ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з розділу дисципліни

“*ВИЩА МАТЕМАТИКА*”

Частина II

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 22 червня 2007 року, протокол № 12.

Методичні вказівки призначено для студентів факультету УПП денної і заочної форм навчання.

Укладачі:

доценти Р.О. Єфременко,
М.Є. Резуненко,
старш. викл. А.П. Рибалко

Рецензент

доц. О.А. Осмаєв

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.
РЯДИ

Методичні вказівки
до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика”
Частина 2

Відповідальний за випуск Резуненко М.Є.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 04.09.07 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,25. Обл.-вид.арк. 2,5.
Замовлення № Тираж 300 Ціна
Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

Частина ІІ

Методичні вказівки

до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика” для студентів факультету УПП всіх форм навчання

ХАРКІВ – 2009

Методичні вказівки розглянуті та рекомендовані до друку на засіданні кафедри “Вища математика” від 22 червня 2007 року, протокол № 12.

Методичні вказівки призначені для студентів факультету УПП денної і безвідривної форми навчання.

Укладачі:
доц. Р.О. Єфременко,
доц. М.Є. Резуненко,
ст.викл. А.П. Рибалко

Рецензент
доц. О.А. Осмаєв

КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ (КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАХ)

Нехай на площині XOY задано гладку чи кусково-гладку криву AB і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x,y)$. (Неперервна крива $x = x(t), y = y(t)$ називається гладкою на відрізку $\alpha \le t \le \beta$, якщо функції $x = x(t), y = y(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t), y'(t)$, які одночасно не дорівнюють нулю. Якщо неперервна крива складається із скінченого числа гладких кривих, її називають кусково-гладкою). Розіб'ємо криву *AB* точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ на *n* довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо яку-небудь точку
$M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1,2,\ldots,n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

де Δx_i - проекція вектора $A_{i-1}A_i$ на вісь *OX*.

Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Якщо при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ інтегральні суми (1) мають скінчену границю, яка не залежить від розбиття кривої *AB* і вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом* від функції $P(x,y)$ по координаті x вздовж кривої *AB* і позначають $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$. Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to o} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x,y)$ по координаті *y*

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to o} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

де Δy_i - проекція вектора на вісь *OY*.

Суму $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ називають *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом другого роду* від функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ по кривій *AB* і позначають символом

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy.$$

Криволінійний інтеграл другого роду приводиться до визначеного інтеграла.

Нехай крива *AB* задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, де функції $x(t), y(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t), y'(t)$, причому точці *A* кривої відповідає параметр α, точці B − параметр β, тоді

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt.$$

Якщо крива *AB* задана рівнянням $y = y(x), a \le x \le b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a,b]$, то

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) \right] dx.$$

Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху і при зміні цього напряму змінює свій знак

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy.$$

Для замкненого контуру інтегрування (тобто контуру, в якому початкова та кінцева точки співпадають) існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від’ємна орієнтація контуру). Криволінійний інтеграл по додатно-орієнтованому контуру *L* позначають так:

$$\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Приклад 1

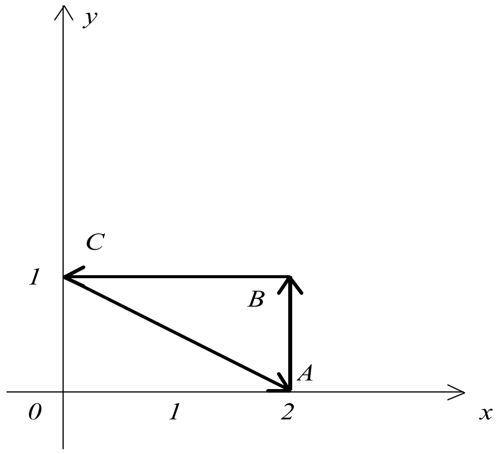
Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} 2xydx + xdy$ вздовж межі (L) трикутника *ABC*, при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$.

Розв'язання

На площині XOY зобразимо точки $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$, які є вершинами трикутника ABC (рисунок 1). Криволінійний інтеграл вздовж межі $\Delta\ ABC$ складається з трьох інтегралів вздовж його сторін AB, BC, CA. Кожен з них обчислюємо окремо

$$\oint\limits_{(L)} 2xydx + xdy = \int\limits_{(AB)} 2xydx + xdy + \int\limits_{(BC)} 2xydx + xdy + \int\limits_{(CA)} 2xydx + xdy$$

а) на стороні AB: $x=2$, диференціал $dx=0$, $0 \le y \le 1$. При значеннях $x=2$ і $dx=0$ зведемо криволінійний інтеграл вздовж відрізка AB до визначеного інтеграла по y в межах від $y = 0$ до $y = 1$ і обчислимо цей інтеграл



$$\int\limits_{(AB)} 2xydx + xdy = \int\limits_{0}^{1} 2dy = 2y\Big|_{0}^{1} = 2;$$

б) На стороні BC: $y=1$, $dy=0$. Криволінійний інтеграл вздовж BC зведемо до визначеного інтеграла по x в межах від $x=2$ (в початковій точці B) до $x=0$ (в кінцевій точці C) і обчислимо цей інтеграл

Рисунок 1

$$\int\limits_{(BC)} 2xydx + xdy = \int\limits_{2}^{0} 2xdx = x^2\Big|_{2}^{0} = -4;$$

в) запишемо рівняння прямої CA за формулою

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A},$$

де x_A, y_A і x_C, y_C - відповідні координати точок A і C: $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{1-0}$.

