\end{cases}$	**15.** $\begin{cases}x=t^4\\ y=4-3t^5\end{cases}$

Варіант 5	Варіант 6
1. $y=tg(9x-\pi)$	**1.** $y=\ln 3x-\frac{\pi}{4}$
2. $y=2^{5x+7}$	**2.** $y=\sin(2x+5)$
3. $y=\arcsin(3x+6)$	**3.** $y=arctg(7x-1)$
4. $y=\ln\left(1+\frac{3}{x}+x^3\right)$	**4.** $y=tg^3\sqrt{2x}$
5. $y=tg^5(x+2)$	**5.** $y=2-e^{-x^3}$
6. $y=e^{\sin^2 x}$	**6.** $y=\sqrt{2+4x-x^2}$
7. $y=x^2e^{-x^3}$	**7.** $y=x\cdot ctg(5x+3)$
8. $y=(x^5-2)\log_3 x$	**8.** $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin^2 x$
9. $y=\sqrt{5x}\,arctg7x$	**9.** $y=e^{2x}\cdot\cos 15x$
10. $y=-\frac{\cos x}{\sin^3 x}$	**10.** $y=\frac{x^3-7}{x+11}$
11. $y=\frac{x+2}{x^5-7}$	**11.** $y=\frac{tg3x}{\sqrt{x^3+5}}$
12. $y=\frac{3^x+\ln 2}{\sqrt{x+4}}$	**12.** $y=\frac{6^x+\ln 6}{\arcsin x}$
13. $y=(1+\sqrt{x})^{\ln x}$	**13.** $y=(1+\ln x)^{\cos x}$
14. $xy^3-x^2\sqrt{y}=tgy$	**14.** $xy^2+x^3y=\sin(y-x)$

15. $\begin{cases} x = 5ln\,t \\ y = 5 + 5t + t^3 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = 3t - t^4 \end{cases}$

Варіант 7	Варіант 8
1. $y = ln\left(1 - \frac{1}{2x}\right)$	**1.** $y = sin\left(\frac{5x}{7} + \frac{\pi}{12}\right)$
2. $y = 3^{7x+2}$	**2.** $y = ln(1 + 4x)$
3. $y = arccos(5x - 1)$	**3.** $y = arctg(2x + 3)$
4. $y = arcsin(\sqrt{x} - 1)$	**4.** $y = cos(x^3 + 2x + 5)$
5. $y = e^{tgx}$	**5.** $y = tg\sqrt{x + 3}$
6. $y = cos^2(4x^3 + 5x - 7)$	**6.** $y = \sqrt{e^{3x} + 1}$
7. $y = (x^2 + 9x)sin\left(\frac{x}{3}\right)$	**7.** $y = x^8 \cdot 8^x$
8. $y = e^{5x} arctg 3x$	**8.** $y = x \cdot arcsin 5x$
9. $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot ln\,x$	**9.** $y = ctg^4 \frac{1}{x}$
10. $y = \frac{(4x + 8)^3}{x - 1}$	**10.** $y = \frac{5x + 2}{x^3 + x + 1}$
11. $y = \frac{log_7 x}{cos 5x}$	**11.** $y = \frac{1 - sin\,x}{1 + sin\,x}$
12. $y = \frac{9^x - x^9}{tgx}$	**12.** $y = \frac{e^{8x} + ln 8}{\sqrt{x^2 + x}}$
13. $y = (e^{-x} - 1)^{sin\,x}$	**13.** $y = (1 + 2x)^{ctgx}$
14. $y + x^3 y + xy^3 = 0$	**14.** $3y + x^2 y^2 - xy = 0$
15. $\begin{cases} x = 7t - t^3 \\ y = ln(t + 1) \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = cos 2t \\ y = t^5 + 3t + 2 \end{cases}$

Варіант 9	Варіант 10
1. $y = cos\frac{3x}{7} - \pi$	**1.** $y = \frac{3 - sin7x}{2}$
2. $y = 9^{2x-8}$	**2.** $y = 10^{5x-1}$
3. $y = arctg(5x+2)$	**3.** $y = arccos(10x+2)$
4. $y = ln(x^5 - 3x^2 + 1)$	**4.** $y = ln(tg\,x + 2)$
5. $y = ctg3x$	**5.** $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$
6. $y = 2sin^3\frac{x}{5}$	**6.** $y = sin^2 x^4$
7. $y = 2x \cdot arccos\frac{x}{3}$	**7.** $y = (x+3) \cdot cos\frac{5x}{2}$
8. $y = (x^2 + 7) \cdot e^{3x-1}$	**8.** $y = x^{10} \cdot ln(x^{10})$
9. $y = \sqrt{x} \cdot sin5x$	**9.** $y = e^{7x} \cdot ctg\sqrt{x}$
10. $y = \frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x - cos\,x}$	**10.** $y = \frac{e^x + e^{-2x}}{x - 10}$
11. $y = \frac{(x+2)^3}{x-1}$	**11.** $y = \frac{x^2 + 10x}{sin3x}$
12. $y = \frac{tg^2 7x}{\sqrt{x-9}}$	**12.** $y = \frac{3 + 2ln\,x}{\sqrt{x+7}}$
13. $y = (1-5x)^{ln\,x}$	**13.** $y = \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{x^3}$
14. $x^3 y + xy^5 + cos\,y = 0$	**14.** $x^4 y + xy^4 + sin\,x = 0$
15. $\begin{cases} x = ln(2t+1) \\ y = t^7 + 5 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = t^{10} + 9 \\ y = 2 - t^5 \end{cases}$

Варіант 11	Варіант 12
1. $y = cos(7x+2)$	**1.** $y = tg(2x - 4\pi)$
2. $y = 11^{7x+8}$	**2.** $y = ln(3x+7)$

3. $y = arccos(3x-1)$	**3.** $y = cos(\sqrt{x}+3x)$
4. $y = tg^3 \frac{2}{x}$	**4.** $y = (x^3+5x+11)^{3/5}$
5. $y = arcsin(ln 5x)$	**5.** $y = \left(sin \frac{7x}{2}\right)^4$
6. $y = e^{sin \sqrt{x}}$	**6.** $y = arctg\left(e^{\sqrt{x}}\right)$
7. $y = 2x \cdot ln(1+x^3)$	**7.** $y = (x+7)e^{-1/x}$
8. $y = (3x^5+7) \cdot cos 9x$	**8.** $y = (9x^4+1) sin \frac{3x}{5}$
9. $y = 11^x \cdot \sqrt{11x}$	**9.** $y = 12^x \cdot \sqrt{tgx}$
10. $y = \frac{x^5+7}{x+3}$	**10.** $y = \frac{12x+x^7}{3-x}$
11. $y = \frac{sin x + 2}{sin 3x - 2}$	**11.** $y = \frac{5+cos x}{5-cos x}$
12. $y = \frac{e^{5x}+ln 2x}{\sqrt{x+6}}$	**12.** $y = \frac{ln 12x + e^{-7x}}{\sqrt{x-2}}$
13. $y = (cos x)^{x^2+1}$	**13.** $y = (1+x^2)^{3x}$
14. $2x^3 + 4xy^5 = ln(x+y)$	**14.** $4x^5 + 2xy^6 = cos(y-x)$
15. $\begin{cases} x = 3t^2 + t \\ y = 7 - t - t^3 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = t^5 + t^3 + 2 \\ y = 5 - t^3 \end{cases}$

