ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
і завдання для проведення практичного заняття з дисципліни

“*ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ*”

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 22 червня

2007 р., протокол № 12.

Призначені для студентів спеціальності "Спеціалізовані комп'ютерні системи" денної форми навчання.

Укладачі:

доценти В.В. Науменко,
О.О. Стрельнікова,
О.І. Удодова

Рецензент

проф. Ю.І. Куліш

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для проведення практичного заняття з дисципліни

"ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ"

Відповідальний за випуск Удодова О.І.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 18.09.07 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 1,75. Обл.-вид.арк. 2,0.
Замовлення № Тираж 100 Ціна
Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

Кафедра вищої математики

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для проведення практичного заняття з дисципліни

“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ”

**для студентів спеціальності
“Спеціалізовані комп’ютерні системи”
денної форми навчання**

Харків 2009

Методичні вказівки розглянуто й рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № 12 від 22 червня 2007 р.

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання спеціальності СКС.

Укладачі:
доц. Науменко В.В.,
доц. Стрельнікова О.О.,
доц. Удодова О. І.

Рецензент
проф. Ю. В. Куліш

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для більш повного засвоєння студентами факультету АТЗ розділу “Чисельне інтегрування” курсу “Чисельні методи”, але можуть бути застосовані і студентами інших спеціальностей при вивченні відповідної теми курсу вищої математики. Методичні вказівки знайомлять студентів з сучасними найбільш поширеними чисельними методами обчислення інтегралів і містять стисле викладення теоретичних відомостей, посилання на необхідну літературу, індивідуальні завдання та приклади їх виконання.

Відомо, що при застосуванні наближених методів обчислення внаслідок виконання дуже великої кількості елементарних арифметичних операцій важливу роль починає відігравати така специфічна проблема, як накопичення похибок у проміжних результатах. Похибки при комп’ютерних обчисленнях виникають з декількох причин, серед яких важливе місце посідають похибки округлень при арифметичних діях з десятковими дробами, тому часто обчислення проводять зі значною кількістю “запасних” знаків. При невдалих алгоритмах похибки мають тенденцію стрімко збільшуватися у процесі обчислень та перетворюють на недостовірний остаточний результат. Досить часто буває, що метод, простий та привабливий на перший погляд, не може бути застосований на практиці з цієї причини. Внаслідок цього, контролю похибок обчислень, у тому числі і при обчисленні інтегралів, приділяють багато уваги. Це знайшло своє відображення і в тексті методичних вказівок.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Наближене обчислення визначеного інтеграла

Будемо розглядати методи обчислення наближеного значення визначеного інтеграла

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx, \tag{1}$$

де $p(x)$ – деяка функція, що називається вагою.

Відокремлення ваги з підінтегральної функції $F(x)=p(x)f(x)$ дозволяє в багатьох випадках підвищити точність обчислень. Методи інтегрування, що викладені далі, ґрунтуються на можливості наближення підінтегральної функції алгебраїчними багаточленами. Точність такого наближення, як відомо, залежить від кількості неперервних похідних (так званої гладкості) $F(x)$. У розкладі $F(x)$ на множники $f(x)$ обирають так, щоб вона мала високий степінь гладкості, а усі особливості поводження підінтегральної функції (у вигляді розривів $F(x)$ та її похідних) залишились у $p(x)$. Якщо такі особливості відсутні – вважають, що $p(x)=1$, і це є самий поширений випадок.

Будемо розглядати методи розв'язання поставленої задачі за допомогою так званих квадратурних формул (КФ), які мають структуру

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{2}$$

де x_i- деякі значення аргументу x, які називаються вузлами КФ (2), а числа A_i - її вагами.

Вузли та ваги є відомими числами, вони не залежать від підінтегральної функції. Таким чином, наближене обчислення визначеного інтеграла може бути зведене за допомогою КФ (2) до простих операцій, а саме: обчислення підінтегральної функції $f(x)$

у деяких заздалегідь відомих точках x_k та множення їх на відомі числа A_i.

КФ (2) можуть бути поділені на два типи. Вузли інтегрування у КФ першого типу є вже заданими з якихось міркувань, тобто їх не можна обирати за своїм розсудом (наприклад, функція є заданою таблицею, і ми не в змозі або не бажаємо обчислювати її при інших значеннях x). У КФ такого типу необхідно визначити числа A_i. Їх кількість – (n+1) штук. КФ такого типу мають назву Котеса (або Ньютона- Котеса).

Другий тип КФ застосовується тоді, коли в принципі немає ніякої різниці, при яких значеннях x обчислювати $f(x)$ (наприклад, коли функція є заданою у вигляді аналітичного виразу), тобто вибором вузлів обчислювач також може розпорядитися. У такому випадку при конструюванні КФ типу (2) можна обрати (2n+2) параметрів (вузли та ваги) так, щоб вона була найбільш ефективною. КФ цього типу називаються КФ Гауса.

Яким чином слід обирати параметри, що є вільними (невизначеними) у тій чи іншій КФ? Досить часто користуються такими міркуваннями.

Відомо, що неперервна на проміжку [a, b] функція може бути рівномірно наближена багаточленом з як завгодно високою точністю. Очевидно, похибка наближення при цьому може бути тим меншою, чим більшого степеня багаточлен буде застосовано. З цієї причини часто вважають, що КФ буде тим більш ефективною, чим більшого степеню багаточлен може бути проінтегровано точно за її допомогою, і саме такій вимозі підкоряють обрання вільних параметрів КФ. Таке число μ, при якому КФ (2) є точною для усіх багаточленів степеня μ, але не є точною хоча б для одного багаточлена степеня (μ+1), називають порядком КФ.

