

**МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра „Механіка і проектування машин”**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до самостійної роботи з дисципліни**

***“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”***

**Змістовий модуль "СТАТИКА"**

**Харків - 2009**

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку  
на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин”

24 грудня 2007 р., протокол № 5.

Укладачі:

доц. О.В. Оробінський,  
старші викладачі Л.В. Астахова,  
Л.М. Дунай

Рецензент

доц. О.В. Братченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з дисципліни  
“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”

Змістовий модуль "СТАТИКА"

Відповідальний за випуск Оробінський О.В.

Редактор Буранова Н.В.


---

Підписано до друку 05.02..08 р.  
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.  
Умовн.-друк.арк. 4,0. Обл.-вид.арк. 4,25.  
Замовлення № Тираж 300 Ціна

---

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.  
Друкарня УкрДАЗТу,  
61050, Харків - 50, пл. Фейсрбаха, 7

Таблиця 7

Варіант	Розміри паралелепіпеда, см			Сили системи											
				$\overline{P_1}$			$\overline{P_2}$						$\overline{P_4}$		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Модуль, Н	прикладання Точка	Напрямок	Модуль, Н	прикладання Точка	Напрямок	Модуль, Н	прикладання Точка	Напрямок	Модуль, Н	прикладання Точка	Напрямок
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	60	30	20	4	F	FK	6	A	AE	8	B	BA	10	D	DK
2	30	40	40	20	A	AC	24	O	OD	10	K	KB	-	-	-
3	20	10	10	4	B	BA	2	C	CK	8	E	ED	-	-	-
4	30	40	20	15	A	AB	20	K	KC	-	-	-	-	-	-
5	20	20	20	8	O	OD	10	D	DF	8	K	KC	10	B	BO
6	30	40	20	8	A	AO	4	E	EF	6	F	FB	20	D	DF
7	30	40	40	10	B	BK	16	C	CO	20	D	DF	-	-	-
8	20	30	10	10	O	OA	10	B	BF	10	D	DK	-	-	-
9	30	40	30	10	A	AC	20	K	KB	-	-	-	-	-	-
10	10	10	20	20	A	AC	30	O	OD	20	K	KE	30	E	EA
11	10	40	30	8	A	AE	12	C	CB	20	O	OK	16	K	KD
12	4	8	6	6	A	AE	20	F	FA	10	C	CK	8	D	DK

## Продовження таблиці 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13	20	20	20	8	O	OB	8	C	CD	8	E	EK	-	-	-
14	20	5	8	40	B	BA	30	O	OD	-	-	-	-	-	-
15	40	20	40	15	E	EA	10	F	FE	15	B	BF	10	D	DK
16	30	30	30	6	O	OC	10	B	BK	20	K	KO	-	-	-
17	15	15	20	30	E	EB	40	B	BK	10	O	OC	32	D	DO
18	10	15	20	40	A	AB	20	K	KC	16	D	DE	-	-	-
19	20	15	15	40	C	CA	20	D	DF	-	-	-	-	-	-
20	20	20	10	10	A	AD	20	B	BO	10	K	KB	20	D	DF
21	20	20	20	10	O	OD	8	B	BA	6	K	KF	8	D	DK
22	40	20	30	30	O	OA	50	E	EB	50	C	CD	25	D	DK
23	50	20	40	10	O	OA	5	F	FB	8	K	KD	-	-	-
24	30	40	30	40	A	AD	20	K	KE	-	-	-	-	-	-
25	30	20	40	25	A	AC	20	B	BA	25	K	KE	20	D	DK
26	30	40	20	10	E	EA	12	O	OC	10	C	CK	8	K	KF
27	30	20	40	8	O	OD	6	C	CB	4	D	DK	-	-	-
28	10	14	40	4	O	OA	10	F	FE	16	C	CK	-	-	-
29	30	30	40	80	B	BK	100	D	DC	-	-	-	-	-	-
30	40	20	30	10	A	AD	5	B	BO	10	K	KB	5	D	DF

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

**МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ**  
**самостійної роботи студентів з дисципліни**  
**“ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**  
**Змістовий модуль "СТАТИКА"**

Харків 2009 р.

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 24 грудня 2007 р., протокол № 5.

Укладачі:

доц. О.В. Орбінський,  
старші викладачі Л.В. Астахова,  
Л.М. Дунай

Рецензент

доц. О.В. Братченко

## ЗМІСТ

	Вступ .....	4
1	Структура курсу дисципліни „Теоретична механіка” розділ „Статика” .....	5
2	Методичні вказівки до виконання розрахунково- графічних робіт .....	7
3	Завдання і типові звіти .....	8
3.1	Завдання С 1 .....	8
3.2	Завдання С 2 .....	14
3.3	Завдання С 3 .....	28
3.4	Завдання С 4 .....	35
3.5	Завдання С 5 .....	45
3.6	Завдання С 6 .....	52
3.7	Завдання С 7 .....	58
	Список літератури .....	65

## **ВСТУП**

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на I, II та III курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів “Статика”, “Кінематика”, “Динаміка”. У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять та виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР).

Вищесказане зумовило необхідність розробки і введення до навчального процесу методичних вказівок та рекомендацій з розділу, які дають комплексну уяву про обсяг і структуру теоретичного курсу розділу "Статика", типові звіти з принципами виконання та варіанти завдань для РГР, а також рекомендовану літературу.

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання усіх спеціальностей.



## 1 СТРУКТУРА КУРСУ ДИСЦИПЛІНИ "ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА" РОЗДІЛ "СТАТИКА"

№ п/п	Назва теми та її зміст	Спеціальності		
		Л, Лс, В, Вс, БКМ, ЗС, ПЦБ	ЕТ, ЕТс, ЕСК, ЕСКс, БКМс, ЗСс, ПЦБс	ТЕ, ТЕс, АТЗ
		1	2	3
1	<p><b>Вступ до теоретичної механіки. "Статика". Основні поняття і визначення. Аксиоми статички.</b></p> <p>Теоретична механіка і її місце серед природних та технічних наук. Розділ "Статика". Основні поняття та визначення: абсолютно тверде тіло, матеріальна точка, сила, еквівалентна система сил, зрівноважена система сил, сили зовнішні та внутрішні. Аксиоми статички. Зв'язки та їх реакції.</p>	+	+	+
2	<p><b>Система збіжних сил.</b></p> <p>Збіжні сили. Додавання збіжних сил. Рівнодійна збіжних сил. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил. Теорема про рівновагу трьох непаралельних сил.</p>	+	+	+
3	<p><b>Теорія пар сил.</b></p> <p>Момент сили відносно точки (центра) як вектор. Поняття про пару сил. Момент пари сил як вектор. Теореми про еквівалентність пар. Додавання пар сил. Умови рівноваги системи пар сил.</p>	+	+	+
		МК		
4	<p><b>Приведення довільної системи сил до даного центра.</b></p> <p>Теорема про паралельне перенесення</p>	+	+	*

	сили. Основна теорема статички про приведення системи сил до даного центра. Головний вектор та головний момент системи сил.			
5	<b>Довільна плоска система сил.</b> Алгебраїчна величина моменту сили (визначення головного вектора та головного моменту плоскої системи сил. Випадки приведення плоскої системи сил: до пари сил, до рівнодійної, випадок рівноваги). Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил. Теорема Варіньона про момент рівнодійної. Рівновага системи тіл. Статично визначені та статично невизначені системи. Рівновага при наявності сил тертя. Коефіцієнт тертя. Закони тертя ковзання.	+	+	+
		Захист РГР 1 (С-1,2,3,4)		
		МК		
6	<b>Довільна просторова система сил.</b> Момент сили відносно осі. Залежність між моментом сили відносно центра і відносно осі, яка проходить через цей центр. Визначення головного вектора та головного моменту просторової системи сил. Випадки приведення просторової системи сил: до пари сил, до рівнодійної, до динамічного гвинта, випадок рівноваги. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової паралельних системи.	+	+	+
7	<b>Центр паралельних сил. Центр ваги.</b> Центр паралельних сил. Визначення координат центра паралельних сил. Центр ваги твердого тіла і його координати. Центр ваги об'єму, площини та лінії. Способи визначення положення центра ваги. Центри ваги дуги кола, трикутника та кругового сегмента.	+	+	*
		Захист РГР 2 (С-5,6,7)	Захист РГР 1 (С-1,3,7)	Захист РГР 2 (С-1,3,7)
		МК	МК	МК
		Іспит		

#### Примітки

- 1 \* - для самостійного вивчення.
- 2 РГР – розрахунково-графічна робота.
- 3 МК – модульний контроль.
- 4 С-1...- С-7 – завдання.

## **2 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ**

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) з розділу „Статика”.

Зміст РГР, а також, номери варіантів уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожна задача супроводжується рисунками та таблицею (номер рисунка з тим самим номером, що і умова задачі в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. Типові звіти до РГР здійснюються відповідно до встановлених вимог, зокрема на титульному аркуші обов’язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв’язання задач має супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв’язання задач має бути виконано акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго, згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою ніж на загальному рисунку.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають всім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

## 3 ЗАВДАННЯ 1 ТИПОВІ ЗВІТИ

### 3.1. Завдання С1

#### ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

#### Довільна плоска система сил

Визначення реакцій опор твердого тіла (таблиця 1, рисунки 1 – 3).

Визначити реакції опор конструкції. Схеми конструкцій наведені на рисунках 1, 2, 3 (розміри - в метрах), навантаження вказане в таблиці 1.

Таблиця 1

Варі-ант	G	P	M,	q,	α,	Варі-ант	G	P	M,	q,	α,
	кН	кН	кНм	кН/м	град.		кН	кН	кНм	кН/м	град.
1	10	5	20	1	30	16	20	10	-	2	45
2	12	8	10	4	60	17	25	5	-	0,5	45
3	8	4	5	2	60	18	20	10	10	-	30
4	14	-	8	3	30	19	-	4	8	1	45
5	-	6	7	1	45	20	-	10	6	0,5	45
6	-	10	4	2	60	21	-	8	7	0,5	30
7	-	6	5	1	45	22	-	10	8	1	30
8	16	7	6	2	60	23	-	7	10	2	30
9	6	6	4	2	30	24	-	6	7	1,5	30
10	10	8	9	1	30	25	-	14	20	0,5	45
11	-	4	7	0,5	45	26	-	16	14	1	30
12	10	6	8	-	45	27	5	4	8	2,5	45
13	12	10	6	2	30	28	-	10	7	3	30
14	10	6	10	1	45	29	-	6	8	1	15

<b>15</b>	4	4	4	2	60	<b>30</b>	15	10	14	-	30
-----------	---	---	---	---	----	-----------	----	----	----	---	----

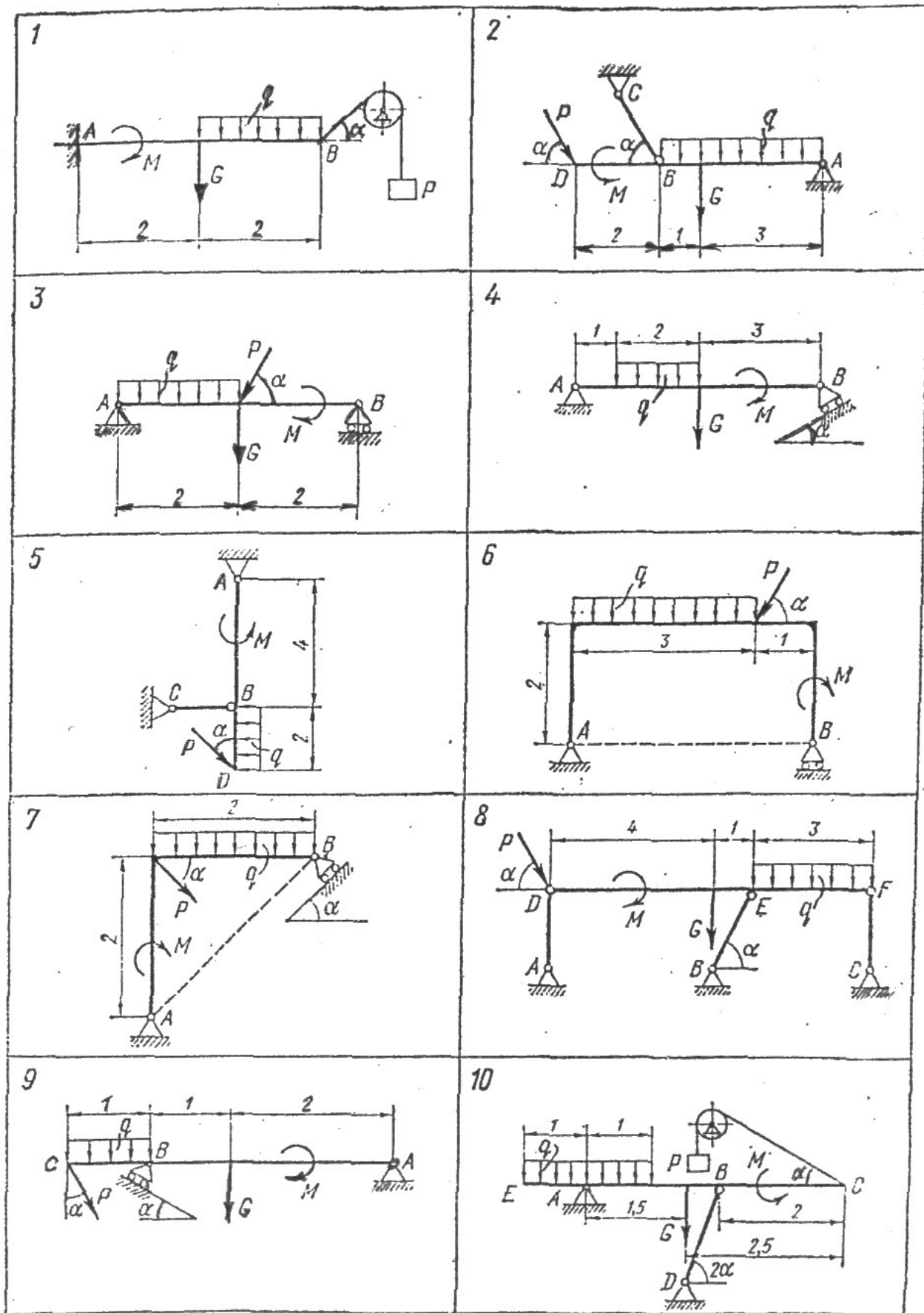


Рисунок 1

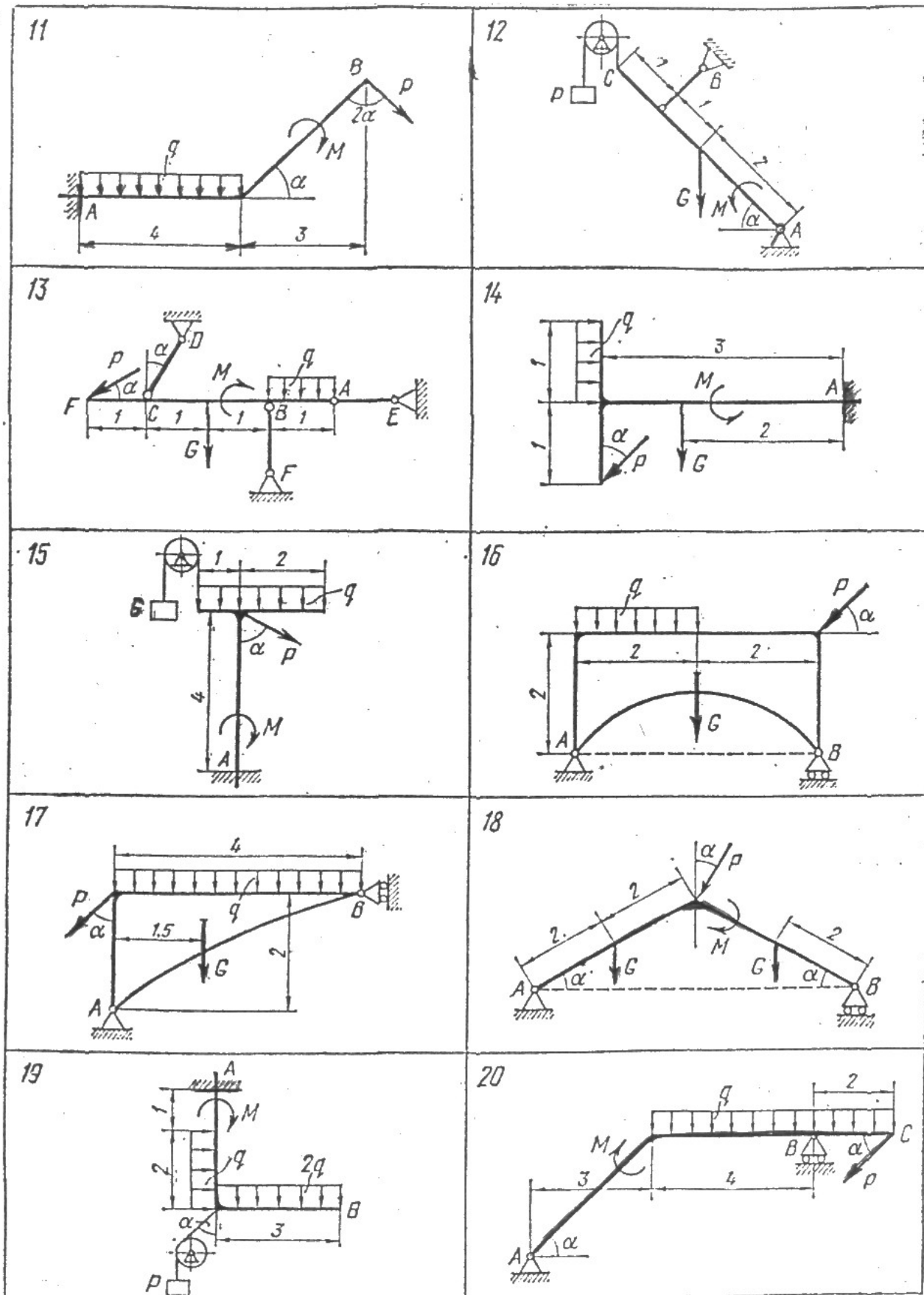


Рисунок 2

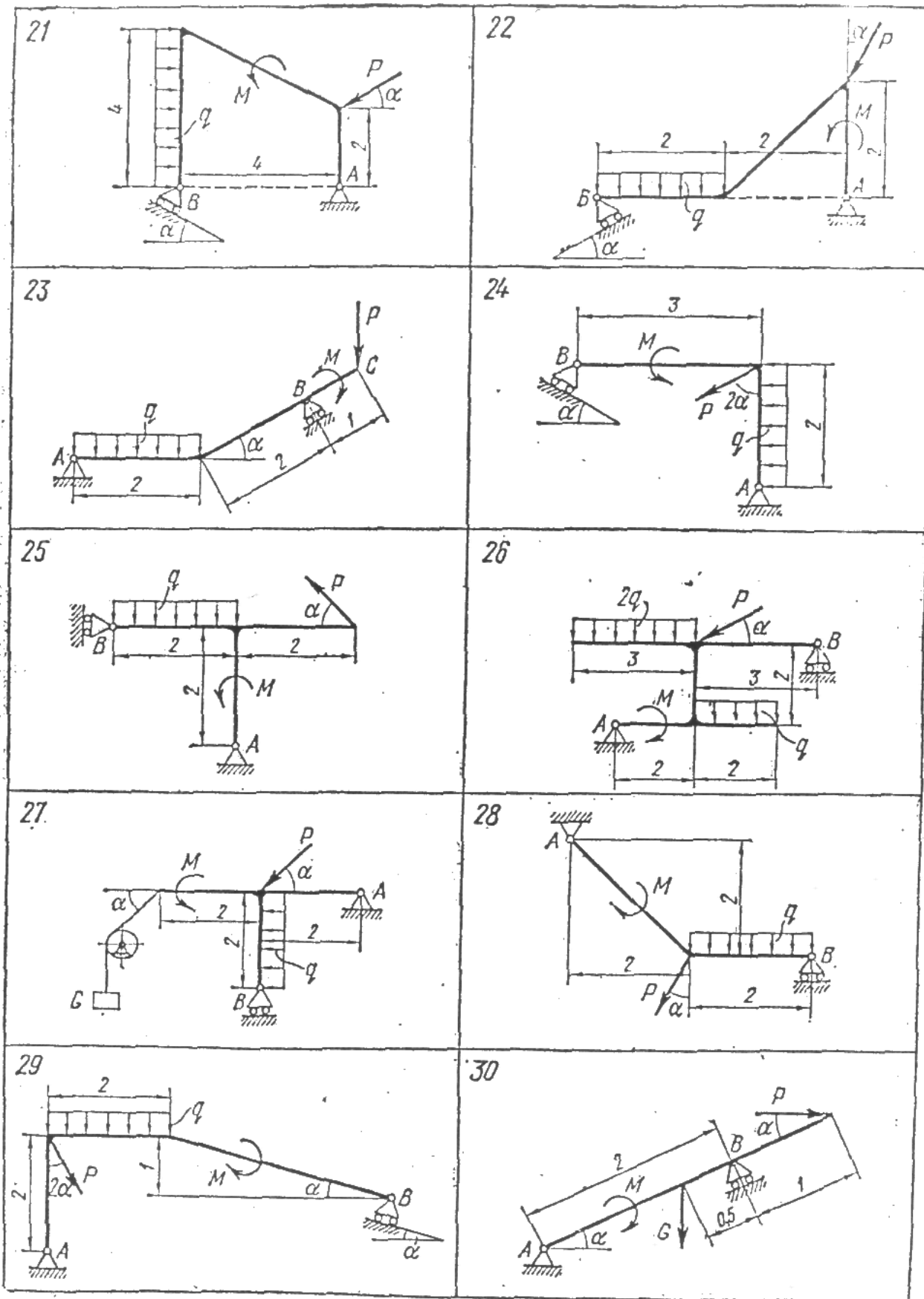


Рисунок 3



## Типовий звіт завдання С 1

Дано:

схема конструкції (рисунок 4);  $G=10$  кН;  $P=5$  кН;  $M=8$  кНм;  $q=0,5$  кН/м;  $\alpha=30^\circ$ , розміри - в метрах.

