ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до контрольних робіт 1,2
з дисципліни

«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 31 березня

2008 р., протокол № 9.

Методичні вказівки призначено для студентів 1 курсу спеціальності «Управління процесами перевезень на залізничному транспорті» заочної форми навчання.

Укладачі:

доц. Н.С.Юрчак,
старші викладачі Н.І.Волохова, Н.Г.Панченко

Рецензент

доц. С.Д.Бронза

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до контрольних робіт 1,2
з дисципліни

«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Відповідальний за випуск Юрчак Н.С.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 19.05.08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,5. Обл.-вид.арк. 2,75.
Замовлення № Тираж 200. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

ЗМІСТ

Контрольна робота 1

Завдання 1 Дії над матрицями

Знайти матрицю С, виконавши вказані операції над матрицями А та В [7, с.4-5; 9, с.6-7, 19-20].

Варіанти завдань

1 C=2(A+B); $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 C=A(2A+B); $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3 C=2A(A+B); $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4 C=3B(B-2A); $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5 C=2B(B-A); $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6 C=2A(A-B); $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7 C=B(A-3B); $A=\begin{pmatrix}4&5&6\\-1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-2\\3&1&2\end{pmatrix}$.

8 C=B(A+2B); $A=\begin{pmatrix}7&-3&0\\1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

9 C=2A(2B-A); $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&0&2\\-1&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&5\\0&1&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

10 C=(A+2B); $A=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&-1&2\\4&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\5&0&2\end{pmatrix}$.

11 C=2(A-B); $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\5&1&7\\-1&-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&5\\2&4&1\\3&1&0\end{pmatrix}$.

12 C=B(A-3B); $A=\begin{pmatrix}7&2&0\\-7&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$.

13 C=A(2A+B); $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\0&4&1\\7&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-1&-2&0\\2&1&3\end{pmatrix}$.

14 C=(A-B)2A; $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\0&2&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&1&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

15 C=(A-2B)B; $A=\begin{pmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&4\\0&3&2\\-1&-3&4\end{pmatrix}$.

16 C=2(A-B)A; $A=\begin{pmatrix}0&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&1\\-3&-2&0\\5&0&2\end{pmatrix}$.

17 C=2A(A+B); $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&-2\\4&1&1\\2&4&-5\end{pmatrix}$.

18 C=3(A-B)B; $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&-2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\5&-1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

19 C=(2A-B)A; $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&0&1\\-1&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&5&2\\0&1&2\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$.

20 C=B(A+2B); $A=\begin{pmatrix}7&-3&0\\1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

21 C=2(B-A)A; $A=\begin{pmatrix}2&-5&3\\5&-1&5\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

22 C=3(A+B)B; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23 C=2A(A+B); $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24 C=B(2B-3A); $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

25 C=2A(B+A); $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26 C=B(2A-B); $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

27 C=(3A-2B)B; $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

28 C=(A-2B)A; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29 C=(A+2B)A; $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

30 C=(A-2B)B; $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

31 C=(A+3B)2B; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 2 Системи лінійних рівнянь

а) розв'язати задану систему лінійних рівнянь трьома методами:

1) за формулами Крамера. Виконати перевірку; 2) матричним методом; 3) методом Гауса [7, с. 7-13; 9, с. 4-6, 23-24].

Варіанти завдань

$$1\ \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2; \\ 5x_1+4x_2-x_3=0; \\ 3x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$$

$$2\ \begin{cases} 4x_1+4x_2+3x_3=5; \\ 2x_1-x_2+x_3=7; \\ 3x_1+2x_2-x_3=-4. \end{cases}$$

$$3\ \begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=1; \\ x_1+3x_2+2x_3=6; \\ 2x_1-4x_2-x_3=-3. \end{cases}$$

$$4\ \begin{cases} 7x_1-4x_2+x_3=7; \\ x_1+x_2-x_3=1; \\ 2x_1-2x_2-x_3=2. \end{cases}$$

$$5\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1; \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-1; \\ 3x_1-x_2-x_3=4. \end{cases}$$

$$6\ \begin{cases} 4x_1-x_2-3x_3=5; \\ x_1+2x_2-2x_3=0; \\ 3x_1-3x_2+4x_3=10. \end{cases}$$

$$7\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-1; \\ 3x_1-x_2+2x_3=3; \\ 4x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

$$8\ \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0; \\ x_1-2x_2-x_3=5. \end{cases}$$

$$9\ \begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=8; \\ 3x_1-x_2+x_3=4; \\ x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$$

$$10\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6; \\ 4x_1-2x_2-2x_3=0; \\ 3x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

$$11\ \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7; \\ x_1+3x_2-2x_3=0; \\ 2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

$$12\ \begin{cases} x_1-x_2+x_3=1; \\ 4x_1-3x_2-x_3=2; \\ 4x_1+2x_2+x_3=-8. \end{cases}$$

13 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-3; \\ 3x_1+2x_2+x_3=2; \\ 4x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-4; \\ 3x_1-x_2-2x_3=3; \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=-1; \\ 3x_1+2x_2-x_3=1; \\ x_1-3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

16 $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2; \\ 3x_1+2x_2-5x_3=8. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=-2; \\ 2x_1-x_2+x_3=-1; \\ 2x_1+3x_2-2x_3=6 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=6; \\ 3x_1+x_2+x_3=1; \\ 4x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3; \\ 3x_1+x_2-x_3=2; \\ 4x_1+2x_2-5x_3=-7. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3=0; \\ 2x_1-x_2+x_3=5; \\ 4x_1-3x_2-2x_3=4. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-1; \\ 4x_1-5x_2-x_3=0; \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

22 $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=-1; \\ 4x_1+x_2-3x_3=1; \\ 5x_1-x_2-4x_3=0. \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1; \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-2; \\ 4x_1+4x_2-5x_3=0. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-2; \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+3x_3=6. \end{cases}$

25 $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1+x_2+x_3=2; \\ 5x_1-3x_2-2x_3=-2. \end{cases}$

26 $\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3=2; \\ 2x_1-3x_2-x_3=1; \\ x_1-5x_2+x_3=12. \end{cases}$

27 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2; \\ 5x_1+4x_2+x_3=0; \\ 6x_1-x_2-2x_3=-2. \end{cases}$

28 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=10; \\ 6x_1-3x_2-x_3=3; \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

29 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16; \\ 5x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=8; \\ -x_1+2x_2+3x_3=8; \\ -x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6; \\ 2x_1+x_2+3x_3=13; \\ x_1+2x_2+3x_3=14. \end{cases}$

б) розв'язати матричне рівняння.

1 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

2 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & -3 & -14 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

3 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

4 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

5 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

6 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

7 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

8 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

9 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

10 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)$.

11 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 12 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

13 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 14 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

15 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 16 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

17 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 18 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

19 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 20 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

21 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 22 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

23 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 24 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

25 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 26 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

27 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 28 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

29 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$. 30 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

31 $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$.

Завдання 3 Векторна алгебра

Задача 1

Задані вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Визначити:

1) довжину вектора $\vec{a}$;

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; $\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$;

5) площу паралелограма та площу трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

6) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

7) об'єм паралелепіпеда та об'єм трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

8) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$?;

9) чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$? [7, с. 18-20; 9, с. 8-10, с.25, 28-29; 11, с. 15-22].