Звідси $y = 1 - \frac{x}{2}$, $dy = -\frac{dx}{2}$, тоді

$$\int\limits_{(CA)} 2xydx + xdy = \int\limits_0^2 \left(2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}.$$

г) додамо інтеграли та одержимо даний криволінійний інтеграл вздовж межі ΔABC $\int\limits_{(L)} 2xydx + xdy = 2 - 4 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$.

Приклад 2

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ вздовж верхньої половини кола $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, $(0 \le t \le \pi)$.

Розв'язання

а) знайдемо диференціали функцій

$$x = x(t) = 4\cos t, \quad y = y(t) = 4\sin t$$

$$dx = x'(t)dt = -4\sin t\, dt,$$

$$dy = y'(t)dt = 4\cos t\, dt;$$

б) значення функції x і y та їх диференціалів dx і dy підставимо в підінтегральний вираз і зведемо криволінійний інтеграл до визначеного інтеграла по t в межах від $t=0$ до $t=\pi$ (рисунок 2), а потім обчислимо цей інтеграл

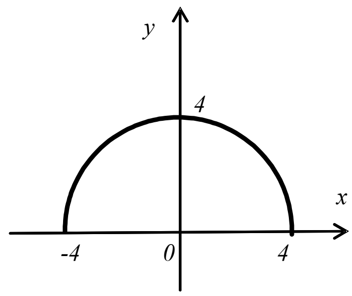


Рисунок 2

$$\int\limits_{(L)} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{\pi} \frac{16\sin^2 t(-4\sin t) - 16\cos^2 t(4\cos t)}{16\sin^2 t + 16\cos^2 t} dt =$$

$$= -4\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}dt = -4\int_0^{\pi}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) - 4\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t) =$$

$$= 4\left(\cos t\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi}\right) - 4\left(\sin t\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi}\right) = 4\left(-2+\frac{2}{3}\right) - 4(0-0) = -\frac{16}{3}.$$

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $M(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i, \qquad (2)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D. Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)$ — найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (2) при $\lambda \to 0$ має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i , ні від вибору точок $M(\xi_i, \eta_i)$ в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом* і позначається одним із символів

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy \quad \text{або} \quad \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,ds.$$

Таким чином, за означенням $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$.

У цьому випадку $f(x, y)$ називається *інтегрованою в області D*, D − областю інтегрування, *x, y* − змінними інтегрування, *ds* − *елементом площі*.

Обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Припустимо спочатку, що межа області інтегрування D з будь-якою вертикальною прямою перетинається не більше ніж у двох точках, і нехай нижня межа описується рівнянням $y=\varphi_1(x)$, а верхня – рівнянням $y=\varphi_2(x)$. На вісь *OX* область *D* проектується у відрізок $[a;b]$. Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (3)$$

Інтеграл по змінній *y* називається *внутрішнім інтегралом*, інтеграл по змінній *x* називається *зовнішнім інтегралом*. Праву частину формули (3) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області *D*. У повторному інтегралі (3) інтегрування виконується спочатку по змінній *y* (при цьому *x* вважається сталою), а потім по змінній *x*.

Якщо область *D* з будь-якою горизонтальною прямою перетинається не більше ніж у двох точках, і ліва межа описується рівнянням $x=g_1(y)$, а права межа – $x=g_2(y)$, тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx,$$

де *c* і *d* - кінці відрізка $[c,d]$, в який проектується область *(D)* на вісь *OY*.

Якщо межа області *D* має складнішу форму (тобто існують вертикальні або горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини і записати подвійний інтеграл у вигляді суми подвійних інтегралів по кожній частині окремо.

Одним із найбільш важких і відповідальних моментів при обчисленні подвійних інтегралів є розстановка меж інтегрування. В першу чергу бажано розставити межі у внутрішньому інтегралі.

Приклад 3

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}(1-3x+4y)\,dxdy$ по області (*D)*, де (*D)* − область, обмежена лініями $y=x^2$, $y=x$.

Розв'язання.

На площині *X0Y* побудуємо лінії $y=x^2$ та $y=x$, що обмежують область (*D)*. Зведемо даний подвійний інтеграл до повторного інтеграла, користуючись формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Проведемо вертикальні прямі, через внутрішні точки області інтегрування. Нижня межа області *D* описується рівнянням $y=x^2$, а верхня $y=x$ (рисунок 3). Проектуючи область *D* на вісь *OX*, отримаємо відрізок $[0,1]$.

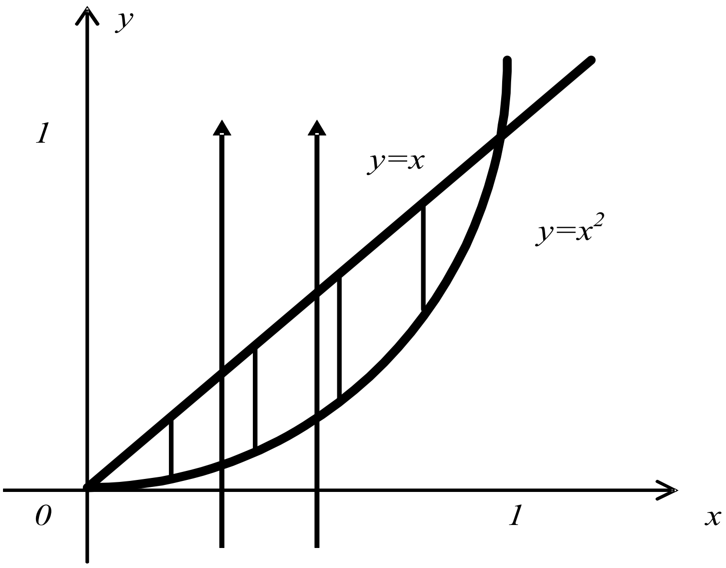


Рисунок 3

(Щоб знайти межі інтегрування по *x* потрібно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$). Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)}(1-3x+4y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(1-3x+4y)dy\,.$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл, вважаючи x сталою

$$\int_{x^2}^{x}(1-3x+4y)dy = y\Big|_{x^2}^{x} - 3xy\Big|_{x^2}^{x} + 2y^2\Big|_{x^2}^{x} =$$

$$=\left(x-x^2\right)-3x\left(x-x^2\right)+2\left(x^2-x^4\right)=x-2x^2+3x^3-2x^4.$$