Інтерполяційний багаточлен. Нехай маємо (n+1) значення функції $y=f(x)$ у (n+1) різних точках x_i проміжку [a, b], які називаються вузлами інтерполяції:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

Необхідно побудувати багаточлен

$$S_m(x)=a_0\, x^m+\ldots+a_m,$$

значення якого у вузлах інтерполяції мають дорівнювати значенням $f(x)$, тобто повинні виконуватися рівності:

$$S_m(x_i)=y_i,\ (i=0,1,\ldots,n). \tag{3}$$

Такий багаточлен називається *інтерполяційним*. Співвідношення (3) можна розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів a_k багаточлена $S_m(x)$. Якщо покласти $m=n$, тоді отримаємо СЛАР з (n+1) рівнянь із (n+1) невідомими, причому її визначник завжди (тобто при якому завгодно розташуванні вузлів) буде відрізнятися від 0. Отже, з правила Крамера випливає, що розв'язок цієї СЛАР має існувати, і він буде єдиним. Крім того, правило Крамера дає можливість обчислити коефіцієнти a_k, але цього не роблять, тому що ця СЛАР має погані властивості, її розв'язок, навіть при малих n, може містити суттєві похибки. Шуканий інтерполяційний багаточлен будують виходячи з таких міркувань.

Розглянемо багаточлени, що мають вигляд

$$\mathrm{L}_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})....(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)}$$

де $i=0,1,2,\ldots,n$.

Встановимо деякі їхні властивості:

1) $L_i(x)$ є багаточленом степеня n;

2) $L_i(x_i)=1$, а $L_i(x_j)=0$ при $i\neq j$, тобто значення $L_i(x)$ у i-му вузлі дорівнює одиниці, а в інших вузлах воно дорівнює нулю.

Зрозуміло тепер, що шуканий багаточлен може бути записаний у вигляді:

$$S_n(x)=\sum\nolimits_{i=0}^{n} y_i L_i(x)\,. \tag{4}$$

Інтерполяційний багаточлен , побудований за формулою (4), називається інтерполяційним багаточленом у формі Лагранжа.

КФ Котеса. Інтерполяційний багаточлен $S_n(x)$ співпадає з функцією $f(x)$ у вузлах і наближається до неї при інших значеннях аргументу, тобто $f(x) \approx S_n(x)$ для $\forall x \in [a,b]$. Проінтегруємо $S_n(x)$ замість підінтегральної функції $f(x)$ і отримаємо

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \int_a^b p(x) S_n(x) dx \quad \text{або} \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) S_n(x) dx + R,$$

де $R = \int_a^b p(x)[f(x) - S_n(x)]dx$ - похибка наближеного інтегрування (вона також називається похибкою КФ).

Точне її значення невідоме (адже її обчислення пов'язане з точним обчисленням інтеграла (1)), вимушено обмежується *оцінкою похибки* R, тобто таким числом ε, яке гарантовано перевищує похибку: $|R|<\varepsilon$. На жаль, оцінки похибок часто бувають занадто песимістичними.

Вважаючи, що R мале, одержимо шукане правило для наближеного обчислення інтеграла (1) у вигляді:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{5}$$

де $A_i = \int_a^b p(x) L_i(x) dx$ - числа, що не залежать від функції $f(x)$.

Це і є *КФ Котеса*. Зрозумілою є також інша їх назва – КФ інтерполяційного типу. Їх порядок дорівнює $\mu=n$, тобто за їх допомогою можна точно обчислити інтеграл (1), у якому $f(x)$ – який завгодно багаточлен степеня, що не перевищує n (n+1 – кількість вузлів КФ).

Найбільш поширені КФ *Котеса.* Розглянемо деякі окремі випадки формул (5), які часто застосовуються у наближених обчисленнях. Візьмемо $p(x)$=1.

1 *Формула трапецій*. Якщо узяти n=1, тобто інтерполяцію проводити за двома вузлами x_0=a та x_1=b, тоді інтерполяційний багаточлен має перший степінь (так звана лінійна інтерполяція), і формула (5) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\,, \tag{6}$$

а
$$R = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\ .$$

Для спрощення запису тут (і далі у подібних формулах) поставлено знак точної рівності замість наближеної.

У (6) застосовано одну з можливостей для запису похибки наближеного інтегрування R. Тут ξ – деяка (обов'язково існуюча, але невідома для кожної неперервної функції) точка з проміжку [a, b]. Це дозволяє оцінити похибку таким чином:

$$|R| \le \varepsilon = \frac{(b-a)^3}{12} M_2, \text{ де } M_2 = \max_{[a,b]} f''(x).$$

Формула (6) має невелику точність і у такому вигляді практично не застосовується. Для покращення ситуації поділяють [a,b] на менші проміжки і застосовують (6) для кожного малого проміжку окремо, а результати додають. Найчастіше [a,b] поділяють на m однакових частин довжиною $h = \dfrac{b-a}{m}$. Число h називають кроком інтегрування. Одержана таким чином КФ називається "великою" формулою трапецій. Вона має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}\left[\frac{f_0+f_m}{2} + f_1 + f_2 + ...f_{m-1}\right], \tag{7}$$

тут $f_k = f(a+hk), \varepsilon = \dfrac{M_2(b-a)^3}{12m^2}$.