Варіант 13	Варіант 14
1. $y = sin \frac{6x}{7} + \pi$	**1.** $y = cos\left(\frac{\pi}{8} - 17x\right)$
2. $y = 13^{5x-2}$	**2.** $y = e^{-2x+14}$
3. $y = arctg(3x+2)$	**3.** $y = arccos(2x-5)$
4. $y = tg(ln 5x)$	**4.** $y = ln(sin \sqrt{x})$
5. $y = \sqrt[5]{cos 7x}$	**5.** $y = (x^2+3x+19)^{3/7}$

6. $y=e^{-12x+3x}$	**6.** $y=e^{-2\sqrt{9-x}}$
7. $y=x\cdot e^{-3x}$	**7.** $y=(5+tgx)\cdot sin\dfrac{3x}{2}$
8. $y=\left(x^3+2x+1\right)\cdot tgx$	**8.** $y=x^{15}\cdot arctg15x$
9. $y=\sqrt{x}\cdot arccos9x$	**9.** $y=14^x\cdot(x+14)$
10. $y=\dfrac{15-3x^2}{2x}$	**10.** $y=\dfrac{14-7x^5}{x+7}$
11. $y=\dfrac{3+ln\,x}{3-ln\,x}$	**11.** $y=\dfrac{5+tgx}{5-tgx}$
12. $y=\dfrac{9^x+sin9x}{\sqrt{x-9}}$	**12.** $y=\dfrac{e^{14x}+14^x}{\sqrt{7-2x}}$
13. $y=(2x+1)^{tgx}$	**13.** $y=(ln\,x)^{1-2x}$
14. $3x^5+7xy^2=ln\,y$	**14.** $6x^5+2x^2y^5+y^7=0$
15. $\begin{cases}x=3+ln\,t\\y=t^3+15\end{cases}$	**15.** $\begin{cases}x=ln(3t+2)\\y=t^5+t-7\end{cases}$

Варіант 15	Варіант 16
1. $y=ln\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)$	**1.** $y=sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right)$
2. $y=(x+5)^3$	**2.** $y=arctg(2-5x)$
3. $y=15^{2x+3}$	**3.** $y=e^{-2x^3}$
4. $y=arccos(3x+2)$	**4.** $y=tg\left(5x^3+2\right)$
5. $y=e^{4x^3+3x+1}$	**5.** $y=ln(arcsin\,x)$
6. $y=tg\left(\sqrt{5x-1}\right)$	**6.** $y=arccos\sqrt{x+1}$
7. $y=\left(x^3+7\right)\cdot sin\dfrac{x}{7}$	**7.** $y=\left(x^2-3\right)cos5x$
8. $y=\sqrt{x}\cdot arcsin3x$	**8.** $y=sin^3 4x\cdot cos\,2x$

9. $y = x^{15} \cdot 15^x$	**9.** $y = x \cdot arcsin\dfrac{1}{x}$
10. $y = \dfrac{3x-5}{x^7+3}$	**10.** $y = \dfrac{3-x^2}{3+x^9}$
11. $y = \dfrac{arctg\,2x}{5+cos\,x}$	**11.** $y = \dfrac{sin\,4x}{\sqrt{2-3x}}$
12. $y = \dfrac{e^{15x}+15x}{\sqrt{8-15x}}$	**12.** $y = \dfrac{3^x+19x}{cos\,x}$
13. $y = (tgx)^{2x+1}$	**13.** $y = (3x+1)^{ln\,x}$
14. $x^2y^5 + xy^3 = sin\,x$	**14.** $5y^2 - 3x^5y = sin(2x+y)$
15. $\begin{cases} x = t^2 - 7t + 2 \\ y = t^4 - 3t - 1 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = ln(1-t) \\ y = 2 - 3t - t^3 \end{cases}$

Варіант 17	Варіант 18
1. $y = tg(5-8x)$	**1.** $y = cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$
2. $y = sin^5 3x$	**2.** $y = e^{3x+\sqrt{x}}$
3. $y = arccos(2x-7)$	**3.** $y = arcsin(5x-1)$
4. $y = \sqrt{1+ln(4x+3)}$	**4.** $y = ln(7x^3 - 9x + 12)$
5. $y = arctg(x^5 + 7x - 12)$	**5.** $y = 7^{\sqrt{5-2x}}$
6. $y = cos(8 - e^{3x})$	**6.** $y = ln\left(sin\dfrac{2x}{5}\right)$
7. $y = x \cdot arcsin^3 5x$	**7.** $y = 5^x \cdot arctg\,5x$
8. $y = (5x^6+17) \cdot \sqrt{x+2}$	**8.** $y = (x^3 - 15) \cdot e^{3-5x}$
9. $y = 3^{7x} \cdot sin\,2x$	**9.** $y = x^6 \cdot \sqrt{5-4x}$
10. $y = \dfrac{5x+16}{x^5-1}$	**10.** $y = \dfrac{7+2x+3x^2}{x-3}$

11. $y=\dfrac{tg^5(3x)}{e^{3x}}$	**11.** $y=\dfrac{\log_5 x}{\cos 3x}$
12. $y=\dfrac{\ln\left(3-\sqrt{x}\right)}{(x-1)^2}$	**12.** $y=\dfrac{tg^3 x}{\sqrt{3x+1}}$
13. $y=(tg3x)^{1-3x}$	**13.** $y=(tg5x)^{\sin x}$
14. $\sin x+x^2y^3=tgy$	**14.** $x^3y+x^5\cos y=\ln(x+y)$
15. $\begin{cases}x=t^3+t+5\\y=3-t^2\end{cases}$	**15.** $\begin{cases}x=5\ln t\\y=1-4t+t^3\end{cases}$

Варіант 19	Варіант 20
1. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5x\right)$	**1.** $y=ctg\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$
2. $y=(3-x)^{3/2}$	**2.** $y=\ln(7x+2)$
3. $y=arcctg(2x+1)$	**3.** $y=\arccos(6x+3)$
4. $y=\ln\left(x+x^3+2x^5\right)$	**4.** $y=\sin\left(3+\dfrac{7}{x}+x^5\right)$
5. $y=e^{2tg3x}$	**5.** $y=\cos^5(3x+2)$
6. $y=\arcsin\sqrt{x-7}$	**6.** $y=e^{5+\sin 2x}$
7. $y=\cos 3x\cdot\ln 9x$	**7.** $y=x^3\cdot\sqrt{1-4x}$
8. $y=\left(x^3+9\right)\cdot ctg3x$	**8.** $y=10^{x\cdot tg7x}$
9. $y=x^7\cdot 5^{2x}$	**9.** $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$
10. $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+6}$	**10.** $y=\dfrac{x^3+4}{x-1}$
11. $y=\dfrac{3+\sin^2 x}{\cos x}$	**11.** $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{3x}}{1-x^2}$

