

**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ**

**Кафедра „Вища математика”**

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ  
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання контрольних робіт з дисципліни  
“ВИЩА МАТЕМАТИКА”**

**Частина II**

**Харків – 2009**

Завдання і методичні вказівки розглянуто і  
рекомендовано до друку на засіданні кафедри „Вища

математика” 21 травня 2007 р. протокол № 11.

Призначено для студентів загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти О.А. Осмаєв,  
О.О. Думіна,  
асист. Ю.С. Шувалова

Рецензент

доц. А.О. Дрогаченко

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання контрольних робіт з дисципліни “Вища математика”

Частина II

Відповідальний за випуск Осмаєв О.А.

Редактор Губарева К.А.

---

Підписано до друку 13.06.07 р.  
Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.  
Умовн.-друк.арк. 1,75. Обл.-вид.арк. 2,0.  
Замовлення № Тираж 300 Ціна

---

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.  
Друкарня УкрДАЗТу,  
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**Кафедра вищої математики**

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ  
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**Частина II**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання контрольних робіт  
з дисципліни “Вища математика”  
для студентів загальнотехнічних спеціальностей  
заочної форми навчання**

**Харків 2009**

Завдання і методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 21 травня 2007 р. протокол № 11.

Призначено для студентів загальнотехнічних спеціальностей заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти О.А. Осмаєв,  
О.О. Думіна,  
асист. Ю.С. Шувалова

Рецензент

доц. А.О. Дрогаченко

## **ВСТУП**

Дані методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу “Вища математика” – інтегральному численню. У частині II розглянуті основні методи дослідження невластних інтегралів функцій однієї змінної та застосування визначених інтегралів. Робота містить програму, розв’язання типових прикладів та варіанти контрольних робіт для студентів-заочників загальнотехнічних спеціальностей.

Вказівки рекомендовані студентам-заочникам, але можуть бути використані і при вивченні цього розділу студентами стаціонару.

## **ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

У зв'язку з невеликим обсягом аудиторних занять (лекційних і практичних) основним джерелом знань для студентів заочної форми навчання є не конспект лекцій, а підручник. Особливу увагу слід звертати на визначення основних понять курсу, а при вивченні теорем – на їх формулювання, прагнути до чіткого усвідомлення припущень теорем і доведення тверджень.

Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. Корисно для закріплення навичок, крім свого варіанта, виконати завдання ще кількох варіантів.

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем. Залік контрольних робіт згідно з навчальною програмою є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики. Контрольна робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не заліковується.

## НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

### Визначення

Нехай функція  $f(x)$  неперервна у напівнескінченному інтервалі  $[a; +\infty)$ .

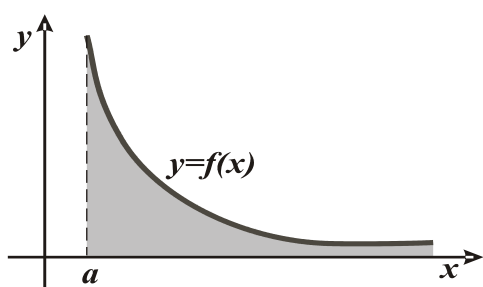


Рисунок 1

Невласним інтегралом з нескінченними межами інтегрування (першого роду) (рисунок 1) називається:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx .$$

Якщо вказана границя скінченна, то говорять, що невластний інтеграл *збігається*; якщо границя нескінченна або не існує, то невластний інтеграл *розбігається*.

Аналогічно визначають *невласний інтеграл* першого роду на необмеженому проміжку  $(-\infty, b]$ :

Нехай функція  $f(x)$  неперервна для будь-яких  $x \in [a; b)$  та необмежена при  $x \rightarrow b$ .

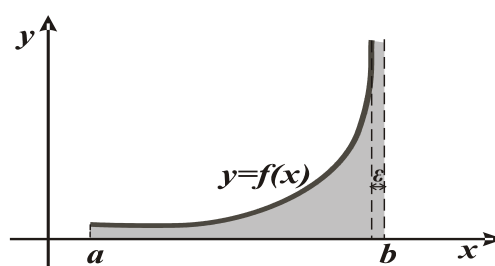


Рисунок 2

Невласним інтегралом від необмеженої функції (другого роду) (рисунок 2) називається:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx .$$

Якщо границя скінченна, то невластний інтеграл називають *збіжним*; якщо нескінченна або не існує, то *розбіжним*.

Аналогічно визначають *невласні інтеграли* від необмеженої функції (другого роду) від функцій, що терплять нескінченний розрив тільки на лівому кінці інтервалу  $[a; b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx .$$

Якщо функція  $f(x)$  визначена і неперервна на всій осі, можна розглядати *невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування* на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . За визначенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx ,$$

цей інтеграл збігається, якщо обидва інтеграли у правій частині рівності збігаються.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Для функції  $f(x)$ , що має нескінченний розрив тільки в точці  $c$  інтервалу  $(a, b)$  за визначенням

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

цей інтеграл збігається, якщо обидва доданки у правій частині рівності збігаються.

Збіжним невластним інтегралам можна надати геометричного змісту. Для  $f(x) \geq 0$ , якщо інтеграл збігається, то площа під кривою  $f(x)$  скінченна і дорівнює значенню цього інтеграла. Якщо інтеграл розбігається, то говорити про площу не можна.

При дослідженні збіжності невластних інтегралів важливу роль грає поняття особливої точки.

*Особливими точками* називаються точки, у будь-якому околі яких функція необмежена, а також  $-\infty$  та  $+\infty$ .

Зауважимо, якщо підінтегральна функція на проміжку інтегрування має кілька особливих точок, то інтеграл за властивістю адитивності потрібно розбити на суму кількох інтегралів так, щоб у кожному була лише одна особлива точка. Такий інтеграл буде збігатися лише в тому випадку, якщо всі доданки будуть збіжними, та розбігатися в усіх інших випадках.

**Приклад 1** За допомогою визначення доведемо розбіжність невластного інтеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ .

Оскільки підінтегральна функція  $\frac{1}{x}$  існує для будь-яких  $x \neq 0$ , то на відрізку інтегрування  $x \in [1; \infty)$  вона неперервна. Єдина

особливість виникає при  $x = +\infty$ , тому це невласний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). За

визначенням  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$  –

границя дорівнює нескінченності, тому невласний інтеграл розбігається.