Пояснимо походження оцінки похибки в останній формулі. Похибка інтегрування на кожному з m малих проміжків довжиною h, як видно з (6), не перевищує $\dfrac{M_2\left(b-a\right)^3}{12m^3}$. Наявність m доданків може збільшити її не більше ніж у m разів. Остаточний висновок буде таким: розбиваючи відрізок інтегрування на m менших відрізків та застосовуючи на кожному з них формулу трапецій, можна похибку зменшити у m^2 разів порівняно з формулою (6). Такий підхід дозволяє оцінювати з практичної точки зору величину необхідного кроку h. Наприклад, якщо при розрахунках за допомогою "великої" формули трапецій необхідно збільшити точність у 100 разів порівняно з деякою досягнутою, то на це можна розраховувати, зменшивши крок у 10 разів.

Ділення відрізку інтегрування на менші частки часто застосовується з метою збільшення точності і в інших квадратурних формулах котесового типу.

2 При n=2 одержимо з (5) так звану *формулу Сімпсона*, яка, крім того, називається *формулою парабол*, оскільки інтерполяція підінтегральної функції проводиться параболою (квадратичним тричленом):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)];\ \varepsilon = \frac{(b-a)^5}{32}\frac{M_4}{90},$$

де M_4 – оцінка для 4-ї похідної, аналогічна M_2.

Відповідна "велика" формула парабол має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3m}[f_0 + f_m + 2(f_2 + f_4 + ...f_{m-2}) + 4(f_1 + f_3 + ...f_{m-1})], \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{M_4(b-a)^5}{180m^4},$$

де число m вважається парним.

3 Для n=3 отримаємо так звану *формулу* “$\frac{3}{8}$” (запишемо одразу “велику“ формулу)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3(b-a)}{8m}[f_0 + f_m + 2(f_3 + f_6 + f_9 + ..) + \\ +3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 ...)], \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{M_4(b-a)^5}{80m^4};$$

де число m має бути таким, що ділиться на 3.

Із порівняння похибок випливає, що для формули Сімпсона вона приблизно вдвічі менша, ніж для формули “$\frac{3}{8}$”, тому остання рідко застосовується.

Зауваження. При n=0 з (5) можна отримати *формулу прямокутників*. Вона відповідає інтерполяції функції багаточленом нульового степеня, тобто сталою.

“Велика” формула прямокутників має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i; \quad (10)$$

де f_i – значення підінтегральної функції $f(x)$ у якій-небудь точці i-го підінтервалу.

Найчастіше беруть ліву або праву граничну точку (КФ “лівих” або “правих” прямокутників).

На рисунку 1 подана графічна інтерпретація КФ “лівих” прямокутників та трапецій. Доречно нагадати, що геометричний зміст визначеного інтеграла – площа під графіком функції $f(x)$.

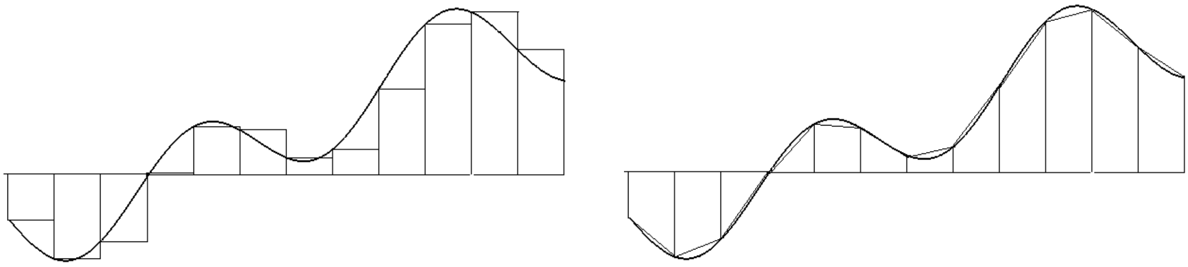


Рисунок 1

Приклад

Методом Сімпсона з кроком $h = 0{,}1$ обчислити інтеграл

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx\,.$$

Зауважимо, що первісна для цього інтеграла не виражається через елементарні функції, тобто точне значення його відсутнє. Такий інтеграл (при різних значеннях верхньої межі) відіграє велику роль у теорії ймовірностей.

Розв’язок

Очевидно, число кроків m=20. Вузлами будуть числа x_k=0,1k, (k=0,1,2…20). Значення $y_k = e^{-x_k^2}$ для зручності запишемо в один з трьох стовпців таблиці, залежно від того, на який ваговий коефіцієнт, згідно з КФ (8), його потрібно домножити (таблиця 1).