Визначити:

реакцію опори А і реакцію стержня CD

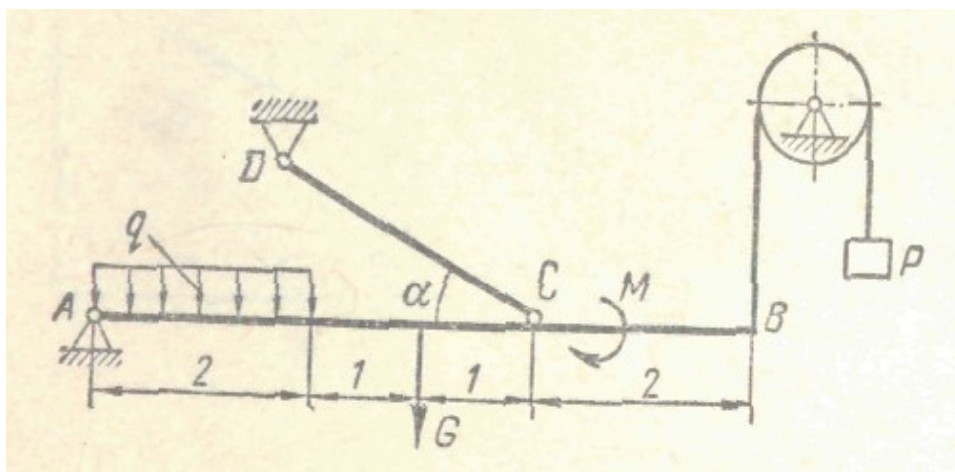
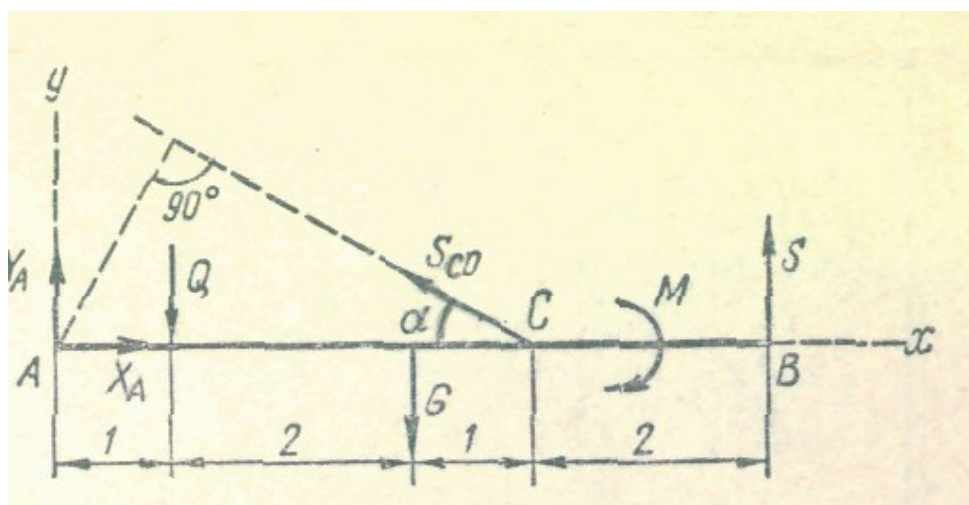


Рисунок 4

### Розв'язок

Розглянемо систему сил, що зрівноважуються, прикладених до балки АВ. Відкинемо зв'язки: шарнірно-нерухому опору А, стержень CD та нитку. Дію зв'язків на балку замінимо їх реакціями (рисунок 5).



### Рисунок 5

Оскільки напрямок реакції шарнірно-нерухомої опори А невідомий, визначимо її складові  $\overline{X_A}$  та  $\overline{Y_A}$ . Вкажемо також реакцію  $\overline{S_{CD}}$  стержня CD і реакцію  $\overline{S}$  нитки, модуль якої дорівнює Р. Рівномірнорозподілене навантаження  $q$  замінимо зосередженою силою  $Q$ , яка дорівнює  $Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 0,5 = 1$  кН і прикладається в центрі ваги епюри цього навантаження.

Для плоскої системи сил, прикладених до балки, складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - S_{CD} \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q - G + S_{CD} \cos 60^\circ + S = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4 \sin 30^\circ - M + S \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1)

$$X_A = S_{CD} \cos 30^\circ = 4,5 \cdot 0,866 = 3,90 \text{ кН.}$$

З рівняння (2)

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cos 60^\circ - S = 1 + 10 - 4,5 \cdot 0,5 - 5 = 3,75 \text{ кН.}$$

З рівняння (3)

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - S \cdot 6}{4 \sin 30^\circ} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0,5} = 4,5 \text{ кН.}$$

Значення  $X_A$ ,  $Y_A$  та  $S_{CD}$  отримано додатними. Це вказує на те, що прийняті напрямки цих сил збігаються з їх дійсними напрямками.

## 3.2 Завдання С 2

## Визначення зусиль у стержнях плоскої ферми (таблиця 2, рисунки 6-8)

Знайти методом вирізання вузлів та методом Ріттера зусилля в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 ферми. Схеми ферм наведені на рисунках 6 - 8, а навантаження вказані в таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	a, м	h, м	α, град.
	Кн							
1	5	5	5	20	30	-	-	-
2	5	10	20	30	-	-	-	30
3	10	5	20	20	-	2	6,0	-
4	10	30	50	-	-	-	-	-
5	5	5	20	20	-	-	-	30
6	10	20	10	10	20	-	-	30
7	5	10	20	-	-	-	-	30
8	10	20	30	-	-	2	5,0	-
9	10	20	30	-	-	-	-	-
10	20	10	10	20	-	-	-	45
11	10	20	40	-	-	-	-	45
12	10	20	30	30	-	2	6,0	-
13	10	10	10	20	20	-	-	45
14	10	10	10	10	20	-	-	-
15	10	20	10	-	-	2	1,5	-
16	10	20	20	30	-	-	-	-
17	10	20	20	-	-	3	5,0	-
18	10	40	20	20	-	3	3,5	-
19	10	10	40	20	-	3	3,5	-
20	10	40	20	-	-	-	-	-
21	10	20	10	40	-	3	4,0	-
22	10	10	20	30	-	-	-	-
23	5	10	10	40	20	-	-	-
24	10	20	20	20	-	2	2,4	-
25	10	20	20	-	-	2	2,4	-
26	10	20	20	-	-	2	2,3	-
27	10	20	10	-	-	2	3,0	-
28	20	20	10	-	-	-	-	-
29	10	20	20	40	-	2	2,2	-
30	10	10	20	30	30	-	-	-

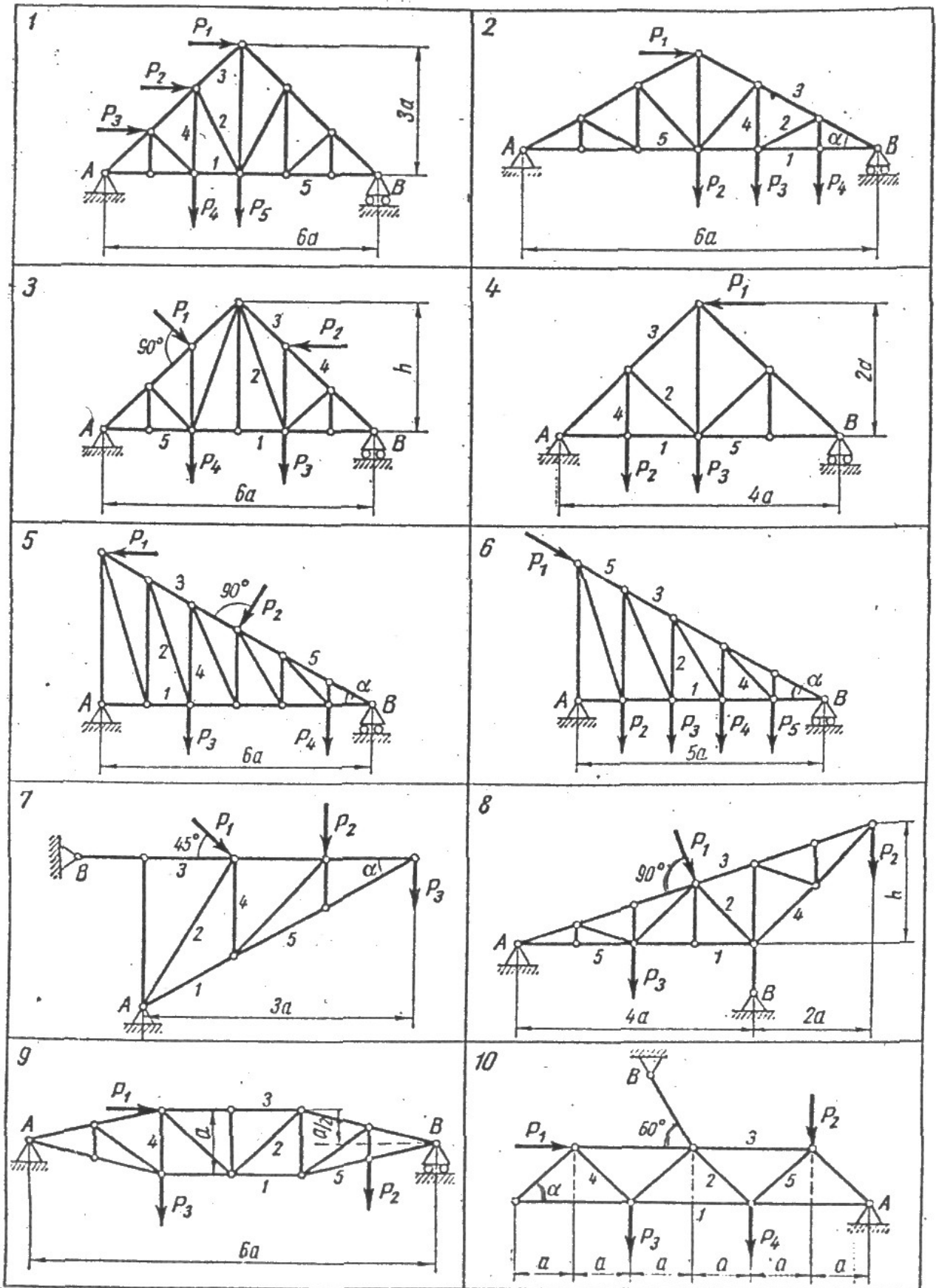


Рисунок 6

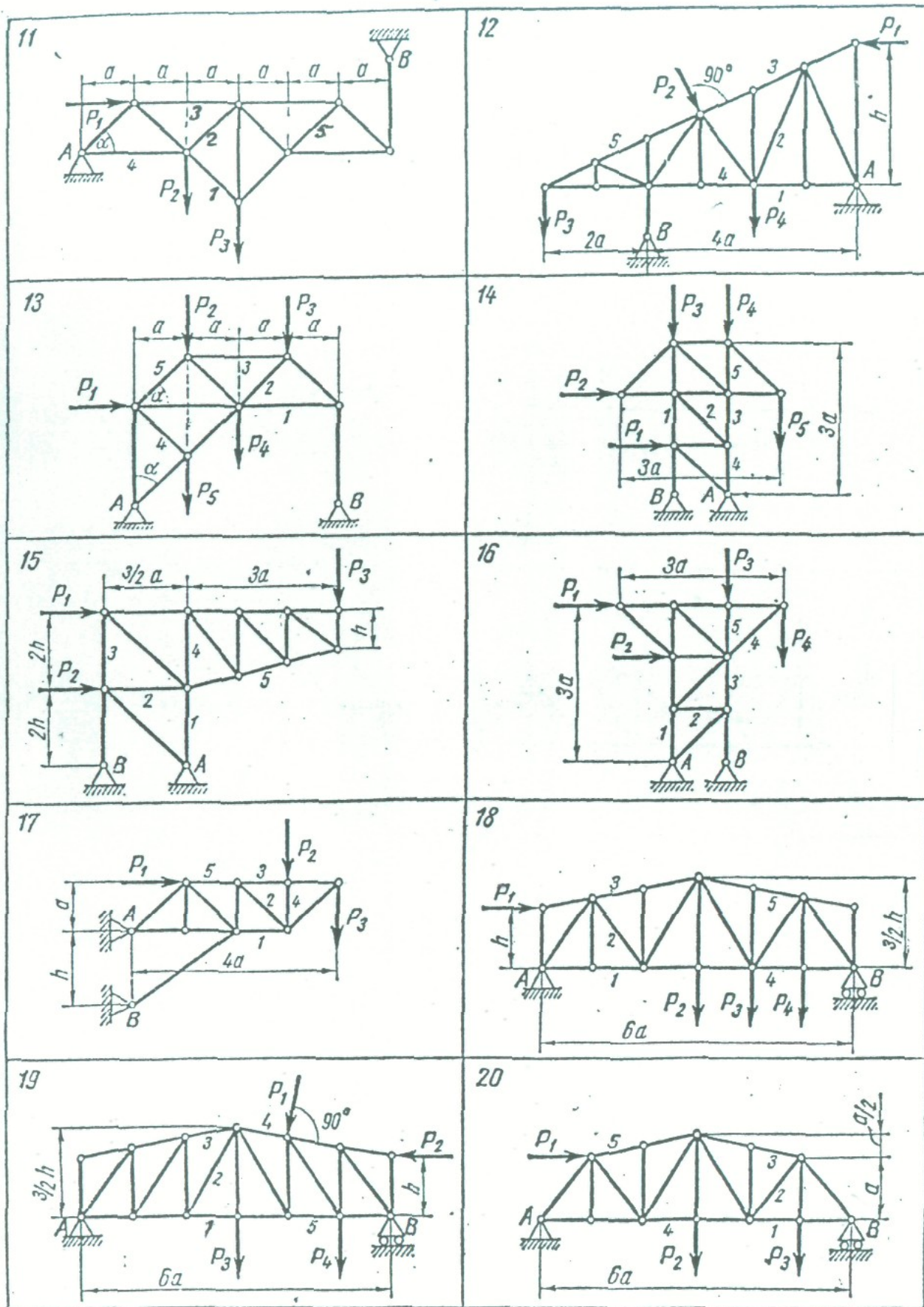


Рисунок 7



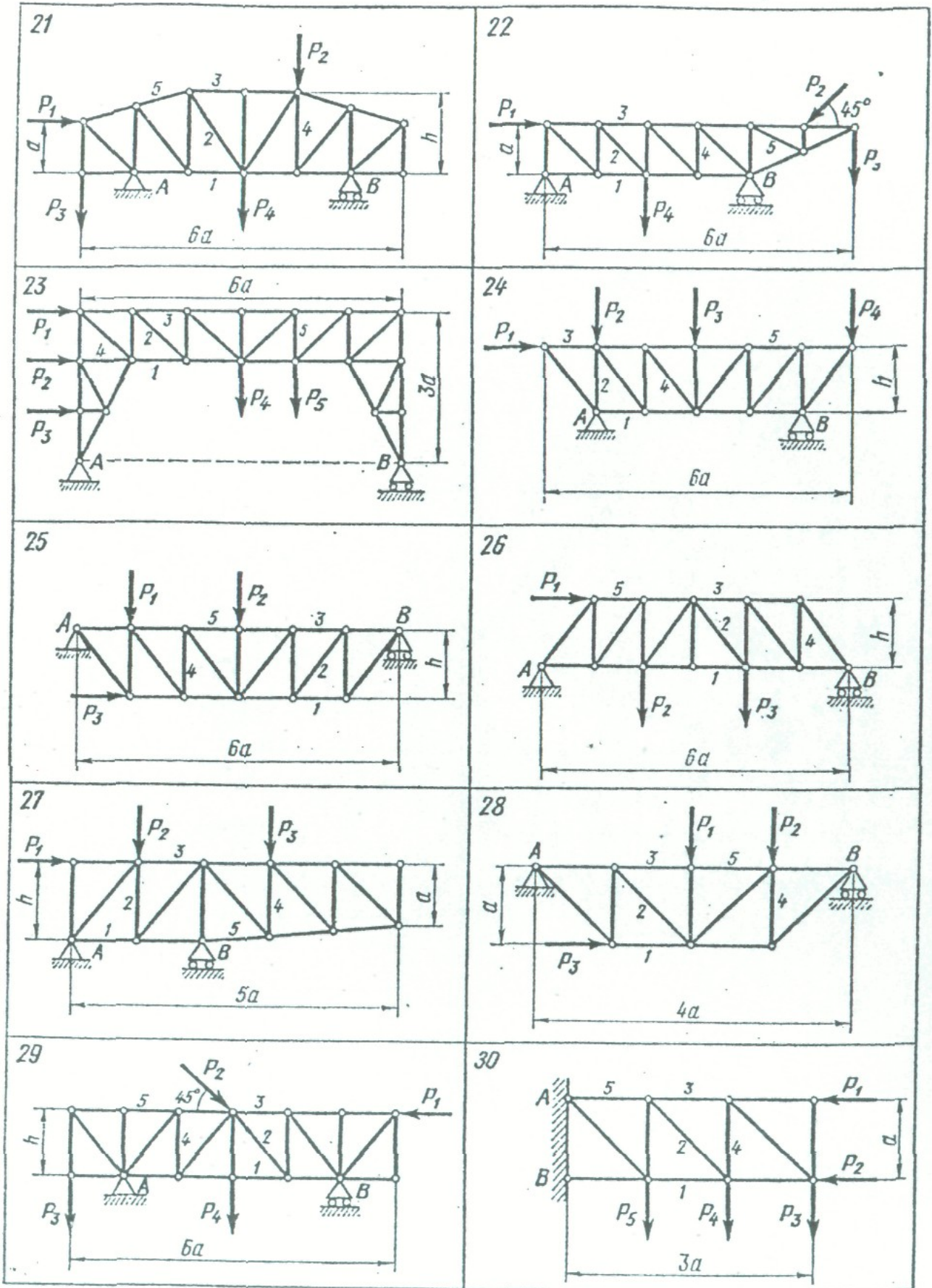


Рисунок 8

## Типовий звіт завдання С 2

### Визначення реакцій опор та зусиль у стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

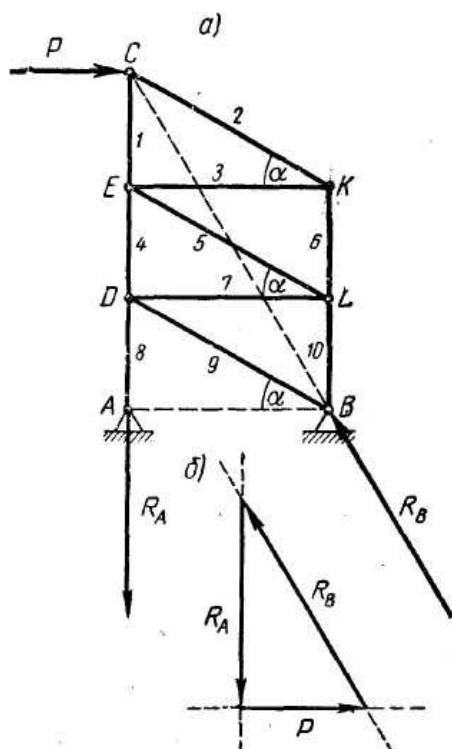


Рисунок 9

**Дано:**

схема ферми (рисунок 9);

$P = 11 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

**Визначити:**

реакції  $R_A$ ,  $R_B$  та зусилля в стержнях.