**Приклад 2** За допомогою визначення доведемо збіжність невласного інтеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

Оскільки підінтегральна функція  $\frac{1}{1+x^2}$  визначена для будь-яких  $x$ , то вона неперервна при  $x \in (-\infty; +\infty)$  (на всьому проміжку інтегрування). Тобто є лише дві особливості  $x = -\infty$ ,  $x = +\infty$ , тому маємо інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). За визначенням

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{1+x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctgc - \arctga) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctgb - \arctgc) =$   
 $= (\arctgc - (-\frac{\pi}{2})) + (\frac{\pi}{2} - \arctgc) = \pi$ , оскільки обидві границі скінченні, то інтеграл збігається.

**Приклад 3** За допомогою визначення доведемо розбіжність невласного інтеграла  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

Інтеграл має скінченні границі інтегрування. Розглянемо підінтегральну функцію  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . Знайдемо її особливі точки:

$x \ln x = 0$ , тобто  $x = 0$  або  $\ln x = 0$ , тому особливі точки  $x = 0$  та  $x = 1$ . На проміжок  $[1; 2]$  попадає лише  $x = 1$ , отже, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції (другого роду).

За визначенням  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

Щоб уникнути громіздких позначень, обчислимо первісну функції  $\frac{1}{x \ln x}$  окремо:



$$F(x) = \int \frac{dx}{x \ln x} = \left[ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c.$$

Тепер повернемося до обчислення невластного інтеграла  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|\ln 2| - \ln|\ln(1+\varepsilon)|) = \infty$  – границя дорівнює нескінченності, оскільки  $\ln|\ln(1+\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$ , тому невластний інтеграл розбігається.

**Приклад 4** За допомогою визначення доведемо розбіжність невластного інтеграла  $\int_1^3 \frac{dx}{(2-x)^2}$

Розглянемо підінтегральну функцію  $\frac{1}{(2-x)^2}$ . Знайдемо її особливі точки:  $(2-x)^2 = 0$ , тобто  $x = 2$ . Даний інтеграл є невластним інтегралом від необмеженої функції (другого роду), бо підінтегральна функція  $\frac{1}{(2-x)^2}$  має особливість при  $x = 2$  та точка  $x = 2$  належить інтервалу інтегрування  $[1;3]$ . За визначенням маємо

$$\int_1^3 \frac{dx}{(2-x)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(2-x)^2} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon'} \frac{dx}{(2-x)^2} + \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon''}^3 \frac{dx}{(2-x)^2}. \quad (1)$$

Щоб уникнути громіздких позначень, обчислимо первісну функції  $\frac{1}{(2-x)^2}$  окремо:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(2-x)^2} = \left[ \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{(-t)^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-2} + c = \frac{1}{2-x} + c.$$

Розглянемо перший доданок у визначенні невластного інтеграла:  $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon'} \frac{dx}{(2-x)^2} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2-x} \right) \Big|_1^{2-\varepsilon'} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon'} - 1 \right) = \infty$  – для того, щоб інтеграл збігався, потрібно, щоб обидві границі в рівності (1) були скінченні, у цьому прикладі вже перша границя дорівнює

нескінченності, тому невластний інтеграл розбігається.

### **Ознаки збіжності невластних інтегралів**

З'ясування питання про збіжність невластних інтегралів значно ускладнюється, якщо первісна функції невідома або її складно обчислити. У випадку невід'ємної підінтегральної функції  $f(x) \geq 0$  є прості ознаки збіжності невластних інтегралів, що дозволяють визначити збіжність, не вдаючись до обчислення первісної. Сформулюємо ці ознаки для невластних інтегралів з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Для визначеності будемо

розглядати невластні інтеграли виду  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ; ознаки збіжності для

інтегралів  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  формулюються аналогічно.

### **Теорема 1 (ознака порівняння у загальній формі)**

Нехай  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  для будь-якого  $x > a$ :

1) якщо „більший” інтеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  збігається, то „менший” інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  теж збігається;

2) якщо „менший” інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  розбігається, то „більший” інтеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  теж розбігається.

### **Визначення**

Функції називаються *еквівалентними* при  $x \rightarrow x_0$ :  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ , де  $A$  – будь-яке число, що не дорівнює нулю або нескінченності.

## Теорема 2 (ознака порівняння у граничній формі)

Нехай  $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} g(x)$ , тоді поведінка інтегралів  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ,

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$  однакова, тобто вони збігаються та розбігаються одночасно.

У якості „еталонних” функцій, з якими найчастіше порівнюють інші функції, відзначимо степеневу функцію  $\frac{1}{x^p}$  та експоненціальну  $e^{-kx}$  (таблиці 1,2).

Таблиця 1

Невласний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду)	
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$	збігається при $p > 1$
	розбігається при $p \leq 1$
$\int_a^{+\infty} e^{-kx} dx$	збігається при $k > 0$
	розбігається при $k \leq 0$

Таблиця 2

Невласний інтеграл від необмеженої функції (другого роду)	
$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$	збігається при $p < 1$
	розбігається при $p \geq 1$

Еталонний інтеграл від необмеженої функції можна узагальнити (таблиця 3).

Таблиця 3

Невласні інтеграли від необмеженої функції (другого роду)	
$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p};$	збігаються при $p < 1$
$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p};$	
$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p}, c \in (a;b);$	розбігаються при $p \geq 1$

Сформульовані вище теореми застосовуються тільки для функцій, що зберігають знак на інтервалі інтегрування. Більш складним є дослідження інтегралів, що не зберігають постійний знак, наприклад таких, як  $\frac{\sin x}{x}$ . Для знакозмінних функцій розрізняють два види збіжності: абсолютну та умовну.

### Визначення

Якщо  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  збігається, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збігається напевно, говорять, що  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збігається *абсолютно*.

Якщо  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  розбігається, а  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збігається, то говорять, що  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збігається *умовно*.

### Теорема 3 (спеціальна ознака збіжності)

Якщо:

1) функція  $g(x)$  монотонно прямує до нуля, коли  $x \rightarrow +\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ );

2) функція  $f(x)$  має обмежену первісну  $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ ,

$F(x) \leq M, x \in (a; +\infty)$ , тоді невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  збігається, взагалі кажучи, неабсолютно.

На ознаках збіжності для інтегралів від необмежених функцій (другого роду) ми зупинятися не будемо, оскільки вони формулюються подібно розглянутим у теоремах 1-3.