Варіанти завдань

1 $\vec{a}$=(2,3,1),	$\vec{b}$=(-1,0,-1),	$\vec{c}$=(2,2,2).
2 $\vec{a}$=(2,3,1),	$\vec{b}$=(2,3,4),	$\vec{c}$=(3,1,-1).
3 $\vec{a}$=(1,5,2),	$\vec{b}$=(-1,1,-1),	$\vec{c}$=(1,1,1).
4 $\vec{a}$=(1,-1,-3),	$\vec{b}$=(2,3,1),	$\vec{c}$=(2,3,4).
5 $\vec{a}$=(3,3,1),	$\vec{b}$=(1,-2,1),	$\vec{c}$=(1,1,1).
6 $\vec{a}$=(3,1,-1),	$\vec{b}$=(-2,-1,0),	$\vec{c}$=(5,2,-1).
7 $\vec{a}$=(4,3,1),	$\vec{b}$=(1,-2,1),	$\vec{c}$=(2,2,2).
8 $\vec{a}$=(4,3,1),	$\vec{b}$=(6,7,4),	$\vec{c}$=(2,0,-1).
9 $\vec{a}$=(3,2,1),	$\vec{b}$=(1,-3,-7),	$\vec{c}$=(1,2,3).
10 $\vec{a}$=(3,7,2),	$\vec{b}$=(-2,0,-1),	$\vec{c}$=(2,2,1).
11 $\vec{a}$=(1,-2,6),	$\vec{b}$=(1,0,1),	$\vec{c}$=(2,-6,7).
12 $\vec{a}$=(6,3,4),	$\vec{b}$=(-1,-2,-1),	$\vec{c}$=(2,1,1).
13 $\vec{a}$=(7,3,4),	$\vec{b}$=(-1,-2,-1),	$\vec{c}$=(4,2,4).
14 $\vec{a}$=(2,3,2),	$\vec{b}$=(4,7,5),	$\vec{c}$=(1,-1,1).
15 $\vec{a}$=(5,3,4),	$\vec{b}$=(-1,0,-1),	$\vec{c}$=(4,2,4).
16 $\vec{a}$=(3,10,5),	$\vec{b}$=(-2,-2,-3),	$\vec{c}$=(2,4,3).
17 $\vec{a}$=(2,-4,-3),	$\vec{b}$=(4,3,1),	$\vec{c}$=(6,7,4).
18 $\vec{a}$=(3,1,-1),	$\vec{b}$=(1,0,-1),	$\vec{c}$=(8,3,-2).
19 $\vec{a}$=(1,2,3),	$\vec{b}$=(-2,3,0),	$\vec{c}$=(2,1,-6).
20 $\vec{a}$=(3,-2,3),	$\vec{b}$=(-1,2,1),	$\vec{c}$=(4,2,0).
21 $\vec{a}$=(-2,3,2),	$\vec{b}$=(4,6,4),	$\vec{c}$=(2,-1,3).
22 $\vec{a}$=(4,0,3),	$\vec{b}$=(1,-2,4),	$\vec{c}$=(1,-1,2).

23 $\vec{a}$=(5,-3,2), $\vec{b}$=(-4,1,5), $\vec{c}$=(0,2,4).
24 $\vec{a}$=(2,3,0), $\vec{b}$=(2,-1,1), $\vec{c}$=(-2,-2,1).
25 $\vec{a}$=(1,1,-2), $\vec{b}$=(-2,-5,3), $\vec{c}$=(-1,0,2).
26 $\vec{a}$=(-3,1,0), $\vec{b}$=(1,6,5), $\vec{c}$=(1,1,0).
27 $\vec{a}$=(1,3,7), $\vec{b}$=(-1,3,5), $\vec{c}$=(-6,0,2).
28 $\vec{a}$=(-4,-3,0), $\vec{b}$=(3,2,-1), $\vec{c}$=(-3,2,2).
29 $\vec{a}$=(0,6,-3), $\vec{b}$=(-1,6,0), $\vec{c}$=(4,4,2).
30 $\vec{a}$=(0,-5,4), $\vec{b}$=(4,-1,-2), $\vec{c}$=(5,0,4).
31 $\vec{a}$=(-3,3,1), $\vec{b}$=(1,0,-3), $\vec{c}$=(2,1,6).

Задача 2

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ та $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1, \left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=30^{\circ}.$

Маємо

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{p}+2\vec{q})\times(3\vec{p}+\vec{q})=3(\vec{p}\times\vec{p})+6(\vec{q}\times\vec{p})+(\vec{p}\times\vec{q})+2(\vec{q}\times\vec{q})=$$
$$=3\cdot 0-6(\vec{p}\times\vec{q})+(\vec{p}\times\vec{q})+2\cdot 0=-5(\vec{p}\times\vec{q}),$$

(оскільки $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{q}\times\vec{q}=0,\ \vec{q}\times\vec{p}=-(\vec{p}\times\vec{q})$). Тоді

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{p}\times\vec{q}|=5\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=5\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30^{\circ}=2,5$ (кв. од.).

Відповідь: 2,5(кв. од.).

Варіанти завдань

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

1 $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}.$

2 $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}.$

3 $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=\frac{1}{5}$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}.$

4 $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=\frac{1}{2}$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

5 $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

6 $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

7 $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

8 $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

9 $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

10 $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

11 $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=10$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

12 $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

13 $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=7$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

14 $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

15 $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

16 $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

17 $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

18 $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $|\vec{p}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

19 $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

20 $\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

21 $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=8$, $|\vec{q}|=\frac{1}{2}$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

22 $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=\frac{5}{2}$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

23 $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

24 $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=5$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

25 $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

26 $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

27 $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

28 $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

29 $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

30 $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

31 $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Завдання 4 Аналітична геометрія на площині

Задача 1

Задано прямі l_1 та l_2 і точка М.

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок , який відсікає ця пряма на осі ординат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

площу трикутника, відсіченого прямою l_1 від осей координат;

3) точку N перетину прямих l_1 та l_2 ;

4) рівняння прямої l_3, що проходить через точку М паралельно прямій l_2;

5) рівняння прямої l_4, що проходить через точку М перпендикулярно до прямої l_2;

6) відстань від точки М до прямої l_2.

Зробити креслення.
[11, с. 23-32; 9, с. 10-12].

Варіанти завдань

1 $l_1: 5x+3y+8=0$, $l_2: x-4y+20=0$, $M(7;-2)$.
2 $l_1: 3x+2y+2=0$, $l_2: 4x-3y+31=0$, $M(6;0)$.
3 $l_1: x-5y+9=0$, $l_2: 3x+2y+10=0$, $M(7;3)$.
4 $l_1: 5x+2y+13=0$, $l_2: 2x-5y+11=0$, $M(6;4)$.
5 $l_1: 4x+y+10=0$, $l_2: 3x+7y-5=0$, $M(5;-4)$.
6 $l_1: 5x+2y+17=0$, $l_2: 2x-3y+3=0$, $M(5;2)$.
7 $l_1: 9x-5y+17=0$, $l_2: 4x+y+14=0$, $M(8;4)$.
8 $l_1: 3x-2y-16=0$, $l_2: x+7y+10=0$, $M(-10;3)$.
9 $l_1: 2x+3y-15=0$, $l_2: 3x-7y-11=0$, $M(-5;-4)$.
10 $l_1: x-7y+8=0$, $l_2: 2x+5y-22=0$, $M(-4;-7)$.
11 $l_1: 3x-8y+6=0$, $l_2: x+2y-12=0$, $M(-8;-3)$.
12 $l_1: 2x-3y+17=0$, $l_2: 4x-y+9=0$, $M(6;-2)$.
13 $l_1: 3x-y+10=0$, $l_2: 5x-4y+2=0$, $M(3;10)$.
14 $l_1: 11x+6y+9=0$, $l_2: 3x-y-16=0$, $M(5;-4)$.
15 $l_1: 2x+3y-5=0$, $l_2: 3x+y-4=0$, $M(2;3)$.
16 $l_1: 3x-2y+7=0$, $l_2: 5x+y+3=0$, $M(1;4)$.
17 $l_1: 2x-3y+5=0$, $l_2: 2x+5y-12=0$, $M(3;-4)$.
18 $l_1: 4x-3y+5=0$, $l_2: x+4y-13=0$, $M(-2;-3)$.
19 $l_1: 3x+y-7=0$, $l_2: 2x-3y-1=0$, $M(-5;-8)$.
20 $l_1: 2x+5y-14=0$, $l_2: x-3y+4=0$, $M(-4;-4)$.
21 $l_1: 5x-2y+12=0$, $l_2: 4x+3y+5=0$, $M(-7;-8)$.
22 $l_1: 4x+y-13=0$, $l_2: x-5y-8=0$, $M(-4;7)$.
23 $l_1: 3x-2y-13=0$, $l_2: 2x+7y+8=0$, $M(-1;9)$.
24 $l_1: 2x-3y+3=0$, $l_2: 3x+y-12=0$, $M(-5;-6)$.
25 $l_1: 4x+y+5=0$, $l_2: 5x-2y+16=0$, $M(4;-5)$.
26 $l_1: 5x+y-7=0$, $l_2: 3x-2y-12=0$, $M(-6;8)$.
27 $l_1: 2x-3y-5=0$, $l_2: 4x+y-17=0$, $M(-5;-2)$.
28 $l_1: 8x+3y-4=0$, $l_2: 2x+5y-18=0$, $M(8;3)$.
29 $l_1: 2x-3y+13=0$, $l_2: 2x+7y-8=0$, $M(7;4)$.
30 $l_1: 5x+y+7=0$, $l_2: 7x-2y+20=0$, $M(5;-6)$.
31 $l_1: x+2y-3=0$, $l_2: 3x-4y+11=0$, $M(2;9)$.