Отриманий результат проінтегруємо по x в межах від *0* до *1*, тобто обчислимо зовнішній інтеграл

$$\int_0^1\left(x-2x^2+3x^3-2x^4\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{60}.$$

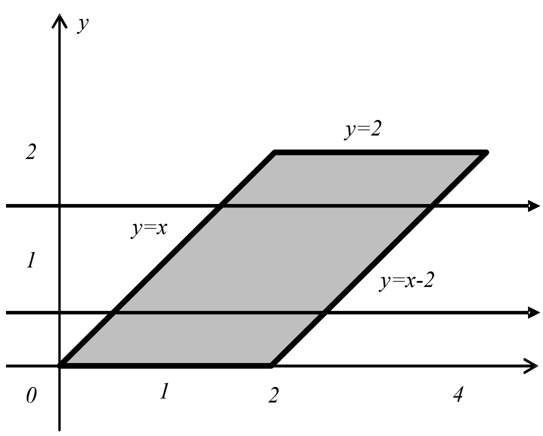
Таким чином, $\iint\limits_{(D)}(1-3x+4y)\,dxdy=\dfrac{11}{60}$.

Приклад 4

Обчислити двома способами подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}\left(xy^2-2y\right)dxdy$ по області *(D)*, якщо *(D)* область, обмежена прямими *y=0, y=x, y=2, y=x-2*.

Розв'язання.

На площині *X0У* проведемо прямі *y=0, y=x, y=2, y=x-2* (рисунок 4).



1-й спосіб. Зведемо даний подвійний інтеграл до повторного інтеграла, користуючись формулою

$$\iint\limits_{(D)}f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{g_1(y)}^{g_2(y)}f(x,y)\,dx\cdot$$

Рисунок 4

Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)}\left(xy^2-2y\right)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{y+2}\left(xy^2-2y\right)dx$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл, вважаючи *x* сталою

$$\int\limits_y^{y+2}\left(xy^2-2y\right)dx=y^2\int\limits_y^{y+2}xdx-2y\int\limits_y^{y+2}dx=y^2\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{y+2}-2yx\Big|_y^{y+2}=$$

$$=\frac{y^2}{2}\left((y+2)^2-y^2\right)-2y(y+2-y)=2y^3+2y^2-4y.$$

Обчислимо зовнішній інтеграл

$$\int\limits_0^2\left(2y^3+2y^2-4y\right)dy=\left(\frac{y^4}{2}+\frac{2}{3}y^3-2y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}.$$

Таким чином, $\iint\limits_{(D)}\left(xy^2-2y\right)dxdy=\frac{16}{3}$.

2 спосіб. Якщо користуватися формулою

$$\iint\limits_{(D)}f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy,$$

то потрібно розбивати область інтегрування на дві частини прямою *x=2* (рисунок 5).

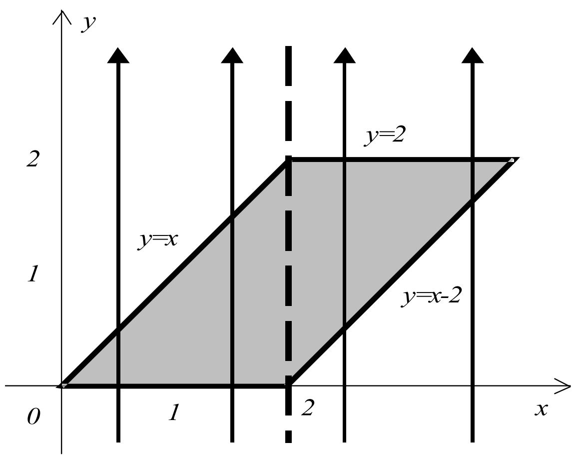


Рисунок 5

Тоді отримаємо

$$\iint\limits_{(D)}\left(xy^2-2y\right)dxdy=$$
$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x\left(xy^2-2y\right)dy+\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x-2}^2\left(xy^2-2y\right)dy.$$

Обчислимо

$$\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x\left(xy^2-2y\right)dy=\int\limits_0^2 dx\left(x\frac{y^3}{3}-y^2\Bigg|_0^x\right)=\int\limits_0^2\left(\frac{x^4}{3}-x^2\right)dx=$$
$$=\frac{x^5}{15}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{32}{15}-\frac{8}{3}=-\frac{8}{15};$$
$$\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x-2}^2\left(xy^2-2y\right)dy=\int\limits_2^4\left(x\frac{y^3}{3}-y^2\Bigg|_{x-2}^2\right)dx=$$
$$=\int\limits_2^4\left(\frac{8}{3}x-4-\frac{(x-2)^3}{3}x+(x-2)^2\right)dx=\int\limits_2^4\left(\frac{4}{3}x-3x^2+2x^3-\frac{x^4}{3}\right)dx=$$
$$=\frac{2x^2}{3}-x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{15}\Bigg|_2^4=\frac{88}{15}.$$

Остаточно отримаємо результат

$$\iint\limits_{(D)}\left(xy^2-2y\right)dxdy=-\frac{8}{15}+\frac{88}{15}=\frac{16}{3},$$

що співпадає з попереднім.