**Приклад 5** За допомогою ознаки порівняння доведемо розбіжність невластного інтеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

Оскільки функція  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}}$  існує для будь-яких  $x \neq 0$ , то при  $x \in [1; +\infty)$  вона неперервна. Маємо єдину особливість  $x = +\infty$ , тобто інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Зазначимо, що функція  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$  при  $x \in [1; +\infty)$

Спробуємо довести розбіжність цього інтеграла. Для ілюстрації застосування ознак збіжності наведемо два способи доведення розбіжності цього невластного інтеграла.

### *I спосіб*

Розглянемо функцію  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}}$  при  $x > 1$ , оскільки  $\arctg x$  на проміжку  $[1; +\infty)$  є монотонно зростаючою функцією, то справедлива нерівність  $\arctg x > \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$  при  $x > 1$ . Маємо  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} > \frac{\pi}{4\sqrt[3]{x^2}} = g(x) > 0$  при  $x > 1$ . Розглянемо інтеграл від отриманої функції  $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}} dx$  – це еталонний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду),  $p = \frac{2}{3} < 1$ , тому він розбігається (це „менший” інтеграл), а тому за ознакою порівняння (теорема 1) розбігається і  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  (як „більший” інтеграл).

### *II спосіб*

Оскільки збіжність інтеграла залежить лише від поведінки функції  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}}$  в околі  $+\infty$ , придумаємо для цієї функції еквівалентну

при  $x \rightarrow +\infty$ :  $\frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{\sqrt[3]{x^2}}$ .

Розглянемо  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  – це розбіжний ( $p = \frac{2}{3} < 1$ ) еталонний інтеграл з нескінченними межами інтегрування (першого роду). Якщо довести, що функція  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$  еквівалентна вихідній підінтегральній функції, то за ознакою порівняння у граничній формі (теорема 2) можна буде зробити висновок, що  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  теж розбігається. Доведемо еквівалентність за означенням

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases},$$

отже, функції еквівалентні, а значить, інтеграли від них ведуть себе однаково, тому  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  розбігається.

**Приклад 6** За допомогою ознаки порівняння доведемо збіжність невласного інтеграла  $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx$ .

Функція  $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}$  існує при будь-яких  $x \neq -1$ . Маємо дві особливості  $x = \infty$ ,  $x = -1$ . Тобто потрібно розбити вихідний інтеграл на два так, щоб у кожному була лише одна особлива точка  $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx = \int_{-1}^1 \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx$ .

Розглянемо кожен інтеграл окремо. Зазначимо, що  $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} \geq 0$  при  $x \in (-1; +\infty)$ .

1)  $\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx$  – це інтеграл з нескінченними межами інтегрування, оскільки підінтегральна функція неперервна при  $x \in [1; +\infty)$ . Збіжність інтеграла залежить від поведінки функції в околі нескінченності.

Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x)$ . Отриманий інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  – еталонний збіжний ( $p = 2 > 1$ ) невластний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду).

Доведемо, що функція  $f(x) = \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}$  еквівалентна функції  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ . За визначенням

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} : \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2\sqrt[5]{x} \cdot x^2 + 4x^2}{1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{4}{x}}{\frac{1}{x^3} + 1} = 1 \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases},$$

тобто ці функції еквівалентні.

За ознакою порівняння (теорема 2) інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx$  теж збігається.

2)  $\int_{-1}^1 \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} dx$  – це інтеграл від необмеженої функції, особлива точка  $x = -1 \in [-1; 1]$ . Збіжність інтеграла залежить від поведінки функції в околі  $x = -1$ , тому придумаємо функцію, яка буде еквівалентна  $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}$  при  $x \rightarrow -1$ :

$$\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} = \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{-1 + 2\sqrt[5]{-1} + 4}{(x + 1)(1 + 1 + 1)} = \frac{1}{3(x + 1)}.$$

Розглянемо  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x + 1} dx$  – це еталонний розбіжний ( $p = 1 \geq 1$ ) невластний інтеграл від необмеженої функції.

Доведемо, що функція  $\frac{1}{x + 1}$  еквівалентна  $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}$ . За визначенням

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} : \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 - x + x^2} = \frac{1}{3} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases},$$

отже, функції еквівалентні, тому за ознакою порівняння (аналог теореми 2 для невластних інтегралів від необмежених функцій)  $\int_{-1}^1 \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1+x^3} dx$  теж розбігається.

### Висновок

Інтеграл  $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1+x^3} dx$  є сумою збіжного і розбіжного інтегралів, тому він розбігається.

### Зауваження

Збіжність першого інтеграла у прикладі 6 можна довести також, застосовуючи теорему 1. Для цього необхідно придумати більшу функцію, інтеграл від якої буде збіжним. Збільшимо чисельник (кожний доданок замінимо на найбільший) та зменшимо знаменник (відкинемо один з доданків), отже,  $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1+x^3} < \frac{x + 2x + 4x}{x^3} = \frac{7}{x^2}$ . Розглянемо  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  – це еталонний збіжний ( $p = 2 > 1$ ) інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Тобто „більший” інтеграл  $7 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  збігається, тому за ознакою порівняння (теорема 1) „менший” інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1+x^3} dx$  теж збігається.

**Приклад 7** Вивчимо збіжність невластного інтеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

Даний інтеграл має дві особливості, оскільки, по-перше, це інтеграл з необмеженими межами інтегрування, по-друге, при  $x = 0$  функція  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$  має особливість (знаменник  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$  дорівнює нулю). Розіб'ємо цей інтеграл на два так, щоб у кожному інтегралі була лише одна особливість:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

Розглянемо окремо кожен інтеграл.



$$1) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

На проміжку інтегрування  $(0; \pi)$  функція  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geq 0$  та має одну особливу точку  $x=0$ , тобто це інтеграл від необмеженої функції (другого роду).

Оскільки при  $0 < x < \pi$  виконується нерівність  $0 < \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , можна застосувати ознаку порівняння (аналог теореми 1 для невластних інтегралів від необмежених функцій).  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$  - еталонний невластний інтеграл від необмеженої функції (другого роду),  $p = \frac{1}{3} < 1$ , він збігається (це „більший” інтеграл), тому за ознакою порівняння  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$  теж збігається (як „менший”).

$$2) \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

На проміжку інтегрування  $(\pi; \infty)$  функція  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$  змінює знак та має одну особливу точку  $x = +\infty$ , тому це інтеграл на необмеженому проміжку (першого роду). Застосуємо спеціальну ознаку збіжності (теорема 3), нехай  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  та  $f(x) = \sin x$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ , доведемо монотонність за визначенням (

$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ ): розглянемо  $x_1 < x_2$ , доведемо  $\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}}$ .