Задача 2

Встановити тип кривої другого порядку L та знайти :

- для кола – координати центра та радіус;
- для еліпса – координати центра, півосі, ексцентриситет;
- для гіперболи – координати центра, дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот;
- для параболи – параметр параболи, координати вершини, координати фокуса, рівняння директриси.

Схематично зобразити криві.

[7, с. 14-18; 11, с. 32-34].

Варіанти завдань

1 $L: 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$

2 $L: 9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0.$

3 $L: 12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0.$

4 $L: 16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$

5 $L: 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$

6 $L: 9y^2 - 7y - 16 = 8x.$

7 $L: 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$

8 $L: 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$

9 $L: x = 2y^2 - 12y + 14.$

10 $L: 4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y - 2 = 0.$

11 $L: -16x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 144 = 0.$

12 $L: 12y^2 - 12x - 32y - 29 = 0.$

13 $L: 25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y - 284 = 0.$

14 $L: -16x^2 + 9y^2 + 32x + 90y - 367 = 0.$

15 $L: x = -\frac{1}{4}y^2 + y.$

16 $L: 3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0.$

17 $L: -9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y + 199 = 0.$

18 $L: y = 2x^2 - 126x + 14.$

19 $L: x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0.$

20 $L: 4x^2 - y^2 + 2y - 3 = 0.$

21 $L: y = 4x^2 - 8x + 6.$

22 $L: x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0.$

23 $L: 2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0.$

24 $L: 4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0.$

25 $L: x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1{,}25 = 0.$

26 $L: 2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0.$

27 $L: -4x^2 + y^2 + 8x - 6y - 8 = 0.$

28 $L: 9x^2 - 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$

29 $L: y^2 + 2x - 3y + 4 = 0.$

30 $L: x^2 - 4y^2 + 8y - 5 = 0.$

31 $L: 4x^2 + y^2 - 8x = 0.$

Завдання 5 Аналітична геометрія у просторі

Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ Знайти :

1) рівняння прямої L, яка проходить через точки A_1 і A_2, та довжину ребра A_1A_2;

2) рівняння площини P, яка проходить через точки A_1, A_2, A_3;

3) рівняння висоти H, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ та її довжину;

4) об'єм V піраміди;

5) кут α між ребрами A_1A_2 та A_1A_4;

6) кут β між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

[7, c. 18-21; 11, c. 37-41].

Зробити рисунок.

Варіанти завдань

1 $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.

2 $A_1(4;2;6)$, $A_2(2;-3;0)$, $A_3(-10;5;8)$, $A_4(-5;2;-4)$.

3 $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$.

4 $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;6)$.

5 $A_1(-1;-5;2)$, $A_2(-6;0;-3)$, $A_3(3;6;-3)$, $A_4(-10;6;7)$.

6 $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.

7 $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.

8 $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$.

9 $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$.

10 $A_1(14;4;5)$, $A_2(-5;-3;2)$, $A_3(-2;-6;3)$, $A_4(-2;2;-1)$.

11 $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$.

12 $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(-4;2;5)$.

13 $A_1(1;1;2)$, $A_2(-1;1;3)$, $A_3(2;-2;4)$, $A_4(-1;0;-2)$.

14 $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5;-3)$.

15 $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(5;9;-8)$.

16 $A_1(1;5;-7)$, $A_2(-3;6;3)$, $A_3(-2;7;3)$, $A_4(-4;8;-12)$.

17 $A_1(-3;4;-7)$, $A_2(1;5;-4)$, $A_3(-5;-2;0)$, $A_4(2;5;4)$.
18 $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$, $A_4(3;4;5)$.
19 $A_1(4;-1;3)$, $A_2(-2;1;0)$, $A_3(0;-5;1)$, $A_4(3;2;-6)$.
20 $A_1(1;-1;1)$, $A_2(-2;0;3)$, $A_3(2;1;-1)$, $A_4(2;-2;-4)$.
21 $A_1(1;3;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.
22 $A_1(1;0;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(2;-2;1)$, $A_4(2;1;0)$.
23 $A_1(1;2;-3)$, $A_2(1;0;1)$, $A_3(-2;-1;6)$, $A_4(0;-5;-4)$.
24 $A_1(3;10;-1)$, $A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3)$, $A_4(1;-1;2)$.
25 $A_1(-1;2;4)$, $A_2(-1;-2;-4)$, $A_3(3;0;-1)$, $A_4(7;-3;1)$.
26 $A_1(0;-3;1)$, $A_2(-4;1;2)$, $A_3(2;-1;5)$, $A_4(3;1;-4)$.
27 $A_1(1;3;0)$, $A_2(4;-1;2)$, $A_3(3;0;1)$, $A_4(-4;3;5)$.
28 $A_1(-2;-1;-1)$, $A_2(0;3;2)$, $A_3(3;1;-4)$, $A_4(-4;7;3)$.
29 $A_1(-3;-5;6)$, $A_2(2;1;-4)$, $A_3(0;-3;-1)$, $A_4(-5;2;-8)$.
30 $A_1(2;-4;-3)$, $A_2(5;-6;0)$, $A_3(-1;3;-3)$, $A_4(-10;-8;7)$.
31 $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;2)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(6;-3;8)$.

Контрольна робота 2

Завдання 1 Границі функції

Обчислити границі заданих функцій.
[8, с. 5-11; 10, с. 21-23].

Варіанти завдань

1 $а)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^3+3x-5}$; $б)\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-6x-16}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-7}{2x^3+4x^2}$;
$г)\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{tgx}{\sqrt{1-\cos 6x}}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+5}\right)^{2x}$.

2 $а)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2-4}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+5}{0{,}2x^2-x}$;
$г)\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{ctgx}{1-\sin x}$; $д)\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

3 $а)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x-9}{x^2-9}$; $б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[3]{x^6+1}}{2x^2+4}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tg2x}{arctg^2 3x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{2x+1}$.

4 $а)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$; $б)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}{x^2-4x-5}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot tg3x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{2-3x}\right)^{\frac{1}{x^2+x}}$.

5 $а)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-4}{x^2-2x}$; $б)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt[3]{12x-9}}{\sqrt{x+1}-2}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-20}{0{,}001x^3-1}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{\sqrt{1-\cos x}}$; $д)\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+3}{x+5}\right)^{\frac{1}{x^2-x-2}}$.

6 $а)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x-32}$; $б)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}-3}{1-\sqrt{x-4}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+x}-\sqrt[3]{x^9+1}}{6x^3-x-1000}$;

$г)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 12\pi x}$; $д)\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$.