### Розв'язок

#### Визначення реакцій опор

Розглянемо зовнішні сили, прикладені до ферми: задану силу  $\overline{P}$  та реакцій опор  $\overline{R}_A$ ,  $\overline{R}_B$  (рисунок 9,а). Оскільки опора А є стержневою, лінія дії реакції  $\overline{R}_A$  відома: вона спрямована вздовж осі стержня AD. Лінію дії реакції  $\overline{R}_B$  визначають з використанням теореми про рівновагу трьох непаралельних сил.

Три сили  $\overline{P}$ ,  $\overline{R}_A$  і  $\overline{R}_B$  взаємно зрівноважуються, отже, лінії їх дії перетинаються в одній точці. Знаходимо точку перетину сил  $\overline{P}$  і  $\overline{R}_A$ . Лінія дії реакції  $\overline{R}_B$  проходить через цю точку (С) і центр шарніра В. Побудуємо замкнений силовий багатокутник (рисунок 9,б). Його

побудову починають з сили  $\bar{P}$ . Через початок вектора  $\bar{P}$  проводимо пряму, паралельну лінії дії одної реакції, наприклад  $\bar{R}_A$ , а через кінець – пряму, паралельну лінії дії  $\bar{R}_B$  до їх взаємного перетину.

Сторони отриманого замкненого силового багатокутника визначають модулі і напрямки опорних реакцій  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$ . Із подібності силового трикутника і трикутника ABC знаходимо  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$

$$R_A/AC = P/AB = R_B/BC$$

Приймаючи  $AB = a$ , отримаємо

$$AC = 3 CE = 3 a \operatorname{tg} \alpha = 3 a \sqrt{3} / 3 = a \sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Тоді

$$\bar{R}_A / a \sqrt{3} = P/a = \bar{R}_B / 2a,$$

звідси  $\bar{R}_A = P\sqrt{3} = 11\sqrt{3} = 19,05 \text{ кН}$ ;  $\bar{R}_B = 2P = 2 * 11 = 22 \text{ кН}$ .

### Визначення зусиль у стержнях ферми

Окрім зовнішніх сил, які можуть бути прикладені до вузлів ферми, на кожний її вузол діють реакції стержнів, що збігаються в ньому.

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до кожного вузла ферми, обираючи вузли в такій послідовності, щоб кількість невідомих сил у вузлі не перебільшувала двох.

Умовно вважаємо, що всі стержні розтягнуті, тобто реакції стержнів спрямовані від вузлів (рисунок 10). Від'ємні знаки знайдених реакцій вказують, що відповідні стержні не розтягнуті, а стиснуті, тобто реакції цих стержнів спрямовані до вузлів.

Реакції кожного стержня позначаємо  $\bar{S}$  та  $\bar{S}'$ , при цьому  $\bar{S} = -\bar{S}'$ .

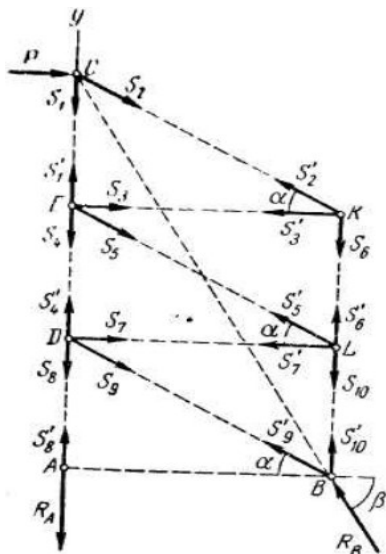


Розрахунок починають з вузла С.

Складемо два рівняння рівноваги сил, прикладених до цього вузла:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 ; \quad P + S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0 ; \quad -S_1 - S_2 \cos 60^\circ = 0.$$



Тоді

$$S_2 = -P / \cos 30^\circ = -12,7 \text{ kH};$$

$$S_1 = -S_2 \cos 60^\circ = -(-12,7) 0,5 = 6,35 \text{ kH}.$$

Значення  $S_2$  отримано із знаком мінус,  $S_1$  – плюс, тобто стержень 1 розтягнутий, а 2 - стиснутий.

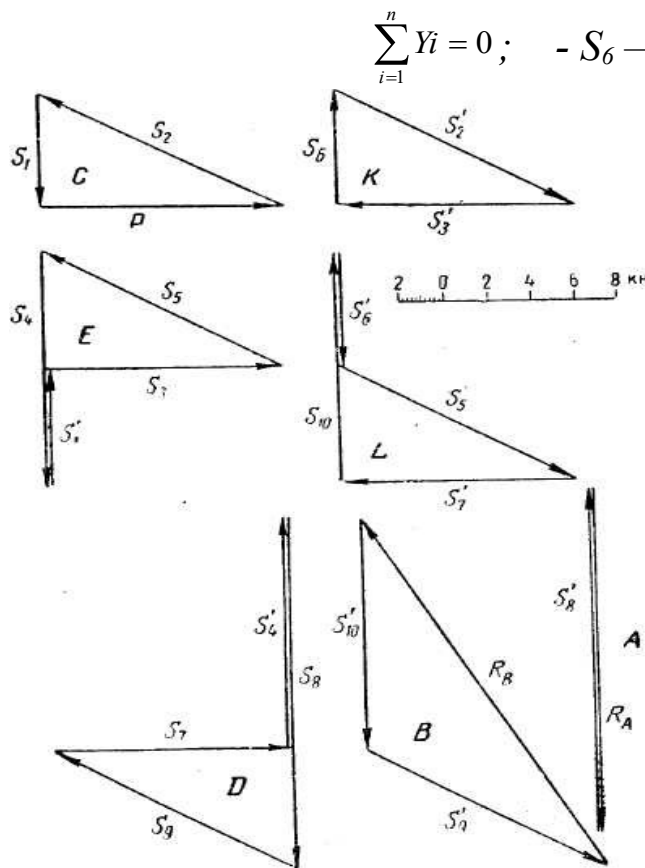
Рисунок 10

Для перевірки розрахунків складають у масштабі трикутник сил  $\overline{P}$ ,  $\overline{S_1}$  і  $\overline{S_2}$ , враховуючи при цьому що напрямок  $\overline{S_2}$  в трикутнику повинен бути протилежним напрямку  $\overline{S_2}$ , який вказано на рисунку 10, оскільки стержень 2 стиснуто (рисунок 11).

Трикутник сил отримано замкненим, тобто реакції  $\overline{S_1}$  і  $\overline{S_2}$  визначені правильно. Реакції інших стержнів ферми визначаються аналогічно. Замкнені багатокутники сил, прикладені до кожного з вузлів ферми, вказані на рисунку 11.

Вузол К:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 ; \quad -S'_2 \cos 30^\circ - S'_3 = 0;$$



$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad -S_6 - S'_2 \cos 60^\circ = 0,$$

Враховуючи, що

$$S'_2 = S_2 = -12,7 \text{ кН},$$

отримаємо

$$S'_3 = 11 \text{ кН}, S_6 = -6,35 \text{ кН}.$$

Вузол E:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad S_3 + S_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_1 - S_4 - S_5 \cos 60^\circ = 0,$$

тоді  $S_5 = -12,7 \text{ кН}$ ,  $S_4 = 12,7 \text{ кН}$ .

Рисунок 11

Вузол L:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -S'_7 + S'_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_6 + S'_5 \cos 60^\circ - S_{10} = 0,$$

знаходимо  $S'_7 = 11 \text{ кН}$ ,  $S_{10} = -12,7 \text{ кН}$ .

Вузол D:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad S_7 + S_9 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_4 - S_8 - S_9 \cos 60^\circ = 0,$$

тоді  $S_9 = -12.7 \text{ кН}$ ,  $S_8 = 19.05 \text{ кН}$ .

Таким чином, реакції всіх стержнів ферми визначено.

Зауважимо, що реакції опор ферми можна визначити складаючи рівняння рівноваги сил, прикладених до вузлів А та В (рисунок 12).

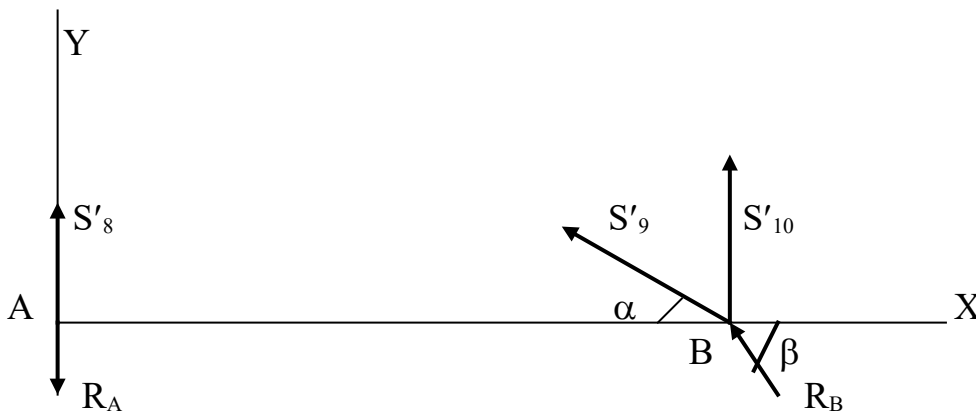


Рисунок 12

Вузол А:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_8 - R_A = 0, \quad R_A = 19.05 \text{ кН}$$

Вузол В:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -S'_9 \cos 30^\circ - R_B \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad S'_{10} + S'_9 \cos 60^\circ + R_B \sin \beta = 0.$$

Вирішуючи одночасно ці рівняння, отримаємо:

$$R_B = 22 \text{ kH}, \beta = \arctg 1,73 = 60^\circ$$

Значення реакцій  $\overline{R_A}$  і  $\overline{R_B}$ , отримані різними способами, збігаються.

Замкнені багатокутники сил, прикладених до опорних вузлів ферми, показано на рисунку 11.

### **Складання таблиці зусиль у стержнях ферми та побудова схеми ферми з дійсними напрямками цих зусиль**

Таблиця 3 складається за результатами розрахунків.

Таблиця 3

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Знак зусилля	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
Зусилля (кН)	6,35	12,7	11,0	12,7	12,7	6,35	11,0	19,05	12,7	12,7

Схема ферми з дійсними значеннями зусиль в стержнях показано на рисунку 13.

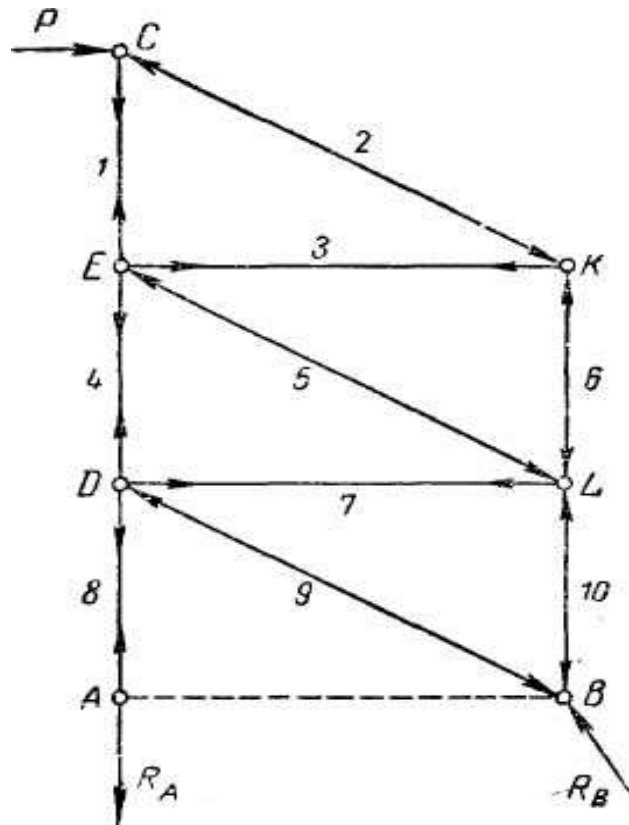
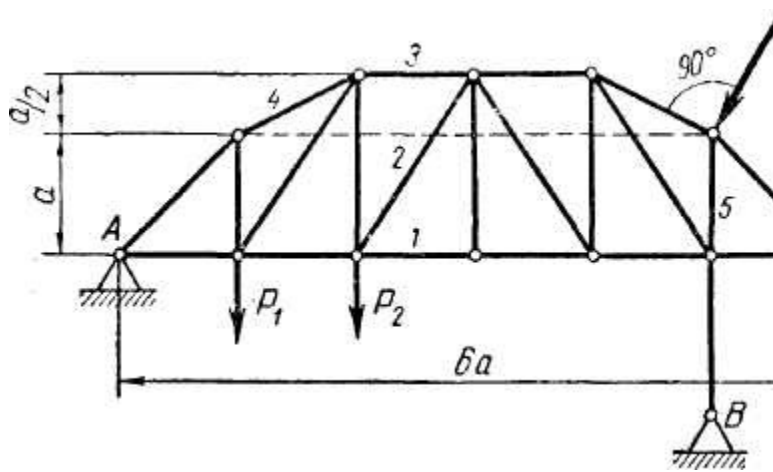


Рисунок 13

**Визначення зусилля в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 ферми способом Ріттера**



**Дано:**  
схема ферми  
(рисунок 14),

$P = 58 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 50 \text{ кН}$ ,  
 $P_3 = 85 \text{ кН}$ .

**Визначити:**  
зусилля стержнів  $S_1$ ,  
 $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ .

Рисунок 14

### Аналітичне визначення реакцій опор

Розглянемо систему зрівноважених сил, прикладених до ферми. Відкинемо зв'язки (опори А, В), замінюючи їх дію на ферму

реакціями. Реакцію опори А розкладемо на складові  $\overline{X}_A$  і  $\overline{Y}_A$ , спрямовані вздовж осей координат. Реакцію шарніра В спрямовуємо вниз вздовж осі опорного стержня ВN.

Силу  $\overline{P}_3$  розкладаємо на дві складові  $\overline{P}'_3$  і  $\overline{P}''_3$ , які за модулями дорівнюють  $P'_3 = P_3 \cos \alpha$ ,  $P''_3 = P_3 \sin \alpha$  (рисунок 15).

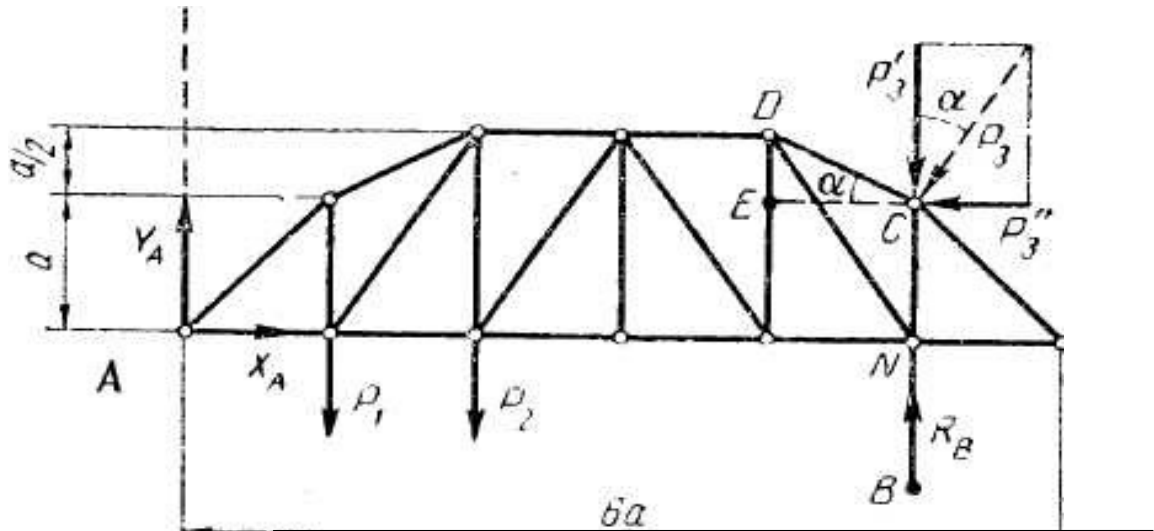


Рисунок 15

Знаходимо  $\cos \alpha$  і  $\sin \alpha$ :

$$\sin \alpha = DE/CD = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,447;$$

$$\cos \alpha = CE/CD = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,894.$$

Визначаємо модулі сил  $\overline{P}'_3 = 76,0$  кН і  $\overline{P}''_3 = 38,0$  кН.

Для плоскої системи сил, прикладених до ферми, складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; -P_1 a - P_2 2a - P'_3 5a + P''_3 a + R_B 5a = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; -P'_3 + X_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; Y_A - P_1 - P_2 - P'_3 + R_B = 0 \quad (3)$$

Із рівняння (1)

$$R_B = (P_1 + P_2 + P'_3 \cdot 5 - P''_3) / 5 = 100 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2)

$$X_A = P'_3 = 38 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3)

$$Y_A = P_1 + P_2 + P'_3 - R_B = 84 \text{ кН.}$$

### Визначення зусиль у стержнях ферм

Знайдемо зусилля у п'яти стержнях ферми способом Ріттера. Для визначення зусиль у стержнях 1, 2, 3 (рисунок 16,а) робимо переріз I-I та розглядаємо рівновагу сил, прикладених до однієї частини ферми (рисунок 16,б).