12. $y=\sqrt{\frac{2-3x}{x^2+5}}$	**12.** $y=\frac{2^x+\ln 3}{\sqrt{x+4}}$
13. $y=(1+3x)^{\cos x}$	**13.** $y=(1+\ln x)^{\sqrt{x}}$
14. $\sqrt[3]{x}y+x\sqrt[3]{y}=\ln y$	**14.** $xy^8-x^3\sqrt{y}=ctgy$
15. $\begin{cases}x=5+t^4\\ y=3t^5-2t^3-t\end{cases}$	**15.** $\begin{cases}x=7\ln 2t\\ y=3+6t-t^4\end{cases}$

Варіант 21	Варіант 22
1. $y=\frac{\pi}{4}-\ln 7x$	**1.** $y=4-2\ln(3+5x)$
2. $y=tg(5x-2)$	**2.** $y=2^{7+3x}$
3. $y=\cos(1-7x)$	**3.** $y=arctg(5-2x)$
4. $y=\sin^3\sqrt{3x}$	**4.** $y=\sin\left(\sqrt{x-5}\right)$
5. $y=e^{2x+\frac{1}{2x}}$	**5.** $y=\arccos(\ln 3x)$
6. $y=\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-2}$	**6.** $y=tg\left(3+e^{2x}\right)$
7. $y=\sin(4x+1)\cdot ctg2x$	**7.** $y=\left(9-\sqrt[3]{x}\right)\cos\left(\frac{x}{7}\right)$
8. $y=2^{3x}\cdot\arcsin 3x$	**8.** $y=e^{3x}arctg5x$
9. $y=x^2\cdot\sqrt{1+\ln x}$	**9.** $y=\ln\left(x^2+2\right)\cdot ctg(17-x)$
10. $y=\sqrt{\frac{2-x}{2+3x}}$	**10.** $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}}$
11. $y=\frac{5\cos x}{\sqrt{\cos 5x}}$	**11.** $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$
12. $y=\frac{9^x+\ln 5}{arctgx}$	**12.** $y=\frac{x\sqrt{x}}{tg\sqrt{x}}$

13. $y=\left(1+e^{8x}\right)^{\ln x}$	**13.** $y=\left(e^{-2x}+3\right)^{\arcsin x}$
14. $x^5y+xy^3=\sin\left(y-x^2\right)$	**14.** $7y+3x^2y+4xy^4=0$
15. $\begin{cases} x=t^4+2t-7 \\ y=\ln\left(3t-t^4\right) \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x=\ln\left(5t+t^3\right) \\ y=t+1 \end{cases}$

Варіант 23	Варіант 24
1. $y=\cos\left(\dfrac{7x-\pi}{5}\right)$	**1.** $y=\sin\left(\dfrac{\pi-2x}{7}\right)$
2. $y=\ln(3-4x)$	**2.** $y=8^{9x-2}$
3. $y=\arcsin(3x-5)$	**3.** $y=\operatorname{arcctg}(7x+3)$
4. $y=\operatorname{arctg}\left(x^3+1\right)$	**4.** $y=\cos\left(x^5-3x^2+1\right)$
5. $y=\operatorname{tg}\sqrt{9x-8}$	**5.** $y=\ln\sin\sqrt{x}$
6. $y=\ln\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x}\right)$	**6.** $y=4^{\operatorname{tg}3x}$
7. $y=8^{\sqrt{x}}\cdot\log_8 x$	**7.** $y=2x^3\cdot\arcsin 6x$
8. $y=x^{10}\cdot\sin 5x$	**8.** $y=(1-2x)e^{1-2x}$
9. $y=\operatorname{ctg}^5\left(x^2+3\right)$	**9.** $y=\cos\sqrt{x}\cdot\log_2 x$
10. $y=\dfrac{5-6x}{1+x^3+x^5}$	**10.** $y=\dfrac{2-4x}{x^2-3x+1}$
11. $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{3x}}{1-x^2}$	**11.** $y=\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt[5]{x}}$
12. $y=\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{x}}$	**12.** $y=\dfrac{e^{\cos x}}{\sqrt{x-2x^2}}$

13. $y=(1+tgx)^{3x+5}$	**13.** $y=(1-\ln x)^{x^2+5}$
14. $9y+xy^4-x^4y=0$	**14.** $xy^3+x^5y-\cos(7-y)=0$
15. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\ln\left(t^5-2t-3\right) \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x=\sqrt{1-5t} \\ y=\ln\left(t^7+5\right) \end{cases}$

Варіант 25	Варіант 26
1. $y=\ln\left(\frac{5-4x}{3}\right)$	**1.** $y=\sin\left(\frac{x+2}{7}\right)$
2. $y=5^{3-17x}$	**2.** $y=7^{12x-5}$
3. $y=\arcsin(2x+9)$	**3.** $y=\arccos(3-2x)$
4. $y=tg\,(\sin 5x+2)$	**4.** $y=e^{-\frac{3}{x}}$
5. $y=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$	**5.** $y=\ln(\arcsin 4x)$
6. $y=e^{3x-\sqrt{x}}$	**6.** $y=\cos(tg\sqrt{x})$
7. $y=(x+6)^2\cdot arctg(x+2)$	**7.** $y=\left(1+2x^7\right)\cdot arctg\,2x$
8. $y=10^{x\cdot\cos x}$	**8.** $y=e^{3x^5+7}\cdot\cos 9x$
9. $y=\ln 7x\cdot ctgx$	**9.** $y=5^x\cdot\sqrt{7x}$
10. $y=\frac{x^3+3^{-2x}}{\sqrt{x-1}}$	**10.** $y=\frac{4^{2x}-x}{\sqrt{x+7}}$
11. $y=\frac{\sqrt[5]{x+1}}{3x-2}$	**11.** $y=\frac{tgx+5}{tg3x-5}$
12. $y=\frac{\sqrt{tg\frac{x}{2}}}{1+\cos^2 x}$	**12.** $y=\frac{\sin\sqrt{x}}{2-x^2}$
13. $y=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{\ln 5x}$	**13.** $y=\left(x^3-1\right)^{\cos(x+3)}$

14. $x^7 y + xy^7 + e^{1-2x} = 0$	**14.** $8x^6 + 9xy^3 = ctg(x+y)$
15. $\begin{cases} x = ln\left(t^5 + 9\right) \\ y = 7 - 2t^3 - t^5 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = 3t^2 + e^t \\ y = ln\left(5t - t^5\right) \end{cases}$

