

**Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагура,
М.О. Ковальов, Л.Б. Кравців, О.В. Опанасенко, А.М. Петров**

**ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ,
ПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків 2010

**Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагурия,
М.О. Ковальов, Л.Б. Кравців, О.В. Опанасенко, А.М. Петров**

ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальностями «Мости і транспортні
тунелі» та «Промислове та цивільне будівництво»*

Під редакцією заслуженого працівника освіти,
доктора технічних наук, професора Е.Д. Чихладзе

Харків 2010

УДК 539.3

Основи лінійної теорії пружності, пластичності та повзучості: Навч. посібник / Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагурия та ін. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 149 с.



**МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ
УКРАЇНИ**

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

У навчальному посібнику викладено основи лінійної теорії пружності, пластичності та повзучості і їхнє застосування до розв'язання одномірних, плоских і тривимірних задач. У ньому послідовно відображено основні поняття і результати. Виклад відрізняється повнотою, доступністю і ясністю.

Лл. 81, табл. 8, бібліогр.: 23 назв.

Рекомендовано Міністерством освіти та науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Мости і транспортні тунелі» та «Промислове та цивільне будівництво» (№ 1/11-2080 від 18.03.2010 р.)

Під редакцією заслуженого працівника освіти,
доктора технічних наук, професора Е.Д. Чихладзе

Рецензенти:

професори М.І. Мироненко (ХДТУБА),
В.П. Шпачук (ХНАМГ)

ISBN 978-966-2033-23-6

©Українська державна академія
залізничного транспорту, 2010.

Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагура,
М.О. Ковальов, Л.Б. Кравців, О.В. Опанасенко, А.М. Петров

ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск Веревічева М.А.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 06.04.10 р.

Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 9,5. Обл.-вид.арк. 9,75.

Замовлення № Тираж 300. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від. 12.06.2007 р.

Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майдан Фейєрбаха, 7

ВСТУП

Книга написана на підставі використання досвіду викладання курсу студентам дорожньо-будівельної спеціальності Харківського національного автомобільно-дорожнього університету і будівельної спеціальності Української державної академії залізничного транспорту.

Сучасна механіка являє собою комплекс дисциплін, застосовуваних для розрахунку споруд на міцність, жорсткість, стійкість. У даному посібнику розглядаються основи таких наукових дисциплін, як теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості.

Теорія пружності. Пружне поведіння матеріалів характеризується тим, що деформації залишаються скінченними, а при розвантаженні повністю зникають. Теорія пружності лежить в основі багатьох розрахункових і експериментальних методів механіки твердого тіла, що деформується. При цьому головною задачею теорії пружності є визначення виникаючих внутрішніх сил, які характеризуються напруженнями, а також деформаціями.

У теорії пружності, що викладається в посібнику, ми обмежимося відповідно до більшості практичних прикладань малими (нескінченно малими) деформаціями, поведіння матеріалу будемо описувати законом Гука. Перевага такого підходу полягає насамперед у тому, що математичний опис істотно спрощується завдяки геометричній лінійності. Характерною є лінійність всіх рівнянь щодо шуканих величин та їхніх похідних. Таким чином, у книзі розглядається геометрично й фізично лінійна теорія ізотропного пружного тіла, що і на зараз час лежить в основі багатьох прикладань.

Теорія пластичності – наука, що встановлює загальні закони утворення пластичних деформацій і виникаючих на всіх стадіях пластичного деформування напружень. Основні задачі теорії пластичності полягають у математичному формулюванні співвідношень між напруженнями і деформаціями, що відповідають феноменологічному опису пластичних деформацій, і у встановленні кількісних критеріїв настання пластичності. У книзі основні поняття теорії пластичності вводяться безпосередньо розглядом діаграми залежностей напружень від деформацій при випробуванні матеріалу на просте одноосьове розтягання (або стискання). Припускається, що пластичні деформації не залежать від часу.

Теорія повзучості. З огляду на викладене вище, у теорії пружності та пластичності напружений і деформований стан тіла цілком визначається навантаженням, прикладеним до цього тіла, і температурою навколишнього середовища. Якщо в навантаженні і температурі середовища не передбачається ніяких змін, то й не буде змін напруженого та деформованого стану тіла. У дійсності це не так, і деформація може

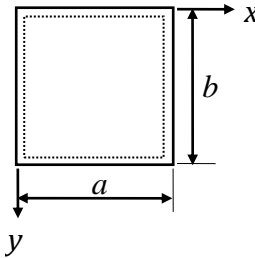
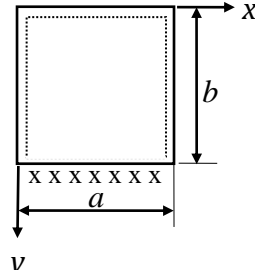
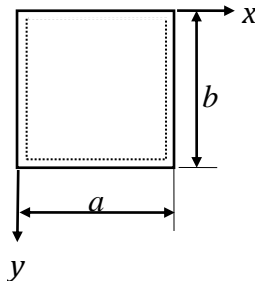
наростати в часі. Зміна в часі деформацій і напружень, що виникають у результаті початкового навантаження тіла, називають повзучістю.

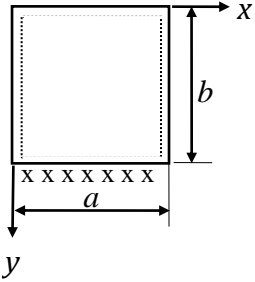
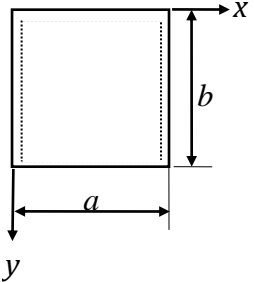
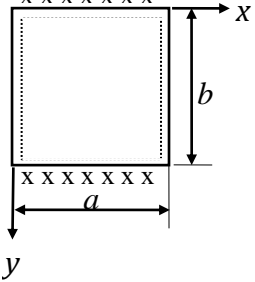
Повзучість відбувається у випадках, коли при навантаженні виникають пластичні (залишкові) деформації, а також коли слідом за навантаженням спостерігаються тільки пружні деформації. Тому в теорії повзучості в міру можливості використовуються методи як теорії пружності, так і теорії пластичності. У даному посібнику розглянута теорія, в основі якої лежить уявлення про пружно-в'язке або пластично-в'язке тіло.

Автори користуються нагодою виразити свою вдячність всім, хто їм допоміг. При роботі над рукописом особливу подяку вони приносять рецензентам д-ру фіз.-мат. наук, проф. Мироненку М.І., д-ру техн. наук, проф. Шпачуку В.П., д-ру техн. наук, проф. Шкельову Л.Т., д-ру техн. наук, проф. Бабенку А.Є. та д-ру техн. наук, проф. Бобиру М.І. за важливі для якості книги наукові і методичні вказівки. У роботі над рукописом і коректурами неоціненну допомогу надала інж. Павленко Р.Г. Вважаємо своїм обов'язком подякувати також їй від щирого серця.

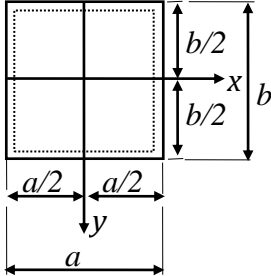
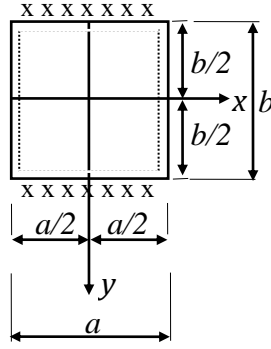
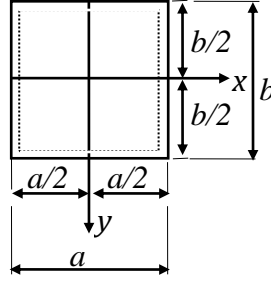
Формули для визначення коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$ у загальному несиметричному випадку навантаження