Таблиця 1 - Інтегрування $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ методом Сімпсона

k	x_k	x_k^2	Значення $y_k = e^{-x_k^2}$		
			При $k=0$, $k=20$	При непарному k	При парному k
0	0	0	1		
1	0,1	0,01		0,99005	
2	0,2	0,04			0,96079
3	0,3	0,09		0,91393	
4	0,4	0,16			0,85214
5	0,5	0,25		0,77880	
6	0,6	0,36			0,69768
7	0,7	0,49		0,61263	
8	0,8	0,64			0,52729
9	0,9	0,81		0,44486	
10	1,0	1,00			0,36788
11	1,1	1,21		0,29820	
12	1,2	1,44			0,23693
13	1,3	1,69		0,18452	
14	1,4	1,96			0,14086
15	1,5	2,25		0,10540	
16	1,6	2,56			0,07730
17	1,7	2,89		0,05558	
18	1,8	3,24			0,03916
19	1,9	3,61		0,02705	
20	2,0	4,00	0,01832		
			1,01832	4,41102	3,90003

Застосовуючи формулу (8), отримаємо

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}\left(1,01832 + 4\cdot 4,41102 + 2\cdot 3,90003\right) = 0,88208.$$

Повернемось до обговорення формул (5) у загальному випадку. Складність їх застосування в певній мірі пов'язана з тим фактом, що ваги A_k цих формул залежать від вузлів x_k, і для визначення цих ваг для кожної системи вузлів потрібно обчислювати громіздкі інтеграли. Ця вада відсутня у поширеному випадку рівномірного розташування вузлів на $[a,b]$ з кроком між ними $h = \dfrac{b-a}{n}$. Вузлами інтегрування тоді служать точки $x_k=a+kh$, $k=0,1,\ldots n$. З формули (5) у такому випадку можна отримати

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k f(a+kh), \qquad (11)$$

де $B_k = \dfrac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\displaystyle\int_0^n p(a+th)\dfrac{t(t-1)..(t-n)dt}{t-k}$.

Зручність коефіцієнтів $B_к$ полягає у тому, що вони, на відміну від $A_к$, залежать тільки від кількості вузлів n. $B_к$ є однаковими для вузлів, симетричних відносно середини $[a,b]$, а їх значення для різних n обчислені та занесені до довідників [1, 2].

Приклад

За допомогою наведених вище формул наближено обчислити з кроком $h=0,5$

$$I=\int_4^7 \frac{2x+1}{x-3}dx.$$

Зауважимо, що для цього інтеграла неважко обчислити і точне значення $I=6+7\ln4=15,7040605$ (усі наведені знаки є правильними), яке ми використаємо при обговоренні проблеми досягнутої точності обчислень.

Розв'язок

Спочатку визначимо вузли за формулою x_k=4+ 0,5k, k=0,1, …6, потім значення підінтегральної функції у цих вузлах, результати занесемо до таблиці 2.

Таблиця 2 - Вузли інтегрування та значення підінтегральної функції

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$f(x_k)$	9	$\frac{20}{3}$	5.5	4.8	$\frac{13}{3}$	4	3.75

1) Застосуємо до обчислення цього інтеграла формулу трапецій (6). Отримаємо $I_{тр}=\frac{3}{2}(9+3,75)=19,125$. Використовуючи точне значення I, можемо знайти, що похибка R дорівнює 19,125–15,7040605=3,42, а відносна похибка $\delta = \frac{R}{I} = 0.22$=22%. Обчислимо також оцінку похибки ε. Для цього знайдемо $f''(x) = \frac{14}{(x-3)^3}$, отже, M_2=14. Таким чином, отримуємо ε= $\frac{4^3}{12}14 \approx 65$. Як зазначалося вище, ця оцінка дуже обережна і набагато перевищує реальну похибку.

2) Застосуємо формулу парабол та отримаємо:

$$I_{пар}= \frac{1}{2}(9+4\ 4,8+3,75)=15,975,$$

$$R= 15,975–15,7040605=0,271,\ \delta=1,7\%.$$

3) Застосуємо для обчислення інтеграла I "велику" формулу трапецій (7) з m=6.

$$I_{Bтр}=\frac{3}{6}[\frac{f_0+f_6}{2}+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5]=15.8375.$$

Похибка R=0,097, а відносна похибка δ=0,6%.

4) Застосовуючи "велику" формулу парабол (8) з m=3, отримаємо

$$I_{Bnap}=\frac{3}{18}[f_0+f_6+2(f_2+f_4)+4(f_1+f_3+f_5]=15.7139,$$

отже, R=0,01, а δ=0,06 %.

5) Застосовуючи "велику" формулу "$\frac{3}{8}$" (9) при m=2, отримаємо

$$I_{\frac{3}{8}}=\frac{3}{16}[f_0+f_6+2f_3+3(f_1+f_2+f_4+f_5)]=15.7219,$$

отже R=0,018, а δ=0,1 %.

6) Застосуємо КФ Котеса з сьома вузлами. Коефіцієнти $B_к$, згідно з [2], мають значення

$$B_0=B_6=\frac{41}{840};\ B_1=B_5=\frac{216}{840};\ B_2=B_4=\frac{27}{840};\ B_3=\frac{272}{840}. \qquad (12)$$

Підставляючи (12) та значення таблиці 2 у формулу (11), будемо мати

$I_{к6}=(7-4)\sum_{k=0}^{6}B_k f_k$ =15,7066, отже, R=0,0025, а δ=0,02%.

При виконанні домашніх завдань №№1-4 обчислення інтегралів фактично зводиться до розглянутих випадків 3, 4, 5 або

6. Похибку R при цьому знайти неможливо, оскільки точне значення інтеграла є невідомим. При виконанні проміжних обчислень можна будувати таблицю типу таблиці 1.