Варіант 27	Варіант 28
1. $y = cos(4x - 2\pi)$	**1.** $y = sin\dfrac{7x}{3} + 3\pi$
2. $y = tg(7x + 3)$	**2.** $y = 5^{2x-1}$
3. $y = ln\left(\sqrt{x} - 3x\right)$	**3.** $y = arctg\sqrt{3x - 5}$
4. $y = \left(x^3 + 2x + 5\right)^{4/3}$	**4.** $y = ln(tg5x)$
5. $y = \left(sin\dfrac{2x}{3}\right)^5$	**5.** $y = \sqrt[7]{cos5x}$
6. $y = e^{arctg\sqrt{x}}$	**6.** $y = e^{-3x+12}$
7. $y = (7x + 1)\cdot arcsin x$	**7.** $y = e^{-3x}\cdot arccos7x$
8. $y = 9^{2x}\cdot ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$	**8.** $y = \left(x^5 + 2x^3 + 4\right)\cdot ctgx$
9. $y = x^2\cdot e^{1+cos x}$	**9.** $y = \sqrt{x-7}\cdot arcsin6x$
10. $y = \dfrac{7x + x^{12}}{2 - x}$	**10.** $y = \dfrac{12 - 7x^2}{5x}$
11. $y = \dfrac{4 + sin2x}{4 - sin3x}$	**11.** $y = \dfrac{2 + lg x}{2 - lg x}$
12. $y = \dfrac{ln(2x + 3)}{\sqrt{6 - x}}$	**12.** $y = \dfrac{15^x + cos8x}{\sqrt{1 - x}}$
13. $y = \left(1 + e^{3x}\right)^{4x-1}$	**13.** $y = (1 + tg(2x + 1))^{3x}$
14. $5x^4 + 3x^6 y^2 = cos(2y - x)$	**14.** $8x^2 + 7xy^5 = ln(3 + y)$

15. $\begin{cases} x = t^5 + \ln\left(t^3 + 2\right) \\ y = 9 - t^3 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = 5^{t+1} \\ y = \ln\left(t^3 + 15\right) \end{cases}$

Варіант 29	Варіант 30
1. $y = \ln\left(\frac{\pi}{3} - 15x\right)$	**1.** $y = tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
2. $y = e^{12-3x}$	**2.** $y = (x+3)^5$
3. $y = \arcsin(5x-2)$	**3.** $y = 5^{3x-2}$
4. $y = \sin\left(\ln\sqrt{x}\right)$	**4.** $y = arctg(2-x)$
5. $y = \left(x^3 + 2x + 15\right)^{3/4}$	**5.** $y = e^{3x^4 + 2x - 1}$
6. $y = \sqrt{e^{9x-2}}$	**6.** $y = \arccos\left(\sqrt{5x-1}\right)$
7. $y = (1 + \sin 3x) \cdot tg\frac{2x}{5}$	**7.** $y = \left(x^7 + 16\right) \cdot \sin\frac{3x}{7}$
8. $y = x \cdot e^{1-\cos x}$	**8.** $y = \sqrt{6-x} \cdot tg(3x+1)$
9. $y = 9^{\sin x} \cdot (2x+9)$	**9.** $y = \sqrt{\sin x} \cdot e^{\sqrt{\sin x}}$
10. $y = \frac{7 - 14x^3}{x+1}$	**10.** $y = \frac{15x - 3}{x^5 - 12}$
11. $y = \frac{5 + e^x}{5 - e^x}$	**11.** $y = \frac{\cos 5x}{1 - \ln x}$
12. $y = \frac{arctg(14+3x)}{\sqrt{2+7x}}$	**12.** $y = \frac{ctg 7x}{\sqrt{15-8x}}$
13. $y = (8 - \ln x)^{1+2x}$	**13.** $y = (\sin x + \cos x)^{x+3}$
14. $5x^6 + 2x^3y^7 + y^3 = 0$	**14.** $3x + xy^4 + y^6 = \sin x + y$

15. $\begin{cases} x = sin(5t+9) \\ y = t^5 + e^t - 7 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} x = ln(t^2 - 7t + 2) \\ y = e^{2t} + 5 \end{cases}$

Завдання 5, *частина ІІ*

Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки

1. $y = \dfrac{x^3}{x^2+4}$	$y = (2-x)e^{-3x}$	$y = 2^{\frac{1}{x-5}}$
2. $y = \dfrac{x^2}{x+3}$	$y = (x+4)e^{-x}$	$y = 4^{\frac{1}{2-x}}$
3. $y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$	$y = xe^{-2x}$	$y = 12^{\frac{1}{x-1}}$
4. $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$	$y = (x+2)e^{-x}$	$y = 3^{\frac{1}{4-x}}$
5. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$	$y = (x-2)e^{-4x}$	$y = 8^{\frac{1}{5-x}}$
6. $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$	$y = xe^{-3x}$	$y = 10^{\frac{1}{7-x}}$
7. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$	$y = (x-3)e^{-2x}$	$y = 14^{\frac{1}{6-x}}$
8. $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$	$y = (3-x)e^{-x}$	$y = 8^{\frac{1}{1+x}}$
9. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$	$y = (x+3)e^{-4x}$	$y = 15^{\frac{1}{x-8}}$
10. $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$	$y = (x-1)e^{x}$	$y = 4^{\frac{1}{x+4}}$
11. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$	$y = (1-x)e^{2x}$	$y = 2^{\frac{2}{x-1}}$
12. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$	$y = xe^{2x}$	$y = 6^{\frac{1}{2-2x}}$
13. $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$	$y = x^2e^{-x^2}$	$y = 5^{\frac{1}{2-x}}$
14. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$	$y = (x+2)e^{x}$	$y = 7^{\frac{2}{x-3}}$
15. $y = \dfrac{x^2+2}{x}$	$y = (2-x)e^{x}$	$y = 3^{\frac{1}{x+5}}$

16.	$y=\dfrac{2x}{(x-1)^2}$	$y=x^2e^x$	$y=9^{\frac{1}{4+2x}}$
17.	$y=\dfrac{x^2}{x+2}$	$y=(x+5)e^{-x}$	$y=7^{\frac{1}{2-x}}$
18.	$y=\dfrac{2-x}{x^2}$	$y=(x+1)e^{x}$	$y=8^{\frac{2}{3-2x}}$
19.	$y=\dfrac{x}{(x-3)^2}$	$y=(1-x)e^{x}$	$y=7^{\frac{1}{2-x}}$
20.	$y=\dfrac{x+3}{x^2}$	$y=(x+1)e^{-3x}$	$y=3^{\frac{1}{4-x}}$
21.	$y=\dfrac{3-x}{x^2}$	$y=(x+3)e^{2x}$	$y=2^{\frac{3}{3+x}}$
22.	$y=\dfrac{1-x^2}{x+2}$	$y=(2x-1)e^{x}$	$y=6^{\frac{2}{3+x}}$
23.	$y=\dfrac{1+x^2}{2-x}$	$y=(2x+1)e^{-x}$	$y=9^{\frac{3}{x-4}}$
24.	$y=\dfrac{2+x^2}{1+x}$	$y=(2x-3)e^{-x}$	$y=8^{\frac{3}{1+x}}$
25.	$y=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$	$y=(x-1)e^{\frac{1}{2}x}$	$y=6^{\frac{1}{4x-3}}$
26.	$y=\dfrac{x^3-1}{x^2}$	$y=(x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$	$y=9^{\frac{3}{x+3}}$
27.	$y=\dfrac{2x^2+1}{x+1}$	$y=(2x+1)e^{2x}$	$y=8^{\frac{2}{4x-5}}$
28.	$y=\dfrac{x^2+2}{2x+1}$	$y=(x+5)e^{-2x}$	$y=3^{\frac{5}{3+2x}}$
29.	$y=\dfrac{x^2}{3x+5}$	$y=(5-x)e^{-\frac{1}{2}x}$	$y=4^{\frac{2}{2+x}}$
30.	$y=\dfrac{2x^2}{4-x}$	$y=(2+3x)e^{x}$	$y=5^{\frac{2}{3x-6}}$

Завдання 6.