Таблиця Д. 1.1

Схема обпирання пластинки	Формули для визначення $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$
1	2
<p>1.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}, \quad \ddot{A}_n = \frac{\varphi_n}{2 D\alpha^4},$ $B_n = -\frac{\varphi_n(2\text{sh}\alpha b - \alpha b)(\text{ch}\alpha b - 1)}{2D\alpha^4 \text{sh}^2\alpha b},$ $C_n = -\frac{\varphi_n \text{ch}\alpha b - 1}{2D\alpha^3 \text{sh}\alpha b}$
<p>2.</p> 	$\ddot{A}_n = \frac{\varphi_n[\alpha b(1-\nu)\text{ch}\alpha b + \nu\text{sh}2\alpha b + (3-\nu)\text{sh}2\alpha b]}{D\alpha^3[(3+\nu)\text{sh}2\alpha b + 2\alpha b(1-\nu)]},$ $A_n = -\frac{\varphi_n\nu}{D\alpha^4(1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)}\ddot{A}_n,$ $B_n = -\frac{\varphi_n[\alpha b(2\text{sh}\alpha b - \alpha b) - 2(\text{ch}\alpha b - 1)\text{ch}\alpha b]}{2D\alpha^3[\text{sh}\alpha b \cdot \text{ch}\alpha b - \alpha b]},$ $C_n = -\frac{\varphi_n[\text{sh}^2\alpha b - 2\nu(\text{ch}\alpha b - 1)\text{ch}\alpha b]}{2D\alpha^3[\text{sh}\alpha b \cdot \text{ch}\alpha b - \alpha b]}$
<p>3.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}, \quad \ddot{A}_n = \frac{\varphi_n}{2D\alpha^4},$ $C_n = -\frac{\varphi_n[\alpha b(1-\nu)\text{sh}\alpha b - 2\nu(1-\text{ch}\alpha b)\text{ch}\alpha b]}{D\alpha^3[(3+\nu)\text{sh}2\alpha b + 2\alpha b(1-\nu)]}$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}.$

1	2
<p>4.</p> 	$D_n = \frac{\varphi_n \left[\nu(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \alpha b - 2\nu \operatorname{ch}^2 \alpha b - 2(1-\nu) - \alpha b - \frac{\alpha b(1-\nu)^2 \operatorname{sh} \alpha b}{2D\alpha^3 \left[(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4\operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]} \right]}{2D\alpha^3 \left[(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4\operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $A_n = \frac{\varphi_n \nu}{D\alpha^4 (1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)} D_n$ $C_n = \frac{\varphi_n (1-\nu) \left[2\alpha b \nu + 2\alpha b(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha b - 2(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha b + \nu \operatorname{sh} 2\alpha b \right]}{2D\alpha^3 \left[(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 4\operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}$
<p>5.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n \nu}{D\alpha^4 (1-\nu)} - \frac{2}{\alpha(1-\nu)} D_n$ $D_n = \frac{\varphi_n \nu \left[\alpha b(1-\nu) + (3+\nu) \operatorname{sh} \alpha b \right]}{D\alpha^3 \left[(3+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $C_n = -\frac{\varphi_n \nu \left[\alpha b(1-\nu) + (3+\nu) \operatorname{sh} \alpha b \right] (\operatorname{ch} \alpha b - 1)}{D\alpha^3 \left[(3+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 (1-\nu)^2 \right]}$ $B_n = C_n \frac{1+\nu}{\alpha(1-\nu)}$
<p>6.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4}$ $B_n = \frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b) (\operatorname{ch} \alpha b - 1)}{D\alpha^4 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$ $C_n = -\frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b) (\operatorname{ch} \alpha b - 1)}{D\alpha^3 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$ $D_n = \frac{\varphi_n (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b) \operatorname{sh} \alpha b}{D\alpha^3 (\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2)}$

Формули для визначення коефіцієнтів A_n , D_n у випадку симетричної пластинки і симетричного навантаження

Схема опирання пластинки	Формули для визначення A_n , \ddot{A}_n
<p>1.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \frac{2\text{ch}\frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \text{sh}\frac{\alpha b}{2}}{2\text{ch}^2\frac{\alpha b}{2}},$ $D_n = \frac{\varphi_n}{2D\alpha^3 \text{ch}\frac{\alpha b}{2}}$
<p>2.</p> 	$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \frac{\text{sh}\frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \text{ch}\frac{\alpha b}{2}}{\text{sh}\alpha b + \alpha b},$ $D_n = \frac{2\varphi_n}{D\alpha^3} \frac{\text{sh}\frac{\alpha b}{2}}{\text{sh}\alpha b + \alpha b}$
<p>3.</p> 	$A_n = \frac{2\nu\varphi_n}{D\alpha^4(1-\nu)} \frac{(1+\nu)\text{sh}\frac{\alpha b}{2} - \frac{\alpha b}{2}(1-\nu)\text{ch}\frac{\alpha b}{2}}{(3+\nu)\text{sh}\alpha b - 2\alpha b(1-\nu)},$ $D_n = \frac{2\nu\varphi_n}{D\alpha^3} \frac{\text{sh}\frac{\alpha b}{2}}{(3+\nu)\text{sh}\alpha b - 2\alpha b(1-\nu)}$

З М І С Т

ВСТУП	3
Розділ 1. Напруження і деформації	5
1.1. Складові напруження	5
1.1.1. Залежності між напруженнями і зусиллями	6
1.1.2. Позначення напружень, правило знаків	6
1.1.3. Закон парності дотичних напружень	7
1.1.4. Тензор напружень	8
1.2. Складові деформації	8
1.2.1. Тензор деформацій	10
1.2.2. Залежності між складовими напруження і складовими деформації (фізичний закон)	11
Розділ 2. Основні рівняння теорії пружності	16
2.1. Рівняння рівноваги	16
2.2. Рівняння на границі	17
2.2.1. Дослідження напружень у трьох вимірах	18
2.3. Рівняння сумісності	20
2.3.1. Диференціальні рівняння відносно напружень (рівняння Бельтрамі – Мітчелла)	20
2.3.2. Рівняння рівноваги у формі Нав'є	21
Розділ 3. Найпростіші задачі теорії пружності	23
3.1. Визначення переміщень при розтяганні та стисканні ...	23
3.2. Розтягання стержня під дією власної ваги	26
3.3. Кручення круглих валів сталого перерізу	28
Розділ 4. Плоскі (двовимірні) задачі теорії пружності	30
4.1. Плоский деформований стан	30
4.2. Плоский напружений стан	32
4.3. Функція напружень	33
4.4. Розв'язання диференціального рівняння плоскої задачі за допомогою поліномів	34
4.5. Згинання консольної балки	37
4.6. Плоска задача в полярних координатах	39
4.6.1. Загальні рівняння в полярних координатах	39
4.6.2. Деформації в полярних координатах	42
4.6.3. Напружено-деформований стан труби при дії рівномірного тиску	44
4.6.4. Напружений стан пластинки з малим круглим отвором	47

4.6.5.	Напружений стан нескінченно великої пластинки одиничної товщини при дії на прямолінійний край зосередженої сили	49
4.7.	Згинання пластин	54
4.7.1.	Загальні положення	54
4.7.2.	Рівняння рівноваги	57
4.7.3.	Згинання еліптичної пластинки, затисненої по контурі	58
4.7.4.	Згинання круглої пластинки	60
4.7.5.	Розв'язання задач на згинання прямокутних пластинок	61
4.7.6.	Розв'язання диференціального рівняння для пластинки, дві протилежні грані якої шарнірно оперті, а дві інші закріплені довільним чином	64
4.7.7.	Розв'язання диференціального рівняння для симетричної пластинки, завантаженої симетричним навантаженням	66
Розділ 5.	Застосування чисельних методів до розв'язання задач теорії пружності	70
5.1.	Метод скінченних різниць	70
5.1.1.	Функція w залежить від змінної x	70
5.1.2.	Функція w залежить від змінних x і y	71
5.1.3.	Граничні умови	73
5.1.4.	Шарнірне опирання пластинки по лінії $x = 0$	73
5.1.5.	Жорстко закріплений край пластинки при $x = 0$..	74
5.1.6.	Вільний край пластинки при $x = 0$	74
5.1.7.	Складання системи різницевих рівнянь	75
5.1.8.	Приклади складання системи лінійних рівнянь	76
5.1.8.1.	Система рівнянь для пластинки з жорстко закріпленим верхнім краєм, вільним нижнім і шарнірами по бічних сторонах	76
5.1.8.2.	Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням бічних і верхнього країв і вільним нижнім краєм	80
5.1.8.3.	Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням бічних і нижнього країв і жорстко закріпленим верхнім краєм	81
5.1.8.4.	Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням лівого і верхнього країв, вільним нижнім краєм і жорстко закріпленим правим	83