Доцільно розглядати рівновагу тієї частини ферми, для якої обсяг обчислювальної роботи менший. Спіл склапати такі рівняння рівноваги, кожне з яких вміщувало б Як і раніш, умовно зусилля. Це дозволяє визначити кожн вважаємо, що всі стержні в інших стержнях. розтягнуті. Знак мінус у відповіді свідчить про те, що стержень стиснутий.

a)

Для визначення  $S_1$  складаємо рівняння моментів відносно точки перетину ліній дії  $\bar{s}_2$  і  $\bar{s}_3$  яка має назву точки Ріттера:

$$\sum_{i=1}^n M_{iF} = 0;$$

$$-S_1 \cdot 1,5a - P'_3 \cdot 2a - P''_3 \cdot 0,5a + R_B \cdot 2a = 0,$$

звідки

$$S_1 = (R_B \cdot 2 - P'_3 \cdot 2 - P''_3 \cdot 0,5) / 1,5 = 19,3 \text{ кН.}$$

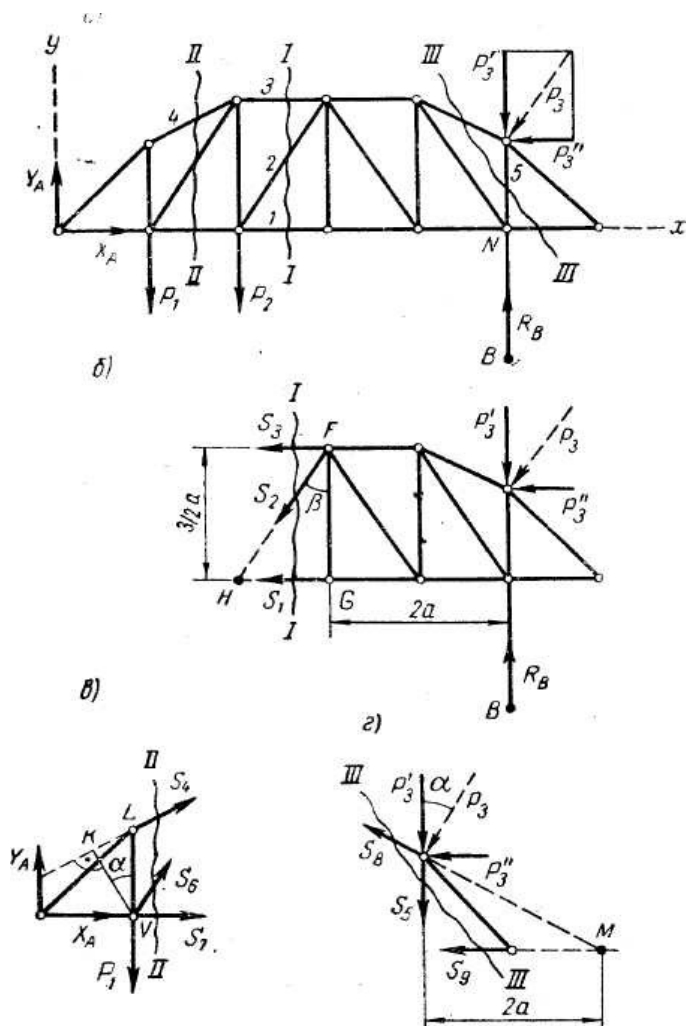


Рисунок 16

Для визначення  $S_2$  складемо рівняння проєкцій сил на вісь  $Ay$ :

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad -S_2 \cos \beta - P'_3 + R_B = 0,$$

де  $\cos \beta = \frac{FG}{FH} = \frac{1,5a}{\sqrt{a^2 + (1,5a)^2}} = 0,832,$

тоді

$$S_2 = (R_B - P'_3) / \cos \beta = 28,8 \text{ кН}.$$

Для визначення  $S_3$  складаємо рівняння моментів відносно точки



перетину ліній дії  $\overline{S_1}$  і  $\overline{S_2}$  (відповідна точки Ріттера):

$$\sum_{i=1}^n M_{iH} = 0; \quad S_3 \cdot 1,5a - P'_3 \cdot 3a + P''_3 \cdot a + R_B \cdot 3a = 0,$$

тоді 
$$S_3 = (P'_3 \cdot 3 - P''_3 - R_B \cdot 3) / 1,5 = - 73,3 \text{ кН.}$$

Для визначення  $S_4$  робимо переріз II-II та розглядаємо рівновагу сил, прикладених до лівої частини ферми (рисунок 16,в).

Складаємо рівняння:

$$\sum_{i=1}^n M_{iV} = 0; \quad - Y_A \cdot a - S_4 \cdot VK = 0,$$

де  $VK = VL \cos \alpha = 0,894 a,$

тоді 
$$S_4 = - Y_A \cdot a / 0,894 a = - 94 \text{ кН.}$$

Для визначення зусилля  $S_5$  робимо переріз III – III та розглянемо рівновагу сил, прикладених до правої частини ферми (рисунок 16,г).

Складаємо рівняння

$$\sum_{i=1}^n M_{iM} = 0; \quad P'_3 \cdot 2a + S_5 \cdot 2a + P''_3 \cdot a = 0,$$

тоді

$$S_5 = - (P'_3 \cdot 2 + P''_3) / 2 = - 95 \text{ кН.}$$

### 3.3 Завдання С 3

**Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл) (таблиця 4, рисунки 17-19).**

Визначити реакції опор та тиск у проміжному шарнірі складеної конструкції. Схеми конструкцій наведені на рисунках 17-19 (розміри - в метрах), навантаження вказані в таблиці 4.

Таблиця 4

Варіант	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	M, кНм	q, кН/м	Варіант	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	M, кНм	q, кН/м
	кН					кН			
<b>1</b>	6,0	-	25,0	0,8	<b>16</b>	8,0	11,0	31,0	0,8
<b>2</b>	5,0	8,0	26,0	-	<b>17</b>	9,0	15,0	26,0	1,1
<b>3</b>	8,0	10,0	33,0	1,1	<b>18</b>	7,0	16,0	27,0	0,8
<b>4</b>	10,0	-	25,0	1,3	<b>19</b>	6,0	18,0	35,0	1,4
<b>5</b>	12,0	-	27,0	1,0	<b>20</b>	7,0	16,0	32,0	0,8
<b>6</b>	14,0	12,0	-	0,9	<b>21</b>	8,0	17,0	30,0	1,2
<b>7</b>	16,0	8,0	18,0	1,4	<b>22</b>	5,0	6,0	34,0	1,5
<b>8</b>	12,0	6,0	20,0	1,0	<b>23</b>	14,0	10,0	36,0	1,2
<b>9</b>	14,0	-	28,0	1,4	<b>24</b>	10,0	13,0	28,0	1,3
<b>10</b>	8,0	-	26,0	0,9	<b>25</b>	11,0	10,0	33,0	1,0
<b>11</b>	15,0	10,0	29,0	1,0	<b>26</b>	15,0	15,0	18,0	1,4
<b>12</b>	15,0	8,0	28,0	1,5	<b>27</b>	11,0	14,0	36,0	1,5
<b>13</b>	7,0	6,0	15,0	1,1	<b>28</b>	12,0	12,0	30,0	1,1
<b>14</b>	5,0	-	30,0	0,9	<b>29</b>	10,0	9,0	35,0	1,3
<b>15</b>	6,0	10,0	24,0	1,5	<b>30</b>	9,0	10,0	29,0	1,5

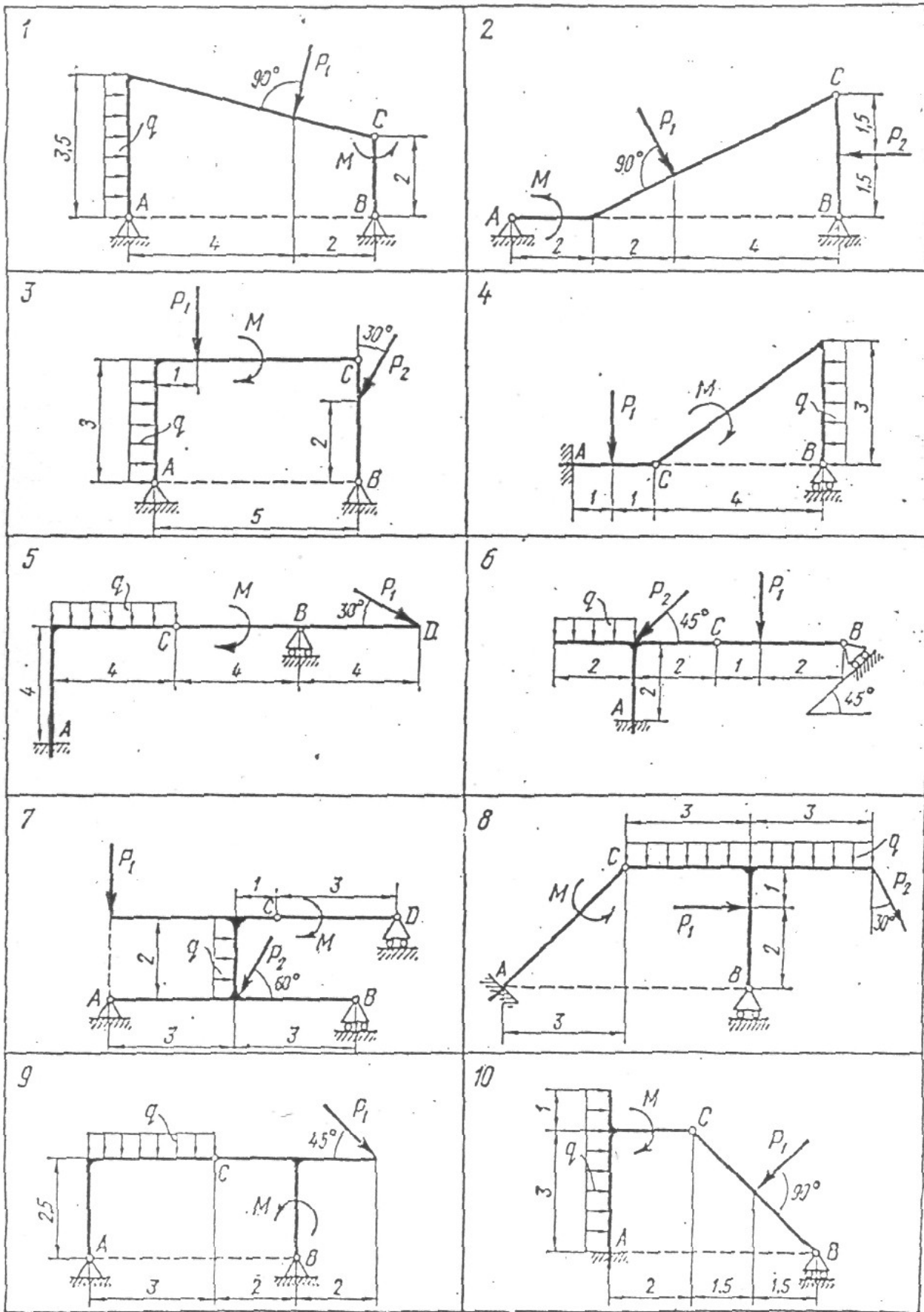


Рисунок 17

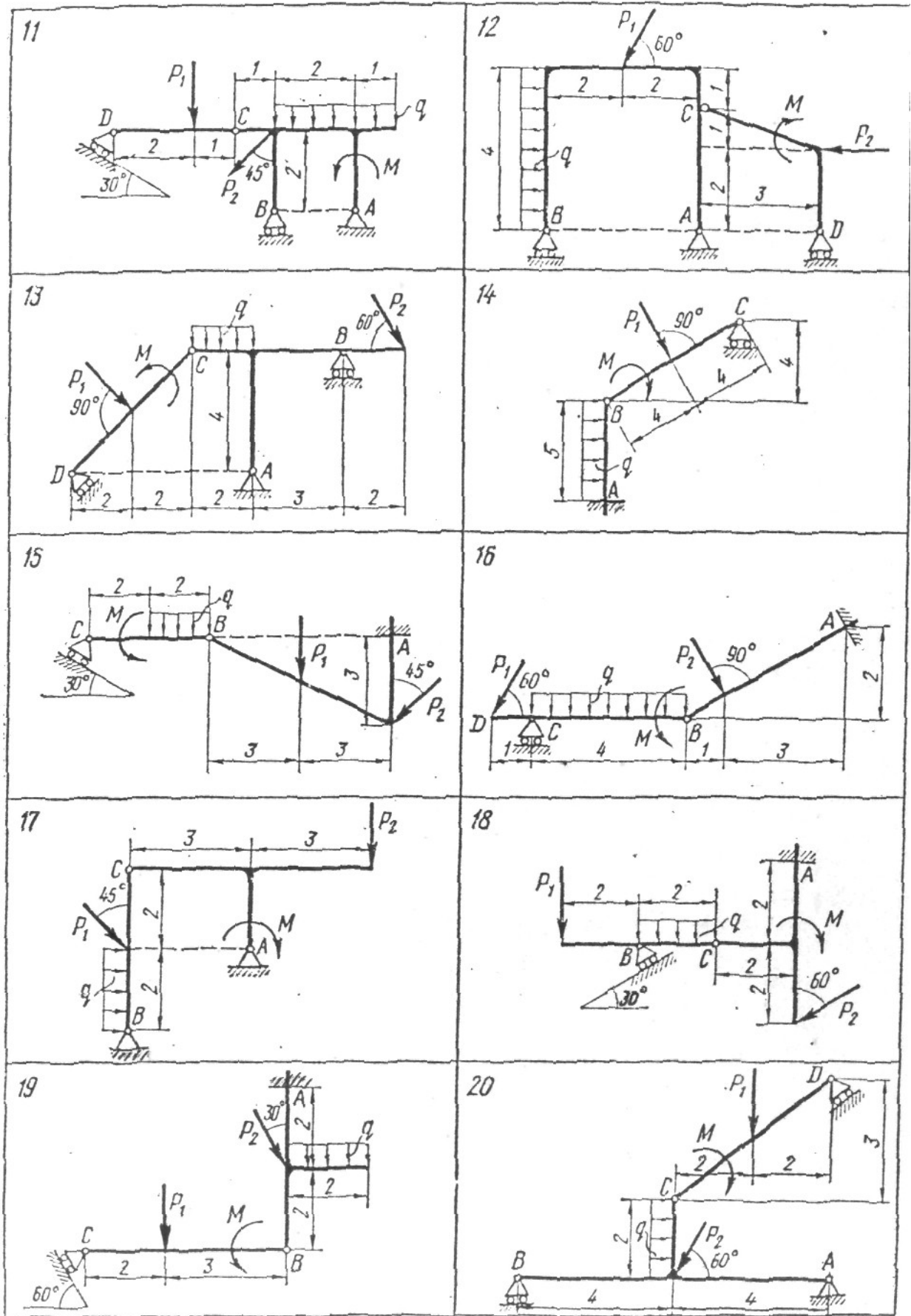


Рисунок 18

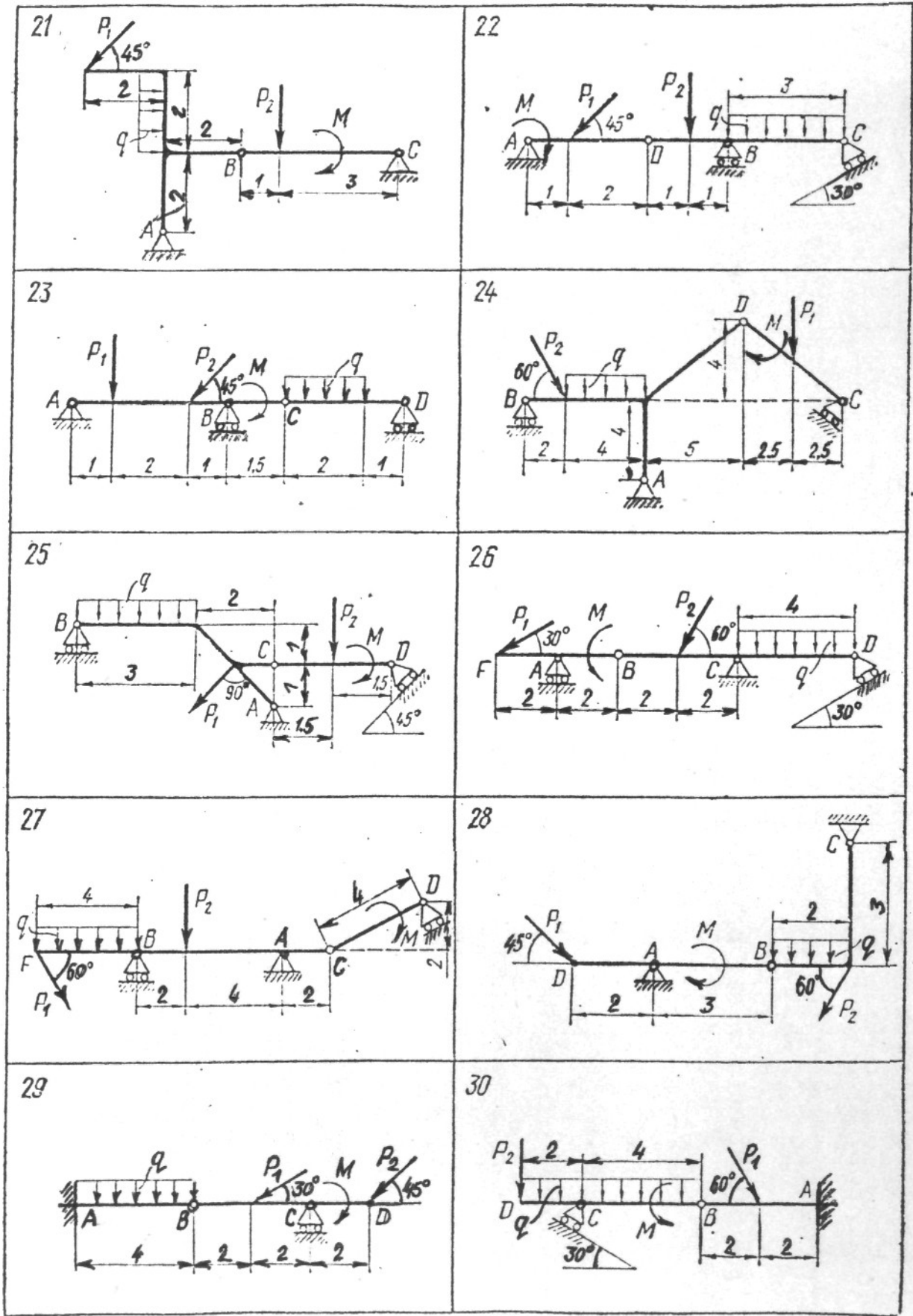


Рисунок 19

## Типовий звіт завдання С 3

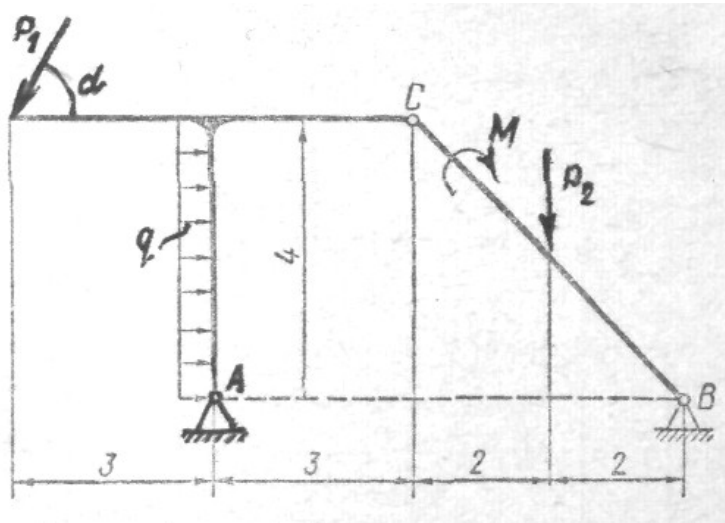


Рисунок 20

**Дано:**

Схема конструкції  
(рисунок 20),

$P_1 = 10$  кН,  $P_2 = 12$  кН,  
 $M = 25$  кНм,  $q = 2$  кН/м,  $\alpha = 60^\circ$ .

**Визначити:**

Реакції опор та тиск у проміжному шарнірі.

### Розв'язок

Розглянемо систему сил, що зрівноважуються, і прикладені до всієї конструкції (рисунок 21), що дозволить визначити вертикальні складові реакцій опор А і В.