7 $а)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+5}{\sqrt{x^6+1}}$;

$г)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg3x}{\sin x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-3x^2}\right)^{-\frac{2x+1}{x^2}}$.

8 $а)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{48+4x-x^3}{x^2+16x-80}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}arctgx\cdot\dfrac{x^2+1}{x}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\ln\cos x}$; $д)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}$.

9 $а)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-12}{x^2+5x-14}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x-19}{x^3+x-21}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg2x$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$.

10 $а)\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}$; $б)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2+x-56}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+17x^2+9x^4}{(2-3x)(4-2x)}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{2x^2+x+4}{x-1}}$.

11 $а)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$; $б)\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; $в)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 5x\cdot\cos\frac{1}{2x-\pi}$;

$г)\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin x-\sin 3}{\sqrt{x^3-2x^2-8}-1}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{ctg^2 x}$.

12 $а)\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$; $б)\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\frac{x+\sqrt{x^5}}{x^2\sqrt{2x}+1}$; $в)\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 2x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}}$.

13 $а)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^3-2x-4}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x+2}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^3+1}+9x}{x\left(\sqrt{x+7}+4\right)}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x(1-\cos 4x)}{x\cdot\sin^2 x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{2\cos 3x}{tgx}}$.

14 $а)\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2+25x-125}{x^3-5x^2}$; $б)\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+7}{(1-x)(1+4x)}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{xtg(2x)}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

15 $а)\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; $б)\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9+2x^2}-x}{2x-\sqrt{x^2+27}}$; $в)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$; $д)\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3x^2-1}{1-x^2}}$.

16 $а)\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^3+5x^2-18}$; $б)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{ctg\frac{1}{5x+2}}$.

17 $а)\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-5x-3}{-3x^3-4x^2+x+2}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{9x}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{1+3x}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2-x^3}$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{4x^2+5}{2x}}$.

18 $а)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{2x^3+3x^2-7x-10}$; $б)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-\sqrt{2x^2-4}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{4x^4+5}}{x^2+\sqrt{x^2-1}}$;

$г)\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos 3\pi x}{tg^2\pi x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{\frac{5-x^2}{2x}}$.

19 $a)\lim\limits_{x\to 3}\frac{6x^3-23x^2+15x}{x^3-6x^2+27}$; $б)\lim\limits_{x\to -5}\frac{3-\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{6+x}-1}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x-\sqrt[3]{x^2+1}}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 6x}{tg\left(\frac{3\pi}{2}\left(x^2-3x\right)\right)}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)^{\frac{4x^2+2}{3x}}$.

20 $a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{4+2x-x^3}{-12+x^2+x^3}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-2}{x^2+3x-4}$; $в)\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$; $д)\lim\limits_{x\to 3}\left(3-\frac{2x}{3}\right)^{3tg\frac{\pi x}{6}}$.

21 $a)\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-8x-3}{x^3-9x^2+27x-27}$; $б)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{4x}-2}$; $в)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}+11x^2}{7x-4\sqrt{x^5-100}}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos 2x}\right)^{ctg^2 2x}$.

22 $a)\lim\limits_{x\to -3}\frac{\left(x^2+x-6\right)^2}{(x+3)\left(x^2+2x-3\right)}$; $б)\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2-4}}$; $в)\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x}\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{tg\left(x^2-2x\right)}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-x^2+x^3}{7-2x+x^3}\right)^{\frac{3x^4+2}{x^2}}$.

23 $a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4+x^2+x-22}{x^2+x-6}$; $б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+11x}\right)$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{x+1}{x^2+7x+6}$;

$г)\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1-x}{2}\cdot tg\frac{\pi x}{2}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x-x^3}{1-x-x^3}\right)^{\frac{x^2+5}{3}}$.

24 $a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+3x^2-4x-1}{x^2+x-2}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+x}{x^2-\sqrt{x}}$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\cos\pi x-\sin\pi x}{tg 4\pi x}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+4}{3x+4}\right)^{\frac{1}{(4x-3)\sin\pi x}}$.

25 $a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^4+7x^2-5x-4}{x^3+x-2}$; $б)\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt[3]{4x+15}}{\sqrt[3]{3x-10}+1}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 2x-1}{\sin 4x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-4x}{2-4x}\right)^{\frac{1+4x^2}{x+2}}$.

26 $a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^2+3x-10}$; $б)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+4x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-2x-15}-\sqrt[4]{x+5}}$;

$г)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 3x}{1-\sin 3x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x}{11-2x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x+5}}$.

27 $а)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+4x}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; $б)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{2x^2+4x-3}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{1-\cos\sqrt{x}}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2x^2-1}{\sin^2 x}}$.

28 $а)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+5x-7}{2x^3-x-1}$; $б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-x}\right)\cdot x$;

$в)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg\left(x^2+3x-18\right)}{x-3}$; $г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+7}{x^2+7x-1}\right)^{x}$.

29 $а)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3+2x-33}$; $б)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{21x-20}-\sqrt[3]{-5x+6}}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0{,}0001x^3+\sqrt{x^7+1}}{10000-x^3\sqrt{x+4}}$;

$г)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{\sin^2\pi x}$; $д)\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{tg\pi x}}$.

30 $а)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^3+x-10}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; $в)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-4}-\sqrt{x^2+3}\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x-tgx}{x^3}$; $д)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{\frac{1+x^2}{x-2}}$.

31 $а)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+6x-2x^3}{6-13x+5x^2}$; $б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$; $в)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin\left(3\left(x^2+x-2\right)\right)}{\sin(x+2)}$;

$г)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}{\sqrt{1-\cos x}}$; $д)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{11-2x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x}}$.

Завдання 2 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1

Продиференціювати задані функції.

У пунктах “а” – “д” знайти похідну y';

у пункті “е” знайти першу і другу похідні y' *і* y'', диференціал функції dy;

у пункті “ж” знайти $y'=\dfrac{dy}{dx}, y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(див. [8], с.12-19, [10], с.23-26.)

Варіанти завдань

1 а) $y=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3+\sqrt[4]{\left(2x^2-1\right)^5}$; д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

б) $y=\dfrac{\arccos x^3}{\sqrt{1+2\sin^8 x^4}}+2^{\cos x}\cdot tgx$; е) $y=e^{x^2}$;

в) $y=\ln^5\left(e^{2x}+1\right)-2arctg^4\left(e^x\right)$;

г) $y=(\cos x)^{\sin^4 x}$.

ж) $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\ln \sin 3t. \end{cases}$

2 а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}+\dfrac{7}{(2x-3)^4}$;

б) $y=\ln^4\left(\arcsin^2 5x\right)+4^{-\sin x}\cdot ctg3x$;

в) $y=\ln^3\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$;

г) $y=\left(arctgx^4\right)^{x^2+1}$.

д) $xy=arctg\dfrac{x}{y}$;

е) $y=(\arcsin x)^2$;

ж) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$

3 а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+\dfrac{3}{(7x-2)^5}$;

б) $y=4\arcsin^3\left(\ln^2 x\right)$;

в) $y=4^{-x}\cdot\ln^5\left(x^2-1\right)$;

г) $y=(tgx)^{x^2+3}$.

д) $\ln x+e^{-y/x}=5$;

е) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$;

ж) $\begin{cases} x=\mathrm{t}-\sin \mathrm{t} \\ \mathrm{y}=1-\cos \mathrm{t} \end{cases}$;

4 а) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}-\dfrac{2}{(4x-5)^6}$;

б) $y=\arcsin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3+tg^3 2x$;

в) $y=\sqrt{\ln^4 x+1}+\ln^5\left(\sqrt{x}+1\right)^3$;

г) $y=(\arccos 5x)^{x^3+2}$.