5.2.	Матричний метод переміщень і метод скінченних елементів стержневих систем	86
5.2.1.	Метод переміщень у матричній формі	87
5.2.1.1.	Загальні положення і передумови	87
5.2.1.2.	Рівняння рівноваги. Статична матриця	90
5.2.1.3.	Принцип подвійності статичних і геометричних рівнянь	91
5.2.1.4.	Фізичні рівняння. Матриця жорсткості системи	92
5.2.1.5.	Розв'язна система рівнянь	95
5.2.2.	Загальні положення методу скінченних елементів	98
5.2.2.1.	Підготовка розрахунку. Введення вихідних даних	101
5.2.2.2.	Силовий вплив	102
5.2.2.3.	Тепловий вплив	102
5.2.2.4.	Осідання опор	103
5.2.2.5.	Матриці жорсткості типових стержневих елементів	104
5.2.2.6.	Формування матриці жорсткості конструкції	108
5.2.2.7.	Визначення переміщень і зусиль в елементах	110
5.2.2.8.	Матриці жорсткості стержневих елементів з використанням інтерполяційних поліномів і функцій форми	111
5.2.2.8.1.	Матриця жорсткості в локальній системі координат	111
5.2.2.8.2.	Матриця жорсткості в глобальній системі координат	118
Розділ 6.	Основні відомості про пластичність матеріалів	123
6.1.	Загальні положення	123
6.2.	Ідеалізовані діаграми пластичного поведіння матеріалу	124
6.3.	Умови пластичності	125
6.3.1.	Критерій текучості Тріска	125
6.3.2.	Критерій текучості Мізеса	126
6.4.	Співвідношення між напруженнями і деформаціями	127
6.5.	Основні рівняння теорії пластичності (теорія малих пружно-пластичних деформацій)	129
Розділ 7.	Повзучість матеріалів	131
7.1.	Загальні положення	131
7.2.	Залежності між напруженнями і деформаціями при лінійній повзучості	133
7.3.	Релаксація напружень	137
7.4.	Принцип Вольтерра	140

Бібліографічний список	142
Додаток 1. Формули для визначення коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, \ddot{A}_n$ у загальному несиметричному випадку навантаження ...	143
Додаток 2. Формули для визначення коефіцієнтів A_n, D_n у випадку симетричної пластинки і симетричного навантаження	145

Розділ 1

НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ

1.1. Складові напруження

Внутрішні зусилля діють у всіх точках перерізу (рис. 1.1) і являють собою в загальному випадку нерівномірно розподілене навантаження, що характеризується в кожній точці числовим значенням і напрямком вектора інтенсивності $d\vec{R}$.

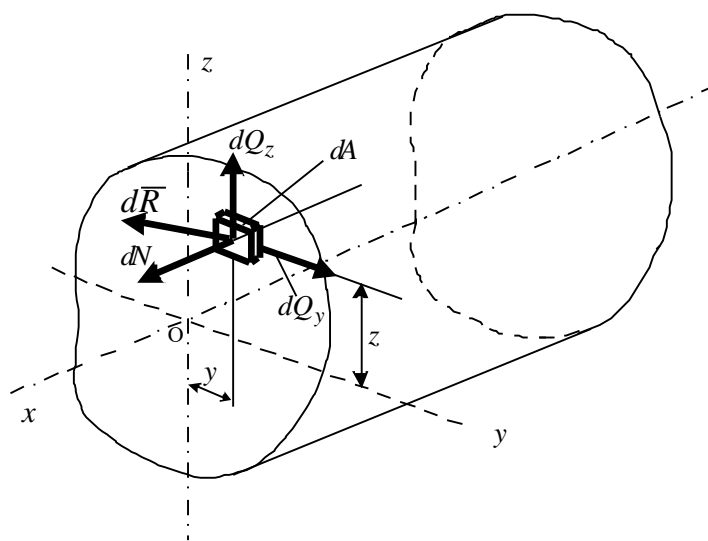


Рис. 1.1. Нормальні та дотичні напруження в точці

Розглянемо нескінченно малий елемент площі перерізу dA . У силу малості елемента можна вважати, що внутрішні зусилля, прикладені до його різних точок, однакові за величиною і напрямком. Рівнодіюча їх $d\vec{R}$ буде проходити через центр ваги елемента dA . Проекціями $d\vec{R}$ на осі x , y , z будуть елементарна поздовжня сила dN і елементарні поперечні сили dQ_y та dQ_z . Розділивши величини dN , dQ_y , dQ_z на площу dA , одержимо величини поздовжніх і поперечних сил, що доводяться на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (1.1)$$

Ці величини називають напруженнями в точці (x, y, z) перерізу стержня, причому σ – нормальне напруження, τ – дотичне.

Таким чином, напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці розглянутого перерізу.

1.1.1. Залежності між напруженнями і зусиллями

Установимо загальні залежності між σ і τ , з одного боку, та N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x – з іншого:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA , \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA , \\ Q_z &= \int_A \tau_z dA , \\ M_y &= \int_A \sigma z dA , \\ M_z &= \int_A \sigma y dA , \\ M_x &= \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отримані рівняння будемо називати статичними рівняннями або інтегральними рівняннями рівноваги.

1.1.2. Позначення напружень, правило знаків

Якщо взяти дуже малий елемент об'єму у вигляді куба поблизу точки O (рис. 1.1) зі сторонами, паралельними осям координат, то позначення для складових напруження, що діють по гранях цього елемента, і додатні напрямки їх будемо приймати такими, як показано на рис. 1.2. Якщо розміри розглянутого паралелепіпеда нескінченно малі, то однойменні і паралельні напруження для кожної пари паралельних граней відрізняються між собою на нескінченно малу величину, тобто практично однакові, що й показано на рис. 1.2.

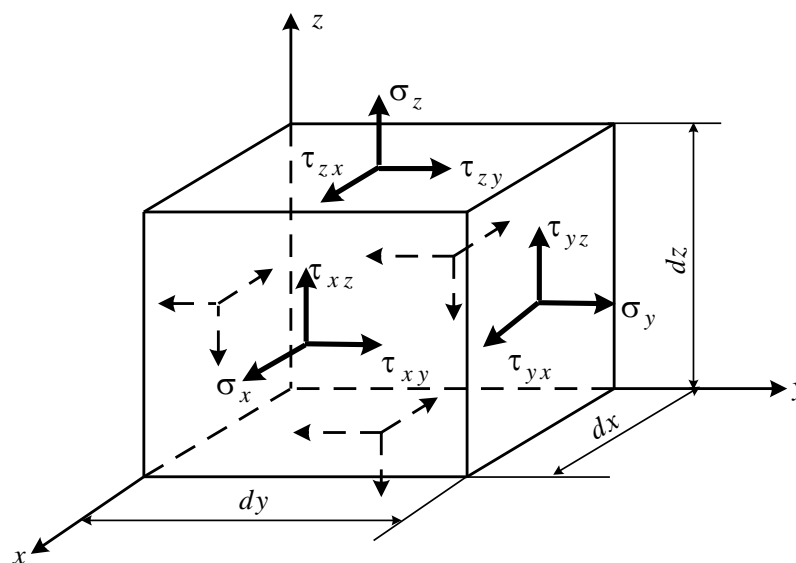


Рис. 1.2. Нормальні і дотичні напруження в елементі об'єму тіла

Нормальні напруження позначені буквою σ з індексом, що відповідає позначенню осі: σ_x , σ_y , σ_z . Нормальне напруження додатне, коли воно викликає розтягання, і від'ємне, коли воно викликає стискання. Дотичні напруження позначені буквою τ із двома індексами. Перший індекс позначає напрямок нормалі до розглянутої площинки, другий індекс – напрямок складової напруження: τ_{yx} , τ_{xy} , τ_{xz} і т. д. За додатні напрямки складових дотичного напруження, що діє на будь-якій грані елементарного кубика, приймають напрямки осей координат, якщо напруження, що розтягує, по тій же грані має напрямок, що збігається з додатним напрямком відповідної осі. Якщо напруження, що розтягує, має протилежний додатній осі напрямок, то за додатний напрямок складових дотичного напруження слід взяти зворотний напрямок осі.

1.1.3. Закон парності дотичних напружень

З умови рівноваги, взявши суму моментів сил відносно осі x (рис. 1.2), одержимо

$$\tau_{zy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dz dy .$$

Звідси $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Аналогічно, взявши момент сил щодо осей z і y , знайдемо

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} .$$

Рівності

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} ,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \tag{1.3}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

мають назву закону парності (взаємності) дотичних напружень і формулюються так:

по двох взаємно перпендикулярних площадках складові дотичного напруження, перпендикулярні лінії перетину цих площадок, дорівнюють одна одній.

1.1.4. Тензор напружень

Напруження, що діють на елемент об'єму (рис. 1.2), утворюють так званий тензор напружень

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Тут перший стовпець складається з компонент напружень, що діють на площадках, нормальних до осі x , другий – до осі y , третій – до осі z . Якщо задано тензор напружень, то напружений стан у точці визначено.

Тензор напружень, віднесений до головних осей, має вигляд

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Оскільки матеріали мають, як правило, різні механічні властивості по відношенню до рівномірного всебічного розтягання та до зсуву, то вигідно подати тензор напружень у вигляді суми

$$T_{\sigma} = \sigma T_1 + D_{\sigma}, \quad (1.6)$$

де $\sigma T_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$ – кульовий тензор, що відповідає середньому

напруженню в точці $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$;

$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix}$ – тензор, що характеризує формозміну

в околі тієї самої точки і названий девіатором напруження.