Оскільки  $x_1, x_2 > \pi > 0$ , можна позбавитися знаменників  $\sqrt[3]{x_2} > \sqrt[3]{x_1}$ , піднесемо нерівність до куба  $x_2 > x_1$ , таким чином  $g(x)$  монотонно спадає до нуля.

Знайдемо тепер первісну функції  $f(x) = \sin x$ :

$$F(x) = \int_{\pi}^x \sin \xi d\xi = \cos \xi \Big|_{\pi}^x = \cos x - \cos \pi = \cos x + 1, \quad \text{використовуючи}$$

властивість  $|\cos x| \leq 1$ , маємо  $F(x) = \cos x + 1 \leq 2$

За спеціальною ознакою порівняння невласний інтеграл  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$  збігається, взагалі кажучи, неабсолютно.

### Висновок

Невласний інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$  дорівнює сумі двох збіжних інтегралів, тому й сам збігається.

### Зауваження

Збіжність першого інтеграла у прикладі 7 можна також довести, застосовуючи аналог теореми 2 для невласних інтегралів від необмежених функцій. Оскільки збіжність інтеграла залежить від його поведінки в околі  $x=0$ , придумаємо еквівалентну функцію при

$x \rightarrow 0$ :  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{-2/3}}$ , маємо  $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^{-2/3}} dx$  - збіжний ( $p = -\frac{2}{3} < 1$ ) еталонний

невласний інтеграл від необмеженої функції. Доведемо, що придумана функція  $\frac{1}{x^{-2/3}}$  дійсно еквівалентна вихідній

підінтегральній функції  $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ : за означенням

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} : \frac{1}{x^{-2/3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}, \text{ тобто функції еквівалентні, тому } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

теж збігається за ознакою порівняння у граничній формі.

**Приклад 8** За допомогою ознаки порівняння доведемо розбіжність невласного інтеграла  $\int_{0,5}^1 \frac{\arctg x}{x-x^2} dx$

Розглянемо підінтегральну функцію  $f(x) = \frac{\arctg x}{x-x^2}$ , знайдемо її особливі точки:  $x-x^2=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=1, x=0$ , тобто в будь-якому околі точок  $x=1, x=0$   $f(x)$  необмежена. Але на проміжку інтегрування  $x \in [0,5;1]$  лежить тільки  $x=1$ . Даний інтеграл є невласним

інтегралом від необмеженої функції (другого роду) з особливою точкою  $x=1$ . Для ілюстрації роботи ознак збіжності наведемо два способи доведення розбіжності цього інтеграла. Зазначимо, що  $\frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} \geq 0$  при  $x \in (0,5;1)$ .

### I спосіб

Збіжність невласного інтеграла  $\int_{0,5}^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} dx$  залежить тільки від поведінки  $f(x)$  при наближенні до  $x=1$ . Придумаємо функцію, що еквівалентна  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2}$  при  $x \rightarrow 1$ :  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} = \frac{\operatorname{arctg}x}{x(1-x)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\operatorname{arctg}1}{1 \cdot (1-x)} = \frac{\pi}{4(1-x)}$ . Розглянемо  $\int_{0,5}^1 \frac{dx}{1-x}$  — це еталонний розбіжний ( $p=1 \geq 1$ ) невласний інтеграл від необмеженої функції. Доведемо за визначенням, що функція  $\frac{1}{1-x}$  дійсно еквівалентна  $\frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2}$  при  $x \rightarrow 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} : \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}x}{x} = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases}$ , тобто функції еквівалентні.

За ознакою порівняння у граничній формі (аналог теореми 2 для інтегралів від необмежених функцій)  $\int_{0,5}^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} dx$  теж розбігається.

### II спосіб

Придумаємо меншу функцію, інтеграл від якої буде розбігатися. Для цього зменшимо чисельник: при  $x \in (0,5;1)$  функція  $\operatorname{arctg}x$  монотонно зростає, тому  $\operatorname{arctg}x > \operatorname{arctg}0,5$ ; та збільшимо знаменник, підставимо замість  $x$  його найбільше значення на проміжку  $(0,5;1)$ ; маємо

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{x-x^2} > \frac{\operatorname{arctg}0,5}{x(1-x)} > \frac{\operatorname{arctg}0,5}{1 \cdot (1-x)} = \operatorname{arctg}0,5 \cdot \frac{1}{1-x} = g(x).$$

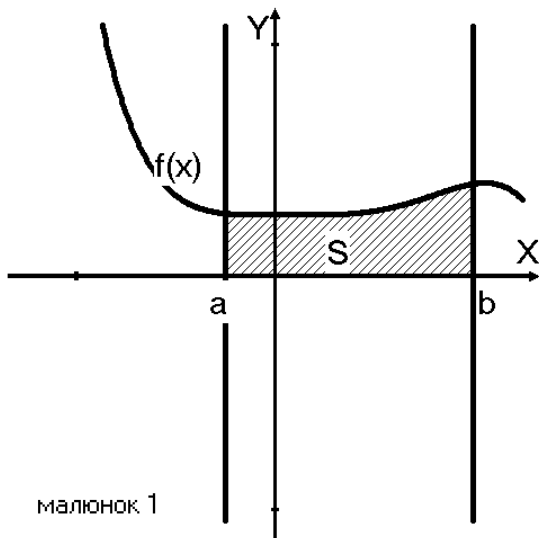
Розглянемо  $\int_{0,5}^1 \frac{dx}{1-x}$  — це еталонний розбіжний ( $p=1 \geq 1$ ) невласний інтеграл від необмеженої функції, тому „менший” інтеграл  $\int_{0,5}^1 g(x) dx$  розбігається. За ознакою порівняння (аналог

теорема 1 для невластних інтегралів від необмежених функцій)

„більший” інтеграл  $\int_{0,5}^1 \frac{\arctg x}{x^2 - x} dx$  теж розбігається.

## ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

### *Площа фігури*



Як зазначалося у частині першій, задача про обчислення площі плоскої фігури історично пов'язана з задачею про обчислення визначеного інтеграла. У декартовій системі координат

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad 2)$$

### Рисунок 3

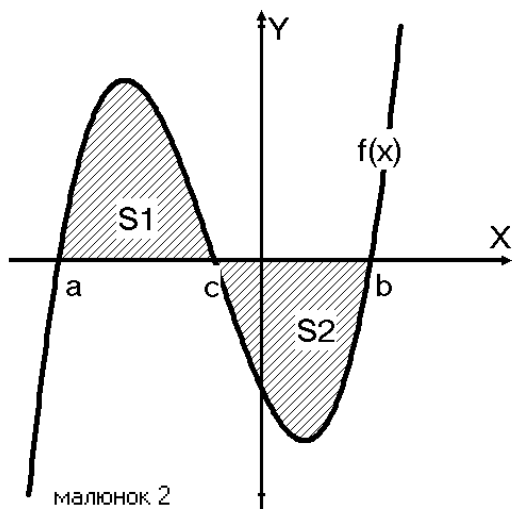
де  $S$  - площа криволінійної трапеції (рисунок 3), обмеженої зверху графіком функції  $y = f(x)$ , ( $y \geq 0$ ), знизу віссю  $OX$  та з боків прямими  $x = a$  та  $x = b$  ( $a < b$ ) [5, с. 35].

Якщо лінія, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана

параметричними рівняннями  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , то, зробивши підстановку в інтегралі (2) за формулою  $x = \varphi(t)$ , отримаємо

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

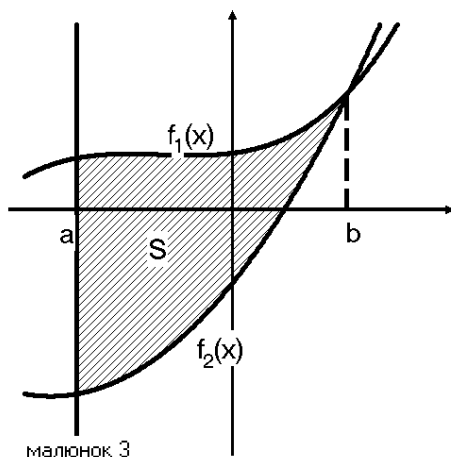
де  $t_1, t_2$  – значення, між якими змінюється параметр  $t$ , коли точка пробігає зліва направо всю лінію, що обмежує трапецію зверху.



В загальному випадку (рисунок 4), коли функція  $f(x)$  змінює знак на відрізку  $a < x < b$  ( $f(c) = 0$ ;  $f(x) > 0, a < x < c$ ;  $f(x) < 0, c < x < b$ ), для обчислення площі застосовується формула

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

Рисунок 4



Узагальнюючи ці формули, можна отримати формулу для обчислення площі складної фігури (рисунок 5)

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx, \quad (3)$$

Рисунок 5

де  $S$  - площа фігури, обмеженої зверху графіком функції  $y = f_1(x)$ , знизу графіком функції  $y = f_2(x)$  та з боків прямими  $x = a$  та  $x = b$ .

**Приклад 9** Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 - x - 2$$

$$y = 1 - 3x$$

Дана фігура обмежена зверху прямою  $y = 1 - 3x$ , знизу параболою  $y = x^2 - x - 2$  (рисунок 6). Щоб знайти лінії, якими вона обмежена з боків, знайдемо точки перетину параболі та прямої, для цього розв'яжемо систему

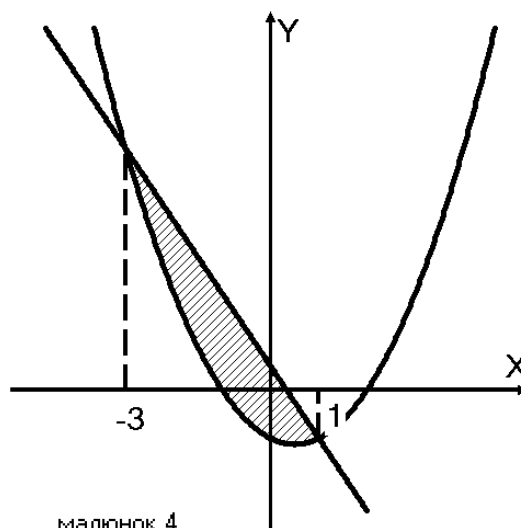


Рисунок 6

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3x = x^2 - x - 2 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, x_2 = 1 \\ y = 1 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3, x_2 = 1 \\ y_1 = 10, y_2 = -2 \end{cases}$$

оскільки  $x_1 < x_2$ , то  $a = x_1 = -3$ ,  $b = x_2 = 1$ . За формулою (3) знаходимо площу

$$S = \int_{-3}^1 (1 - 3x) - (x^2 + 2x - 3) dx = \int_{-3}^1 (4 - 5x - x^2) dx = 4x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^1 =$$

$$= 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} - (-12 - \frac{45}{2} + 9) = 26\frac{2}{3}$$

### Довжина дуги

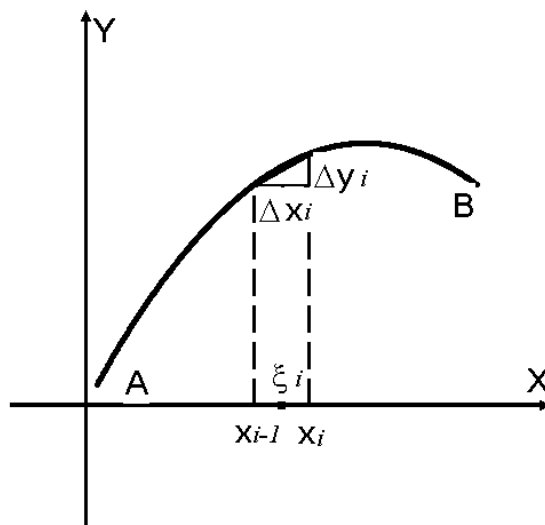
Нехай деяка лінія  $AB$  є графіком неперервної функції  $y = f(x)$ , похідна  $f'(x)$  якої теж неперервна. Розіб'ємо дугу на  $n$  частин.

Проводячи через кожні дві сусідні точки розбиття хорду, побудуємо вписану ламану, довжина якої  $L_n$ .

Довжина маленького відрізка дорівнює  $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ , де  $(x_i; y_i)$  – координати кінцевої точки, а  $(x_{i-1}; y_{i-1})$  – координати початкової точки (рисунок 7).