Зауважимо, що при n=7 та n >10 серед ваг КФ Котеса з'являються від'ємні числа. Можна показати, що це є недоліком, внаслідок якого відповідні КФ будуть чутливими до похибок округлення. Такі формули практично не застосовуються.

КФ Гауса (КФ найвищої алгебраїчної точності).

Повернемося знову до розгляду КФ (2) та будемо вважати, що ми є вільними також у виборі вузлів. Застосуємо цю можливість для того, щоб підвищити точність інтегрування далі. Оскільки з'являється ще (n+1) вільний параметр, можна очікувати на те, що такі КФ будуть точно інтегрувати багаточлени до степеня ($2n$+1) включно. Доведено, що для довільної ваги $p(x)$>0 це припущення виправдовується. У довідниках [1, 2] наводяться значення вузлів x_i та ваг A_i, КФ Гауса для стандартного відрізка інтегрування (як правило, це [0,1]) при різних n. З великою кількістю десяткових знаків для значень n≤48 та p=1 вони наведені у [3]. Наприклад, для n=2 та інтервалу [0,1] маємо (таблиця 3).

Таблиця 3 - Вузли та ваги КФ Гауса для n=2

i	i=0	i=1	i=2
x_i	0,112 701 665 3792	0,5	0,887 298 334 6208
A_i	$\frac{5}{18}$=0,2777777(7)	$\frac{4}{9}$=0,4444(4)	$\frac{5}{18}$=0,2777777(7)

Необхідність застосування великої кількості десяткових знаків виникає, як зазначено у вступі, при комп'ютерних обчисленнях. Зрозуміло, що у всякому випадку їх потрібно брати більше (хоча б на один-два), ніж необхідно у кінцевому результаті. З цієї точки зору зрозумілим виявляється завдання параметрів КФ у тих випадках, де можливо, (див. (12) і таблицю 3) у вигляді звичайних дробів. У такому випадку вони зовсім не містять похибок округлень, при необхідності обчислень у десяткових дробах, можна взяти таку кількість знаків, яка буде потрібна.

КФ Гауса з наведеними параметрами здатна точно проінтегрувати який завгодно багаточлен 5-го степеня, а довільну функцію $f(x)$ фактично замінює при інтегруванні деяким інтерполяційним багаточленом такого степеня. Основні властивості вузлів та ваг КФ Гауса такі. Вузли – симетричні відносно середини інтервалу інтегрування, ваги для симетричних вузлів є однаковими. Ваги є додатними для усіх n, що робить стійкими до процесу округлень КФ Гауса довільного порядку. Похибка виражається через значення похідної порядку $2n$:

$$R = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right] f^{(2n)}(\zeta)$$

Якщо відрізок інтегрування відрізняється від [0,1], лінійною заміною незалежної змінної $x=(b\text{-}a)t+a$ необхідно звести інтегрування для стандартного проміжку.

Приклад

Обчислити попередній інтеграл за допомогою КФ Гауса з n=2.

Розв'язок

Спочатку перейдемо до стандартного проміжку інтегрування

$$I= \int_4^7 \frac{2x+1}{x-3}dx = \left| \begin{matrix} x = 3t+4 \\ dx = 3dt \end{matrix} \right| = 3\int_0^1 \frac{6t+9}{3t+1}dt = 3I_1 .$$

Знайдемо значення підінтегральної функції $g(t) = \dfrac{6t+9}{3t+1}$ у вузлах Гауса. Для зручності занесемо їх у таблицю 4.

Таблиця 4 - Значення підінтегральної функції.

t_i	t_0=0,1127017	t_1=0.5	t_1=0,8872983

$g(t_i)$	2,0086884	2,133(3)	1,0865496

Таким чином, $I = 3\,I_1 = 3\,[g(t_1)\,A_1 + g(t_2)\,A_2 + g(t_3)\,A_3] = 15{,}68571$.

Зауваження: Цей приклад демонструє виконання завдання №5. Оскільки для обчислень використовується калькулятор, кількість десяткових цифр для значень вузлів обмежується його можливостями (порівняно з наведеними у таблиці 3).

Оскільки відоме точне значення інтеграла, можемо навести та порівняти з попередніми похибку КФ Гауса: R=0,01835, δ=0,1%. Як бачимо, похибка цієї КФ у 17 разів менша за похибку відповідної (з трьома вузлами) КФ типу Котеса.

Вибір кількості вузлів інтегрування. Основна задача, котру потрібно розв'язати при обчисленні визначеного інтеграла, полягає у тому, щоб отримати значення інтеграла з заданою точністю. Ця задача може бути розв'язана за допомогою будь-якої з наведених вище КФ, якщо поділити інтервал $[a,b]$ на достатньо малі відрізки, тобто взяти достатньо малі кроки інтегрування. З огляду на те, що теоретична оцінка похибки ε, як правило, буває дуже завищеною, для контролю точності розрахунків на практиці застосовують такий метод: обчислюють необхідний інтеграл I за обраною квадратурною формулою двічі – з кроком h_1 та кроком $h_2 < h_1$ (наприклад, $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$), після чого порівнюють отримані значення I_1 та I_2. Якщо вони збігаються у межах заданої точності, тоді обчислення припиняють і I_2 приймають за наближене значення інтеграла. Якщо збіг потрібної кількості знаків відсутній, обирають новий крок інтегрування $h_3 < h_2$, обчислюють нове значення інтеграла I_3 та порівнюють його з I_2. Процес продовжують до тих пір, поки два значення I_k та I_{k+1} не збігатимуться з заданою точністю. Якщо обчислення з h_1 та h_2 одразу демонструють більшу, ніж потрібно, точність, наступний крок можна збільшити, зменшивши цим загальний час розрахунків. На цих засадах, як правило, побудовані стандартні програми обчислення інтегралів, які є у матзабезпеченні комп'ютерів [3, 4, 5, 6].