1.2. Складові деформації

При дослідженні деформацій пружного тіла ми будемо виходити з допущення, що в наявності є достатнє число зв'язків для того, щоб запобігти його руху як вільного твердого тіла. Отже, ніякі переміщення

часток неможливі без деформації його. Будемо розглядати тільки малі деформації, які звичайно зустрічаються в інженерних спорудах. Вектор переміщень деформованого тіла має проєкції u , v , w відповідно на осі x , y , z . Припустимо, що ці складові переміщення неперервно змінюються по об'єму тіла.

Розглянемо нескінченно малий елемент dx , dy , dz пружного тіла (рис. 1.3).

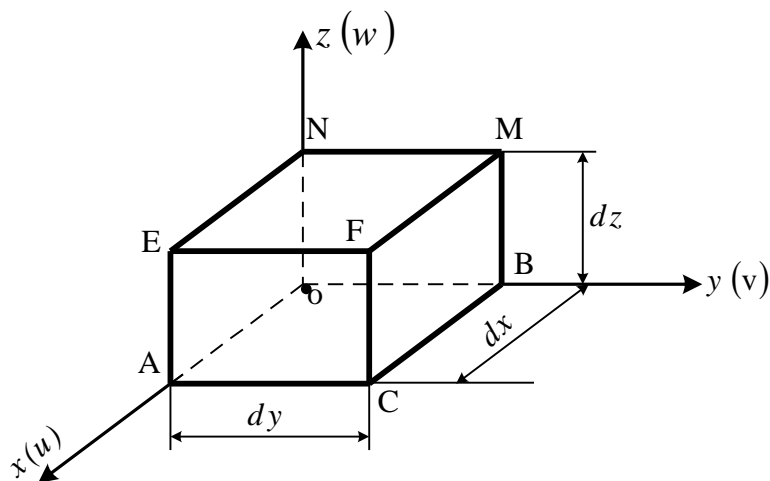


Рис. 1.3. До виведення залежностей між лінійними деформаціями і переміщеннями

Якщо тіло зазнає деформацію, то переміщення в напрямку осі x нескінченно близької точки А дорівнює $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Тому приріст довжини елемента ОА внаслідок деформації дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x} dx$. Отже, відносне подовження в напрямку осі x дорівнює

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Аналогічно

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.8)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Крім лінійних деформацій ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , тіло зазнає і кутові деформації. Розглянемо зміну кута між елементарними відрізками ОА і ОВ (рис. 1.4).

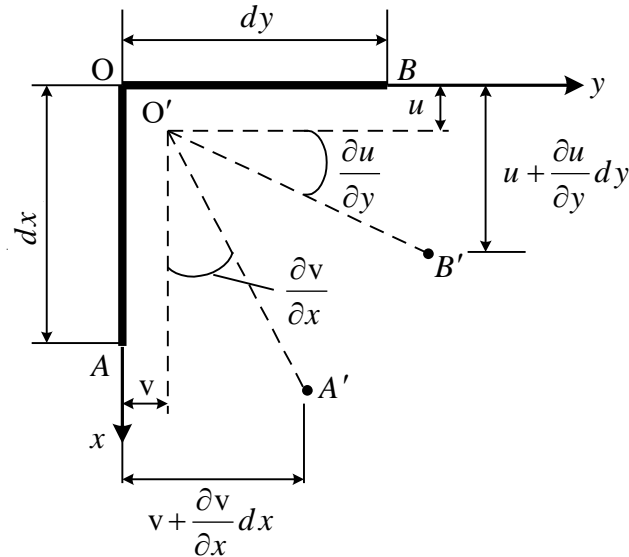


Рис. 1.4. До виведення залежностей між кутовими деформаціями і переміщеннями

Переміщення точки А в напрямку осі y і точки В у напрямку осі x будуть відповідно $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ і $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Внаслідок цих переміщень новий напрямок $O'A'$ буде утворювати зі своїм початковим напрямком кут $\partial v / \partial x$. У такий же спосіб, напрямок $O'B'$ буде утворювати з напрямком OB малий кут $\partial u / \partial y$. Звідси витікає, що первісно прямий кут AOB між елементами OA і OB зменшиться на величину

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.10)$$

Деформації зсуву між площинами xoy і xoz , xoy і yoz будуть відповідно

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.12)$$

1.2.1. Тензор деформацій

Матриця компонент тензора малих деформацій має вигляд

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5\gamma_{yx} & 0,5\gamma_{zx} \\ 0,5\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0,5\gamma_{zy} \\ 0,5\gamma_{xz} & 0,5\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

Причому слід особливо підкреслити, що компонентами тензора є половини змін кутів γ_{xy} і т. д. У цьому випадку між теорією напружень і деформацій існує повна аналогія. Тензор деформацій (1.13) може бути поданий за аналогією з тензором напружень у формі суми двох тензорів – кульового, що характеризує зміну об'єму тіла

$$D_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

де $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ – середня деформація, і девіатора, що характеризує зміну його форми,

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & 0,5\gamma_{xy} & 0,5\gamma_{xz} \\ 0,5\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & 0,5\gamma_{yz} \\ 0,5\gamma_{zx} & 0,5\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

1.2.2. Залежності між складовими напруження і складовими деформації (фізичний закон)

Експериментально встановлено, що для більшості матеріалів при малих деформаціях у пружній стадії зв'язок між деформаціями і напруженнями може бути прийнятий лінійним. Цей зв'язок був уперше зазначений Гуком для розтягання і стискання і зветься законом Гука.

Уявимо елементарний прямокутний паралелепіпед із гранями, паралельними осям координат, що піддається дії нормального напруження σ_x , рівномірно розподіленого по двох протилежних гранях (рис. 1.5).

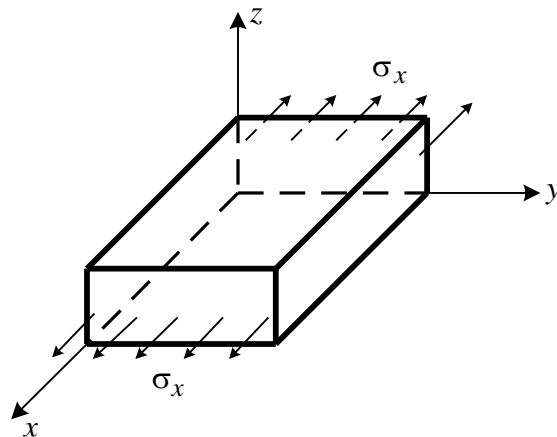


Рис. 1.5. До виведення узагальненого закону Гука, напрямок x

Досліди показують, що у випадку ізотропного матеріалу ці нормальні напруження не викликають зміни кутів елемента. Збільшення розмірів елемента в напрямку осі x на $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$ супроводжується поперечним звуженням $\varepsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ і $\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$.

Скористаємося принципом незалежності дії сил і розглянемо лінійні деформації, обумовлені нормальними напруженнями σ_y і σ_z (рис. 1.6).

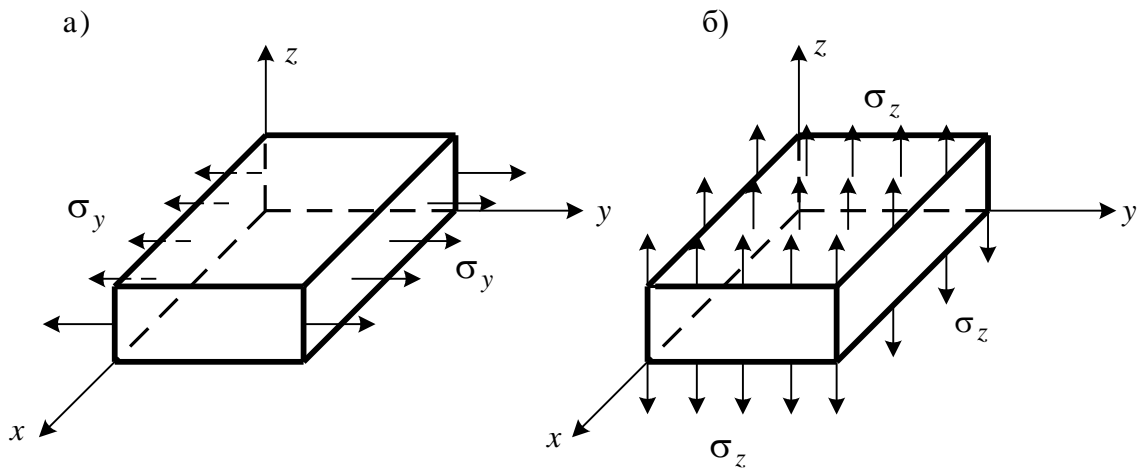


Рис. 1.6. До виведення узагальненого закону Гука, напрямки y, z

У результаті дії нормальних напружень σ_y (рис. 1.6, а) елемент подовжується в напрямку осі y на величину $\varepsilon'_y = \sigma_y / E$ і коротшає в напрямку осей x і z на $\varepsilon''_x = -\nu \sigma_y / E$, $\varepsilon''_z = -\nu \sigma_y / E$.