РЯДИ

Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots \qquad (4)$$

називається *числовим рядом*, а числа $a_1,a_2,a_3,a_4\ldots$ - членами ряду (4).

Сума $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n$ називається частинною сумою ряду (4).

Якщо існує скінчена або нескінчена границя послідовності частинних сум ряду: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то вона називається сумою ряду.

Якщо ряд має кінцеву суму *S,* то його називають *збіжним*, а якщо не має суми або $S=\infty$ - *розбіжним*.

Вираз a_n для *n*-го членf ряду при довільному *n* називається *загальним членом ряду*. Загальний член збіжного ряду при необмеженому зростанні його номера *n* прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. У цьому полягає *необхідна умова збіжності ряду*. При її порушенні ряд напевно розбігається. Але виконання цієї умови є недостатнім для збіжності ряду (див. нижче приклад гармонічного ряду). Розберемо достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами (такі ряди називаються додатними рядами).

ОЗНАКА Д'АЛАМБЕРА

Якщо для ряду (4) з додатними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$*, то при l<1 цей ряд збігається, а при l>1 розбігається.* Якщо *l*=1, то питання про збіжність ряду залишається не розв'язаним.

Приклад 5

Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\,3^n}$ на збіжність.

Розв'язання

Загальний член ряду $a_n = \frac{4^n}{n3^n}$. Запишемо наступний за a_n член ряду: $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}$. Застосуємо ознаку Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} : \frac{4^n}{n3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n}\frac{n}{(n+1)}\frac{3^n}{3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}.$$

Одержали $l = 4/3 > 1$, тому даний ряд розбігається.

Приклад 6

Збігається чи розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$?

Розв'язання

$$a_n=\frac{3^n}{n!},a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Знайдемо границю, враховуючи, що $(n+1)!=n!(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)}=0.$$

Ми одержали $l=0<1$, тому ряд збігається.

ОЗНАКА КОШІ

Якщо для ряду (4) з додатними членами існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$*, то при $l<1$ цей ряд збігається, а при $l>1$ розбігається.* Якщо l=1, то питання про збіжність ряду залишається не розв'язаним.

Приклад 7

Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{n+1}\right)^n$ розбігається.

Розв'язання

Застосуємо ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{(n+1)}=5.$$

Ми одержали $l=5>1$, тому ряд розбігається.

ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА

Нехай задано ряд

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n), \tag{5}$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно-спадаючої функції $f(x)$ на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді *ряд (5) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл* $\int_{1}^{+\infty}f(x)\,dx$, *і розбіжний, якщо розбіжний цей інтеграл.*

Приклад 8

Довести, що ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ розбігається.

Розв'язання

Цей ряд називається *гармонічним*. Його загальний член $a_n=\frac{1}{n}$. Розглянемо неперервну, додатну та монотонно-спадаючу функцію $f(x)=\frac{1}{x}$. Тоді

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{b}=\infty.$$

Оскільки інтеграл розбігається, тоді і ряд теж розбігається.

Зауваження. Гармонічний ряд розбігається, незважаючи на те, що виконується необхідна ознака $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

За допомогою інтегральної ознаки можна визначити поведінку *загального гармонічного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$*,* де α − дійсне число: *якщо* $\alpha \le 1$ *, то ряд розбігається, а при* $\alpha > 1$ − *ряд збігається.*

ПЕРША ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ ДОДАТНИХ РЯДІВ

Нехай маємо два додатних ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots, \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots \;. \qquad (7)$$

Якщо, починаючи з деякого номера $n \ge N$*, виконується нерівність* $a_n \le b_n$*, то із збіжності ряду (7) випливає збіжність ряду (6), а із розбіжності ряду (6) випливає розбіжність ряду (7).*

Приклад 9

Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання

Порівняємо цей ряд із гармонічним, загальний член якого дорівнює $a_n = \frac{1}{n}$. Загальний член даного ряду $b_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$. Якщо $n \ge 1$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n+1)}$. Але гармонічний ряд розбігається, тому і даний ряд теж розбігається.

На практиці часто важко буває вдало підібрати допоміжний ряд з відомою поведінкою для порівняння з даним рядом. Тому до першої ознаки порівняння рядів звертаються в останню мить, якщо інші достатні ознаки збіжності виявляються неспроможними.

ДРУГА ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ ДОДАТНИХ РЯДІВ (ГРАНИЧНА ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ)

Нехай маємо два додатних ряди (6), (7). *Якщо існує скінчена і відмінна від нуля границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k,(0<k<\infty)$*, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.*

Цю ознаку зручно використовувати при дослідженні збіжності таких додатних рядів, загальний член яких містить відношення багаточленів по степенях *n*. Для порівняння з такими рядами звичайно беруть загальний гармонічний ряд, поведінка якого відома.

Приклад 10

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3+2n+10}$.

Розв'язання

Загальний член цього ряду є відношенням двох багаточленів по цілих степенях *n*: $a_n=\frac{3n-2}{n^3+2n+10}$. Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Це загальний гармонічний ряд із значенням $\alpha=2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n-2)}{n^3+2n+10}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-6n^2}{n^3+2n+10}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=3.$$

Отже, даний ряд також збігається за граничною ознакою порівняння.

РЯДИ, В ЯКИХ ЗНАКИ ЧЛЕНІВ СТРОГО ЧЕРГУЮТЬСЯ

Розглянемо ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots, \qquad (8)$$

де $a_n>0, n=1,2,\ldots$.

Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою **ознаки Лейбніца**: *ряд (8) збіжний, якщо*

а) $a_n > a_{n+1}, n = 1,2,\ldots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (8) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $|S - S_n| \le a_{n+1}$.

Ряд (8) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд, утворений з модулів його членів.

Якщо ряд (8) збіжний, а ряд, утворений з модулів його членів розбіжний, то ряд (8) називається *умовно збіжним*.

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Розглянемо далі степеневі ряди. *Степеневим* називається ряд, який має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \qquad (9)$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ дійсні числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Степеневим рядом за степенями двочлена $(x - x_0)$, де x_0 – дійсне число, називають ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots. \qquad (10)$$

Ряд (10) заміною $x - x_0 = t$ зводиться до ряду (9). Загальний член степеневого ряду позначаємо так: $a_n(x) = a_n x^n$.

Областю збіжності ряду називається множина всіх *x*, при яких ряд збігається.

Кожний степеневий ряд (9) збігається при *x=0*.

Число R називається *радіусом збіжності ряду* (9), якщо при $|x| < R$ ряд збігається, а при $|x| > R$ − розбігається. Інтервал $(-R, R)$ називається *інтервалом збіжності ряду* (9).

Знайдемо радіус збіжності R, користуючись загальною ознакою Д'Аламбера: ряд збігається при тих значеннях x, для яких $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| < 1$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Звідси отримаємо: ряд (9) збігається для тих x, які задовольняють умову $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ і розбігається при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Таким чином, отримано формулу для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Користуючись загальною ознакою Коші можна отримати другу формулу

$$R = \left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}.$$

Якщо R=∞, то ряд збігається на всій числовій осі, а якщо R=0, то ряд збігається в одній точці *x=0*.

Зауваження 1. Питання про збіжність ряду при $x=R$ та $x=-R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином *область збіжності ряду може відрізнятися від інтервалу збіжності* $(-R, R)$ *не більше ніж двома точками* $x=R$ *та* $x=-R$.

Зауваження 2. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Коші або ознакою Д'Аламбера, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів заданого ряду.

Приклад 11

Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n}$.

Розв'язання

Загальний член степеневого ряду $a_n(x)=\frac{5^n(x+1)^n}{n}$. За ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}(x+1)^{n+1}n}{5^n(x+1)^n(n+1)}\right| =$$
$$=5|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=5|x+1|<1,$$

тобто $|x+1|<1/5$. Звідси інтервал збіжності $\left(-6/5,-4/5\right)$, $R=1/5$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу.

При *x=−0,8* маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається (гармонічний ряд).

При *x=−1,2* маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Таким чином, областю збіжності ряду є інтервал $\left[-\frac{6}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

Приклад 12

Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^n}$.

Розв'язання

За ознакою Коші $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4}{n}\right)^n}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0<1,$ тобто ряд збігається на всій числовій осі.

РОЗКЛАДАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ В РЯДИ МАКЛОРЕНА

Якщо функція $f(x)$ має похідні всіх порядків на інтервалі $(-R,R)$, то її можна на цьому інтервалі розкласти в степеневий ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots \quad (11)$$

Звідси отримаємо формули розкладання основних елементарних функцій у степеневий ряд в околі $x=0$:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots,\qquad t\in(-\infty;+\infty), \quad (12)$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad t\in(-\infty;+\infty), \quad (13)$$

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad t\in(-\infty;+\infty), \quad 14)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+\ldots,\quad t\in(-1;1], \quad (15)$$

$$\begin{aligned}(1+t)^m&=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3+\ldots\\&+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n}t^n+\ldots,\quad t\in(-1;1)\end{aligned} \quad (16)$$

$$\operatorname{arctg} t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad t\in[-1;1]. \quad (17)$$

Приклад 13

Обчислити $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання

Цей інтеграл не виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції, але за допомогою степеневого ряду його можна обчислити з будь-яким степенем точності. Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використавши для цього формулу (12). Зробивши заміну $t=-x^2$, одержимо такий розклад: $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots$. Інтегруючи почленно, отримаємо

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\frac{x^9}{4!9}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}+\ldots$$

Одержали ряд, знаки членів якого строго чергуються. Він задовольняє умови ознаки Лейбніца. Обчислюючи члени цього ряду з точністю до 0,001, бачимо, що шостий член ряду за модулем менший, ніж 0,001. Отже, взявши суму перших п'яти членів, можна одержати необхідну точність: $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}747$.

Приклад 14

Знайти три перших ненульових члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=y^2+xy+x^2$, $y(0)=1$.

Розв'язання

Користуючись формулою (11) запишемо розв'язок у вигляді

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)x}{1!}+\frac{y''(0)x^2}{2!}+\frac{y'''(0)x^3}{3!}+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots$$

Значення $y(0)=1$ дано в умові завдання. Значення $y'(0)$ знайдемо, використовуючи диференціальне рівняння: якщо *x=0*, $y'(0)=y^2(0)+0+0=1$. Щоб знайти $y''(0)$, диференціюємо обидві частини диференціального рівняння

$$y''=\left(y^2+xy+x^2\right)'=2yy'+y+xy'+2x.$$

Підставляючи значення $y(0)=1$, $y'(0)=1$, отримаємо $y''(0)=3$.

Таким чином, $y(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\ldots=1+x+\frac{3}{2}x^2+\ldots$

ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1 Обчислити криволінійний інтеграл другого роду. Зробити рисунок.