При обранні кроку інтегрування необхідно мати уявлення про загальне поводження підінтегральної функції: про інтервали неперервності самої функції та її похідних, про кількість точок екстремуму та ін. Очевидно, що при наявності точок розриву намагання наблизити функцію багаточленом навряд чи буде раціональним. У такому випадку доцільніше розбити інтервал інтегрування на проміжки неперервності і на цих проміжках застосовувати ту чи іншу інтерполяцію та квадратурну формулу, що з неї випливає. Нехтування розривів у похідних не призводить, як правило, до грубих похибок при обчисленні інтегралів, але і не дає можливості дістати високої точності. Це продемонстровано на прикладах далі.

На кожну точку екстремуму $f(x)$ повинна припадати достатня кількість точок інтерполяції, аби інтерполяційний багаточлен "відчув" її. У випадку розбіжності інтегралів з'ясувати це потрібно до початку використання чисельних методів, адже який завгодно з них не має "інтелекту" і отримає деяке число за допомогою КФ завжди, якщо тільки підінтегральну функцію $f(x)$ можна обчислити у вузлах інтегрування.

Порівняння ефективності різних КФ. Як було показано вище, різні КФ для досягнення однакової точності потребують різної кількості обчислень підінтегральної функції. Зрозуміло, що необхідність виконання великої кількості арифметичних дій є небажаною як при обчисленнях за допомогою комп'ютера, так і без нього. Зупинимося на порівнянні ефективності наведених КФ, під якою будемо розуміти співвідношення досягнутої точності та кількості необхідних для цього обчислень підінтегральної функції. При цьому потрібно мати на увазі, що $f(x)$ може бути досить складною, і кожне її обчислення у такому разі потребує значних зусиль.

Досвід свідчить, що у більшості випадків при однаковій кількості обчислень для гладкої функції $f(x)$ КФ розташовуються таким чином у порядку зростання їх точності:

1 Велика формула трапецій.
2 Велика формула прямокутників.

3 Велика формула Сімпсона.

4 Велика формула “$\frac{3}{8}$”.

5 Формули Ньютона-Котеса ($n \geq 4$).

6 Формули Гауса.

Наприклад, обчислення інтеграла $I = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ за допомогою перелічених формул дає наступні результати [1] (таблиця 5).

Таблиця 5 - Порівняння точності квадратурних формул

Формула	Кількість вузлів	Обчислене значення інтеграла	Похибка R
1	7	1,9540972	$-4{,}6\cdot 10^{-2}$
2	6	2,023 030 2	$2{,}3\cdot 10^{-2}$
3	7	2,000 863 3	$8{,}6\cdot 10^{-4}$
4	7	2,0020097	$2{,}0\cdot 10^{-3}$
5	7	2,0000182	$1{,}8\cdot 10^{-5}$
6	6	1,999999999476	$-5{,}2\cdot 10^{-10}$

Найбільш точною і, внаслідок цього, найбільш економічною, виявляється формула Гауса. Так, у цьому прикладі для одержання за формулою Сімпсона тієї ж точності, яку дає формула Гауса, необхідно було б обчислити більше ніж 500 значень , тобто виконати у 80 разів більшу роботу.

Якщо підінтегральна функція не має похідних високих порядків (скінчених значень), все одно, як свідчить практика, формули Гауса часто дають кращі результати.

Так, у інтегралі

$$I(p) = \int_0^1 x^{p-0.5} dx = \frac{2}{2p+1}$$

при p=1,2,3 перетворюється на ∞ відповідно перша, друга та третя похідні $f(x)$. Застосуємо для його обчислення:

1 Велику формулу трапецій (m=8).
2 Велику формулу Сімпсона (m=4).
3 Формулу Гауса (n=5).

Результати подамо у вигляді таблиці 6 [1].

Таблиця 6 - Порівняння точності квадратурних формул

p	Точне значення	Формула 1	Формула 2	Формула 3
1	0,66666667	I=0,65813022 $R=-8{,}5\cdot10^{-3}$	I=0,66307928 $R=-3{,}5\cdot10^{-3}$	I=0,66704644 $R=+3{,}8\cdot10^{-4}$
2	0,40000000	I=0,40181246 $R=+1{,}8\cdot10^{-3}$	I=0,40007725 $R=+7{,}7\cdot10^{-5}$	I=0,39999254 $R=-7{,}5\cdot10^{-6}$
3	0,28571429	I=0,28897474 $R=+3{,}3\cdot10^{-3}$	I=0,28570248 $R=-1{,}2\cdot10^{-5}$	I=0,28571466 $R=3{,}7\ 10^{-7}$

Тут для кожної формули та кожного p обчислене значення інтеграла $I(p)$ та його похибка. Формула Гауса і у цьому випадку дає значно меншу похибку, незважаючи на те, що в ній узято всього шість вузлів, у той час, як у формулах трапецій і Сімпсона їх було дев'ять.