У результаті дії нормальних напружень σ_z (рис. 1.6, б) відбувається подовження в напрямку осі z $\varepsilon'_z = \sigma_z / E$ і укорочення в напрямку осей x та y — $\varepsilon''_x = -\nu \sigma_z / E$, $\varepsilon''_y = -\nu \sigma_z / E$. Складаючи деформації, викликані напруженнями σ_x , σ_y , σ_z , одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отримані вирази (1.16) є аналітичними залежностями узагальненого закону Гука для ізотропного тіла. Із цих формул видно, що залежності між напруженнями і деформаціями повністю визначаються двома фізичними величинами, що характеризують властивості матеріалів, – модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона ν , які визначаються експериментально. Тепер розглянемо дію дотичних напружень (рис. 1.7).

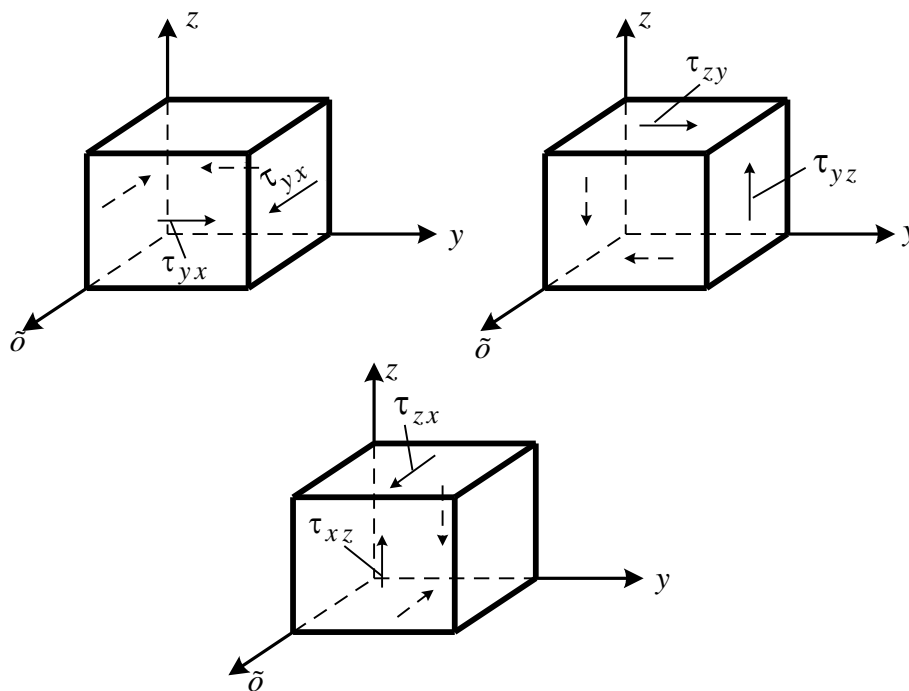


Рис. 1.7. До виведення залежностей між дотичними напруженнями і зсувами

Дослідами встановлено, що зміна кута між будь-якими двома координатними осями залежить від складових напруження, паралельних цим осям. Тому

$$\begin{aligned}\gamma_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Тут G – модуль зсуву, який дорівнює

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.\tag{1.18}$$

Доведемо справедливiсть рiвностi (1.18). Для цього розглянемо деформацiю прямокутного паралелепiпеда, по гранях якого дiють $\sigma_y = -\sigma_z$, $\sigma_x = 0$ (рис. 1.8).

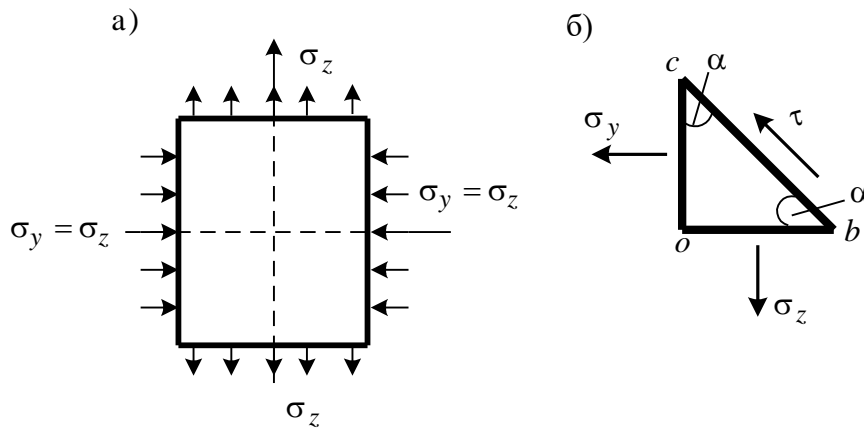


Рис. 1.8. До виведення залежностi мiж E i G

Вiдповiдно до рiвнянь (1.16) маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}, \\ \sigma_x &= 0.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Видiлимо iз прямокутного паралелепiпеда елемент obc i розглянемо його рiвновагу (рис. 1.8, б). Площу гранi cb позначимо через A , тодi площа гранi ob дорiвнює $A \cos \alpha$, а площа гранi oc – $A \sin \alpha$. Спроектуємо всi сили на грань bc

$$\sigma_y \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_z \cos \alpha \sin \alpha + \tau = 0,$$

звiдси

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z.$$

У процесi деформацiї кут α (рис. 1.8, б) буде змiнюватися на малу величину $\gamma/2$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}.$$

Для того щоб була справедливою отримана рівність, необхідно, щоб модуль зсуву визначався за рівністю (1.18). Чисельні значення модуля пружності і коефіцієнта поперечних деформацій для різних матеріалів визначають лабораторним шляхом. Ці значення для найбільш часто застосовуваних матеріалів наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Значення модуля пружності E і коефіцієнта Пуассона ν
для деяких матеріалів

Матеріал	E , ГПа	ν
Сталь прокатна	206	0,3
Алюмінієві сплави	70	0,3
Мідь, латунь, бронза	100 - 130	0,31 - 0,35
Бетон	4 - 40	0,2
Цегельна кладка	0,1 - 7,8	0,25
Деревина при розтяганні (стисканні):		
уздовж волокон	10	0,5
поперек волокон	0,4	0,02
Гума	0,007	0,5
СВАМ при співвідношенні поздовжніх і поперечних сил		
1:1	35	0,13
10:1	58	–
Пробка	–	0

Розділ 2

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

2.1. Рівняння рівноваги

Розглянемо умову рівноваги малого прямокутного паралелепіпеда зі сторонами dx , dy , dz (рис. 2.1). Тут ми беремо до уваги малі зміни складових напруження внаслідок малих приростів координат. Зусилля одержуємо множенням напружень у центрі ваги грані на її площу. Через X , Y , Z позначимо складові об'ємної сили, що діє на елемент.

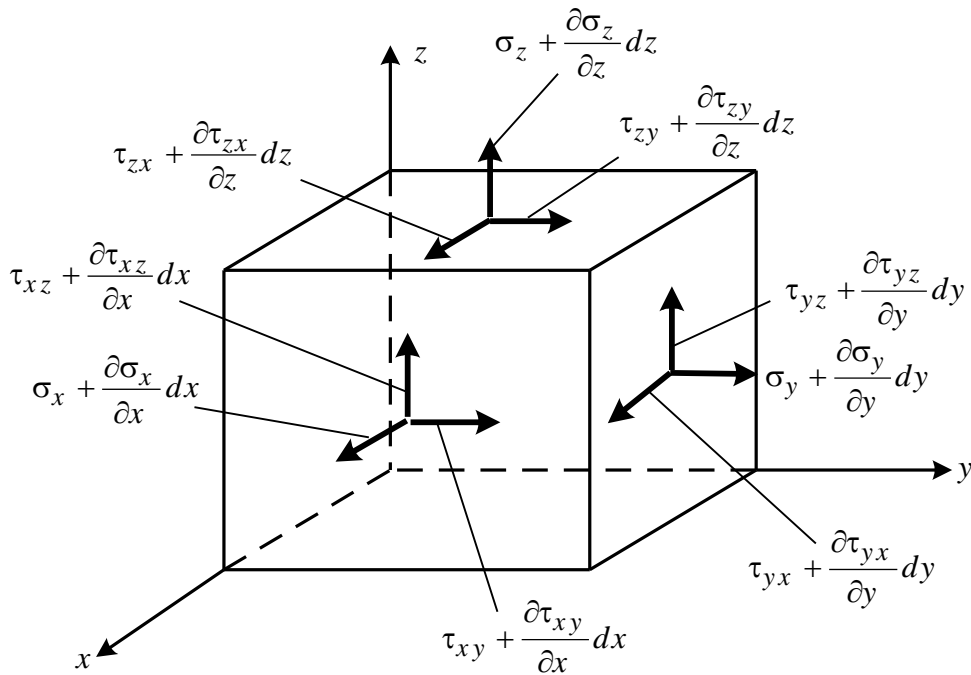


Рис. 2.1. До виведення диференціальних рівнянь рівноваги

Спроекуємо всі сили, що діють на елемент, на осі x , y , z . У результаті одержимо диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2. Рівняння на границі

Рівняння (2.1) повинні бути задоволеними у всіх точках по об'єму тіла. Напруження змінюються по об'єму тіла, і коли приходимо до поверхні його, то вони повинні бути такими, щоб зрівноважити зовнішні сили, діючі на поверхні тіла.