1 $\int\limits_{(L)}\left(x^2-y\right)dx+xdy$ вздовж дуги *(L)* кола *x(t)=5cost, y(t)=5sint* при обході його проти годинникової стрілки від точки *A(5;0)* до точки *B(0;5)*.

2 $\int\limits_{(L)}(x+y)\,dx-(x-y)\,dy$ вздовж ламаної $(L)=(OAB)$ з вершинами *O(0;0), A(2;0), B(4;5)*.

3 $\int\limits_{(L)}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ вздовж межі (L) трикутника *ABC* при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини *A(1;0), B(1;1), C(0;1)*.

4 $\int\limits_{(L)}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$ вздовж дуги (L) параболи $y=x^2$ від точки *A(-1;1)* до точки *B(1;1)*.

5 $\int\limits_{(L)}\left(x^2y+4x\right)dx+\left(y^2x+9y\right)dy$ вздовж верхньої половини еліпса *x(t)= 3* *cos t, y(t)= 2 sin t,* $(0\le t\le\pi)$.

6 $\int\limits_{(L)}\left(x^2+y\right)dx-\left(x+y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L)=(ABC)$, де *A(1;3), B(1;5), C(3,5)*.

7 $\int\limits_{(L)}y\,dx+\frac{x}{y}\,dy$ вздовж дуги кривої $y=e^{-x}$ від точки *A(0;1)* до точки *B(-1;e)*.

8 $\int\limits_{(L)}\frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$ вздовж відрізка $(L)=AB$ від точки *A(1;2)* до точки *B(2;4)*.

9 $\int\limits_{(L)}\left(xy-x^2\right)dx+x\,dy$ вздовж дуги (L) параболи $y=2x^2$ від точки *O(0;0)* до точки *B(1;2)*.

10 $\int\limits_{(L)}\frac{y}{x}dx+x\,dy$ вздовж дуги кривої $y=\ln x$ від точки *A(1;0)* до точки *B(e;1)*.

11 $\int\limits_{(L)}y\,dx-xdy$ вздовж дуги *(L)* кола *x(t)=3cost, y(t)=3sint* при обході його проти годинникової стрілки від точки *A(3;0)* до точки *B(0;3)*.

12 $\int\limits_{(L)}(2x+y)\,dx-(x+2y)\,dy$ вздовж ламаної $(L)=(OAB)$ з вершинами *O(0;0), A(0;1), B(3;4)*.

13 $\int\limits_{(L)}(x^2-3y)dx+(y^2-3x)dy$ вздовж межі (L) трикутника *OAB* при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини *O(0;0), A(0;1), B(1;0)*.

14 $\int\limits_{(L)}y^2\,dx-(x-2y)\,dy$ вздовж дуги (L) параболи $x=2y^2$ від точки *A(2;-1)* до точки *B(2;1)*.

15 $\int\limits_{(L)}\left(x^2y-x\right)dx+3yx\,dy$ вздовж верхньої половини еліпса *x(t)= 5 cos t, y(t)= 3 sin t, (0≤ t ≤ π).*

16 $\int\limits_{(L)}3x^2y\,dx+\left(2x-y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L)=(ABC)$, де *A(0;1), B(2;-1), C(5;-1).*

17 $\int\limits_{(L)}xy\,dx+(3x-y^2)\,dy$ вздовж дуги кривої $y=e^x$ від точки *A(0;1)* до точки *B(1;e).*

18 $\int\limits_{(L)}\frac{x-y^2}{x^2}dx+\frac{3x}{y^2}dy$ вздовж відрізка $(L)=AB$ від точки *A(1;3)* до точки *B(2;6).*

19 $\int\limits_{(L)}x^2y\,dx-(3x+y)\,dy$ вздовж дуги (L) кубічної параболи $y=3x^3$ від точки *A(-1;-3)* до точки *O(0;0).*

20 $\int\limits_{(L)}xy\,dx-\frac{3}{x}dy$ вздовж дуги кривої $y=\ln x$ від точки *A(1;0)* до точки *B(e;1).*

21 $\int\limits_{(L)}\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$ вздовж дуги *(L)* кола *x(t)=2cos t, y(t)=2sin t* при обході його проти годинникової стрілки від точки *A(2;0)* до точки *B(0;2).*

22 $\int\limits_{(L)}(3x-y)\,dx+2xy\,dy$ вздовж ламаної $(L)=(OAB)$ з вершинами *O(0;0), A(1;1), B(2;-3).*

23 $\int\limits_{(L)}(2xy-1)dx+y^2dy$ вздовж межі (L) трикутника *ABC* при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини *A(1;0), B(1;1), C(2;1).*

24 $\int\limits_{(L)}\left(x^2-2y\right)dx-(1+xy)\,dy$ вздовж дуги (L) параболи $y=-x^2+1$ від точки *A(-1;0)* до точки *B(1;0).*

25 $\int\limits_{(L)}\left(x^2-3y\right)dx-\left(xy+1\right)dy$ вздовж верхньої половини еліпса *x(t)= cos t, y(t)=2 sin t, (0≤ t ≤ π)*.

26 $\int\limits_{(L)}\left(2xy-x\right)dx+\left(1-y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L)=(ABC)$, де *A(5;3), B(2;3), C(1;5)*.

27 $\int\limits_{(L)}xy\,dx-\dfrac{dy}{3y^2}$ вздовж дуги кривої $y=2^x$ від точки *A(0;1)* до точки *B(1;2)*.

28 $\int\limits_{(L)}\dfrac{y}{2x}dx-x^2\,dy$ вздовж дуги кривої *x(t)= t, y(t)= ln t* від точки *A(1;0)* до точки *B(e;1)*.