д) $3^x+3^y=\sin y$;

е) $y=\sqrt{1+x^2}$;

ж) $\begin{cases} x=t-\cos^2 t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$;

5 а) $y=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{x^8}{\left(1-x^2\right)^4}+\sqrt[5]{\left(7-12x^2\right)^3}$;

б) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x^3}-\arcsin^3 2x$;

в) $y=\ln^7\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

г) $y=(arctgx)^{1/x}$.

д) $x=y+arctgy$;

е) $y=tgx$;

ж) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$.

6 а) $y=x\sqrt{x^2-1}-\dfrac{5}{\left(2x^2-3x+7\right)^4}$;

б) $y=5\sin^4 x^3+\cos^4 x+arctg^5 3x$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}+e^{-\cos^2 3x}}$;

г) $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$.

д) $x^3=\dfrac{x-y}{x+y}$;

е) $y=x^3e^x$;

ж) $\begin{cases} x=t^3 \\ y=\ln t^2 \end{cases}$.

7 а) $y=\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3+\sqrt[4]{\left(3x^2-1\right)^5}$;

б) $y=\sin x^4\cdot\cos^3 x^2+\arcsin^3 2x$;

в) $y=\ln^3\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

г) $y=(\sin 5x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

д) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

е) $y=e^{-x^2}$;

ж) $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$.

8 а) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}+\frac{3}{\left(5x^2+2x-1\right)^2}}$;

б) $y=arctg^2\frac{1+x}{1-x}+\mathrm{ctg}^3 4x$;

в) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+e^{tgx}$;

г) $y=\left(\cos 3x^2\right)^{\ln x}$.

д) $x\sin y+y\sin x=0$;

е) $y=ctgx$;

ж) $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

9 а) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[7]{(8x-3)^5}$;

б) $y=arctg^5\sqrt{4x^2-1}+ctg^7 x^3$;

в) $y=\ln^4\left(\sin x^3+\sqrt{1+\sin^2 5x}\right)$;

г) $y=(\ln 7x)^{1/x}$.

д) $x^4+y^4=x^2y^2$;

е) $y=\arcsin\frac{x}{2}$;

ж) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t^2 \end{cases}$.

10 а) $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^4+\frac{4}{\left(7x^2-3x+2\right)^3}$;

б) $y=\sin^5\sqrt{1+x^2}+\mathrm{arctg}^4 3x$;

в) $y=\ln^4\arccos^3 2x$;

г) $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

д) $3^x+3^y=\cos y$;

е) $y=\arccos^2 x^4$;

ж) $\begin{cases} x=e^{-3t} \\ y=e^{3t} \end{cases}$.

11 а) $y=\sqrt[3]{7+5x}+\frac{3}{(5x-4)^6}$;

б) $y=\arcsin^3\frac{2}{x^4}+arctg 5x^2$;

в) $y=\ln^5\left(x-2^{-3x}\right)$;

г) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$.

д) $y=5x+arctgy$;

е) $y=\frac{5}{x+3}$;

ж) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\frac{1}{1-t} \end{cases}$.

12 а) $y=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$;

б) $y=\arcsin^5\frac{x^2-1}{x^2}+arctg^3 4x$;

д) $\sin(xy)+\cos y=0$;

е) $y=\sqrt{4-x^2}$;

в) $y=\ln^7\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$;

г) $y=\left(ctg2x^3\right)^{\sin^2 x}$.

ж) $\begin{cases} x = arctgt \\ y=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$.

13 а) $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}-4\sqrt[4]{\left(1+3x^2\right)^3}$;

б) $y=\sqrt{arctgx^3}-\arcsin^5\left(x^2+1\right)$;

в) $y=\ln^2\left(x^4-\sin^3 x^5\right)$;

г) $y=\left(tg(2x+1)\right)^{3/x}$.

д) $y^2=x\sin y$;

е) $y=\sqrt{tg3x}$;

ж) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$;

14 а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}-\dfrac{4}{(5x+2)^3}$;

б) $y=\sin^2 x^3+\arccos^3 5x$;

в) $y=\sqrt[3]{\ln^2 x+5}+\ln^5 tgx^3$;

г) $y=\left(tg\left(x^2+4\right)\right)^{\sin x^2}$.

д) $x\ln y+\dfrac{y^2}{x}=3$;

е) $y=e^{\sqrt{x}}$;

ж) $\begin{cases} x=5t^4+t \\ y=\ln t \end{cases}$;

15 а) $y=\dfrac{1}{10x^5}-\dfrac{1}{4x^4}+\sqrt[5]{\left(3x+4x^2\right)^3}$;

б) $y=tg^3 2x\cdot\arcsin x^5$;

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln^5 tg^2 x+\ln^4\cos\left(x^3+2\right)$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^x$.

д) $y\cos y-\cos(x-y)=0$;

е) $y=xe^{x^2}$;

ж) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$;

16 а) $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{4+x^2}}+\sqrt[3]{5+4x-x^2}$;

б) $y=arctg^2\left(\dfrac{1}{x}+5x\right)^3+\sin^2 3x$;

в) $y=\ln^7\sin^5\left(2x^3+9\right)$;

г) $y=(\cos 5x)^{\sin\sqrt{x}}$.

д) $x+\sqrt{xy}+y=5$;

е) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$;

ж) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$;

17 а) $y=\dfrac{5}{\left(x^2-x+1\right)^4}+\sqrt[3]{(5x-7)^2}$;

б) $y=\sin^3\left(\cos^5 4x\right)+\arcsin^3 2x$;

в) $y=\dfrac{1}{\ln^5\left(x^2+1\right)}+e^{arctg\sqrt{x}}$;

г) $y=(\cos 3x)^{\arcsin x^2}$.

д) $x^2-2xy+y^3=1$;

е) $y=\dfrac{1}{7+\sqrt{x}}$;

ж) $\begin{cases} \text{x} = \text{arctg t} \\ \text{y}=\ln\left(1+\text{t}^2\right) \end{cases}$;

18 а) $y=\frac{\sqrt{x^2+7}}{4x}+\frac{5}{(4x-7)^4}$;   д) $x^2+3xy+y^3+1=0$;

б) $y=\frac{\arcsin^2(x+5)}{\arccos x^3}+tg^6 2x$;   е) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

в) $y=\frac{1}{3}\ln^3\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)^4$;   ж) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^3 \end{cases}$;

г) $y=\left(\sin\left(x^2+3\right)\right)^{5x}$.

19 а) $y=\frac{3}{x^2(x-2)}-\sqrt[5]{\left(3x^2+4x\right)^7}$;   д) $y^3-3y+10x=0$;

б) $y=\left(\arcsin^5 x^3+2x^2\right)^7+5^{x^2}$;   е) $y=\log_7 x$;

в) $y=x\ln^2(2x+5)+e^{ctgx}$;   ж) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$;

г) $y=\left(tg\left(x^2+7\right)\right)^{\sin x^3}$.

20 а) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}+\frac{7}{\left(5-4x^2\right)^3}$;   д) $y=\cos(x+y)$;

б) $y=\frac{\cos x}{\ln\sin x}+2^{tgx}\cdot arctg^5 3x$;   е) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

в) $y=e^{-x^2}\ln^6\left(x-2x^2\right)+\ln^2 tg\left(x^2+1\right)$;   ж) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=1/t \end{cases}$;

г) $y=\left(\cos^2 x\right)^{\ln^5 x}$.

21 а) $y=x^6\sqrt{4-x^2}-\frac{8}{\left(4x^2-7\right)^5}$;   д) $x-y+7\cos y=0$;

б) $y=e^{\cos x^5}\sin^7 x+arctg 7x$;   е) $y=e^{arctgx}$;

в) $y=\ln^5\left(1+\frac{1}{\cos x^4}\right)+\ln^5 tgx^4$;   ж) $\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^{-3t} \end{cases}$;

г) $y=\left(tg 7x^4\right)^{\sqrt{3x+1}}$.