Рівняння на поверхні тіла можна одержати, розглядаючи умову рівноваги елементарного чотиригранника, виділеного з тіла трьома координатними площинами і похилою площиною (рис. 2.2).

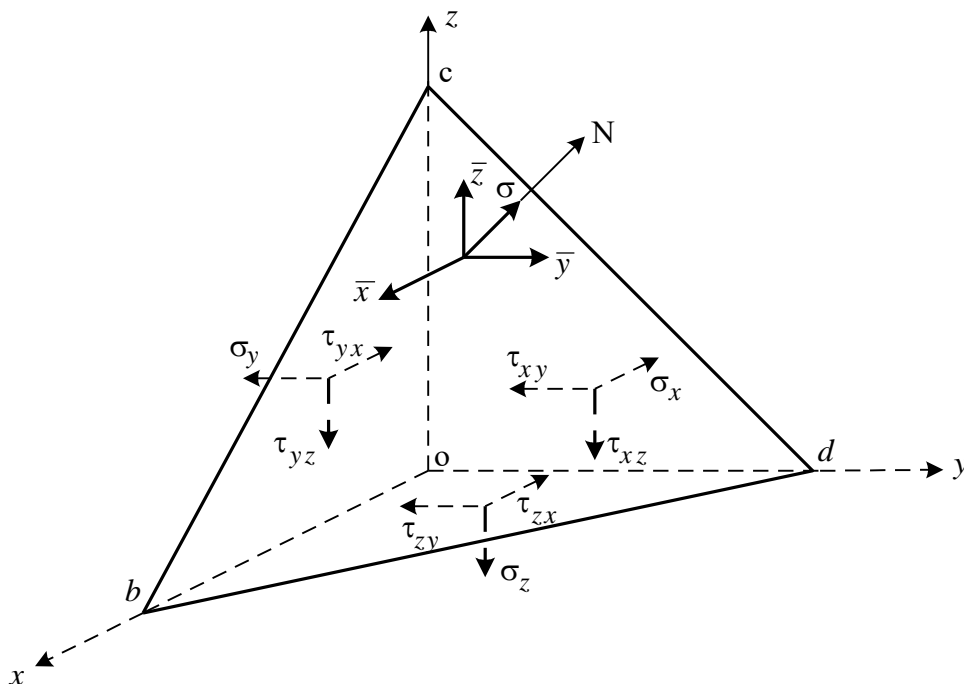


Рис. 2.2. До дослідження напружень у трьох вимірах

Знайдемо напруження на похилій площині. Спроектуємо всі сили, що діють на елемент, на осі x , y , z . При цьому об'ємними силами зневажаємо. У результаті одержуємо

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{yx} \ell + \tau_{yz} n, \\ \bar{Z} &= \sigma_x n + \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Тут ℓ , m , n – напрямні косинуси, що визначають положення зовнішньої нормалі до поверхні тіла в розглянутій точці: $\ell = \cos(N, x)$, $m = \cos(N, y)$, $n = \cos(N, z)$; A – площа грані bcd ; $A\ell$ – площа грані odc ; Am – площа грані obc ; An – площа грані bod ; \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – віднесені до одиниці площі складові поверхневих сил у даній точці.

2.2.1. Дослідження напружень у трьох вимірах

Знайдемо положення головних площадок. Припустимо, що площадка bcd (рис. 2.2) – одна із трьох головних площадок. Тоді на цій площадці дотичне напруження $\tau = 0$, а вектор повного напруження

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\bar{Z})^2 + (\bar{Y})^2 + (\bar{X})^2} = \sigma = \bar{X}\ell + \bar{Y}m + \bar{Z}n .$$

Складові цього напруження по координатних осях визначаються рівняннями

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma\ell, \\ \bar{Y} &= \sigma m, \\ \bar{Z} &= \sigma n . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (2.3) і (2.2), одержимо однорідну систему лінійних рівнянь щодо невідомих ℓ , m , n :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}\ell + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Між напрямними косинуса нормалі N існує залежність

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (2.5)$$

тому вони не можуть одночасно дорівнювати нулю, як випливає з рівнянь (2.4). Одержимо ненульові рішення рівнянь (2.4). Для цього складемо визначник цієї системи рівнянь і прирівняємо його нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Розкривши його і зробивши угруповання членів, знайдемо

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (2.7)$$

де

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (2.8)$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2, \quad (2.9)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}. \quad (2.10)$$

Корені рівняння (2.7) будуть значеннями трьох головних напружень. Головні напруження не залежать від вибору осей x , y , z . Отже, корені

рівняння, а отже, і його коефіцієнти J_1, J_2, J_3 не змінюються при повороті осей координат. Величини J_1, J_2, J_3 називаються тому першим, другим і третім інваріантами тензору напружень.

Для відшукування ℓ, m, n , що відповідають одному із трьох головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, треба значення цього головного напруження підставити у рівняння (2.4) замість σ . Спільний розв'язок (2.4) і (2.5) дає шукані величини ℓ, m, n . Одне із трьох головних напружень буде алгебраїчно найбільшим у даній точці. Позначимо його σ_1 . Найменше напруження позначимо σ_3 , а проміжне σ_2 , тобто $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Площинками дії екстремальних дотичних напружень є площинки, що проходять через одну з головних осей і створюють із двома іншими осями кути 45° . Якщо величини головних напружень підпорядковані нерівності $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то найбільше дотичне напруження дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.11)$$

Площадка, рівнонахилена до напрямків трьох головних напружень, називається октаедричною, а діючі напруження – октаедричними

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (2.12)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (2.13)$$

Розглянемо тепер енергію деформації. При об'ємному напруженому стані у випадку малих деформацій питома потенціальна енергія дорівнює

$$U = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]. \quad (2.14)$$

У загальному випадку деформування відбувається зміна об'єму і форми розглянутого елемента. Відповідно до цього потенціальну енергію деформації можна подати як енергію зміни об'єму $U_{\text{об}}$ і енергію зміни форми $U_{\text{ф}}$:

$$U_{\text{об}} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (2.15)$$

$$U_{\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]. \quad (2.16)$$

+При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ відбувається тільки зміна об'єму, енергія зміни форми в цьому випадку дорівнює нулю.

2.3. Рівняння сумісності

Якщо задача полягає у визначенні напруженого стану тіла, що піддається дії заданих сил, то потрібно розв'язати рівняння (2.1), і цей розв'язок повинен бути таким, щоб задовольнялися умови (2.2) на поверхні. Рівнянь (2.1), що містять шість складових напружень (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}), недостатньо для визначення останніх. Задача є статично невизначною. Щоб одержати розв'язок, візьмемо до уваги пружні деформації (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12). З рівнянь (1.7) – (1.12) виключимо похідні від u , v , w . Тоді залишаться рівняння, у які будуть входити лише похідні від деформацій:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.\end{aligned}$$

Звідси видно, що шість компонент деформації, що містяться в цих формулах, не можуть бути довільними, між ними повинні існувати залежності (2.17).

2.3.1. Диференціальні рівняння відносно напружень (рівняння Бельтрамі – Мітчелла)

Підставимо в отримані рівняння (2.17) вирази для закону Гука (1.16) – (1.17), уведемо позначення $\nabla = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $\sum \sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ і будемо вважати, що об'ємні сили дорівнюють

нулю, тобто $\nabla^2(\sum) = 0$. При дії об'ємних сил (або масових сил, наприклад сили ваги або відцентрової сили) частинні розв'язки завжди можна знайти.

Вони не повинні задовольняти граничним умовам і через лінійність основних рівнянь можуть бути просто складені з розв'язком однорідної задачі. У результаті відзначеної вище підстановки і перетворень одержимо:

$$\begin{aligned}
 (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y \partial z} &= 0, \\
 (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x \partial z} &= 0, \\
 (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x \partial y} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Бачимо, що в доповненні до рівнянь рівноваги (2.1) і до умов на поверхні (2.2) складові напруження в будь-якому ізотропному тілі повинні задовольняти шести рівнянням сумісності.

Умови сумісності (2.18) містять лише другі похідні складових напруження. Отже, якщо зовнішні сили такі, що рівняння рівноваги (2.1) разом з умовами на поверхні (2.2) можуть бути задоволені, коли ми візьмемо складові напруження або сталими, або лінійними функціями координат, то рівняння сумісності (2.18) перетворюються в тотожності. Ця система напружень є правильним розв'язком задачі.