1. Обчислити невизначені інтеграли за допомогою таблиці інтегралів:

1.	$\int\left(3x^2-2\sin x+3e^x-\dfrac{2}{4+x^2}\right)dx$	**16.**	$\int\left(-7x^6+\dfrac{3}{\sin^2 x}+\dfrac{9}{2^x}-\dfrac{4}{8+x^2}\right)dx$
2.	$\int\left(5x^2\sqrt{x}+4\cos x-2^x+\dfrac{3}{9-x^2}\right)dx$	**17.**	$\int\left(2\sqrt[5]{x}-7\sin x+5\cdot 4^x-\dfrac{12}{3-x^2}\right)dx$

3.	$\int\left(\frac{3}{x}+2\operatorname{tg}x-4\cdot 3^x-\frac{5}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$	**18.**	$\int\left(\frac{8}{\sqrt{x}}+2\cos x-5e^x+\frac{4}{\sqrt{6-x^2}}\right)dx$
4.	$\int\left(5\sqrt{x^3}+3\operatorname{ctg}x-5^x-\frac{2}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$	**19.**	$\int\left(\frac{6}{\sqrt[4]{x^7}}-\frac{8}{\cos^2 x}+3^x-\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$
5.	$\int\left(\frac{7}{x^3}-\frac{1}{3\cos^2 x}-5e^x+\frac{4}{\sqrt{3-x^2}}\right)dx$	**20.**	$\int\left(\sqrt[3]{x^8}-\frac{2}{\sin^2 x}+4^{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$
6.	$\int\left(x^5-5+\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{2}{3^x}-\frac{2}{3+x^2}\right)dx$	**21.**	$\int\left(2x-1-3\sin x+2e^x-\frac{4}{2+x^2}\right)dx$
7.	$\int\left(3\sqrt[4]{x}-2\sin x+4\cdot 5^x-\frac{2}{5-x^2}\right)dx$	**22.**	$\int\left(4\sqrt{x}-1+7\cos x-9^x+\frac{14}{8-x^2}\right)dx$
8.	$\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\cos x-2e^x+\frac{3}{\sqrt{7-x^2}}\right)dx$	**23.**	$\int\left(\frac{5}{x}+3x+4\operatorname{tg}x-2^x-\frac{6}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$
9.	$\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\cos^2 x}+7^x-\frac{6}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$	**24.**	$\int\left(8\sqrt{x^7}+2\operatorname{ctg}x-3^x-\frac{7}{\sqrt{7+x^2}}\right)dx$
10.	$\int\left(\sqrt[5]{x^3}-\frac{5}{\sin^2 x}+5^{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$	**25.**	$\int\left(\frac{9}{x^3}-\frac{1}{2\cos^2 x}-3e^x+\frac{7}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$
11.	$\int\left(2x^5+1-3\sin x+4e^x-\frac{7}{9+x^2}\right)dx$	**26.**	$\int\left(-3x^4+\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{7}{2^x}-\frac{9}{5+x^2}\right)dx$
12.	$\int\left(7x\sqrt{x}+3\cos x-9^x+\frac{2}{4-x^2}\right)dx$	**27.**	$\int\left(2\sqrt[8]{x}-3\sin x+5\cdot 4^x-\frac{1}{3-x^2}\right)dx$
13.	$\int\left(\frac{5}{x}+3\operatorname{tg}x-2\cdot 7^x-\frac{8}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$	**28.**	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+4\cos x-9e^x+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
14.	$\int\left(7\sqrt{x^9}+2\operatorname{ctg}x-2^x-\frac{11}{\sqrt{3+x^2}}\right)dx$	**29.**	$\int\left(\frac{4}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{3}{\cos^2 x}+8^x-\frac{9}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$
15.	$\int\left(\frac{4}{x^4}-\frac{7}{\cos^2 x}-9e^x+\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}\right)dx$	**30.**	$\int(\sqrt[4]{x^7}-\frac{4}{\sin^2 x}+9^x-\frac{2}{\sqrt{x^2-1}})dx$

2. Обчислити невизначені інтеграли, зробивши заміну змінної:

№	а)	б)
1.	$\int 2\sin(3x-1)dx$	$\int\frac{dx}{x\ln x}$
2.	$\int\frac{3}{2x+3}dx$	$\int x^4\cos x^5 dx$

№	а)	б)
16.	$\int\sin(3x-4)dx$	$\int\frac{xdx}{1+x^4}$
17.	$\int\frac{5dx}{4x+1}$	$\int\left(e^x+1\right)^9 e^x dx$

3.	$\int \frac{2}{(x-2)^2+1}dx$	$\int \frac{3x^3}{\cos^2 x^4}dx$	**18.**	$\int 3^{2x+3}dx$	$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$
4.	$\int (2x-7)^9 dx$	$\int \frac{xdx}{\left(2x^2+3\right)^4}$	**19.**	$\int \cos(5x+2)dx$	$\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$\int \sqrt[3]{1+3x}dx$	$\int \frac{\operatorname{arctg} xdx}{1+x^2}$	**20.**	$\int \frac{dx}{9x^2+25}$	$\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$
6.	$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$	$\int xe^{x^2}dx$	**21.**	$\int \sqrt[4]{2-\frac{x}{3}}dx$	$\int \frac{\ln(x-1)dx}{x-1}$
7.	$\int \sqrt{1-\frac{x}{2}}dx$	$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$	**22.**	$\int 6^{3x+5}dx$	$\int \frac{xdx}{x^2+5}$
8.	$\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$	$\int x\sqrt{x^2+1}dx$	**23.**	$\int x\sqrt{3x^2+1}dx$	$\int \frac{3e^x}{e^x-1}dx$
9.	$\int 4^{5x-3}dx$	$\int \frac{\arccos xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	**24.**	$\int \frac{2}{\sin^2(3x-1)}dx$	$\int \frac{x^3dx}{2+x^4}$
10.	$\int x\sqrt{x-1}dx$	$\int \frac{\ln^5(x-7)dx}{x-7}$	**25.**	$\int \frac{3dx}{4x^2+1}$	$\int \left(3^x-1\right)^6 3^x dx$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$	$\int e^x\sqrt{\frac{e^x+1}{2}}dx$	**26.**	$\int \sqrt[5]{2+7x}\,dx$	$\int \frac{\operatorname{arcctg} xdx}{1+x^2}$
12.	$\int \frac{dx}{25x^2+4}$	$\int x\sqrt{1-x^2}dx$	**27.**	$\int \frac{3dx}{(2x-1)^4}$	$\int x^4 e^{x^5-1}dx$
13.	$\int \frac{dx}{1+(2x-1)^2}$	$\int \frac{\ln xdx}{x}$	**28.**	$\int \sqrt{3+\frac{x}{4}}dx$	$\int x^3\sqrt{7-x^4}dx$
14.	$\int e^{2x+1}dx$	$\int \frac{xdx}{x^2-1}$	**29.**	$\int \frac{4dx}{(x-3)^2+9}$	$\int x^2\sqrt{x^3-1}dx$
15.	$\int x\sqrt{2x+5}dx$	$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$	**30.**	$\int 2^{3x+2}dx$	$\int e^x\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{4}}dx$