Деякі узагальнення. У [2] наведені КФ з іншими ваговими функціями $p(x)$, наприклад:

$$\int_a^b x^{\alpha} f(x)dx,\ \int_a^b x^{\alpha}(1-x)^{\beta} f(x)dx,\ \int_a^b x^{\alpha}\lg\frac{e}{x} f(x)dx,\ \int_0^{\infty} x^{s}e^{-x} f(x)dx.$$

КФ з вагою $p(x)=\cos\alpha x$ або $p(x)=\sin\beta x$, тобто для інтегралів

$\int_a^b \cos\alpha x f(x)dx$ та $\int_a^b \sin\beta x f(x)dx$, в яких $f(x)$ апроксимується квадратичним тричленом (аналог КФ Сімпсона), отримані Філоном та наведені, наприклад, у [1].

Існують КФ, у яких, окрім $f(x_i)$, застосовуються також значення похідної $f'(x_i)$. Такі формули дають меншу похибку за рахунок застосування більшого обсягу інформації про поводження функції. Як приклад наведемо формулу, що є аналогом формули трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)-\frac{b-a}{6}\left(f'(b)-f'(a)\right)\right].$$

В інженерній практиці інколи застосовують методи наближеного обчислення визначених інтегралів, які не зводяться до квадратурних формул типу (2). Так , коли не виникає труднощів при розкладанні функції у ряд Тейлора, для отримання наближеного значення інтеграла від неї інтегрують скінчений відрізок цього ряду [9].

Застосовують також метод, що базується на законах теорії ймовірностей (“метод Монте-Карло”), але отримання за його допомогою більш-менш точних результатів потребує значних зусиль.

Обчислення подвійних інтегралів

Перший можливий шлях обчислення - зведення подвійного інтеграла до повторного за формулою класичного аналізу

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

Спочатку звичайна КФ застосовується до змінної y при фіксованому x_i (x_i - це вузли зовнішнього інтегрування) в межах $f_1(x)$, $f_2(x)$, а потім – до змінної x. Якщо область D є прямокутником, остаточні формули є досить простими. Наприклад, формула Сімпсона набуває вигляду:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dS =$$

$$= \frac{(b-a)(c-d)}{36}\left\{\begin{array}{l} f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+4\left[f\left(a,\dfrac{c+d}{2}\right)+\right. \\ \left.+f\left(b,\dfrac{c+d}{2}\right)+f\left(\dfrac{a+b}{2},c\right)+f\left(\dfrac{a+b}{2},d\right)\right]+16f\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c+d}{2}\right)\end{array}\right\}.$$

Внаслідок значної кількості обчислень, перевага все ж віддається КФ найвищої точності при інтегруванні у кожному напрямку.

Інший можливий шлях є подібним тому, який використовувався для звичайного визначеного інтеграла: інтеграл за областю D наближено обчислюється з використанням значень підінтегральної функції у декількох точках (вузлах) ($x_к$,$y_к$), що належать області D. При цьому ваги $A_к$ та, можливо, вузли обирають так, щоб рівність

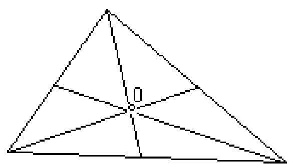
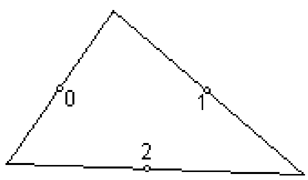
$$\iint_D f(x,y)dS \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k, y_k)$$

була точною для багаточленів двох змінних як можна більшого сумарного степеня. Формули цього типу називаються *кубатурними*. Ця задача виявляється досить складною, якщо не вводити ніяких обмежень на форму області D.

Суттєвого прогресу у розв’язанні задач суцільного середовища було досягнуто завдяки методам скінченних та граничних елементів, за ідеологією яких область D довільної форми уявляється як сума областей стандартної форми (трикутників або прямокутників). Для таких стандартних областей (вони називаються елементами) отримано зручні для застосування результати. Вузли та ваги деяких простих кубатурних формул найвищого степеня точності для трикутних областей наведені у таблиці 7 [7].

Якщо обмежитися одним вузлом інтегрування, його необхідно розташувати у центрі ваги трикутника, у цьому випадку точно інтегрується багаточлен першого степеня. Якщо кількість вузлів дорівнює трьом (вони повинні знаходитися на серединах сторін трикутника), то можна точно інтегрувати багаточлен другого степеню. При цьому усі вагові коефіцієнти дорівнюють $\frac{1}{3}$. У [7] наведено також формули Гауса з більшою кількістю вузлів для трикутників та прямокутників.

Таблиця 7 - Вузли та ваги Гауса для трикутних областей

Кількість вузлів на елементі	Елемент	Степінь багаточлена, що інтегрується точно	Вагові коефіцієнти
1		1	1
3		2	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання №

Обчислити інтеграл за великою формулою трапецій з кроком $h = 0{,}1$.

1) $\int\limits_{0,8}^{1,8} \sqrt{1+x^3}\,dx$;

2) $\int\limits_{-0,6}^{0,4} x^2\sqrt{1+x^4}\,dx$;

3) $\int\limits_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$;

4) $\int\limits_{1,2}^{2,5} \sqrt{1+2x^3}\,dx$;

5) $\int\limits_{0,6}^{1,7} \sqrt{x+x^3}\,dx$;

6) $\int\limits_{1,2}^{2,1} \sqrt{1+x^4}\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{2,2} \sqrt{4+x^4}\,dx$;

8) $\int\limits_{2}^{3,6} \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\,dx$;

9) $\int\limits_{0,6}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

10) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2x^3+1}\,dx$.