2.3.2. Рівняння рівноваги у формі Нав'є

Виведемо диференціальні рівняння (2.1) щодо переміщень. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda\nabla + 2G\varepsilon_x, & \sigma_y &= \lambda\nabla + 2G\varepsilon_y, & \sigma_z &= \lambda\nabla + 2G\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\
 \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, & \nabla^* &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, & \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.
 \end{aligned}$$

З урахуванням позначень маємо:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + G)\frac{\partial \nabla^*}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0, \\
 (\lambda + G)\frac{\partial \nabla^*}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0, \\
 (\lambda + G)\frac{\partial \nabla^*}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Таким чином, виключення деформацій і напружень дозволяє одержати три диференціальні рівняння (2.19) лише щодо переміщень. Перевага цього підходу полягає в тому, що умови сумісності (2.17), (2.18) при цьому не потрібні. З іншого боку, виключення деформацій і переміщень при використанні умов сумісності призводить до шести диференціальних рівнянь (2.18) лише щодо напружень (рівняння Бельтрамі - Мітчелла). Отримані в такий спосіб рівняння Нав'є (2.19) і Бельтрамі - Мітчелла (2.18) часто називають основними рівняннями теорії пружності. Залежно від постановки (перша гранична задача: визначення напружень і переміщень усередині пружного тіла в стані рівноваги, якщо відомий розподіл сил на поверхні; друга гранична задача: визначення напружень і переміщень усередині пружного тіла в стані рівноваги, якщо відомі переміщення точок поверхні) при розв'язанні задачі теорії пружності застосовується той або інший шлях.

Загального розв'язання, а також придатного для всіх випадків методу розв'язання рівнянь Нав'є (2.19) і Бельтрамі - Мітчелла (2.18) не існує. Однак складання цих рівнянь призвело до розроблення чисельних методів розв'язання для різних частинних задач. Велике значення при цьому має лінійність основних рівнянь, що відкриває можливість накладення розв'язків. Якщо зневажити об'ємними силами (сили ваги або відцентрові сили), то можуть бути отримані частинні розв'язки, що не залежать від граничних умов. Ці розв'язки повинні, про це говорилося вище, підсумуватися із загальними розв'язками однорідних рівнянь, що задовольняють граничним умовам у напруженнях або переміщеннях. Плідний шлях розв'язання основних рівнянь (2.18), (2.19), як буде показано нижче, полягає у введенні допоміжних функцій, які пов'язані з переміщеннями або напруженнями. Можливості побудови точних розв'язків задач теорії пружності обмежені. Як для просторових, так і для плоских задач точні розв'язки можна одержати тільки для областей з геометрично простими границями і найчастіше тільки для нескінченних і напівнескінченних областей. Дуже важким або майже неможливим є одержання точних розв'язків для областей кінцевих розмірів. Основні труднощі складає при цьому не підбір функцій, що дають розв'язки рівнянь, а задоволення їхнім граничним умовам. Із цієї причини вже давно усвідомлена необхідність ефективних наближених методів.

Одним з таких методів є метод скінченних елементів. Щоб чітко уявляти суть методу скінченних елементів, розглядається (див. п. 4.8.2), насамперед, на прикладі плоскої задачі теорії пружності метод переміщень, що був розвинений чисто інтуїтивно з матричних методів статички пружних систем.

Розділ 3

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

3.1. Визначення переміщень при розтяганні та стисканні

Визначення переміщень при відомих значеннях напружень полягає в інтегруванні системи диференціальних залежностей (1.7) – (1.12):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Визначимо переміщення стержня, розтягнутого силою на кінці (рис. 3.1).

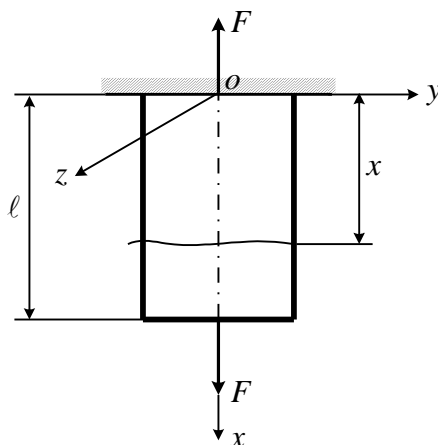


Рис. 3.1. До визначення переміщень у стержні при розтяганні або стисканні

Напруження: $\sigma_x = \frac{N}{A}$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

На підставі закону Гука (1.16), (1.17) маємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0.$$

Використовуючи наведені вище диференціальні залежності, одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EA}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{vN}{EA}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{vN}{EA}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Інтегрування перших трьох рівнянь дає

$$u = \frac{Nx}{EA} + D, \quad v = -\frac{vNy}{EA}, \quad w = -\frac{vNz}{EA}. \quad (3.3)$$

Рівняння (3.1), (3.2) при цих значеннях u , v , w задовольняються, отже, (3.3) – шукані переміщення. Слід зазначити, що защемлений переріз не може вільно спотворюватися: $v=0$ та $w=0$ у всіх точках, а не тільки в точках, які лежать на осі. Розподіл зусиль у цьому перерізі відмінний від того, що дає формула $\sigma_x = N/A$. Розв'язок (3.3), однак, є задовільним для порівняно довгих консолей.

Жорсткі переміщення в напрямку осей y , z і жорсткі повороти навколо координатних осей під дією поздовжньої осьової сили неможливі. Тому в другому і третьому рівняннях (3.1) сталі інтегрування прийняті рівними нулю. Що стосується першого рівняння (3.1), то тут утримана тільки одна стала D , тому що закріплення повинне перешкоджати тільки зсуву стержня в напрямку осі ox (рис. 3.1).

Переміщення (v і w) не залежать від відстані до закріплення, тобто від положення перерізу. На осі стержня вони дорівнюють нулю, а з віддаленням від осі зростають по абсолютній величині. Знак мінус указує на напрямок переміщень, зворотний напрямку координатних осей oy і oz .

Переміщення u точок стержня в напрямку розтягання однакові в кожному поперечному перерізі (x фіксоване). Це означає, що при розтяганні плоска форма перерізу не спотворюється. Якщо стержень розтягується декількома силами, прикладеними в різних перерізах, то в межах кожної ділянки, де нормальна сила має постійне значення, обчислення переміщень можна робити за формулами (3.3). Стала D при цьому на різних ділянках має різні значення. Останні визначаються умовами сполучення ділянок між собою.

Якщо стержень розтягується декількома силами (рис. 3.2), прикладеними в різних перерізах, то в межах кожної ділянки, де поздовжня сила має постійне значення, обчислення переміщень можна робити за формулами (3.3). Стала D при цьому на різних ділянках має різні значення. Останні визначаються умовами сполучення ділянок між собою. Покажемо це.

Переміщення u на ділянках стержня подаються рівностями

$$u_1 = \frac{N_1 x_1}{EA} + D_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$u_2 = \frac{N_2 x_2}{EA} + D_2, \quad a \leq x_2 \leq a + b;$$

$$u_3 = \frac{N_3 x_3}{EA} + D_3, \quad a + b \leq x_3 \leq a + b + c.$$

Тут

$$N_1 = F_1 + F_2 + F_3, \quad N_2 = F_2 + F_3, \quad N_3 = F_3.$$

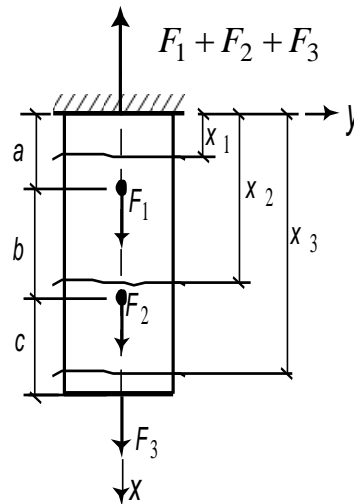


Рис. 3.2. Переміщення в стержні, навантаженому декількома силами

За умовою $u_1 = 0$ при $x_1 = 0$ (защемлення), звідси

$$D_1 = 0.$$

На межі між першою і другою ділянками при $x_1 = a$, $x_2 = a$ повинно бути $u_2 = u_1$, тобто

$$\frac{N_2 a}{EA} + D_2 = \frac{N_1 a}{EA},$$

звідки

$$D_2 = \frac{F_1 a}{EA}.$$

Аналогічно за рівністю $u_3 = u_2$ при $x_2 = a + b$ і $x_3 = a + b$, тобто на межі між другою і третьою ділянками

$$\frac{N_3(a+b)}{EA} + D_3 = \frac{N_2(a+b)}{EA} + D_2,$$

звідки

$$D_3 = \frac{F_1 a + F_2 (a + b)}{EA}.$$

Всі сталі знайдені, тепер можна визначити переміщення. Розподіл на ділянки при обчисленні переміщень потрібно робити й у тих випадках, коли стержень має східчасту форму, тобто складається з окремих частин із різними площами поперечних перерізів.