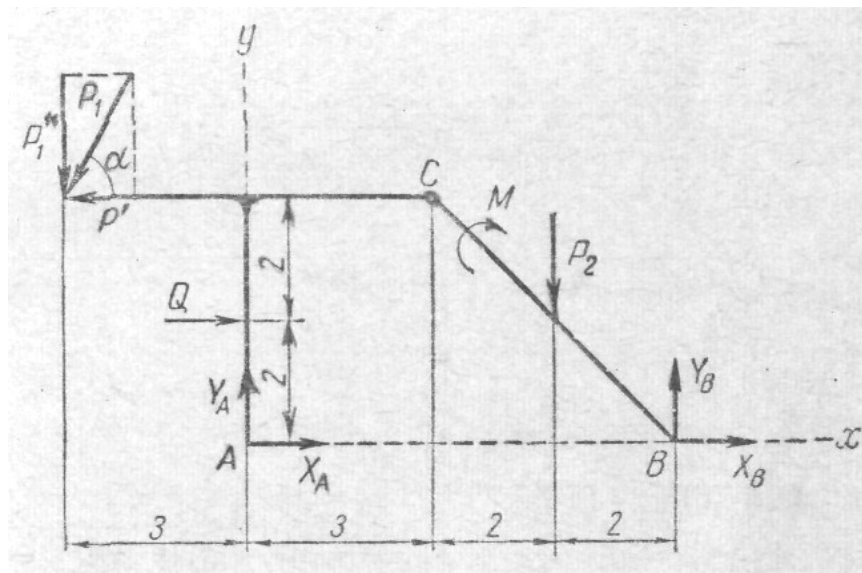


Рисунок 21

Для спрощення визначення моменту сили  $\overline{P_1}$  розкладаємо її на складові  $\overline{P_1'}$  та  $\overline{P_1''}$ :

$$P_1' = P_1 \cos \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН},$$

$$P_1'' = P_1 \sin \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - P_1' + Q = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - P_1'' - P_2 = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad Y_B \cdot 7 + P_1' \cdot 4 + P_1'' \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \cdot 5 = 0, \quad (3)$$

де  $Q = 4 \cdot q = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН}$ .

Із рівняння (2)

$$Y_B = \frac{-P_1' \cdot 4 - P_1'' \cdot 3 + Q \cdot 2 + M + P_2 \cdot 5}{7} = \frac{-5 \cdot 4 - 8,66 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 25 + 12 \cdot 5}{7} = 7,86 \text{ кН}.$$

Із рівняння (3)

$$Y_A = -Y_B + P_1'' + P_2 = -7,86 + 8,66 + 12 = 12,8 \text{ кН}.$$

Рівняння (1), що має два невідомих, не дозволяє визначити їх чисельні значення і встановлює лише залежність між ними.

Розглянемо тепер системи сил, що зрівноважуються, прикладених до правої частини конструкції (рисунок 22).

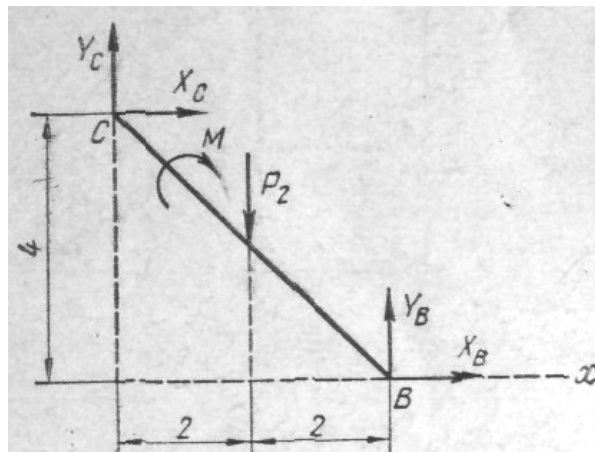


Рисунок 22

$$\sum X_i = 0, \quad X_C + X_B = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_C + Y_B - P_2 = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_{iA} = 0,$$

$$X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 4 - M - P_2 \cdot 2 = 0. \quad (6)$$

Із рівняння (4)

$$X_C = -X_B = -4,39 \text{ кН.}$$

Із рівняння (5)

$$Y_C = -Y_B + P_2 = 12 - 7,86 = 4,14 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6)

$$X_B = \frac{M + P_2 \cdot 2 - Y_B \cdot 4}{4} = \frac{25 + 12 \cdot 2 - 7,86 \cdot 4}{4} = 4,39 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1)

$$X_A = -X_B + P_1' - Q = -4,39 + 5 - 8 = -7,39 \text{ кН.}$$

Для перевірки достовірності розрахунків впевнимся в тому, що виконується будь-яке із рівнянь рівноваги для сил, що прикладені до всієї конструкції (рисунок 21), наприклад,

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} &= 0; \quad -Y_A \cdot 7 + P_1' \cdot 4 + P_1'' \cdot 10 - Q \cdot 2 - M + P_2 \cdot 2 = \\ &= -12,8 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 8,66 \cdot 10 - 8 \cdot 2 - 25 + 12 \cdot 2 = 130,6 - 130,6 = 0. \end{aligned}$$

Результати розрахунків наведені в таблиці 5.



Таблиця 5

Сили, кН					
$X_A$	$Y_A$	$X_B$	$Y_B$	$X_C$	$Y_C$
-7,39	12,8	4,39	7,86	-4,39	4,14

### 3.4 Завдання С 4

#### Рівновага сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою) (таблиця 6, рисунки 23-25).

Визначити мінімальне (у варіантах 1-20, 25, 26, 29, 30) або максимальне (у варіантах 21-24, 27, 28) значення сили  $P$  та реакції опор системи (точки вказані в таблиці), яка знаходиться в стані спокою. Схеми варіантів подані на рисунках 23-25, а необхідні для розрахунків дані - в таблиці 6.

Тертям в опорних пристроях знехтувати. Вагу стержнів, колодок та ниток не враховувати.

Таблиця 6

Варіант	G	Q	a	b	c	$\alpha$ , град.	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)	Точки, в яких визначаються реакції
	кН		м					
1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	О, А
2	1,1	-	0,10	0,15	-	30	0,15	О, А, В
3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	О, А
4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	-	0,25	О, А
5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	О, А
6	1,6	18	0,15	0,10	-	45	0,35	О, А, В
7	2,0	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	О, А
8	2,2	18	0,20	0,10	-	30	0,35	О, А, В
9	2,1	20	0,10	0,20	-	30	0,30	О, А, В
10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	О, А

<b>11</b>	1,9	24	0,40	0,50	0,06	-	0,20	O, A
<b>12</b>	2,0	25	0,10	0,25	-	30	0,15	O, A, B

Продовження таблиці 6

<b>1</b>	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>13</b>	1,6	20	0,10	0,10	-	45	0,10	O, A, B
<b>14</b>	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	O, A
<b>15</b>	1,8	20	0,10	0,15	-	45	0,20	O, A, B
<b>16</b>	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	O, A
<b>17</b>	1,3	12	0,15	0,15	-	45	0,30	O, A, B, C
<b>18</b>	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	O, A
<b>19</b>	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	A, C, D
<b>20</b>	1,6	18	0,10	0,15	-	-	0,45	O, A, B
<b>21</b>	1,0	-	2	0,5	-	45	0,45	A, B, C, D
<b>22</b>	1,5	-	3	0,8	-	30	0,35	A, B, C, D
<b>23</b>	2,0	-	5	1,4	-	-	0,40	A, B, C
<b>24</b>	3,0	-	4	0,8	-	-	0,30	A, B, C, D
<b>25</b>	1,0	-	0,8	0,4	-	30	0,25	A, B, C, D
<b>26</b>	2,0	-	0,4	-	-	-	0,25	A, B, C
<b>27</b>	4,0	-	4	1,0	-	45	0,35	A, B, C, D
<b>28</b>	5,0	-	5	0,8	-	30	0,40	A, B, C, D
<b>29</b>	2,0	-	2	0,3	-	30	0,20	A, B, C
<b>30</b>	1,0	-	2	8,0	-	30	0,20	A, B, C, D



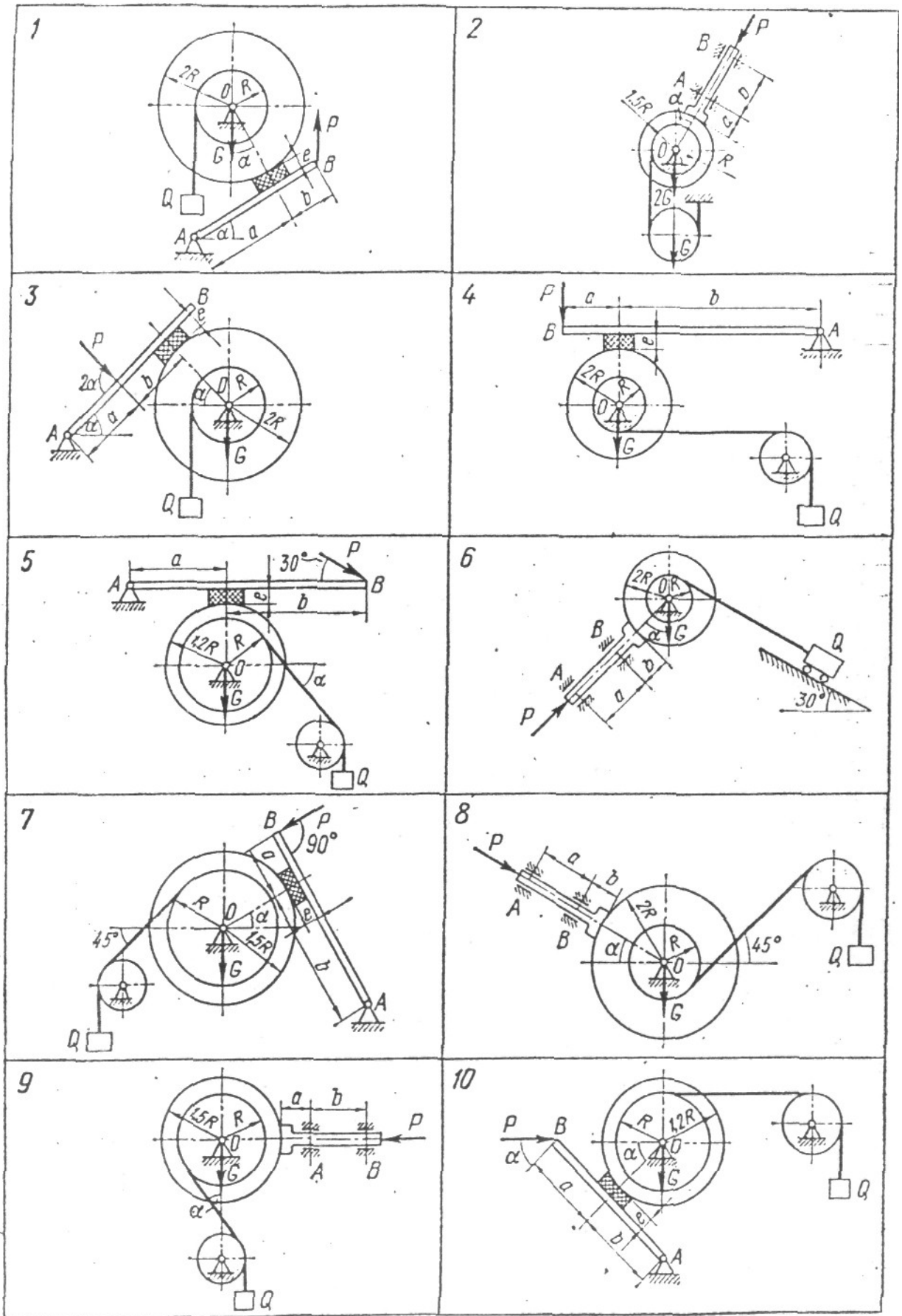


Рисунок 23

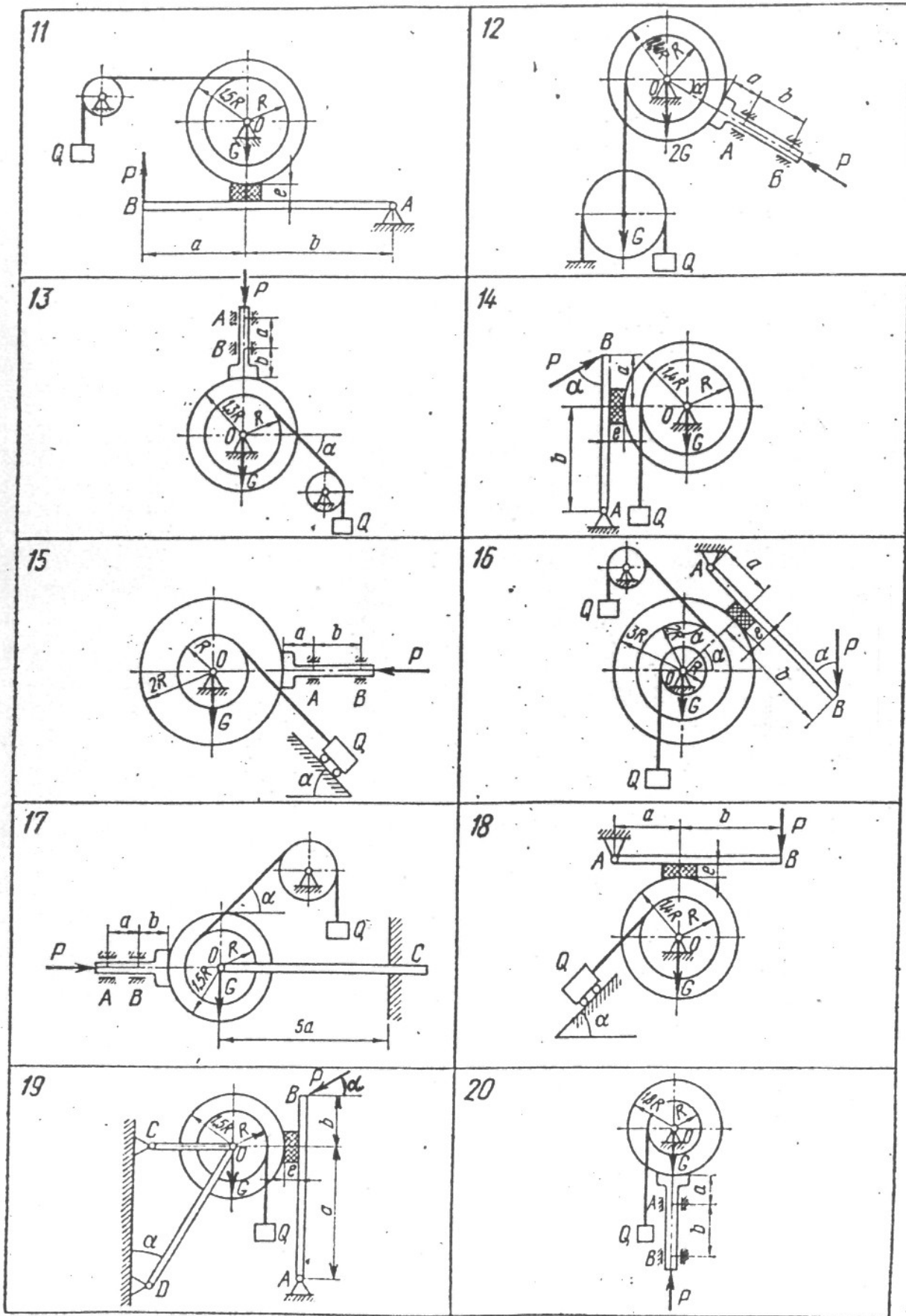


Рисунок 24

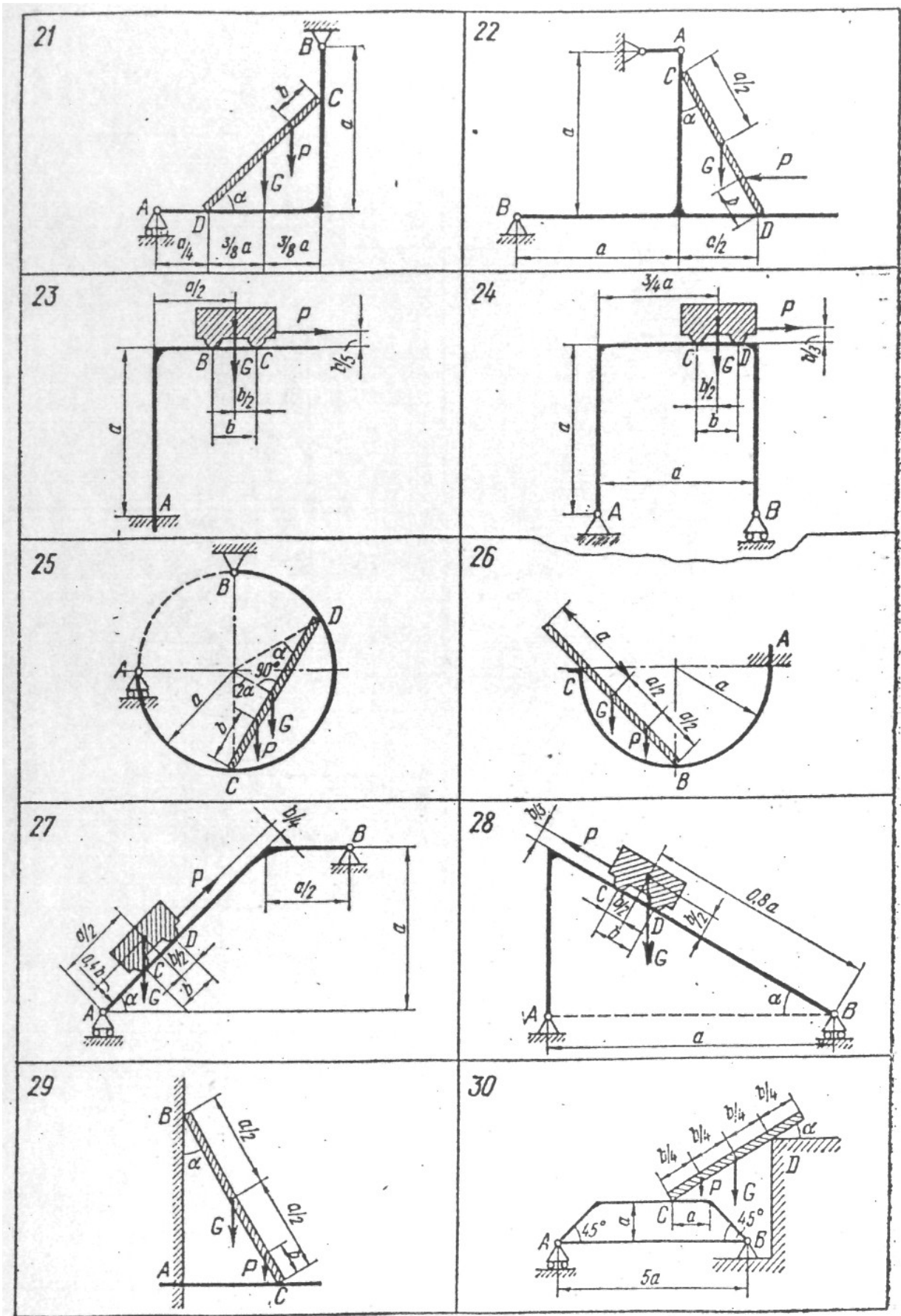


Рисунок 25

## Типовий звіт завдання С 4

### Приклад виконання завдання до варіантів 1-20

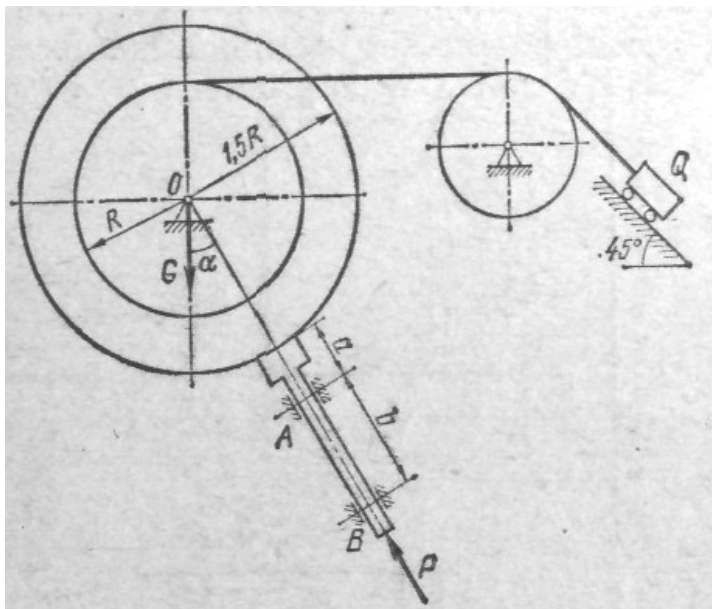


Рисунок 26

#### Дано:

$G = 2$  кН,  $Q = 20$  кН,  $\alpha = 20^\circ$ ,  
 $f = 0,1$  - коефіцієнт зчеплення (тертя спокою),  
 $a = 10$  см,  $b = 20$  см  
 (рисунок 26).