Завдання №

За допомогою методу Сімпсона з кроком h обчислити інтеграл.

1) $\int\limits_{0,6}^{0,7} \frac{\cos \pi x^2}{\sqrt{1,2+x^3}}\,dx$, $h = 0{,}01$;

6) $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{-0,3x^2}}{\sqrt{2\pi+x}}\,dx$, $h = 0{,}1$;

2) $\int\limits_{0,2}^{0,6} \left(0{,}3+x^2\right)\cos\sqrt{e-x}\,dx$, $h = 0{,}04$;

7) $\int\limits_{5}^{25} \left(\pi-x^2\right)\sin\sqrt[3]{2{,}1+x}\,dx$, $h = 2$;

3) $\int\limits_{0,5}^{0,6} \frac{\sin ex^2}{\sqrt{0,8+3x}}dx$,
$h=0,01$;

8) $\int\limits_{-1}^{4} \sqrt{0,7-0,1x} \cdot \ln\left(0,3\left(\pi+x\right)\right)dx$,
$h=0,5$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{\pi+x^2}dx$, $h=0,1$;

9) $\int\limits_{-3}^{2} \sqrt[3]{0,1+0,2x} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{5}\right)dx$,
$h=0,5$;

5) $\int\limits_{1,5}^{2} \sqrt{1,5-0,4x} \cdot tg\frac{x^2}{5\pi}dx$,
$h=0,05$;

10) $\int\limits_{1,8}^{2,3} \left(2,5-x\right) ctg\frac{\pi}{x}dx$,
$h=0,05$.

Завдання №

Обчислити інтеграл за великою формулою "$\frac{3}{8}$" з кроком $h=0,1$.

1) $\int\limits_{2}^{3,8} \frac{x^4+2,1x-3,5}{x^3+2,4}dx$;

2) $\int\limits_{2}^{2,9} \frac{1,5x^4+7,3x^2-1,4}{7,3x^3+1,3x^2-6,1x}dx$;

3) $\int\limits_{1}^{1,9} \frac{x^4-5,7x^2+5,6}{2,5x^3+8,5x^2-1,2x-4,3}dx$;

4) $\int\limits_{3}^{4,8} \frac{x^4-7,2x^3+4,1x+5}{2x^4-1,4x^3+5,1x+7,2}dx$;

5) $\int\limits_{3}^{3,9} \frac{1,2x^4+10,7x^2-9,5x}{5,6x^5+1,4x^2+0,54}dx$;

6) $\int\limits_{1}^{1,9} \frac{3,6x^4-2,1x-1}{5,1x^3+1,3x^2}dx$;

7) $\int\limits_{2}^{3,8} \frac{4,4x^4+3,2x^2+8}{5,5x^5+4,2x^2+6}dx$;

8) $\int\limits_{4}^{5,8} \frac{7,9x^3+4,6x+1,2}{7,4x^4+8,5x^2+9,6x}dx$;

9) $\int\limits_{1}^{1,9} \frac{4,3x^4+2,1x^2+5,5}{5,2x^5+6,1x+9,3}dx$;

10) $\int\limits_{2}^{2,9} \frac{x^4-1,2x+0,5}{2,3x^3-x^2+1,3}dx$.

Завдання №

Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Котеса ($n = 6$) з кроком $h = 0{,}1$.

1) $\int\limits_{2}^{2,6} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^3} dx$;

2) $\int\limits_{1,8}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} dx$;

3) $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

4) $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{3x dx}{\sqrt{1+x^3}}$;

5) $\int\limits_{2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$;

6) $\int\limits_{1,6}^{2,2} \frac{1+x}{\sqrt{x^3+1}} dx$;

7) $\int\limits_{1}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$;

8) $\int\limits_{0,9}^{1,5} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$;

9) $\int\limits_{1,5}^{2,1} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$;

10) $\int\limits_{3}^{3,6} \frac{1+x^2}{1+x^3} dx$.

Завдання №

Обчислити інтеграл за формулою Гауса ($n = 2$).

1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^3}\, dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^3}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2-x^3}\, dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{5+x^3}\, dx$;

6) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+2x^3}\, dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{4+3x^2}\, dx$;

8) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^3}\, dx$;

9) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{3+x^2}\, dx$;

10) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^4}\, dx$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Справочник программиста. – Л.: Судпромгиз, 1963. - 628 с.

2 Крылов В. И., Шульгина В. Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966.– 372 с.

3 Кронрод А. С. Узлы и веса квадратурных формул. – М.: Мир, 1976. – 132 с.

4 Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

5 Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1982.– 238 с.

6 Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. –М.: Физматлит, 2003. – 304 с.

7 Зенкевич О., Мортон К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.– 318 с.

8 Пирумов У. Г. Численные методы. – М.: Дрофа, 2004. – 221 с.

9 Науменко В.В., Осмаєв О.А., Стрельнікова О.О. Ряди: Завдання і методичні вказівки до контрольної роботи з дисципліни « Вища математика». – Харків: УкрДАЗТ, 2003. – 32 с.