29 $\int\limits_{(L)}\left(2y-xy\right)dx-\dfrac{dy}{x^2}$ вздовж дуги (L) параболи $y=-3x^2$ від точки *A(1;-3)* до точки *B(2;-12)*.

30 $\int\limits_{(L)}x^2y\,dx-2y\,dy$ вздовж дуги кривої $y=-\ln x$ від точки *A(e;-1)* до точки *B(1;0)*.

Завдання 2 Обчислити двома способами подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}f\left(x,y\right)dxdy$ по області (*D)*. Зробити рисунок.

1 $\iint\limits_{(D)}x^3\,y^2\,dxdy$, *(D)*: $x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

2 $\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y\right)dxdy$, (*D)* − область, обмежена параболами $y=x^2,\ x=y^2$.

3 $\iint\limits_{(D)}\dfrac{x^2}{y^2}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=2,\ y=x$ та гіперболою $xy=1$.

4 $\iint\limits_{(D)}\cos\left(x+y\right)dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=\pi,\ y=x$.

5 $\iint\limits_{(D)}\left(x+y\ \right)dxdy$, *(D)* – верхня половина круга $x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge 0$.

6 $\iint\limits_{(D)}\left(x+y^2\right)dxdy$, *(D)* – область, обмежена параболою $y=x^2$ та прямою $y=x$.

7 $\iint\limits_{(D)}\sin\left(x-y\right)dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=\pi/2,\ y=x$.

8 $\iint\limits_{(D)}\frac{y^2}{x^2}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $y=2,\ y=x$ та гіперболою $x\,y=1$.

9 $\iint\limits_{(D)}\frac{x}{1+y^2}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=1,\ y=x$.

10 $\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\left(1+x+y\right)^2}$, *(D)* − область, обмежена прямими $y=0,\ x=1,\ y=x$.

11 $\iint\limits_{(D)}x^2\ y\,dxdy$, *(D)*: $x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\le 0$.

12 $\iint\limits_{(D)}\left(2x-y\right)dxdy$, (*D)* − область, обмежена параболами $y=-x^2,\ x=2y^2$.

13 $\iint\limits_{(D)}\frac{x}{y}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=-2,\ x=-1$, *y = -2* та гіперболою $x\,y=1$.

14 $\iint\limits_{(D)}\cos\left(x-y\right)dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=\pi/2,\ y=x$.

15 $\iint\limits_{(D)}\left(x-3y\right)dxdy$, *(D)* – нижня половина круга $x^2+y^2\le 9,\ \ y\le 0$.

16 $\iint\limits_{(D)}\left(xy-y^2\right)dxdy$, *(D)* – область, обмежена параболою $x=y^2$ та прямою *y=x*.

17 $\iint\limits_{(D)}\sin\left(x+y\right)dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=\pi,\ y=x$.

18 $\iint\limits_{(D)} \frac{y}{x}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $y=-2,\ y=-1$, x $= -2$ та гіперболою $xy=1$.

19 $\iint\limits_{(D)} \frac{y}{4+x^2}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $y=0,\ x=-1,\ y=x$.

20 $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(2+x+y)^2}$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=1,\ y=x$.

21 $\iint\limits_{(D)} x\,y\,dxdy$, *(D)*: $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\le 0$.

22 $\iint\limits_{(D)} (x-3y)\,dxdy$, *(D)* − область, обмежена параболами $y=x^2,\ x=-y^2$.

23 $\iint\limits_{(D)} xy\,dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ x=1$, $y=0$ та кривою $y=e^x$.

24 $\iint\limits_{(D)} x\,dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямою $y=0$ та кривою $y=\sin x$.

25 $\iint\limits_{(D)} (2x+y)\,dxdy$, *(D)* – верхня половина круга $x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$.

26 $\iint\limits_{(D)} (3x-y^2)\,dxdy$, *(D)* – область, обмежена параболою $y=-x^2$ та прямою $y=x$.

27 $\iint\limits_{(D)} y\,dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ x=\pi/2$ та кривою $y=\cos x$.

28 $\iint\limits_{(D)} \frac{x}{y}dxdy$, *(D)* − область, обмежена прямими $x=0,\ y=e$ та кривою $y=e^{-x}$.

29 $\iint\limits_{(D)} x\,dxdy$, *(D)* − трикутник *ABC: A(2;3), B(7;2), C(4;5).*

30 $\iint\limits_{(D)}(x-y)dxdy$ *,(D)* – область, обмежена прямою $y=2x$ та параболою $y=-x^2$.

Завдання 3 Дослідити на збіжність ряд

1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\ 2^n}}$.

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$. 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$.

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3-1}$. 8 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$. 9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^n$. 11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sqrt{n}}{3n^2-1}$. 12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)!}$.

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3^n-n}$. 14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$. 15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{2^{n+1}}$.

16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$. 17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+3)^3+1}$. 18 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{2n^2-1}\right)^n$.

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n}{3n^2-n}$. 20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(2n+1)!}$. 21 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4n+1}{n\sqrt{n}-1}$.

22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^{2n}$. 23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)^n$. 24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}$.

25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\frac{1}{n}\right)^n$. 26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{e^n+4}$. 27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(\sqrt{n}+1)^2-1}$.

28 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. 29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3\sqrt{n}}$. 30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}3n)^{-n}$.

Завдання 4 Знайти область збіжності степеневого ряду.

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}(x-2)^n$. 16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{e^{n+1}}(x-e)^n$.