#### Визначити:

Мінімальне значення сили  $P$  і реакції опор  $O$ ,  $A$  та  $B$ .

### Розв'язок

Розглянемо спочатку зрівноважену систему сил, прикладених до тіла  $Q$  (рисунок 27)

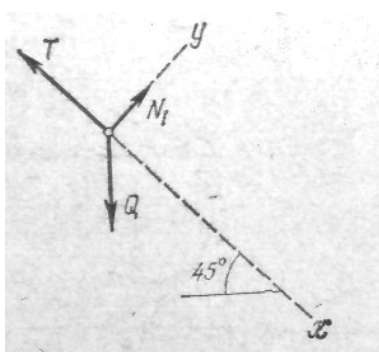


Рисунок 27

На тіло діють: сила ваги  $\bar{Q}$ , реакції нитки  $\bar{T}$  та нормальна реакція  $\bar{N}_1$ .

Розглядаючи тіло  $Q$  як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги указаних сил:

$$\sum X_i = 0; \quad Q \cos 45^\circ - T = 0,$$

звідки

$$T = Q \cos 45^\circ = 20 \cdot 0,707 = 14,1 \text{ кН.}$$

Далі розглянемо рівновагу сил, які прикладені до барабана (рисунок 28):

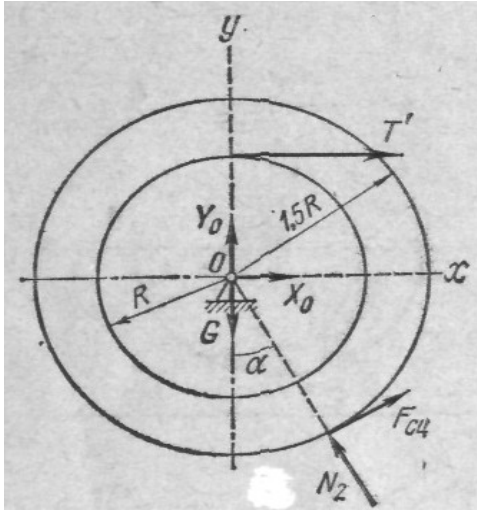


Рисунок 28

$$\sum M_{iO} = 0; \quad -T' \cdot R + F_{3ч} \cdot 1,5R = 0, \quad (1)$$

де  $F_{3ч}$  - сила зчеплення (сила тертя спокою).

$$\sum X_i = 0; \quad T' + F_{3ч} \cdot \cos \alpha - N_2 \sin \alpha + X_O = 0. \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -G + F_{3ч} \cdot \sin \alpha + N_2 \cos \alpha + Y_O = 0. \quad (3)$$

Для випадку крайньої рівноваги система рівнянь (1) - (3) доповнюється рівнянням

Із рівняння (1)

$$F_{3ч} = \frac{T' \cdot R}{1,5R} = \frac{14,1}{1,5} = 9,4 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4)

$$N_2 = \frac{F_{3ч}}{f} = \frac{9,4}{0,1} = 94 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2)

$$X_O = -T' - F_{3ч} \cdot \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = -14,1 - 9,4 \cdot 0,94 + 94 \cdot 0,342 = 9,2 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3)

$$Y_O = G - F_{3ч} \cdot \sin \alpha - N_2 \cos \alpha = 2 - 9,4 \cdot 0,342 - 94 \cdot 0,94 = -89,6 \text{ кН.}$$

Для визначення мінімального значення сили Р і реакцій опор А і В (ці реакції перпендикулярні до напрямних А і В) розглянемо рівновагу сил, що прикладені до гальмівного пристрою (рисунок 29).



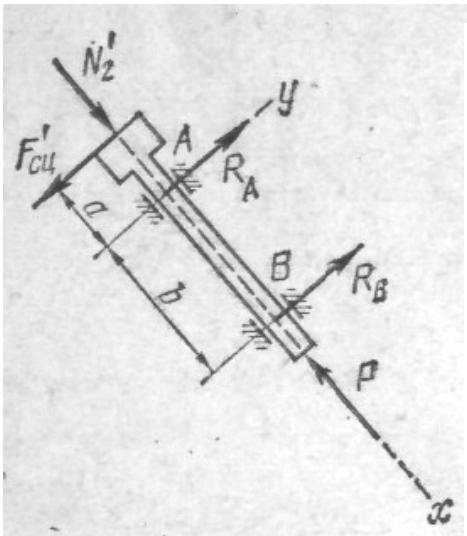


Рисунок 29

$$\sum M_{iA} = 0, \quad F'_{3y} \cdot a + R_B \cdot b = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0, \quad N'_2 - P_{\min} = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + R_B - F'_{3y} = 0. \quad (7)$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$R_B = -(F'_{3y} \cdot a) / b = -(9,4 \cdot 0,1) / 0,22 = -4,7 \text{ кН},$$

$$P_{\min} = N'_2 = 94 \text{ кН},$$

$$R_A = -R_B + F'_{3y} = -(-4,7) + 9,4 = 14,1 \text{ кН}.$$

### Приклад виконання завдання до варіантів 21-30

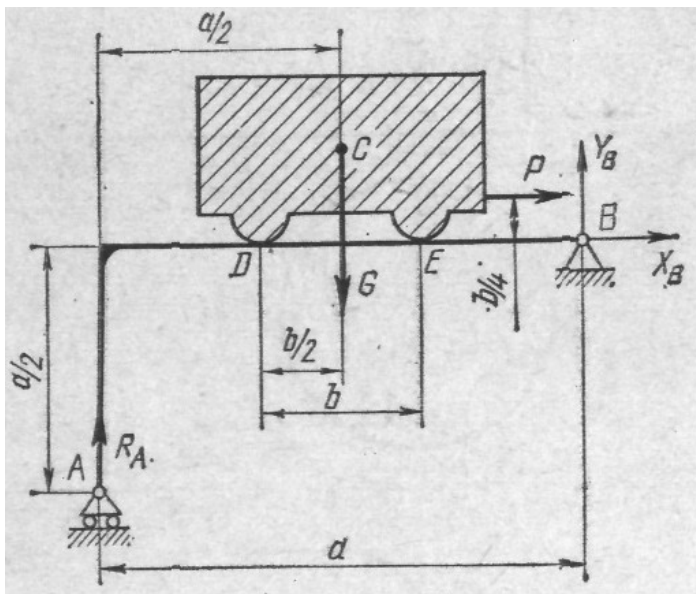


Рисунок 30

**Дано:**

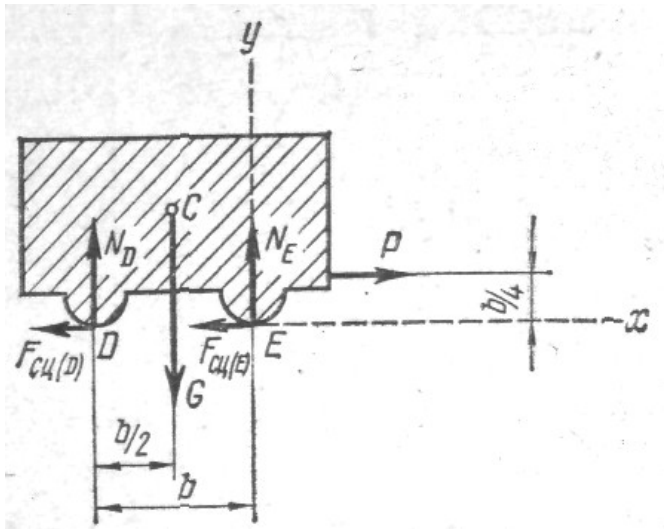
$G = 1 \text{ кН}$ ,  $f = 0,4$  - коефіцієнт зчеплення (тертя спокою),  
 $a = 6 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$  (рисунок 30).

**Визначити:**

Максимальне значення сили  $P$  і реакції опор  $A$ ,  $B$ ,  $D$  і  $E$ .

### Розв'язок

Розглянемо спочатку зрівноважену систему сил, прикладених до тіла вагою  $G$  (рисунок 31).



До тіла прикладені сили: сила ваги  $\overline{G}$ , сила  $\overline{P}$ , нормальні реакції  $\overline{N}_D$  та  $\overline{N}_E$ , а також сили зчеплення  $\overline{F}_{зчD}$  та  $\overline{F}_{зчE}$  (сили тертя спокою).

Складемо рівняння рівноваги вказаних сил:

Рисунок 31

$$\sum X_i = 0; -F_{зчD} - F_{зчE} + P = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; N_D + N_E - G = 0. \quad (2)$$

$$\sum M_{iD} = 0; -G \cdot \frac{b}{2} + N_E \cdot b - P \cdot \frac{b}{4} = 0. \quad (3)$$

У випадку крайньої рівноваги  $P = P_{\max}$  система рівнянь (1) - (3) доповнюється рівняннями

$$F_{зчD} = f \cdot N_D, \quad (4)$$

$$F_{зчE} = f \cdot N_E. \quad (5)$$

Підставляючи (4) та (5) у рівняння (1), отримаємо

$$-f \cdot N_D - f \cdot N_E + P_{\max} = 0. \quad (1')$$

Із рівняння (2)

$$N_D + N_E = G. \quad (2')$$

Із рівнянь (1') та (2')

$$P_{\max} = f \cdot (N_D + N_E) = f \cdot G = 0,4 \cdot 1 = 0,4 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3)

$$N_E = \frac{P \max \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{f \cdot G \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{0,4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot \frac{2}{2}}{2} = 0,6 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2)

$$N_D = G - N_E = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ кН.}$$

Із рівнянь (4) і (5)

$$F_{зчD} = f \cdot N_D = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \text{ кН,}$$

$$F_{зчE} = f \cdot N_E = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \text{ кН.}$$

Сукупності сил  $\overline{N_D}$  та  $\overline{F_{зчD}}$ ,  $\overline{N_E}$  та  $\overline{F_{зчE}}$  складають відповідно опорні реакції в точках D і E.

Розглянемо тепер рівновагу системи сил  $\overline{R_A}$ ,  $\overline{X_B}$ ,  $\overline{Y_B}$ ,  $\overline{G}$  і  $\overline{P} = \overline{P \max}$ , які прикладені до всієї системи (рисунок 30):

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + P \max = 0. \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - G + Y_B = 0. \quad (7)$$

$$\sum M_{iD} = 0; \quad G \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot a - P \max \cdot \frac{b}{4} = 0. \quad (8)$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$X_B = -P \max = -0,4 \text{ кН,}$$

$$R_A = \frac{-P \max \cdot \frac{b}{4} + G \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{-0,4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 3}{6} = 0,467 \text{ кН,}$$

$$Y_B = G - R_A = 1 - 0,467 = 0,533 \text{ кН.}$$

### 3.5 Завдання С 5

**Система сил, які не лежать в одній площині**  
**Система довільних сил**

**Зведення системи сил до простішого вигляду (таблиця 7,  
рисунок 32)**

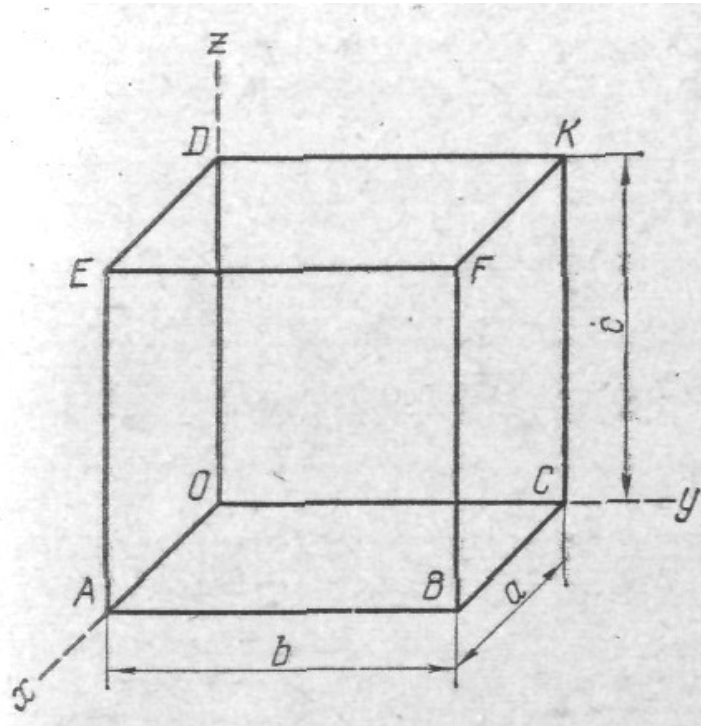


Рисунок 32

Визначити головний вектор  $\overline{R}^*$  та головний момент  $\overline{M}_O$  заданої системи сил відносно центра O та встановити, до якого найпростішого вигляду приводиться надана система сил.

Розміри паралелепіпеда (рисунок 32), а також модулі і напрямки діючих сил надано в таблиці 7.



При виконанні завдання необхідно:

1 Зобразити надану систему сил після побудови паралелепіпеда у масштабі. Кут  $\angle xOy$  показати на рисунку 32 рівним  $135^\circ$ . Скорочення розмірів вздовж осі  $Ox$  прийняти рівним 1:2.

2 Обравши систему координатних осей, визначити модуль і напрямок головного вектора заданої системи сил за його проекціями на координатні вісі та зобразити  $\overline{R}^*$  на рисунку 32.

3 Визначити головний момент заданої системи відносно центра  $O$  за його проекціями на координатні осі та зобразити  $\overline{M}_O$  на малюнку.

4 Визначити найменший головний момент заданої системи сил.

5 На базі отриманих результатів значень головного вектора та найменшого головного моменту системи  $\overline{M}^*$  встановити, до якого найпростішого вигляду приводиться надана система сил. При цьому необхідно:

а) якщо надана система сил приводиться до пари сил, то показати момент цієї пари, прикладаючи його до точки  $O$ ;

б) якщо задана система сил приводиться до рівнодійної сили, то знайти рівняння лінії дії рівнодійної, визначити точки перетину цією лінією координатних площин та зобразити  $\overline{R}$  на малюнку;

в) якщо задана система сил приводиться до динами (силового гвинта), то знайти рівняння центральної осі, визначити точки перетину цією віссю координатних площин та зобразити  $\overline{R}^*$  та  $\overline{M}^*$  на рисунку 32.

## Типовий звіт завдання С 5

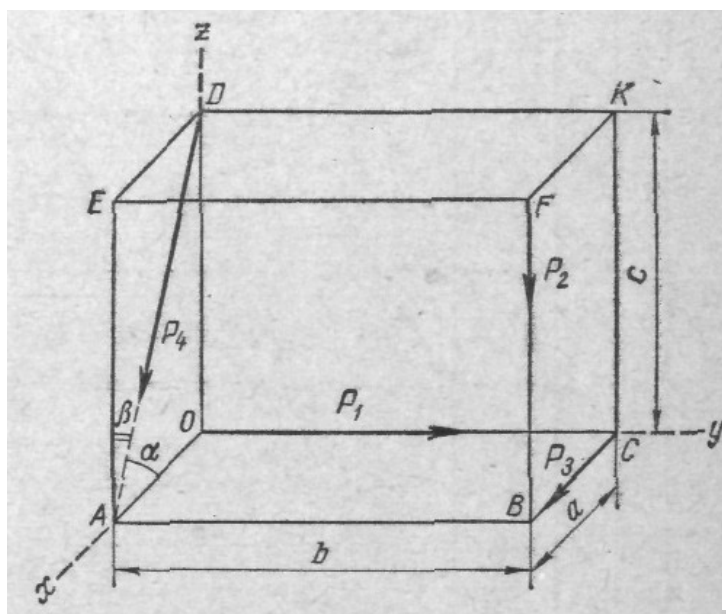
**Дано:**

Система сил  $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$ . Модулі, точки прикладання та напрямки цих сил указані в таблиці 8.

Таблиця 8

	Сили системи
--	--------------

Розміри паралелепіпеда, см			$\overline{P_1}$			$\overline{P_2}$			$\overline{P_3}$			$\overline{P_4}$		
$a$	$b$	$c$	Модуль, Н	Точка прикладання	Напрямок	Модуль, Н	Точка прикладання	напрямок	Модуль, Н	Точка прикладання	напрямок	Модуль, Н	Точка прикладання	Напрямок
60	30	20	4	F	FK	6	A	AE	8	B	BA	10	D	DK



### Розв'язок

1 Визначення модуля та напрямку головного вектора заданої системи сил за його проєкціями на координатні осі.

Задана система сил показана на рисунку 33.

Рисунок 33

Оскільки  $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ см}$ ,

то

$$\cos \alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{30}{50} = 0,6,$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{AD} = \frac{40}{50} = 0,8.$$



## Проекції головного вектора на осі координат

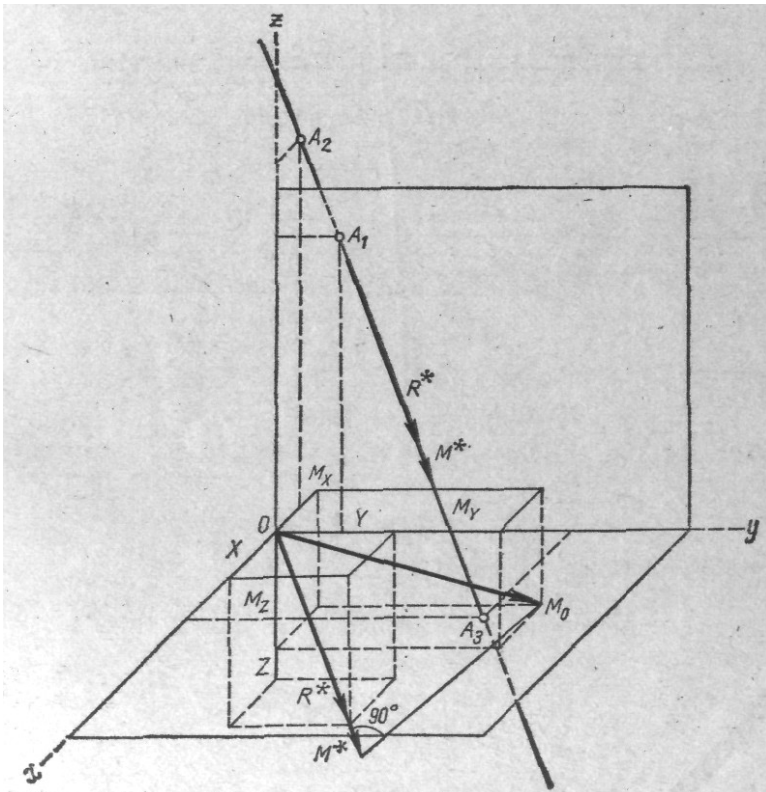
$$R_x = P_3 + P_4 \cos \alpha = 4 + 11 \cdot 0.6 = 10.6 \text{ Н},$$

$$R_y = P_1 = 10 \text{ Н},$$

$$R_z = -P_2 - P_4 \cos \beta = -4 - 11 \cdot 0.8 = -12.8 \text{ Н}.$$

## Модуль головного вектора

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{10.6^2 + 10^2 + (-12.8)^2} = \sqrt{376.2} = 19.4 \text{ Н}.$$



## Напрямні косинуси

$$\cos(\overline{R^*}, \overline{i}) = R_x / R^* = 10.6 / 19.4 = 0,$$

;

$$\cos(\overline{R^*}, \overline{j}) = R_y / R^* = 10 / 19.4 = 0.51$$

;

$$\cos(\overline{R^*}, \overline{k}) = R_z / R^* = -12.8 / 19.4 =$$

Рисунок 34

2 Визначення головного моменту заданої системи сил відносно центра О.