22 а) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}+\frac{5}{\left(2x^2+4x-1\right)^3}$;   д) $5^x+5^y=5^{x+y}$;

б) $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}+2^{-x}\cdot arctg^3 4x$;   е) $y=\frac{x}{x^2-1}$;

в) $y=\frac{\ln^4\sin x}{\ln\cos^7 x}+2^{tg^4 x}$;   ж) $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$;

г) $y=\left(\sin\left(x^2+2\right)\right)^{3\cos x}$.

23 а) $y=\frac{x}{7\sqrt{49+x^2}}-\frac{4}{(2x-7)^6}$;   д) $xy^2-y\ln x=3$;

б) $y=\frac{3\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}+e^{-\cos x}\cdot arctg 7x^5$;   е) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

в) $y=\ln^8\left(3+x+\sqrt{6x+x^2}\right)$;   ж) $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t-t^2} \end{cases}$;

г) $y=(arctg\,5x)^{1/x}$.

24 а) $y=x^5\cdot\sqrt[3]{x^6-8}-\dfrac{6}{\left(2x^2-5\right)^3}$;

б) $y=e^{\cos^2 x}\sin x^3+arctg^3 2x$;

в) $y=\ln^5\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

г) $y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$.

д) $e^{2x}+e^{3y}=7xy$;

е) $y=\cos e^x+\sin e^x$;

ж) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$;

25 а) $y=\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{7}+\dfrac{\left(x^3-2\right)^4}{3}$;

б) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}+2^{\cos x}\cdot arctg\,5x^3$;

в) $y=\dfrac{\ln^2(3x+1)}{\cos 3x^4}$;

г) $y=(\cos 3x)^{1/x}$.

д) $x+y+7\cos y=0$;

е) $y=e^{\arcsin x}$;

ж) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{3t} \end{cases}$;

26 а) $y=\dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}+\dfrac{4}{(3x-5)^2}$;

б) $y=\cos^3 4x\cdot arctg^5 6x$;

в) $y=\ln^7\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\dfrac{\ln^3 x}{ctg(x-3)}$;

г) $y=(\sin x)^{\ln 5x}$.

д) $x+y+e^y arctgx=0$;

е) $y=e^{\arccos x}$;

ж) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$;

27 а) $y=\dfrac{x^5}{\sqrt{10-8x^4}}+\dfrac{1}{(6x-1)^3}$;

б) $y=\sqrt[3]{1+tg^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}+\arccos^5 7x$;

в) $y=2^{\sqrt{\sin x}}+\ln^3 tgx^2$;

г) $y=\left(\sqrt{4x+3}\right)^{arctg\,3x}$.

д) $(x+y)\cos x+\sin(xy)=0$;

е) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^8$;

ж) $\begin{cases} x=(1+\cos t)t \\ y=(1-\cos t)t^2 \end{cases}$;

28 а) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}+\dfrac{7}{\left(1-8x^2\right)^3}$;

б) $y=\arcsin^5\dfrac{2x}{1+x^2}+3^{tgx}$;

в) $y=\log_5^3\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$;

г) $y=\left(x^2+4\right)^{\cos^5 x}$.

д) $\sin(x+y)=\cos(x+y)$;

е) $y=\log_7 x$;

ж) $\begin{cases} x=1/t \\ y=t^3+t^2+1 \end{cases}$;

29 а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}+\dfrac{3}{\left(7x^3-x^2-4\right)^2}$;

б) $y=\arccos^3\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}+e^{-tg^2 x}$;

д) $arctgy=x+y$;

е) $y=\ln(5x+9)$;

в) $y=\ln^4\dfrac{x^2}{\sqrt{1-9x^4}}$;

г) $y=(tgx)^{(x^3+2)}$.

ж) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$;

30 а) $y=x\sqrt{1-x^4}-\dfrac{8}{(6x^2+3x-7)^3}$;

б) $y=3^{\cos x}\cdot\arcsin^2 3x$;

в) $y=\ln^5(1+\cos^2 x)+e^{-\sin 2x}$;

г) $y=(tgx)^{\frac{1}{\sin x}}$.

д) $3y^2x=e^{y/x}$;

е) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;

ж) $\begin{cases} x=\cos^5 t \\ y=\sin^5 t \end{cases}$;

31 а) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{1+x}+\dfrac{3}{(8x-5)^7}$;

б) $y=4^{-\sin x}\cdot arctg^2 3x$;

в) $y=\dfrac{x}{\sin^5(x^2+3)}+\ln^3\cos^2 4x$;

г) $y=(\sin 3x)^{1/x}$.

д) $5y^3x=\cos(xy)$;

е) $y=\ln(10x+1)$;

ж) $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=-\cos t \end{cases}$;

Задача 2

Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Розкриття невизначеностей типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ *та* $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ *за допомогою правила Лопіталя..*

Теорема(*правило Лопіталя*). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні, диференційовані та $g'(x)\neq 0$ в деякому околі точки $x=a$;

2) прямують до нуля (або $\pm\infty$) при $x\to a$;

3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінчена або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$),

то існує і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопіталя справедливе і при $a=\pm\infty$. Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування слід користуватись спрощуючими тотожними перетвореннями, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь.

Розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ *та* $\{\infty-\infty\}$.

У цих випадках слід алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до визначеностей типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а далі використовувати правило Лопіталя:

а) нехай $f(x)\to 0, g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Перетворимо $f(x)\cdot g(x)$ таким чином: $f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ або $f\cdot g=\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$. Тоді маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ при $x\to a$;

б) нехай $f(x)\to+\infty, g(x)\to+\infty$ при $x\to a$. Перетворимо вираз $f(x)-g(x)$ таким чином: $f-g=\dfrac{1}{\frac{1}{f}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g}}=\dfrac{\frac{1}{f}-\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$. Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ при $x\to a$.

Розкриття невизначеностей типу $\{1^{\infty}\},\{\infty^{0}\},\{0^{0}\}$.

У всіх трьох випадках розглядаємо границі виразу $(f(x))^{g(x)}$ при $x\to a$, причому:

якщо $f\to 1, g\to\infty$, маємо невизначеність типу $\{1^{\infty}\}$;

якщо $f\to\infty, g\to 0$, маємо невизначеність типу $\{\infty^{0}\}$;

якщо $f\to 0, g\to 0$, маємо невизначеність типу $\{0^{0}\}$.

Перетворимо вираз $(f(x))^{g(x)}$ таким чином: $\lim\limits_{x\to a}f^{g}=\lim\limits_{x\to a}e^{g\ln f}=e^{\lim\limits_{x\to a}g\ln f}$. У всіх трьох випадках вираз $g\ln f$ при $x\to a$ представляє невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$. До такого ж результату приходимо, якщо попередньо прологарифмуємо ліву та праву частини рівності: $y=f^{g}$; $\ln y=g\ln f\Rightarrow y=e^{g\ln f}$ або $f^{g}=e^{f\ln f}$.

Отже, розв’яжемо приклади. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{xe^x}=\dfrac{3}{e};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0}x=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos 2x\cdot 2}{3x^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\frac{1}{3};$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\{1^\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}=\left\{e^{\frac{0}{0}}\right\}=e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}}=e^{3A}.$

Знайдемо границю $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$ за правилом Лопіталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x}=-2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{3\cdot(-2)}=e^{-6}.$

Варіанти завдань

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg\,x - x}}{\mathrm{x - \sin x}};$ б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}.$

2 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e^x}}{x^3};$ б) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}.$

3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x};$ б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}.$

4 а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{1/\ln x}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

8 а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln tg7x}{\ln tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{1/x}$.

9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tgx)^{2x-\pi}$.

10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

11 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$.

12 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{tgx}$.

13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-7^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$.

14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{arctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

16 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

17 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{4/x^2}$.

18 а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{1/x}$.

19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{7}{x-1}}$.

21 а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{9}{x^2-1}}$.

22 а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

23 а) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)tg\dfrac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(tgx)^{tg2x}$.