2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} (x+3)^n.$

17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n-3}\right)^n (x+6)^n.$

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{n+4}\right)^n (x-1)^n.$

18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{3n}} x^n.$

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} (x+5)^n.$

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{3n^2+2}.$

5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{3^n (n+1)}.$

20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{(2n+1)^2}.$

6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} (x+4)^n.$

21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - n}{n!} (x-2)^n.$

7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{3n^2+n}\right)^n (x-3)^n.$

22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-1}{2^n} (x+7)^n.$

8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^n (n+2)}.$

23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{e^n} (x-1)^n.$

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-7)^n}{\sqrt{2^n (3n-1)}}.$

24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2+4} \left(x+\frac{1}{3}\right)^n.$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n(x+3)^n}{\sqrt{n}(n+1)}.$

25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}}{(n+1)^3} (x-4)^n.$

11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+4} (x-10)^n.$

26 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{\sqrt{n}-1}.$

12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3-1} x^n.$

27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{8n^3+2}\right)^{n/3} x^n.$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{n}+1}.$

28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+2)}{n^{10}} (x-1)^n.$

14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n^3} (x+8)^n.$

29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{2n}}{(3n+1)^n} x^n.$

15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4^n n} (x-4)^n.$

30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)!} (x+11)^n.$

Завдання 5 Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ з точністю до *0,001*.

1 $\int\limits_0^1 e^{-x/3}\,dx$.

2 $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

3 $\int\limits_0^{0,5} x\,\mathrm{arctg}x\,dx$.

4 $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$.

5 $\int\limits_0^{0,5} x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

6 $\int\limits_0^{0,5} x\,e^{-x}\,dx$.

7 $\int\limits_0^{0,5} \mathrm{arctg}\left(x^2\right)dx$.

8 $\int\limits_0^1 \sin\left(2x^2\right)dx$.

9 $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}dx$.

10 $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

11 $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$.

12 $\int\limits_0^1 (1-\cos 3x)\,dx$.

13 $\int\limits_0^{0,1} \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

14 $\int\limits_0^{0,5} x\ln(1+2x)dx$.

15 $\int\limits_0^{0,2} \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$.

16 $\int\limits_0^{0,3} \frac{e^{-x^2}-1}{x}dx$.

17 $\int\limits_0^{0,1} \frac{\mathrm{arctg}3x}{x}dx$.

18 $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$.

19 $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos x^2}{x^2}dx$.

20 $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[3]{1+2x}\,dx$.

21 $\int\limits_0^1 \left(1-3e^{-2x}\right)dx$.

22 $\int\limits_0^1 \frac{\cos 2x-1}{x}dx$.

23 $\int\limits_0^{0,4} \frac{dx}{1+x^2}$.

24 $\int\limits_0^{0,3} \frac{\sin\left(3x^2\right)}{x}dx$.

25 $\int_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$.

26 $\int_{0}^{0,8} x\left(1-e^{-x}\right)dx$.

27 $\int_{0}^{0,5} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

28 $\int_{0}^{1} x\cos 2x\,dx$.

29 $\int_{0}^{0,1} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx$.

30 $\int_{0}^{0,5} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Завдання 6 Знайти три перших члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, яке задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$.

1 $y' = \cos x + y^2$; $y(0) = 1$.

2 $y' = e^x + y^2$; $y(0) = 1$.

3 $y' = y + y^2$; $y(0) = 3$.

4 $y' = 2e^y + xy$; $y(0) = 0$.

5 $y' = \operatorname{tg} x + y^2$; $y(0) = 1$.

6 $y' = e^x + y$; $y(0) = 4$.

7 $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 2$.

8 $y' = \sin x + 0,5\,y^2$; $y(0) = 1$.

9 $y' = x^2 + y$; $y(0) = 2$.

10 $y' = x + x^2 + y^2$; $y(0) = 5$.

11 $y' = x - 3^y$; $y(0) = -1$.

12 $y' = (x+y)^2$; $y(0) = 1$.

13 $y' = \ln y - xy$; $y(0) = 1$.

16 $y' = e^{x+y} + 1$; $y(0) = 1$.

17 $y' = xy - y$; $y(0) = 2$.

18 $y' = \cos(x - y)$; $y(0) = \pi$.

19 $y' = x^2 + 2^y$; $y(0) = 1$.

20 $y' = 2^x + y^2$; $y(0) = -1$.

21 $y' = e^x + \ln y$; $y(0) = 1$.

22 $y' = xy + y^2$; $y(0) = 2$.

23 $y' = \operatorname{arctg} y + 2x$; $y(0) = 1$.

24 $y' = 3^{1-x} - y^2$; $y(0) = 2$.

25 $y' = \lg y - 2x$; $y(0) = 1$.

26 $y' = \operatorname{ctg} \pi y + x + 1$; $y(0) = 0,5$.

27 $y' = x + 2\sqrt{y}$; $y(0) = 4$.

28 $y' = x\,y^2 - e$; $y(0) = 3$.

14 $y' = y^2 - e^x; \quad y(0) = 0$. 29 $y' = x - \operatorname{arcctg} y; \quad y(0) = 1$.

15 $y' = \sin(x + y); \quad y(0) = 1$. 30 $y' = y\ln(2 + x); \quad y(0) = 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. − М.: Наука,1976. − Т. 1. − 456 с.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. − М.: Наука,1976. − Т. 2. − 576 с.

3 Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. − М.: Наука,1966. − 736 с.

4 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. − М.: Наука,1986. − 544 с.

5 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. − М.: Наука, 1969. − 640 с.

6 Методичні вказівки і завдання до контрольних робіт з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу факультету УПП заочної форми навчання. − Харків: УкрДАЗТ, 1999. − 39 с.