Головні моменти заданої системи сил відносно координатних осей:

$$M_x = -P_2 \cdot b = -4 \cdot 50 = -200 \text{ Н см},$$

$$M_y = P_2 \cdot a + P_4 \cos \beta \cdot a = 4 \cdot 30 + 11 \cdot 0,8 \cdot 30 = 384 \text{ Н см},$$

$$M_z = -P_3 \cdot b = -4 \cdot 50 = -200 \text{ Н см}.$$

Модуль головного моменту

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-200)^2 + 384^2 + (-200)^2} = 476,9 \text{ Н см}.$$

Направляючі косинуси

$$\cos(\overline{M_o}, \overline{i}) = \frac{M_x}{M_o} = \frac{-200}{476,9} = -0,419,$$

$$\cos(\overline{M_o}, \overline{j}) = \frac{M_y}{M_o} = \frac{384}{476,9} = 0,805,$$

$$\cos(\overline{M_o}, \overline{k}) = \frac{M_z}{M_o} = \frac{-200}{476,9} = -0,419.$$

Головний момент показаний на рисунку 34.

3 Визначення найменшого головного моменту заданої системи сил.

$$M^* = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R^*} = \frac{10,6 \cdot (-200) + 10 \cdot 384 + (-12,8) \cdot (-200)}{19,4} = 220,6 \text{ Н см}.$$

4 Оскільки  $R^* \neq 0$  і  $M^* \neq 0$ , задана система сил приводиться до динами (силового гвинта).

Рівняння центральної осі:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Підставляючи в це рівняння знайдені величини, отримаємо:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M^*}{R^*}, \quad \frac{-200 - (y(-12,8) - z10)}{10,6} = \frac{220,6}{19,4},$$

$$6,4y + 5z = 160. \tag{1}$$

$$\frac{My - (zRx - xRz)}{Ry} = \frac{M^*}{R^*}, \quad \frac{384 - (z \cdot 10.6 - x \cdot (-12,8))}{10} = \frac{220,6}{19,4},$$

$$5.3z + 6.4x = 135. \quad (2)$$

Координати точок перетину центральною віссю координатних площин визначаємо за допомогою рівнянь центральної осі (1) та (2).

Примітка - Якщо сили системи приводяться до рівнодійної, тобто  $M^* = 0$ , а  $R = R^* \neq 0$ , то рівняння лінії дії рівнодійної:

$$Mx = yRz - zRy, \quad My = zRx - xRz, \quad Mz = xRy - yRx,$$

де  $Rx, Ry, Rz$  - проекції рівнодійної сили на координатні осі,

$Mx, My, Mz$  - головні моменти заданої системи сил відносно координатних осей.

Із цих трьох рівнянь незалежними є тільки два.

Центральна вісь системи сил показана на рисунку 34.

Отримані значення координат подані в таблиці 9.

Таблиця 9

Точки	Координати, см		
	$x$	$y$	$z$
$A_1$	0	5,1	25,5
$A_2$	-5,4	0	32,0
$A_3$	21,1	25,5	0

### 3.6 Завдання С 6

**Визначення реакцій опор твердого тіла (таблиця 10, рисунки 35-37)**

Знайти реакції опор конструкції. Схеми конструкцій показані на рисунках 35-37. Необхідні для розрахунку дані наведено в

таблиці 10.  
Таблиця 10

Варіант	Сили, кН			Розміри, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	-	20	20	30	10	15	5
2	4	-	2	20	10	30	10	10
3	6	-	4	15	15	20	-	15
4	3	-	2	30	20	40	15	10
5	5	4	3	30	40	20	20	15
6	1	3	2	40	30	20	20	10
7	-	6	1	30	10	5	18	6
8	4		3	20	40	15	20	10
9	5	-	3	20	15	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	-	2	1	20	30	15	15	10
12	4	-	1	25	20	8	15	10
13	10	-	5	40	30	20	25	15
14	-	2	1	30	90	20	30	10
15	3	-	2	60	20	40	20	5
16	4	-	2	50	30	-	-	-
17	2	-	1	15	10	20	20	5
18	6	-	2	60	40	60	-	-
19	-	8	2	20	30	40	20	15
20	4	-	-	60	40	20	-	-
21	2	-	-	40	60	30	-	-
22	-	-	5	20	50	30	-	-
23	-	-	4	40	30	50	-	-
24	5	-	2	-	-	-	-	-
25	-	-	3	50	50	60	-	-
26	-	-	1	20	60	40	-	-
27	-	-	1	50	30	-	-	-
28	2	-	6	30	10	50	10	15
29	-	4	3	15	20	15	15	10
30	-	-	4	40	30	10	-	-

Примітки.

1 Вважати, що в варіантах 16, 18, 22 - 27, 30 петлі не заважають переміщенню рами вздовж АВ.

2 У варіантах 20, 21 та 28 поверхні, що стикаються, є абсолютно гладкими.

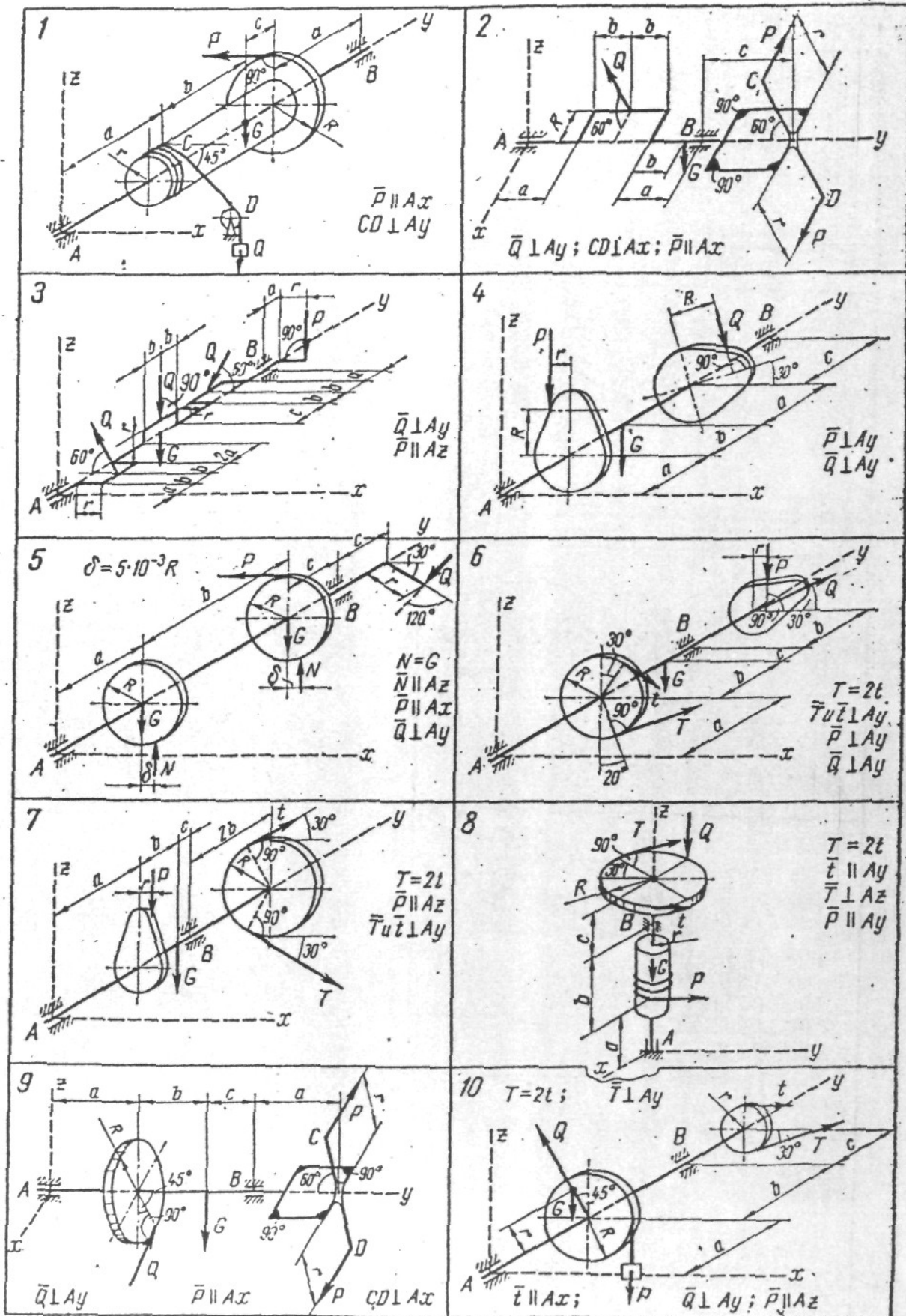


Рисунок 35

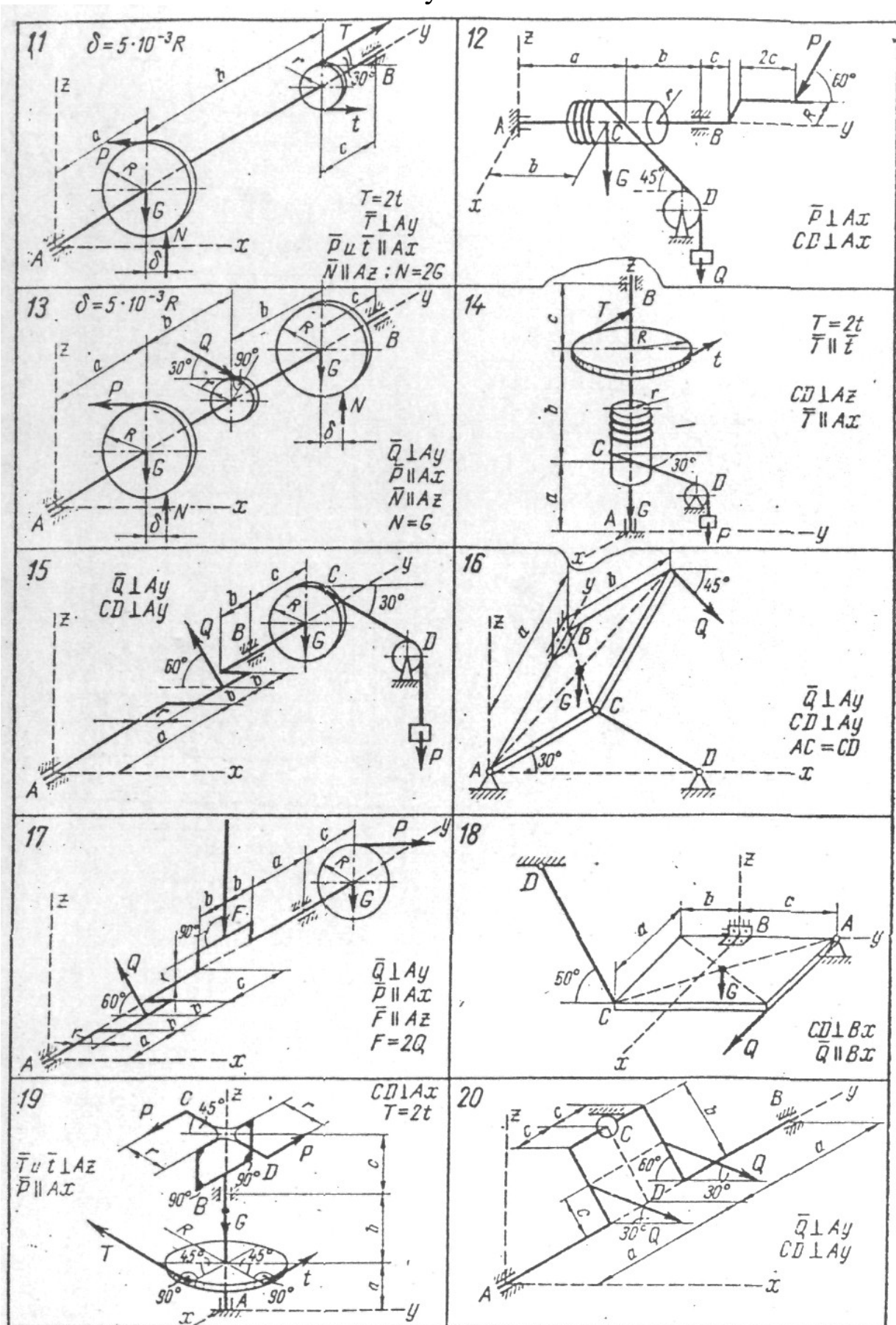
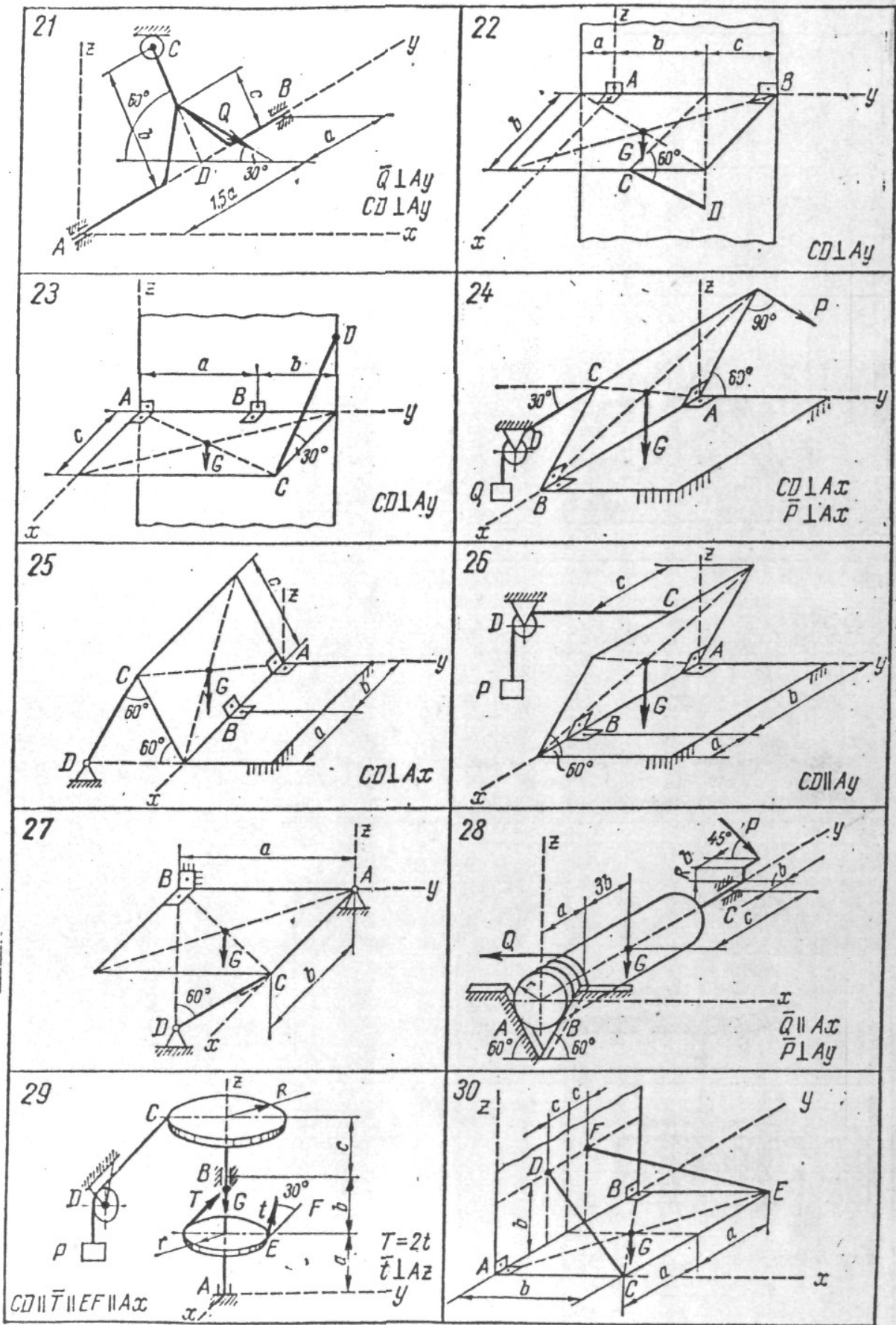


Рисунок 36



### Рисунок 37

### Типовий звіт завдання С 6

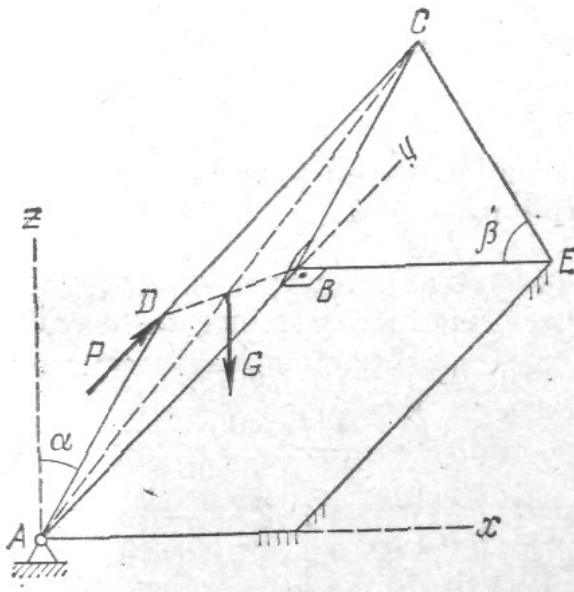


Рисунок 38

#### Дано:

Рама ABCD вагою  $G = 1$  кН,

$P = 2$  кН,  $\vec{P} \parallel Ay$ ,  $AD = CD = 100$  см,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  (рисунок 38).

#### Визначити:

$\vec{R}_A$  та  $\vec{R}_B$  (A - шаровий шарнір, B - петля).

#### Розв'язок

Розглянемо рівновагу сил, які прикладені до рами: сили ваги  $\vec{G}$ , сили  $\vec{P}$ , реакції  $\vec{S}$  стержня CE та складових реакцій опор A і B:  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{Z}_A$ ,  $\vec{X}_B$ ,  $\vec{Z}_B$  (рисунок 39).