Позначимо різниці  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ . Довжина всієї ламаної дорівнює

Рисунок 7



малюнок 5

$$L_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2} + \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2} + \dots + \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

$$\text{або } L_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2} \Delta x_1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)^2} \Delta x_2 + \dots + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \Delta x_n,$$

оскільки  $y_i = f(x_i)$ , то  $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$ , де  $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$ . Тому за теоремою Лагранжа  $L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$ . Природно вважати, що ця довжина є наближеним значенням довжини лінії  $AB$   $L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$ . Ця рівність буде тим точніше, чим менше буде розбиття лінії на частини. Тому за точне значення довжини лінії прийемо границю довжини ламаної при умові, що найбільша довжина ділянки ламаної наближається до нуля, тобто довжина дуги  $L$  виражається за допомогою інтеграла

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4)$$

Якщо рівняння задано параметрично  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , то роблячи підстановку у (4), маємо

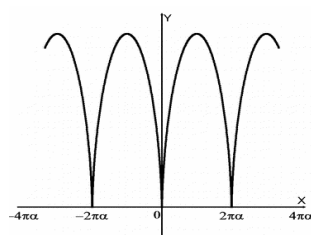
$$L = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (5)$$

Якщо рівняння задано у полярних координатах  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , то розглядаючи  $\varphi$  як параметр, маємо  $x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$ ,  $y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$ , підставляючи в (5), отримаємо  $L = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi$ , нескладні перетворення приводять до формули:

$$L = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi \quad (6)$$

**Приклад 10** Знайти довжину однієї арки циклоїди  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

Коли  $x$  пробігає відрізок  $[0; 2\pi a]$  однієї арки циклоїди, параметр  $t$  змінюється від 0 до  $2\pi$





(рисунок 8). Обчислимо похідні:  $x' = a(1 - \cos t)$ ,  $y' = a \sin t$ .

Рисунок 8

За формулою (5) маємо

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a.$$

**Приклад 11** Знайти довжину кривої  $r = 25(1 - \cos \varphi)$

Криву задано в полярних координатах, тому обчислимо довжину за формулою (6). Оскільки крива замкнена, то  $\varphi$  пробігає значення  $(0; 2\pi)$  (рисунок 9). Обчислимо похідну:  $r' = 25 \sin \varphi$

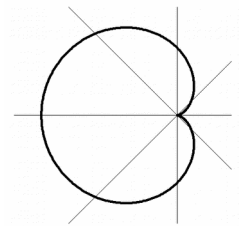


Рисунок 9

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(25(1 - \cos \varphi))^2 + (25 \sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{625(2 - 2 \cos \varphi)} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 25\sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 50 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = -100 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = -100 \cos \pi + 100 \cos 0 = 200.$$

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1** За допомогою визначення обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів з нескінченними межами інтегрування (першого роду).

1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{7x}{x^2+3} dx$	7 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$	13 $\int_6^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}$	19 $\int_0^{\infty} \frac{1}{5^x} (5+25^x) dx$	25 $\int_0^{\infty} x \operatorname{arctg} x dx$
2 $\int_0^{\infty} 5^{-3x+2} dx$	8 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^4+2}$	14 $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	20 $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$	26 $\int_1^{\infty} (2-x) \ln x dx$
3 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	9 $\int_0^{\infty} x \sin x dx$	15 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{24}{1+9x^2} dx$	21 $\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$	27 $\int_0^{\infty} x^2 \cos x^3 dx$
4 $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$	10 $\int_4^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2-5}} dx$	16 $\int_0^{\infty} \frac{1+3^x}{3^{2x-1}} dx$	22 $\int_{-\infty}^{-6} \frac{dx}{x^2+10x+25}$	28 $\int_6^{\infty} \frac{dx}{x^2-9}$
5 $\int_{0,2}^{\infty} \operatorname{arctg} 5x dx$	11 $\int_{-\infty}^1 \sqrt[4]{2-x} dx$	17 $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$	23 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{3^x} (9^x+3) dx$	29 $\int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx$
6 $\int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{\frac{e^x+2}{4}} dx$	12 $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$	18 $\int_0^{\infty} x \sin x^2 dx$	24 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$	30 $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2-6x+9}$

**Завдання 2** За допомогою визначення обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів від необмеженої функції (другого роду).

1 $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	7 $\int_{-2}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	13 $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{ctg}^2 x dx$	19 $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^3}$	25 $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3 \sin x dx}{1+2 \cos x}$
2 $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	8 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^4}$	14 $\int_{\pi/6}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$	20 $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$	26 $\int_0^1 \frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

$$\begin{array}{ccccc}
3 \int_0^3 \frac{dx}{(2-x)^3} & 9 \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} & 15 \int_7^8 \frac{dx}{(x-7)x} & 21 \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}} & 27 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx \\
4 \int_{0,5}^1 \frac{dx}{x \ln^2 x} & 10 \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx & 16 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{3 \cos x dx}{1-2 \sin x} & 22 \int_{-1}^2 x \ln(x+1) dx & 28 \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} \\
5 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x - 1}}{\sin^2 x} dx & 11 \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} & 17 \int_{0,5}^1 x \ln(1-x) dx & 23 \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^3 x} & 29 \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}} \\
6 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} & 12 \int_0^3 \frac{dx}{3x-2} & 18 \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \operatorname{tg}^2 x dx & 24 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x(x+2)} & 30 \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}
\end{array}$$