24 а) $\lim\limits_{x\to +0}x^2\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{7}{x}\right)^x$.

25 а) $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

26 а) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{ctgx}$; б) $\lim\limits_{\to+0}(ctg2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

27 а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{tgx}{tg3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

28 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}+x\right)^{1/x}$.

29 а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

30 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$.

31 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+5}\right)^x$.

Задача 3

Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати ескізи їх графіків [8, с. 21-28, 10, с. 27-29].

Варіанти завдань

1 а) y=$x^2+\frac{2}{x}$; б) y=$e^{-1/x}$.

2 а) y=$\frac{x}{x^2-4}$; б) y= $x-\ln(x+1)$.

3 а) y=$\frac{6x^2-x^4}{9}$; б) y=$\ln(x^2+1)$.

4 а) y=$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) y=$(x+1)e^{2x}$.

5 а) y=$\frac{1}{x^2+3}$; б) y=$(x-1)e^{3x+1}$.

6 а) y=$\frac{3x^4+1}{x^3}$; б) y=$\frac{\ln x}{x}$.

7 а) y=$\frac{x^4-3}{x}$; б) y=$x^2e^{-x^2}$.

8 а) y=$\frac{8}{x^2-4}$; б) y=xe^{-x}.

9 а) y=$\frac{16}{x^2(x-4)}$; б) y=$x+\frac{\ln x}{x}$.

10 а) y=$\frac{x}{5+x^2}$; б) y=x^2e^{-x}.

11 а) y=$x^2+\frac{1}{x^2}$; б) y=x^3e^{-x}.

12 а) y=$\frac{x^3}{3-x^2}$; б) y=$\frac{1}{e^x-1}$.

13 а) y=$\frac{2x}{1-x^2}$; б) y=$x^2e^{-x^2/2}$.

14 а) y=$\frac{1}{x}+4x^2$; б) y=$x+e^{-x}$.

15 а) y=$x+\frac{4}{x+2}$; б) y=$\frac{e^x}{x}$.

16 а) y=$\frac{x^4}{x^3-1}$; б) y=e^{2x-x^2}.

17 а) y=$\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}$; б) y=$\frac{x^2}{2\ln x}$.

18 а) y=$\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$; б) y=$\frac{1}{2}x^2-\ln x$.

19 а) y=2+$\frac{12}{x^2-4}$; б) y=$x\ln x$.

20 а) y=$(x^2-1)^3$; б) y=$x^2\ln x$.

21 а) y=$\frac{5x}{4-x^2}$; б) y=$\frac{x^2}{\ln x}$.

22 а) y=$\frac{x}{(x-1)^2}$; б) y=$e^{\frac{1}{2-x}}$.

23 а) y=$\frac{2+x}{(x+1)^2}$; б) y=$e^{1/x}$.

24 а) y=$\frac{x+2}{x^3}$; б) y=x^4-2x^2+3.

25 а) y=$\frac{1-x^3}{x^2}$; б) y=$2x^3+3x^2-5$.

26 а) y=$\frac{4+x}{x^2}$; б) y=$2x^3+9x^2+12x$.

27 а) y=$\frac{2x^3}{x^2+1}$; б) y=$\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{7}{4}$.

28 а) y=$\frac{x^2}{x-1}$; б) y=$\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-1$.

29 а) y=$x+\frac{x}{3x-1}$; б) y=$1+2x^2-x^4$.

30 а) y=$x+\frac{4}{x+2}$; б) y=$2-3x^3+x^4$.

31 а) y=$\frac{16}{x^2(x-4)}$; б) y=$2x^3-3x^2+1$.

Завдання 3 Теорія функцій кількох змінних

Задача 1

Знайти частинні похідні та повний диференціал dZ функції $X = f(x;y)$ [10, с. 15, 30; 12, с. 4-5].

1 $Z = y\ln(x^2 - y^2)\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

2 $Z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

3 $Z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

4 $Z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

5 $Z = x\,arctg\,\dfrac{y}{x}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

6 $Z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

7 $Z = \ln(x^2 + y^2)\,; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = ?.$

8 $Z = \sqrt{2xy + y^2}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

9 $Z = arctg\,\dfrac{y}{x}\,; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = ?.$

10 $Z = e^{-\cos(x+ay)}\,; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = ?.$

11 $Z = \ln(x^2 + xy + y^2)\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

12 $Z = x^y + y^x\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

13 $Z = xy + xe^{\frac{y}{x}}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

14 $Z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

15 $Z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})\,; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

16 $Z = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2}\right); \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

17 $Z = \sqrt{x} \cdot \sin\dfrac{y}{x}; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

18 $Z = \left(x^2 + y^2\right) tg\,\dfrac{x}{y}; \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

19 $Z = \ln\left(e^x + e^y\right); \dfrac{\partial Z}{\partial x} = ?; \dfrac{\partial Z}{\partial y} = ?; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = ?.$

20 $Z=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)\,;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

21 $Z=e^{xy}\,;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

22 $Z=x\ln\dfrac{y}{x}\,;\dfrac{\partial Z}{\partial x}=?;\dfrac{\partial Z}{\partial y}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=?.$

23. $Z=\ln\left(x+e^{-y}\right);\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial Z}{\partial y}=?.$

24 $Z=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right);\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

25 $Z=\dfrac{xy}{x+y}\,;\dfrac{\partial Z}{\partial x}=?;\dfrac{\partial Z}{\partial y}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=?.$

26 $Z=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3;\dfrac{\partial Z}{\partial x}=?;\dfrac{\partial Z}{\partial y}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=?.$

27 $Z=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right);\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

28 $Z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}\,;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

29 $Z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)\,;\dfrac{\partial Z}{\partial x}=?;\dfrac{\partial Z}{\partial y}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=?.$

30 $Z=\dfrac{y}{x}\,;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

31 $Z=e^{xy}\,;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=?;\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=?.$

Задача 2

Дослідити на екстремум задані функції [10, с.16-17, 31-32; 12, с. 7-8].

1 $Z=1+15x-2x^2-xy-2y^2.$

2 $Z=\dfrac{3}{2}x^2+y^2+2xy+y.$

3 $Z=x^3+8y^3-6xy+15.$

4 $Z=1+6x-x^2-y^2-xy.$

5 $Z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20.$

6 $Z=2x^3+2y^3-6xy+5.$

7 $Z=3x^3+3y^3-9xy+10.$

8 $Z=x^2+y^2+xy+x-y+1.$

9 $Z=4x-4y-x^2-y^2.$

10 $Z=6x-6y-3x^2-3y^2.$

11 $Z=x^2+y^2+xy-6x-9y.$

12 $Z=(x-2)^2+2y^2-10.$

13 $Z=(x-5)^2+y^2+1.$
14 $Z=x^3+y^3-3xy.$
15 $Z=2xy-2x^2-4y^2.$
16 $Z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3.$
17 $Z=2xy-5x^2-3y^2+2.$
18 $Z=xy(12-x-y).$
19 $Z=xy-x^2-y^2+9.$
20 $Z=2xy-3x^2-2y^2+10.$
21 $Z=x^3+8y^3-6xy+1.$
22 $Z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y.$
23 $Z=x^2+y^2-xy+9x-6y+20.$
24 $Z=xy(6-x-y).$
25 $Z=x^2+y^2-xy+x+y.$
26 $Z=x^2+y^2+xy-2x-y.$
27 $Z=(x-1)^2+2y^2.$
28 $Z=xy-3x^2-2y^2.$
29 $Z=2(y+2)^2+x^2.$
30 $Z=2(x+y)-x^2-y^2.$
31 $Z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y.$

Задача 3

Знайти найбільше і найменше значення функції $Z=Z(x;y)$ в замкненій області D. Зробити рисунок [12, с. 8-12].