По-перше, складемо рівняння моментів сил відносно осі, що проходить через точки A і B:

$$\sum M_{iy} = 0;$$

$$G(BC/2)\sin 30^\circ - S \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

звідки

$$S = (G \sin 30^\circ) / (2 \cdot \sin 60^\circ) =$$

$$= (1 \cdot 0,5) / (2 \cdot 0,866) = 0,289 \text{ кН.}$$

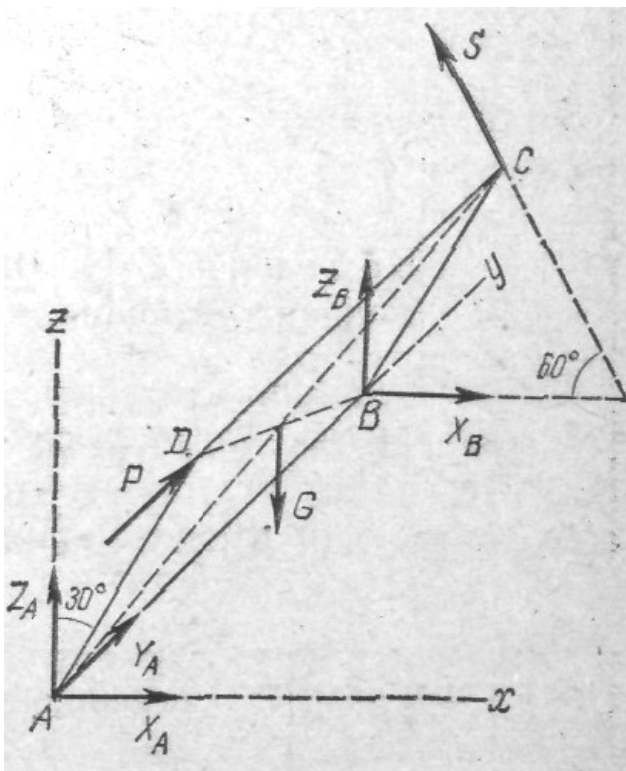


Рисунок 39



Далі складемо рівняння моментів сил відносно координатних осей  $Ax$  та  $Az$ :

$$\sum M_{ix} = 0, \quad -P \cdot AD \cdot \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cdot \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0,$$

звідки

$$Z_B = \frac{P \cdot AD \cos 30^\circ + G \cdot AB/2 - S \cos 30^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,866 + 1 \cdot 50 - 0,289 \cdot 0,866 \cdot 100}{100} = 1,29$$

кН.

$$\sum M_{iz} = 0, \quad P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + S \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + X_B \cdot AB = 0,$$

$$X_B = \frac{P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,5 + 0,289 \cdot 0,5 \cdot 100}{100} = 0,744 \text{ кН.}$$

Наостанку, складемо рівняння проекцій сил на осі координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$X_A = -X_B + S \cdot \cos 60^\circ = -0,744 + 0,289 \cdot 0,5 = -0,6 \text{ кН,}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0; \quad Y_A = -P = -2 \text{ кН.}$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$Z_A = G - Z_B - S \cdot \cos 30^\circ = 1 - 1,29 - 0,289 \cdot 0,866 = -0,54 \text{ кН.}$$

Таким чином, реакції всіх зв'язків конструкції знайдені.

### 3.7 Завдання С 7

#### Визначення положення центра ваги тіла (рисунки 40-42)

Знайти координати центра ваги плоскої ферми, складеної із тонких однорідних стержнів однакової погонної ваги (варіанти 1-6), плоскої фігури (варіанти 7-18 і 24-30) або об'єму (варіанти 19-23), які

зображено на рисунках 40-42. У варіантах 1-6 розміри указано в метрах, а у варіантах 7-30 - в сантиметрах.

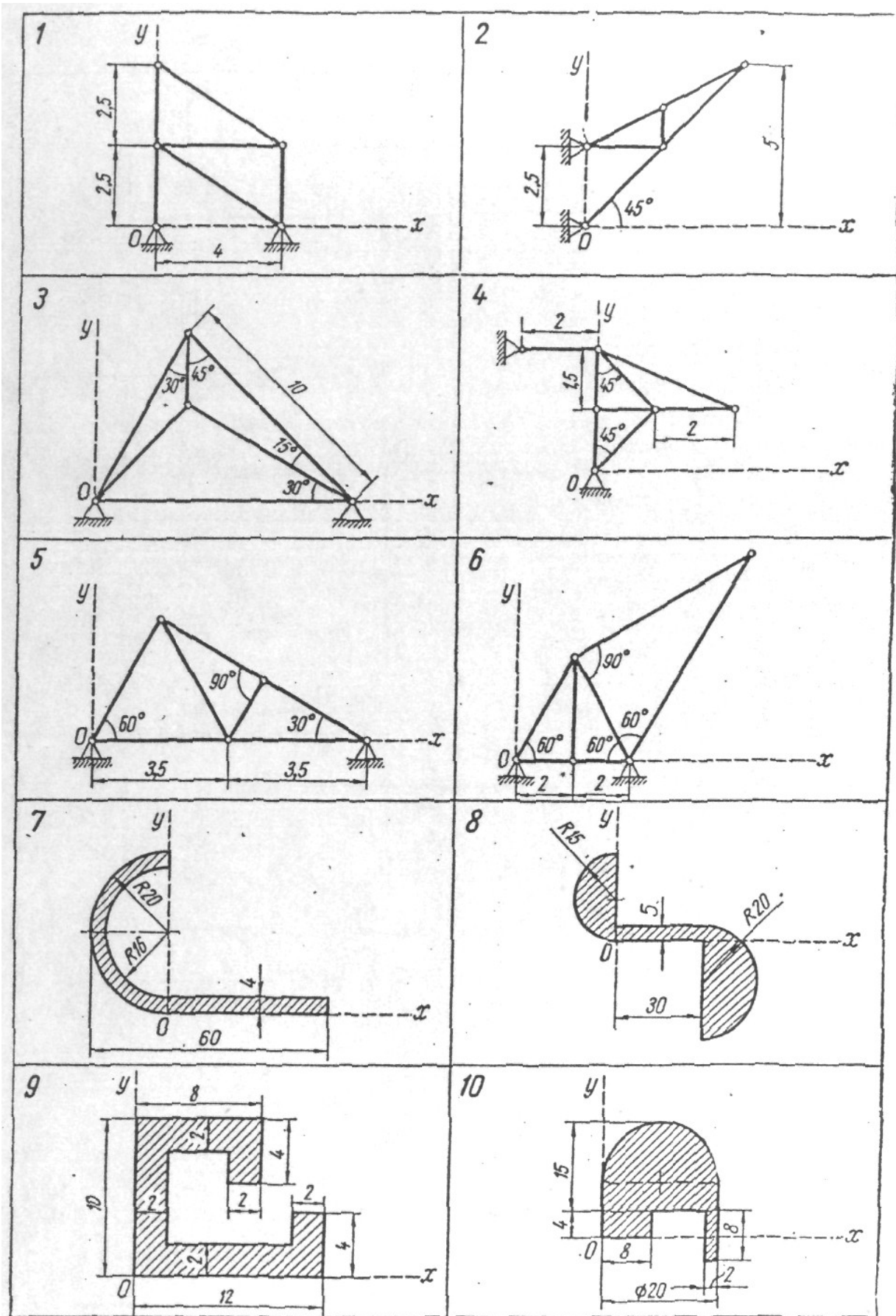


Рисунок 40

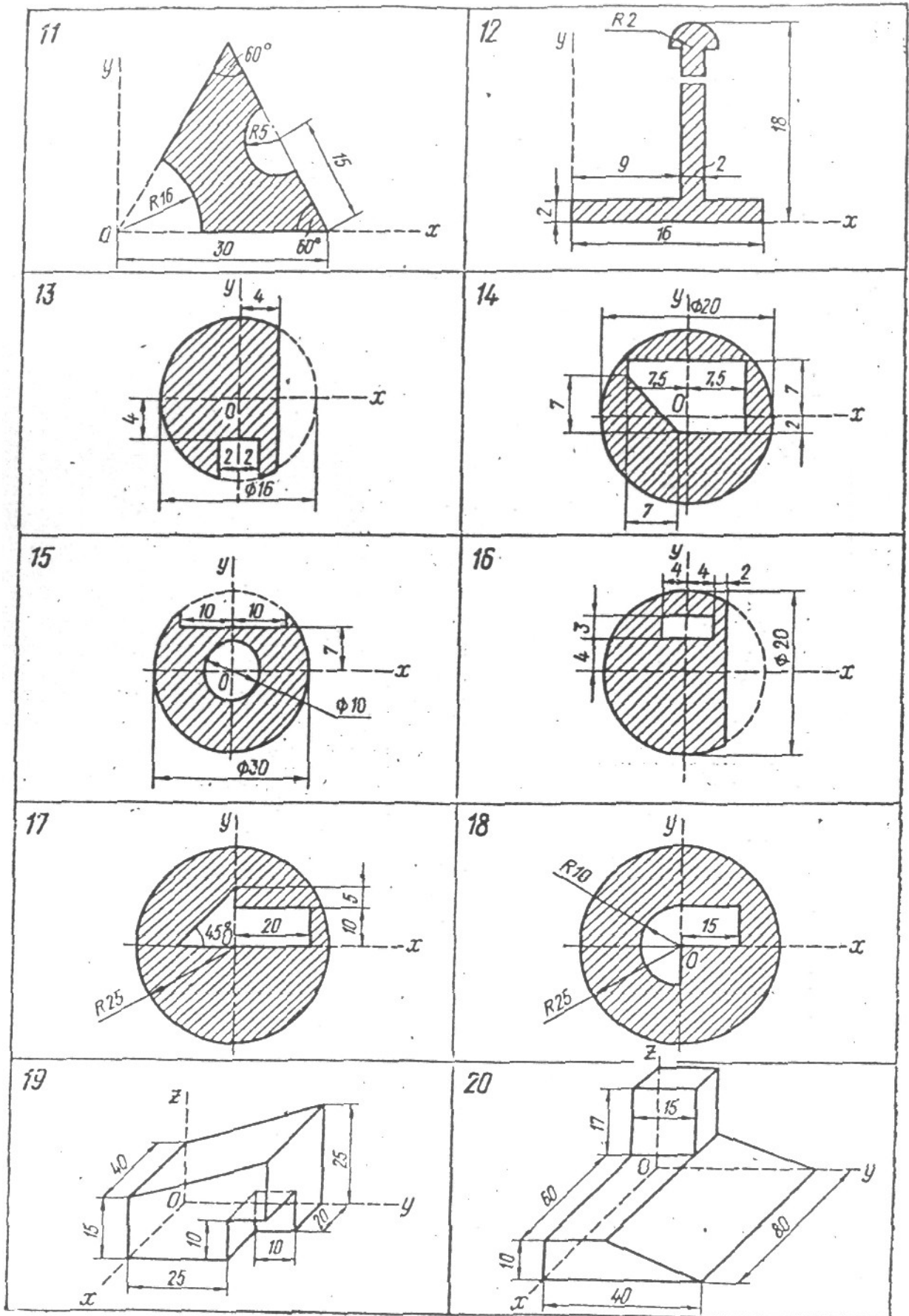


Рисунок 41

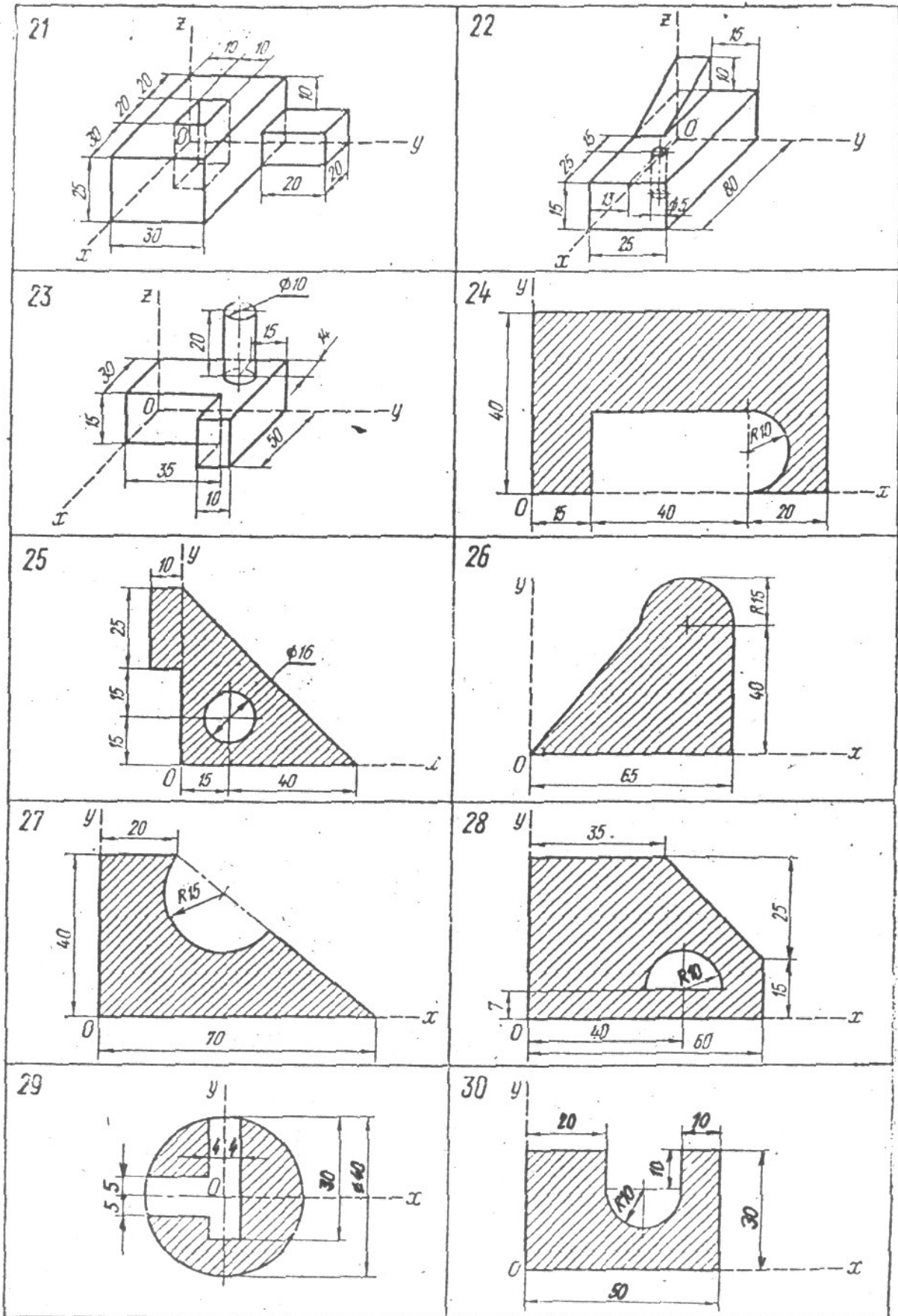


Рисунок 42

## Типовий звіт завдання С 7

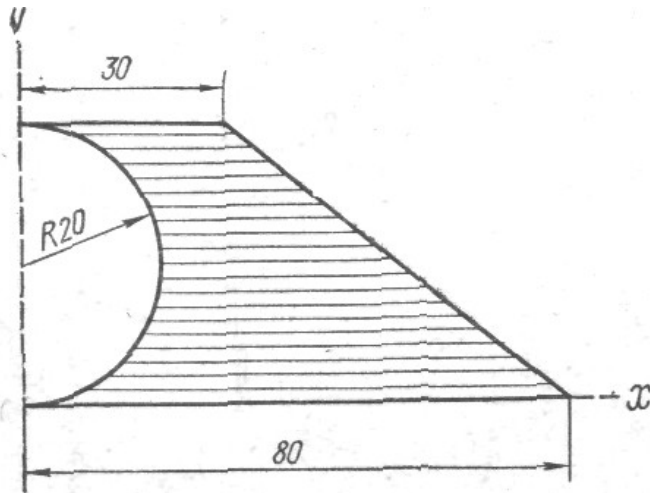


Рисунок 43

Визначити координати центра ваги плоскої фігури, яка показана на рисунку 43.

### Розв'язок

Координати центра ваги площини визначають за формулами:

$$X_C = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{F}, \quad Y_C = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{F}. \quad (1)$$

Для того щоб скористатися цими формулами, площу ділимо на окремі частини, положення центрів ваги яких відомі. В даному випадку такими частинами є: прямокутник, трикутник і половина кола (рисунок 44). Площа половини кола, що вирізана з площини прямокутника, вважається від'ємною.

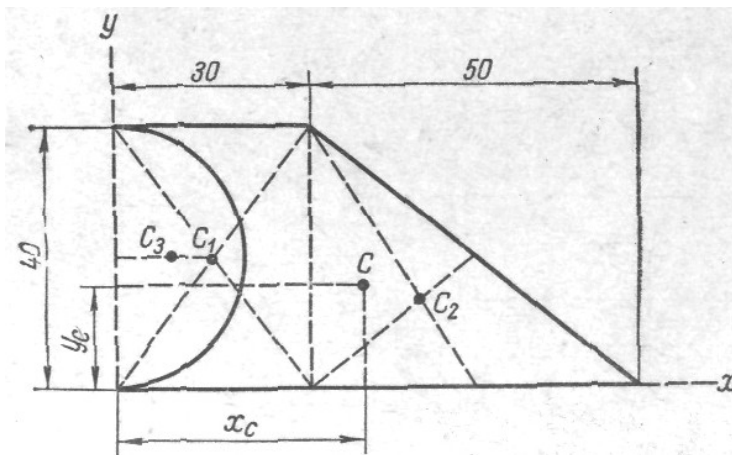


Рисунок 44

Таким чином, площа прямокутника:

$$S_1 = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2;$$

площа трикутника:

$$S_2 = (40 \cdot 50) / 2 = 1000 \text{ см}^2;$$

площа половини кола:

$$S_3 = (\pi \cdot 20^2) / 2 = 200\pi = 628 \text{ см}^2.$$

Центри ваги розглянутих частин фігури мають такі координати:

- для прямокутника:

$$X_1 = 15 \text{ см}, \quad Y_1 = 20 \text{ см},$$

- для трикутника:

$$X_2 = 30 + 50/3 = 46.7 \text{ см}, \quad Y_2 = 40/3 = 13.3 \text{ см},$$

- для половини кола:

$$X_3 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3\pi} = 8.5 \text{ см}, \quad Y_3 = 20 \text{ см}.$$

Для визначення координат центра ваги плоскої фігури складаємо таблицю 11.

Таблиця 11

Номер елемента	$S_i, \text{ см}^2$	$X_i, \text{ см}$	$Y_i, \text{ см}$	$(S_i \cdot X_i), \text{ см}^2$	$(S_i \cdot Y_i), \text{ см}^2$
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	-628	8,5	20,0	-5338	-12560
$\Sigma$	1572	-	-	59362	24700

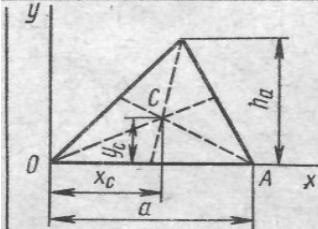
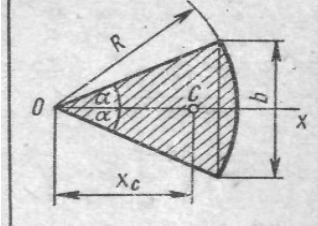
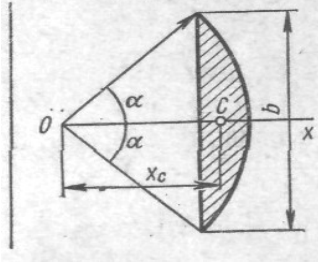
За формулами (1) знаходимо координати центра ваги плоскої фігури:

$$X_c = \frac{59362}{1572} = 37,8 \text{ см}, \quad Y_c = \frac{24700}{1572} = 15,7 \text{ см}.$$

Центр ваги площини указаний на рисунку 44.

Примітка - Площини та координати центрів ваги деяких плоских фігур, які потрібні при виконанні завдань, наведено в таблиці 12.

Таблиця 12

Плоска фігура	Площа	Координати центра ваги	
Трикутник	 $F = 1/2 \cdot a h_a$	$y_C = 1/3 \cdot h_a$ $x_C = 1/3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3),$ <p>где <math>x_1, x_2, x_3</math> — координаты вершин <math>O, A, B</math></p>	
Круговой сектор	 $F = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3F}$	
	$\alpha = \pi/2$ <p>(полукруг)</p>	$F = \pi R^2/2$	$x_C = 4R/3\pi$
	$\alpha = \pi/6$	$F = \pi R^2/6$	$x_C = 2R/\pi$
Круговой сегмент	 $F = 1/2 \cdot R^2 \times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{b^3}{12F}$	



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1986.
- 2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. - М., 1984. - Ч. 1, 2.
- 3 Толкачов А.М. Статика: Конспект лекцій з теоретичної механіки. - Харків: ХарДАЗТ, 1998. - Ч. 1.
- 4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. - М., 1985.
- 5 Комплексне методичне забезпечення до вивчення дисципліни „Теоретична механіка”. - Харків: УкрДАЗТ, 2004.
- 6 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни "Теоретична механіка". - Харків: УкрДАЗТ, 2005.