**Завдання 3** За допомогою ознак збіжності дослідити на збіжність невластні інтеграли.

$$\begin{array}{ll}
1a) \int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+6x} dx ; б) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x^2}{\sqrt[6]{x^7}} dx & 16a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 16x}{\sqrt[4]{x^3}} dx ; б) \int_0^{0,5} \frac{16x dx}{x^2 - \sqrt[3]{x^7}} \\
2a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3} dx ; б) \int_0^1 \frac{2x^2+3x+2}{x^3+\sqrt{x}} dx & 17a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{17 dx}{\sqrt[5]{x^4+2\sqrt{x^2+1}}} ; б) \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\ln(x+1)} \\
3a) \int_0^{+\infty} \frac{3+x}{\sqrt{x^4+x}} dx ; б) \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\ln(x^2+1)} dx & 18a) \int_1^{+\infty} \frac{18+x^2}{3+x^4-4x} dx ; б) \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\
4a) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{\sqrt[5]{x}} dx ; б) \int_{-1}^0 \frac{2x^4+7}{x^2+2x+1} dx & 19a) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 19x}{\sqrt[3]{x^2}} dx ; б) \int_{-1}^5 \frac{x^2+19}{x^3+1} dx \\
5a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5 dx}{(x^2+3)\sqrt{1+x^2}} ; б) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{\ln(x+1)}} & 20a) \int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+20}{2x^5+x} dx ; б) \int_0^1 \frac{\sin \sqrt[4]{x}}{\ln(1+\sqrt[3]{x})} dx \\
6a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 6x}{2x^2} dx ; б) \int_{-1}^0 \frac{8x+6}{x^3+3x^2+3x+1} dx & 21a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 21x}{\sqrt[5]{x}} dx ; б) \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+21) dx}{x^2-1} \\
7a) \int_1^{+\infty} \frac{7+x^3}{x^2+x-2} dx ; б) \int_0^1 \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}} dx & 22a) \int_0^{+\infty} \frac{x+22}{7x^3+2\sqrt[3]{x}} dx ; б) \int_1^2 \frac{1-x}{\cos \sqrt{x-1}-1} dx \\
8a) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 8x}{x^4+x^2} dx ; б) \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3} dx}{\sqrt[3]{x^4+2x}} & 23a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 23x}{\sqrt[5]{x}} dx ; б) \int_2^3 \frac{1+\sqrt{x}}{(x-2)^4} dx \\
9a) \int_0^{+\infty} \frac{x^3+9\sqrt{x}}{2x^6+x^2} dx ; б) \int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[5]{x+2}}{\operatorname{tg}(x+2)} dx & 24a) \int_1^{+\infty} \frac{x+24}{\sqrt[3]{x^7-1}} dx ; б) \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x}} dx \\
10a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 10x}{\sqrt[6]{x^5}} dx ; б) \int_1^{1,5} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3x-x^2-2} dx & 25a) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 23x}{\sqrt[7]{x^4}} dx ; б) \int_2^4 \frac{x^4+25}{x^2-4} dx
\end{array}$$

11a) $\int_0^{+\infty} \frac{11dx}{\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x+1}}$ ;б) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$	26a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 + 26}{x^8 + 1} dx$ ;б) $\int_0^1 4 \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{\arctg x}} dx$
12a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 12x}{\sqrt[5]{x}} dx$ ;б) $\int_0^1 \frac{12dx}{x \sqrt{(1+x)^3}}$	27a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 27x}{\sqrt[3]{x}} dx$ ;б) $\int_1^3 \frac{x^3 dx}{x^2 + x - 2}$
13a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 13x}{\sqrt[6]{x^7}} dx$ ;б) $\int_0^{1/2} \frac{(\sqrt[3]{x} + 1) dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[6]{x}}$	28a) $\int_1^{+\infty} \frac{28 + x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$ ;б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\sin 2x}}{\sqrt[5]{x(x+2)}} dx$
14a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{14dx}{x^4 + x^2 + 2}$ ;б) $\int_0^{0,5} \frac{\arctg \sqrt[3]{x}}{x - x^3} dx$	29a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 29x}{x^2 + x} dx$ ;б) $\int_{-2}^{-1} \frac{29 \sqrt[3]{x^4} dx}{x^2 - 2x - 3}$
15a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{15dx}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$ ;б) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} \arctg x} dx$	30a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 30dx}{x^4 + \sqrt{x}}$ ;б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\cos x - 1}}{x^2 + x} dx$

#### Завдання 4 Знайти площу фігури, обмеженої лініями.

1a) $y = 2 - 3x^2$ ; $y = -x$	б) $y^2 = 16 - 8x$ $y^2 = 24x + 48$	16a) $1 + 3y = x^2$ ; $3y - 8 = 0$ ;	б) $y = \ln x$ , $y = 0$ , $y = \ln 2x$ , $x = e$
2a) $y = x^2 + 3x$ ; $9y = 6x + 8$ ;	б) $y = \sin x$ , $y = 2 \sin x$ , $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$	17a) $y = 2x^2 - 4x$ ; $2y + 3 = 0$ ;	б) $y = 2^x$ , $y = 8^x$ , $x = -2$
3a) $y = 3x - x^2$ ; $2y - x = 2$ ;	б) $y = 2^x$ , $y = 2^{-x}$ , $x = 4$	18a) $y = x - x^2$ ; $y = x - 9$ ;	б) $y = 2 - 4\sqrt[3]{x}$ $x + y - 2 = 0$ , $x > 0$
4a) $2y = x^2$ $2x + 2y - 3 = 0$ ;	б) $y = e^{2x}$ , $y = 2 - e^x$ , $x = 2$	19a) $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ ; $x + y = 2$	б) $xy = 3$ $x + y = 4$
5a) $y = x - 3x^2$ ; $4y + 1 = 0$ ;	б) $y = \arctg x$ , $y = \sqrt{3}$ , $x = -\frac{\pi}{4}$	20a) $y = x^2 - 5x$ ; $y + 5x - 4 = 0$ ;	б) $y = 2e^{-x}$ , $y = e^x - 1$ , $x = 0$
6a) $y = x^2$ ; $3y = x + 2$ ;	б) $y = \arcsin 2x$ , $y = 3$ , $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$	21a) $y = 5x^2 - 1$ ; $2y + 5x - 3 = 0$ ;	б) $x = \sqrt{y}$ , $y = 1$ , $y = 4$ , $x = 0$
7a) $y = x^2 - 4x$ ; $y = 5x$ ;	б) $y = \frac{2}{1-x}$ , $x = 2y + 6$	22a) $y = 3x^2 - 5$ ; $2y = -17x$ ;	б) $y = \frac{2}{x+1}$ , $y = 2 - x$
8a) $y = \frac{x^2}{2} + 2$ ; $y = 2 - x$	б) $y = \frac{1}{4^x}$ , $y = \frac{1}{2}$ , $x = 0$	23a) $y = 3x^2 - 4x - 2$ ; $y = x$	б) $y = 3 \cos x$ , $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ $y = \cos x$
9a) $y = x^2 + 2x + 1$ ; $y = 1 + 3x$	б) $y = \sqrt{x}$ , $y = x$	24a) $y = 2x^2 + 3x + 3$ ; $y - 5 = 0$	б) $y = -\frac{1}{x}$ , $3y - x - 4 = 0$