3. Обчислити невизначені інтеграли за допомогою інтегрування частинами:

1.	$\int x\cos 3xdx$	**11.**	$\int 2^x\cos xdx$	**21.**	$\int \arccos 4xdx$
2.	$\int x^2e^x dx$	**12.**	$\int (x+3)\cos xdx$	**22.**	$\int e^{2x}\cos 3xdx$

3.	$\int \ln(3x-1)dx$	**13.**	$\int e^x \sin x dx$	**23.**	$\int (x-1)e^x dx$
4.	$\int xe^{2x} dx$	**14.**	$\int x^2 \cos x dx$	**24.**	$\int \mathrm{arcctg}\, 5x dx$
5.	$\int \arcsin 3x dx$	**15.**	$\int x \ln(x-1) dx$	**25.**	$\int xe^{-x} dx$
6.	$\int x^4 \ln x dx$	**16.**	$\int x\, \mathrm{arctg}\, x dx$	**26.**	$\int e^{\frac{x}{2}} \cos x dx$
7.	$\int e^x \sin \frac{x}{3} dx$	**17.**	$\int x^2 \sin x dx$	**27.**	$\int (x-4) \sin x dx$
8.	$\int x \sin(5x-1) dx$	**18.**	$\int (\ln x)^2 dx$	**28.**	$\int e^{4x} \cos 3x dx$
9.	$\int x^2 \ln x dx$	**19.**	$\int e^x \cos x dx$	**29.**	$\int (2-3x) \ln 4x dx$
10.	$\int \mathrm{arctg}\, 2x dx$	**20**	$\int (2-x) \ln x dx$	**30**	$\int 2x\, \mathrm{arcctg}\, x dx$

4. Обчислити невизначені інтеграли від раціональних функцій:

№	а)	б)	№	а)	б)
1.	$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int \frac{x-1}{x+1} dx$	**16.**	$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int \frac{x+16}{x+1} dx$
2.	$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int \frac{x+2}{x-1} dx$	**17.**	$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int \frac{x-17}{x-2} dx$
3.	$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$	$\int \frac{3x}{x+2} dx$	**18.**	$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$	$\int \frac{8x-1}{x+2} dx$
4.	$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$	$\int \frac{x-4}{x+4} dx$	**19.**	$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$	$\int \frac{x+19}{x+4} dx$
5.	$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$	$\int \frac{x-5}{x+3} dx$	**20.**	$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$	$\int \frac{x-20}{x+3} dx$
6.	$\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$	$\int \frac{6x}{x+2} dx$	**21.**	$\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$	$\int \frac{2x-1}{x+2} dx$
7.	$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$	$\int \frac{x-7}{x-4} dx$	**22.**	$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$	$\int \frac{x-22}{x-4} dx$
8.	$\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$	$\int \frac{x-8}{x+5} dx$	**23.**	$\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$	$\int \frac{x-23}{x+5} dx$
9.	$\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$	$\int \frac{9x}{x-5} dx$	**24.**	$\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$	$\int \frac{2x-4}{x-5} dx$
10.	$\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$	$\int \frac{x+10}{x-8} dx$	**25.**	$\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$	$\int \frac{x+25}{x-8} dx$

11.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$	$\int \frac{x-11}{x+7}dx$
12.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$	$\int \frac{x-2}{2x-1}dx$
13.	$\int \frac{dx}{x^2+12x+37}$	$\int \frac{x+13}{x+3}dx$
14.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$	$\int \frac{x-14}{x-9}dx$
15.	$\int \frac{dx}{x^2+12x+40}$	$\int \frac{5x-1}{3x+2}dx$

26.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$	$\int \frac{x-26}{x+7}dx$
27.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$	$\int \frac{2x-7}{x-1}dx$
28.	$\int \frac{dx}{x^2+12x+37}$	$\int \frac{x-28}{x+3}dx$
29.	$\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$	$\int \frac{x-29}{x-9}dx$
30.	$\int \frac{dx}{x^2+12x+40}$	$\int \frac{3x}{3x+2}dx$

5. Обчислити визначені інтеграли:

№	a)	b)	c)	d).
1.	$\int_0^{1/3} 8^x\,dx$	$\int_1^{64}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x\right)dx$	$\int_0^{1/5}\operatorname{arctg}5x\,dx$	$\int_0^{\pi}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$
2.	$\int_0^1 (3e^x+x)dx$	$\int_1^{32}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\sqrt[5]{x}\right)dx$	$\int_0^{\pi/2}\left(x^2+3\right)\sin x\,dx$	$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$
3.	$\int_4^5 \frac{4}{\sqrt{x^2-9}}dx$	$\int_0^1\left(e^{2x}-3x\right)dx$	$\int_1^2\left(x^4-3x\right)\ln x^3\,dx$	$\int_0^4\sqrt[3]{(3x-4)^2}\,dx$
4.	$\int_2^4 (2x-3)dx$	$\int_0^{\pi/6}\cos x(\sin x-3)dx$	$\int_0^2 (x-3)2^x\,dx$	$\int_0^{1/5}\frac{24}{\sqrt{1-25x^2}}dx$
5.	$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{2}{x^2+9}dx$	$\int_0^1 3^x\left(3^x+2\right)dx$	$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\,dx$	$\int_0^1\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$
6.	$\int_0^{\pi/2} 3(1+\sin x)dx$	$\int_{\ln 3}^{\ln 4}\left(2e^x-e^{2x}\right)dx$	$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$	$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$
7.	$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{1+x^2}dx$	$\int_1^2\frac{x+2}{x^2}dx$	$\int_0^{\pi/8} x\sin(2x+\frac{\pi}{4})dx$	$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$
8.	$\int_{\pi/2}^{\pi} 3(\sin x-1)dx$	$\int_1^2 x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$	$\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$	$\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$
9.	$\int_0^2\left(2-9e^x\right)dx$	$\int_1^2\frac{e^x-e^{2x}}{e^x}dx$	$\int_0^{1/2}\operatorname{arctg}2x\,dx$	$\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}$