1 $Z=3x+y-xy$, $D: y=x,\ y=4,\ x=0.$
2 $Z=xy-x-2y$, $D: y=x,\ y=0,\ x=3.$
3 $Z=x^2+2xy+8y-4x$, $D: y=0,\ y=2,\ x=0,\ x=1.$
4 $Z=5x^2-3xy+y^2$, $D: y=0,\ y=1,\ x=0,\ x=1.$
5 $Z=x^2+2xy-y^2-4x$, $D: y=0,\ x-y+1=0,\ x=3.$
6 $Z=x^2-2x+y^2-2y+8$, $D: y=0,\ x+y=1,\ x=0.$
7 $Z=2x^3-xy^2+y^2$, $D: y=0,\ y=6,\ x=0,\ x=1.$
8 $Z=3x+6y-x^2-xy-y^2$, $D: y=0,\ y=1,\ x=0,\ x=1.$
9 $Z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$, $D: y=0,\ x+y=3,\ x=0.$
10 $Z=x^2+2xy-10$, $D: y=0,\ y=x^2-4.$
11 $Z=xy-2x-y$, $D: y=0,\ y=4,\ x=0,\ x=3.$
12 $Z=0{,}5x^2-xy$, $D: y=8,\ y=2x^3.$
13 $Z=3x^2-2x+3y^2-2y+2$, $D: y=0,\ x+y=1,\ x=0.$
14 $Z=2x^2+3y^2+1$, $D: y=0,\ y=\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}.$

15 $Z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: y = 0,\ x + y = -1,\ x = -3.$
16 $Z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: y = 0,\ x - y = 1,\ x = 5.$
17 $Z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$, $D: y = 2x,\ y = 2,\ x = 0.$
18 $Z = x^2 - 2xy + 2{,}5y^2 - 2x$, $D: y = 0,\ y = 2,\ x = 0$, $x = 3.$
19 $Z = xy - 3x - 2y$, $D: y = 0,\ y = 4,\ x = 0$, $x = 4.$
20 $Z = x^2 + xy - 2$, $D: y = 0,\ y = 4x^2 - 4.$
21 $Z = x^2y(4 - x - y)$, $D: y = 0,\ y = 6 - x,\ x = 0.$
22 $Z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: y = -1,\ y = 2,\ x = 0$, $x = 2.$
23 $Z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D: x + 2y = 4,\ x - 2y = 4,\ x = 0.$
24 $Z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: y = 0,\ y = x + 1$, $x = 3.$
25 $Z = -9x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: y = 0,\ y = 2$, $x = 0$, $x = 1.$
26 $Z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $D: y = 0,\ y = x + 2$, $x = 2.$
27 $Z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2}.$
28 $Z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$, $D: y = -1,\ y = 1,\ x = -1$, $x = 1.$
29 $Z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, $D: y = 0,\ x + y + 2 = 0,\ x = 0.$
30 $Z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: y = 0,\ x + y = 6$, $x = 0.$
31 $Z = 10 + 2xy - x^2$, $D: y = 0,\ y = 4 - x^2.$

Задача 4

Знайти градієнт даної функції $Z = Z(x; y)$ в точці $A(x_0; y_0)$ і похідну по напряму вектора $\vec{a}$ в цій же точці [12, с. 12; 10, с. 31].

1 $Z = \sqrt{14 + x^2 + y^2}$, $A(1;1)$, $\vec{a}(-3;4).$
2 $Z = arctg\left(xy^2\right)$, $A(1;-1)$, $\vec{a}(2;-1).$
3 $Z = arctg\,\dfrac{x^2}{y}$, $A(1;1)$, $\vec{a}(3;-4).$
4 $Z = x^3 + 3xy - y^2$, $A(1;1)$, $\vec{a}(2;3).$
5 $Z = arctg\left(x^2 + y^2\right)$, $A(3;2)$, $\vec{a}(-12;5).$
6 $Z = \sqrt{3xy + 2y^2}$, $A(2;1)$, $\vec{a}(3;4).$
7 $Z = arctg\left(x + y^2\right)$, $A(3;2)$, $\vec{a}(-4;-3).$
8 $Z = ln\left(3x^2 + 5y^2\right)$, $A(1;1)$, $\vec{a}(2;3).$
9 $Z = 3x^4 + 2x^2y^3$, $A(-1;2)$, $\vec{a}(4;-3).$
10 $Z = arctg\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)$, $A(1;1)$, $\vec{a}(1;-2).$
11 $Z = \sqrt{x^3y + 3y^4}$, $A(2;1)$, $\vec{a}(-3;-4).$
12 $Z = arctg\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, $A(2;1)$, $\vec{a}(-5;12).$
13 $Z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2;1)$, $\vec{a}(5;12).$
14 $Z = \sqrt{x^3y + 3y^4}$, $A(2;1)$, $\vec{a}(-3;4).$

15 $Z = 3x^2y^3 + 5xy^2$, $A(1;1)$, $\vec{a}(2;1)$.

16 $Z = \sin^2\left(xy^3\right)$, $A(\frac{\pi}{4};1)$, $\vec{a}(2;1)$.

17 $Z = \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}$, $A(4;3)$, $\vec{a}(-3;4)$.

18 $Z = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$, $A(6;4)$, $\vec{a}(3;-4)$.

19 $Z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, $A(1;1)$, $\vec{a}(2;1)$.

20 $Z = 5x^2 + 6xy$, $A(2;1)$, $\vec{a}(1;2)$.

21 $Z = \ln\left(4x^2 + 3y^2\right)$, $A(3;1)$, $\vec{a}(2;-1)$.

22 $Z = \arccos\frac{y^2}{x}$, $A(2;1)$, $\vec{a}(-5;12)$.

23 $Z = arctg\left(xy^2\right)$, $A(2;3)$, $\vec{a}(-4;-3)$.

24 $Z = \arcsin\left(\frac{y^2}{x}\right)$, $A(2;1)$, $\vec{a}(3;-4)$.

25 $Z = arctg\frac{x^2}{y}$, $A(1;-1)$, $\vec{a}(3;-4)$.

26 $Z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $A(1;2)$, $\vec{a}(-3;-4)$.

27 $Z = x^3 - xy + y^2$, $A(1;1)$, $\vec{a}(3;5)$.

28 $Z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$, $A(1;2)$, $\vec{a}(1;4)$.

29 $Z = x^2 - xy + y^4$, $A(1;1)$, $\vec{a}(6;8)$.

30 $Z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $A(0;0)$, $\vec{a}(1;2)$.

31 $Z = 2x^4 + 2x^2y^3 + 3xy$, $A(-1;2)$, $\vec{a}(2;-4)$.

Список літератури

1 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.

2 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – Київ: А.С.К., 2005.

3 Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1967.

4 Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 8-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1972.

5 Тевящев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник для студентів технічних університетів. – Харків, 2004.

6 Тевящев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник для студентів технічних університетів. – Харків, 2002.

7 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів 1 курсу спеціальності "Управління процесами перевезень на залізничному транспорті" заочної форми навчання / Н.С. Юрчак, Р.О. Єфременко. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.

8 Введення в математичний аналіз функції однієї змінної. Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів 1 курсу спеціальності "Управління процесами перевезень на залізничному транспорті" заочної форми навчання/ Р.О. Єфременко. – Харків: УкрДАЗТ, 2000.

9 Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми "Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії"/ І.В. Ковалішина. – Харків, 2000.

10 Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми "Диференціальне числення функцій однієї і кількох змінних"/ І.В. Ковалішина. – Харків, 2000.

11 Методичні вказівки і завдання для студентів 1 курсу загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Н.І. Волохова, Л.І. Макаренко, Р.М. Давидов, Н.С. Юрчак. – Харків, 2000.

12 Методичні вказівки і завдання до контрольних робіт з дисципліни "Вища математика" для студентів 2 курсу факультету УПП заочної форми навчання./ Р.О. Єфременко, Л.В. Наземцева. – Харків, 1999.