10a) $y = \frac{1}{2}x^2,$ $4x - 2y + 5 = 0;$	б) $y = \operatorname{arctg}x$ $y = -\pi/4, x = \sqrt{3}$	25a) $y = 3x^2 - 2x + 1;$ $y + x = 1$	б) $y = x^3, y = 0$ $-1 \leq x \leq 1$
11a) $y = 4x - 4 - x^2;$ $y = -x$	б) $y = \operatorname{arccos} 2x,$ $y = \frac{\pi}{2}, x = \frac{1}{2}$	26a) $y = \frac{x^2}{2}$ $4x - 2y + 5 = 0$	б) $y = \sin 2x, y = 1,$ $x = 0, x = \pi$
12a) $y = 4x^2 + 2x - 1,$ $y = 2x$	б) $y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2$	27a) $1 - 2y = x^2,$ $y + 4 = 0$	б) $y = x^4, y = x$
13a) $y = \frac{4}{3}x^2 + 3x - 5$ $3y + x + 9 = 0$	б) $y = \sqrt{x} + 2$ $x - 3y + 6 = 0$	28a) $y = \frac{4}{3} + x^2$ $4x - 3y + 3 = 0$	б) $y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{x^2 + 1}$
14a) $2 + 3y = x^2$ $3x - 3y - 4 = 0;$	б) $y = \log_4 x,$ $y = 0, y = 0,5$	29a) $y = x^2 - 8;$ $y = 2x - 5;$	б) $y = x^3, y = \sqrt{x}$
15a) $2y = x^2,$ $y - x - 4 = 0;$	б) $xy = 3, y = 3x + 2,$ $y = 1$	30a) $y = 4 - x^2,$ $y = x + 4$	б) $y = x^3, y = \sqrt{32x}$

### Завдання 5 Знайти довжину дуги кривої.

1	a) $y = 1 - \ln \cos x;$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$	b) $r = 6 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right);$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
2	a) $y^2 = (x - 1)^3$ $2 \leq x \leq 5$	b) $r = \sin^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
3	a) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t); \\ y = 2(\sin t - t \cos t); \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi$	b) $r = 3 \cos \varphi$
4	a) $y^2 = (x + 1)^3;$ $1 < x < 4$	b) $r = 5(1 + \cos \varphi)$
5	a) $\begin{cases} y = 5 \sin^2 t; \\ x = 5 \cos^2 t; \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	b) $r = 5 \sin \varphi$
6	a) $\begin{cases} x = 9(t - \sin t); \\ y = 9(1 - \cos t); \end{cases}$ $4\pi \leq t \leq 6\pi$	b) $r = 4 \cos \varphi$
7	a) $y = \ln \sin x$ $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	b) $r = 4(1 + \cos \varphi)$
8	a) $(y - 1)^2 = (x + 2)^3$ $0 \leq x \leq 2$	b) $r = 5(1 - \cos \varphi)$
9	a) $\begin{cases} x = \cos^3 4t; \\ y = \sin^3 4t; \end{cases}$ $\frac{\pi}{16} \leq t \leq \frac{\pi}{8}$	b) $r = \frac{2}{1 + \cos \varphi}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
10	a) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $-1 \leq x \leq 3$	b) $r = \frac{1}{3(1 - \cos \varphi)}$ $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$

11	a) $\begin{cases} x = 7(t - \sin t); \\ y = 7(1 - \cos t); \end{cases}$ $2\pi \leq t \leq 4\pi$	b) $r = 2 \cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right);$ $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$
12	a) $\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t} \\ y = \frac{t}{2+t} \end{cases}$ $1 \leq t \leq 2$	b) $r = \sin^5\left(\frac{\varphi}{5}\right)$ $0 \leq \varphi \leq 5\pi$
13	a) $\begin{cases} x = \frac{3t-1}{-4t+2} \\ y = \frac{t}{-4t+2} \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$	b) $r = 10 \cos \varphi$
14	a) $y = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \arctg \sqrt{e^x - 1}\right)$ $0 \leq x \leq 2$	b) $r = 10(1 + \cos \varphi)$
15	a) $y = \ln x$ $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$	b) $r = 12 \sin \varphi$
16	a) $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$	b) $r = 3 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$
17	a) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ $0 \leq x \leq \frac{9}{16}$	b) $r = 11(1 - \cos \varphi)$
18	a) $\begin{cases} x = \frac{6-3t^2}{4t^3} \\ y = \frac{t}{4t^3} \end{cases}$ $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$	b) $r = \frac{3}{(1 - \cos \varphi)}$ $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
19	a) $\begin{cases} x = \frac{8t^3}{6t^2 - 3t^4} \\ y = \frac{t}{6t^2 - 3t^4} \end{cases}$ $0 \leq t \leq \sqrt{2}$	b) $r = \frac{5}{(1 - \cos \varphi)}$ $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
20	a) $\begin{cases} x = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} \\ y = \frac{t}{t^2 + t + 1} \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$	b) $r = 6 \cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right);$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
21	a) $y = 5 + \ln \cos x;$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$	b) $r = 3(1 - \cos \varphi)$
22	a) $(y-2)^2 = x^3$ $1 \leq x \leq 3$	b) $r = 2 \cos \varphi$
23	a) $\begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t); \\ y = 3(\cos t + t \sin t); \end{cases}$ $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi$	b) $r = \sin^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
24.	a) $y^2 = (x+3)^3$ $0 < x < 2$	b) $r = 6 \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right);$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
25	a) $\begin{cases} y = \sin^2 5t; \\ x = \cos^2 5t; \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{10}$	b) $r = \cos^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$ $-2\pi \leq \varphi \leq 0$
26	a) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t; \\ y = 5 - \cos 2t; \end{cases}$ $5\pi \leq t \leq 6\pi$	b) $r = \frac{3}{(1 + \cos \varphi)}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
27	a) $y = \ln \cos x,$ $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$	b) $r = 4(1 - \cos \varphi)$
28	a) $(y-1)^2 = x^3,$ $0 \leq x \leq 5$	b) $r = 5 \cos \varphi$
29	a) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t; \\ y = 4 \sin^3 t; \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$	b) $r = \frac{1}{2(1 + \cos \varphi)}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
30	a) $y = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$ $0 \leq x \leq 1$	b) $r = 7 \sin \varphi$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. – М.: Наука, 1970-1985. - Т. 1.
- 2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
- 3 Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова и П.Б. Демидовича. – М.: Наука, 1981, 1986.
- 4 Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1966.
- 5 Думіна О.О., Осмаєв О.О., Шувалова Ю.С. Інтегральне числення функцій однієї змінної та його застосування: Методичні вказівки. – Харків: Видавництво ХарДАЗТ, 2004.