10.	$\int_{1/2}^{1}(2x+1)dx$	$\int_{0}^{\pi/4}\left(\mathrm{tg}^2 x+3\right)dx$	$\int_{0}^{\sqrt{3}}\arccos\frac{x}{2}\,dx$	$\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$
11.	$\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{2x}$	$\int_{0}^{\pi/4}\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	$\int_{1}^{2}xe^{2x+1}dx$	$\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$
12.	$\int_{0}^{1/2}9^x\,dx$	$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-10x+25}$	$\int_{0}^{\pi/3}2x\cos(3x-2)dx$	$\int_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$
13.	$\int_{1}^{3}3\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$	$\int_{1}^{64}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+3\right)dx$	$\int_{0}^{\pi/4}\left(x^2+1\right)\sin 2xdx$	$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$
14.	$\int_{\pi/2}^{\pi}2(\sin x+1)dx$	$\int_{0}^{1}9^x\left(\frac{1}{3^x}+1\right)dx$	$\int_{1/2}^{1}x^2e^{-2x}dx$	$\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$
15.	$\int_{1/2}^{3}5\left(x^2-3\right)dx$	$\int_{0}^{\pi/2}\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+3\right)dx$	$\int_{1}^{2}\left(x^2+3x\right)\ln xdx$	$\int_{1}^{3}x^3\sqrt{1+9x^4}dx$
16.	$\int_{0}^{\ln 2}\left(e^x-5x\right)dx$	$\int_{-\pi/6}^{\pi/3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-4\right)dx$	$\int_{0}^{e-1}x\ln(x+1)dx$	$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}+3}{\cos^2 x}dx$
17.	$\int_{\pi/6}^{\pi/3}(7-\cos x)dx$	$\int_{1}^{64}\left(\sqrt[6]{x}+\frac{2}{x}-1\right)dx$	$\int_{1}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arctg}\,xdx$	$\int_{0}^{\sqrt{\pi}}x\cos x^2dx$
18.	$\int_{\ln 2}^{1}\left(4e^x+x\right)dx$	$\int_{1}^{16}\sqrt[4]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}\right)dx$	$\int_{0}^{\pi}x^3\sin xdx$	$\int_{0}^{1/\sqrt{2}}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$
19.	$\int_{-1}^{1/2}\left(5x-x^2\right)dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\mathrm{tg}^2 x+1\right)dx$	$\int_{2}^{3}\ln(2x-3)dx$	$\int_{0}^{\pi}\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)dx$
20.	$\int_{1}^{2}2\left(\frac{1}{x}+3\right)dx$	$\int_{0}^{1/3}3\left(1+e^{3x}\right)dx$	$\int_{-\pi/7}^{0}x\cos 7xdx$	$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5}$
21.	$\int_{0}^{3/2}\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}dx$	$\int_{1}^{3}(x+1)\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$	$\int_{1}^{2}x5^x\,dx$	$\int_{2}^{3}\sqrt[5]{(2x-5)^6}dx$
22.	$\int_{-1/2}^{0}\left(4x^3-x\right)dx$	$\int_{0}^{\pi/3}\cos\frac{x}{2}\left(5-\sin\frac{x}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{1/3}2x\,\mathrm{arcctg}\,3xdx$	$\int_{0}^{1}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

23.	$\int\limits_{3}^{9}\left(\frac{1}{3x}+2\right)dx$	$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\mathrm{ctg}^2 x-2\right)dx$	$\int\limits_{0}^{1}\arcsin 5x\,dx$	$\int\limits_{1}^{e^2}\frac{\ln^5 x-2}{x}dx$
24.	$\int\limits_{1/3}^{1}4\left(x^2-x^3\right)dx$	$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	$\int\limits_{0}^{2}(x-2)3^x\,dx$	$\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{x^3}+3\right)x^2dx$
25.	$\int\limits_{0}^{1/2}\frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-6x+9}$	$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/4}\arcsin 2x\,dx$	$\int\limits_{\ln\pi/6}^{\ln\pi/4}e^x\cos e^x dx$
26.	$\int\limits_{0}^{5}\frac{3}{25+x^2}dx$	$\int\limits_{1}^{4}\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{0}\mathrm{arctg}\,x\,dx$	$\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^5 x}{x}dx$
27.	$\int\limits_{1/4}^{1/2}\left(x^3+2x\right)dx$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{3^x}\left(9^x+3\right)dx$	$\int\limits_{-2}^{0}2x\ln(x+3)dx$	$\int\limits_{3}^{11}\frac{dx}{3x-2}$
28.	$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{x^2+10x+25}$	$\int\limits_{1}^{2}\left(x^2-3\right)5^x dx$	$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/6}\frac{1+\sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}dx$
29.	$\int\limits_{\log_3 2}^{\log_3 4}\left(3^x+2\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{2x}+e^{-3x}}{2}dx$	$\int\limits_{\pi/10}^{\pi/5}\left(x^2+\pi\right)\sin 5x\,dx$	$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$
30.	$\int\limits_{5}^{7}\left(2x^3-3\right)dx$	$\int\limits_{4}^{9}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{0}\arcsin 5x\,dx$	$\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/6}\sin 3x\,dx$

Завдання 7

Для функції $Z=f(x,y)$ визначити частинні похідні першого порядку Z'_x, Z'_y:

1) $Z=x^2+xy-3x+5y-21$ $Z=\cos(4y-7x)$ $Z=y^3\sin(8x+3y)$ $Z=arctg\,\frac{x+2y}{3y-8x}$ $Z=\frac{\ln(5x+4y)}{\sin(xy)}$	2) $Z=2x^3-5y^2+xy-6x+13y-10$ $Z=tg\,(7x-9y)$ $Z=\sqrt{x}\cos(2y-7x)$ $Z=e^{x^2+y^2}$ $Z=\arcsin(x-3y)\ln(y^2-2x)$
3) $Z=2xy+x^3-y^2-4x+3y-16$ $Z=ctg(8y-4x)$	4) $Z=3x^2-5y^4+6xy-7y+9x+76$ $Z=\sqrt{9x-7y}$

$Z=\frac{1}{x}\sin(x^3-2y)$ $Z=\arccos\frac{4y-3x}{x-y}$ $Z=\sqrt{x+y}\,\ln(5x-3y)$	$Z=\frac{1}{y}tg(5y-3x)$ $Z=\arcsin\frac{x}{y-2x}$ $Z=\cos(yx)\sqrt{y^2-5x}$
5) $Z=3xy-3y^2+x^3-4y+2x-87$ $Z=\sqrt{x^2+3y^2+2x}$ $Z=x^3\sin y$ $Z=arctg\frac{x}{y-x}$ $Z=\frac{\sin(y-2x)}{\sqrt{x-y}}$	6) $Z=x^2-4xy+2y^2+4y^4-7x+29$ $Z=\ln(y-7x)$ $Z=2y^3e^{x-3y}$ $Z=\cos\frac{y}{x+2y}$ $Z=3^{xy}$
7) $Z=xy-2x+y-1$ $Z=tg(x^2+y^3)$ $Z=x\ln\frac{y}{x}$ $Z=\arccos\sqrt{1-x^2-y^2}$ $Z=\frac{\log_2(2x-y^2)}{x+y}$	8) $Z=\sin x+\cos y-3yx+19$ $Z=\ln(e^x+e^y)$ $Z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ $Z=arctg\frac{x^2}{y}$ $Z=\sqrt{\ln(x^2+4y^3)}+\frac{1}{xy}$
9) $Z=x^2y^3-2xy+x^2-2x+6$ $Z=(y^3-27y)(x^2+2)$ $Z=\sqrt[3]{x}\ln(7x-4y)$ $Z=e^{\sqrt{2y-5x}}$ $Z=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x-y^2}}$	10) $Z=y\sqrt{x}-y^2-2x+7y-5x^3+15$ $Z=\arcsin(xy)$ $Z=\sqrt{y}\cos(9x-3y)$ $Z=ctg^3(8y-5x)$ $Z=\ln(yctgx)$
11) $Z=5y^2+x^3-6xy+12x-9y+10$ $Z=e^x(x^2+y^3)$ $Z=tg^3(xy)$ $Z=\arcsin(xy)$ $Z=\cos(x-y)+\sin(x+y)$	12) $Z=y^5-6x^3+12xy-7y+2x-23$ $Z=\sqrt{y}\sin(3x-7y)$ $Z=x^{y^2}$ $Z=arctg\frac{y-x}{\sqrt{y}}$ $Z=\frac{\log_3(x^2-3y)}{x-y}$
13) $Z=2x^3-4y^2+6xy-12x+14y-28$ $Z=6\cos(2y-5x)$ $Z=\sqrt{x}arctg(yx)$	14) $Z=7xy-3x^4+2y^4-3y+7x-12$ $Z=\ln(e^x+e^y)$ $Z=\sqrt[3]{x^2-3y^3}$

$Z=\arcsin\sqrt{y-3x}$ $Z=\sqrt{\ln(x^2-y^2)}-\dfrac{1}{x}$	$Z=y\cdot arcctg\dfrac{x}{y}$ $Z=\dfrac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{y^2-x}}$
15) $Z=7y^2-8x+6xy-5x^3+15y-9$ $Z=xe^y+ye^x$ $Z=\dfrac{1}{x}arctg(y-x)$ $Z=3^{\sin^2 x+\cos^2 y}$ $Z=\arccos\dfrac{x}{y}-\sqrt{x}$	16) $Z=x^3+3y^2x-5y^3x+2y-5x+4$ $Z=\sin(3x+5y)$ $Z=\dfrac{1}{y}arcsiin(2xy)$ $Z=arctg\dfrac{x^2}{y}$ $Z=\sqrt{6y-x^2}+\sqrt{y}$
17) $Z=3x^2-5y^3+2xy-7x+6y-25$ $Z=ctg(5y-3x)$ $Z=x^2\sin(x+7y)$ $Z=\arcsin x\cdot\dfrac{1}{y}$ $Z=\dfrac{\ln(2x-3y)}{\sqrt{xy}}$	18) $Z=2y^2-3x^3+4yx-5y+9x-12$ $Z=\sqrt{xy}-x\sqrt{y}$ $Z=arctg\dfrac{y-x}{\sqrt{y}}$ $Z=\dfrac{1}{x}\cdot tgy$ $Z=\dfrac{\cos xy}{e^x+e^y}$
19) $Z=x^3+y^3-6xy+3$ $Z=e^{xy}$ $Z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ $Z=tg\dfrac{x+1}{y}$ $Z=\cos(y-2x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}$	20) $Z=3xy-33y^2-x^3+6y-4x+12$ $Z=xy\cdot\ln x$ $Z=\sqrt{2xy+y^2}$ $Z=\arcsin xy$ $Z=\dfrac{\ln(x+e^{xy})}{y-x}$
21) $Z=5xy-12x+7y-x^3+2y^2-19$ $Z=5\sin(12y-15x)$ $Z=x^2\cos y$ $Z=\arcsin\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ $Z=(1+x^2)\ln(y+e^y)$	22) $Z=y^4-3x^3+2x-4y-8xy+34$ $Z=10tg(y-x^2)$ $Z=y^3\sin\dfrac{1}{x}$ $Z=arcctg(yx)$ $Z=\dfrac{\cos(2y-3x)}{\sqrt{x^2-y^2}}$
23) $Z=4x^3-5y^2+12xy-6x+4y-26$ $Z=\sqrt{x}\cdot\sin(5x-4y)$	24) $Z=\sqrt[3]{y}-x^5=2xy-7y+5x-78$ $Z=3y\cdot\cos(y-x)$

$Z=\sin^3 x-\sin^3 y$ $Z=\frac{1}{y}\cdot\sqrt{xy}$ $Z=e^{2x^2-2y^2}$	$Z=arctg\,\frac{x+y}{x}$ $Z=\frac{2}{x}\sqrt[3]{y}$ $Z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
25) $Z=\sqrt{x}-5y^2+2x-35xy+3y-15$ $Z=y\cos(y-4x)$ $Z=\arcsin\sqrt{\frac{y}{x}}$ $Z=(\sin y)^{x^2}$ $Z=\frac{3x+2y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$	26) $Z=7x^2-2y^2+14xy-7x+9y-28$ $Z=x\sin(9x+5y)$ $Z=arctg\,\frac{y-x}{y}$ $Z=\ln y+\ln tgx$ $Z=y\cos^2 x$
27) $Z=3x^3-3y^3+6xy^2-12x+6y-23$ $Z=\sqrt[3]{x}\cdot tg(2x-3y)$ $Z=\frac{1}{x^2}-e^{xy}$ $Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $Z=\cos(x-y)+\sin(x+y)$	28) $Z=4xy-2x+7y-x^2+3y^3-98$ $Z=4\cos(x-5y)$ $Z=\ln(y-e^{2x^2})$ $Z=arcctg(\frac{1-x}{y})$ $Z=y\cdot e^{x^2-y^2}$
29) $Z=2xy-4x+7y-x^3+y^2+16$ $Z=\ln(x^3-xy)$ $Z=y^3\cdot\cos\sqrt{x}$ $Z=\arccos\sqrt{\frac{y-1}{x}}$ $Z=(4-x^2)tg(3x-2y)$	30) $Z=2x-12y+6xy-x^5+y^5-17$ $Z=ctg(9y-6x)$ $Z=x^2\sin\sqrt[3]{y}$ $Z=\frac{y-x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $Z=arctg\,\frac{x}{y^2}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985.
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1976 (гл. 2, 3).
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984 (§ 8, §§ 15-19).

5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.

6. Пак В.В., Косенко Ю.Л. Вища математика: Підручник – К.: Либідь, 1996.

7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

8. Методичні вказівки і завдання з теми "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" для студентів 1 курсу загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання /Уклад. Н.І.Волохова, Р.М.Давидов, Л.І.Макаренко, Н.С.Юрчак. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.

9. Методичні вказівки і контрольні завдання з теми "Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії" для студентів 1 курсу спеціальності "Управління процесами перевезень на залізничному транспорті" заочної форми навчання /Уклад. Н.С.Юрчак, Р.О.Єфременко. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.

10. Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми "Диференціальне числення функції однієї і кількох змінних" /Уклад. І.В.Ковалішина. – Харків: ХарДАЗТ, 1998.

11. Методичні вказівки з теми "Інтегральні числення функцій однієї змінної" до виконання контрольних робіт з дисципліни "Вища математика" /Уклад. О.А.Осмаєв, О.О.Думіна, Ю.С.Шувалова. – Харків: УкрДАЗТ, 2004.

ЗМІСТ