3.2. Розтягання стержня під дією власної ваги

Розглянемо консольний стержень (рис. 3.3).

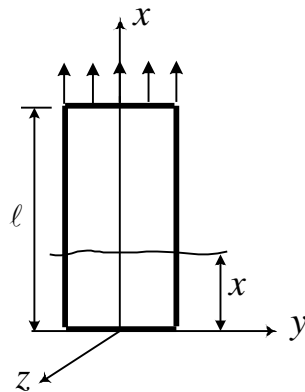


Рис. 3.3. До визначення переміщень у брусі від власної ваги

Поздовжня сила в перерізі x дорівнює

$$N = \gamma x A ,$$

де γ – об'ємна вага матеріалу стержня; A – площа поперечного перерізу. При розтяганні стержня в поперечних перерізах виникають тільки рівномірно розподілені нормальні напруження

$$\sigma_x = \gamma x , \quad (3.4)$$

що змінюються по довжині стержня за лінійним законом.

Використовуючи залежності (1.7), (1.8), (1.9), одержимо

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma x}{E} , \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E} , \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E} . \quad (3.7)$$

Інтегруючи рівняння (3.5), знайдемо

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + f_0, \quad (3.8)$$

де f_0 – функція від координат y і z , що підлягає надалі визначенню.

Підставимо вираз (3.8) в (1.10), (1.11), одержимо

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

звідки

$$v = -x \frac{\partial f_0}{\partial y} + v_0, \quad w = -x \frac{\partial f_0}{\partial z} + w_0, \quad (3.10)$$

де v_0 і w_0 є функціями координат y і z .

Підставимо розв'язок (3.10) у рівняння (3.1), знайдемо

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu \gamma x}{E}, \quad -x \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.11)$$

Оскільки v_0 і w_0 не залежать від x , рівняння (3.11) ми зможемо задовольнити, лише прийнявши

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\nu \gamma}{E}, \quad (3.12)$$

$$v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad f_0 = \frac{\nu \gamma}{2E} (y^2 + z^2).$$

На підставі рівнянь (3.8) і (3.12) можемо записати загальні вирази для функції u :

$$u = \frac{\gamma}{2E} [x^2 + \nu(y^2 + z^2)] + D. \quad (3.13)$$

Інтегруючи (3.6) і (3.7), знайдемо

$$v = -\frac{\nu \gamma x y}{E}, \quad w = -\frac{\nu \gamma x z}{E}. \quad (3.14)$$

Форму стержня після деформації показано на рис. 3.4 пунктиром.

Як і раніше, жорсткі повороти навколо координатних осей під дією рівномірно-розподіленого навантаження γA , що являє собою вагу вантажу, неможливі. Тому в рівняннях (3.14) сталі інтегрування дорівнюють нулю.

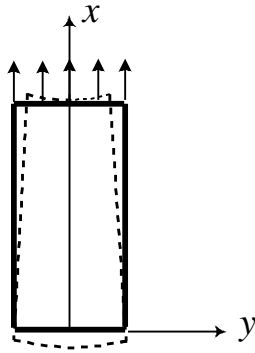


Рис. 3.4. Деформація бруса під дією власної ваги

У рівнянні (3.13) стала D визначається із граничної умови – при $x = \ell$ $u = 0$. Площини поперечних перерізів при розтяганні власною вагою не залишаються плоскими, вони викривляються. Викривлення перерізів не залежить від положення їх уздовж довжини стержня (величина $\sqrt{y^2 + z^2}$ стала і не залежить від x). Точки ж стержня, що лежать на осі x , мають лише вертикальні переміщення.

3.3. Кручення круглих валів сталого перерізу

Елементарна теорія кручення круглих валів установлює, що дотичне напруження τ в будь-якій точці перерізу (рис. 3.5) перпендикулярне до радіуса r і його пропорційне довжині і що кут скручування θ на одиницю довжини вала такий, що

$$\tau = G\theta r, \quad (3.15)$$

де G – модуль пружності при зсуві (див. (1.18)).

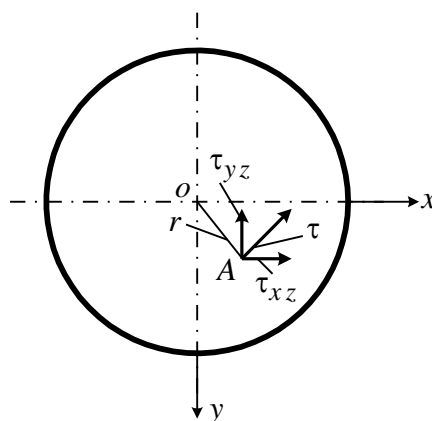


Рис. 3.5. Розподіл дотичних напружень у перерізі вала

Розкладаючи це напруження на дві складові, паралельні осям x і y , знайдемо

$$\tau_{yz} = G\theta r \frac{x}{r} = G\theta x, \quad (3.16)$$

$$\tau_{xz} = -G\theta r \frac{y}{r} = -G\theta y. \quad (3.17)$$

Елементарна теорія припускає також, що

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Ми можемо показати, що цей елементарний розв'язок при певних умовах є точним розв'язком. Оскільки всі складові напруження або лінійні функції від координат, або дорівнюють нулю, рівняння сумісності (2.18) задовольняються, і необхідно лише розглянути рівняння рівноваги (2.1) і умову на поверхні (2.2).

Підставивши отримані вище вирази для складових напруження в рівняння (2.1), ми знайдемо, що ці рівняння будуть задоволені, якщо тільки немає об'ємних сил. Бічна поверхня вала вільна від зовнішніх впливів, і умова (2.2), якщо згадати, що для циліндричної поверхні $\cos(N, z) = n = 0$, зводиться до рівняння

$$\tau_{xz} \cos(N, x) + \tau_{yz} \cos(N, y) = 0. \quad (3.18)$$

У випадку круглого циліндра маємо, крім того,

$$\cos(N, x) = \frac{x}{r}, \quad \cos(N, y) = \frac{y}{r}.$$

Підставляючи ці значення і вирази (3.16), (3.17) у рівняння (3.18), переконаємося в тім, що ця умова виконується.

Розглянемо тепер умову на поверхні для кінців вала. Ми бачимо, що прикладені до поверхні кінців вала дотичні зусилля повинні бути розподілені точно в такий самий спосіб, як напруження τ_{xz} і τ_{yz} , по будь-якому проміжному перерізі вала. Тільки в цьому випадку розподіл напруження відповідно до формул (3.16), (3.17) є точним розв'язком задачі. Рівнодіюча кінцевих зусиль дорівнює нулю, тобто $\int_A \tau_{xz} dA = 0$, $\int_A \tau_{yz} dA = 0$.

Переміщення можуть бути знайдені в такий спосіб. Приймаючи умову закріплення стержня у вигляді $u = v = w = 0$ при $x = y = 0$ і $z = 0$ і виключивши можливість виразу щодо осей x, y , знайдемо

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = 0. \quad (3.19)$$

Це вказує на правильність припущення, що поперечні перерізи залишаються плоскими, а радіуси прямолінійними, як це звичайно приймається при елементарному викладенні теорії кручення.

ПЛОСКІ (ДВОВИМІРНІ) ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Велике значення для прикладень мають задачі, у яких шукані функції залежать від двох координат. При цьому розрізняють два випадки, математичний опис яких збігається: плоский деформований стан і плоский напружений стан.

4.1. Плоский деформований стан

Перший випадок відповідає довгому призматичному тілу, який навантажується поверхневими силами, що не залежать від z і не мають складової в напрямку осі z (рис. 4.1). При цьому пружне тіло може бути або нескінченно довгим, або воно має кінцеву довжину і його краї відповідним чином закріплені. У кожному поперечному перерізі тіла визначальним тоді є плоский деформований стан.

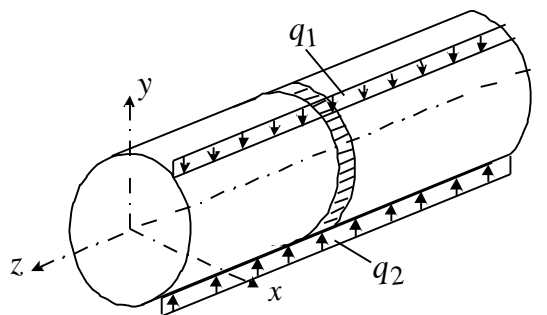


Рис. 4.1. Плоский деформований стан у призматичному тілі

Для простого деформованого стану переміщення (у декартових координатах) мають вигляд

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = \text{const} \quad \text{або} \quad w = 0, \quad (4.1)$$

крім того, обертаються в нуль всі похідні по z , тобто $\partial / \partial z = 0$. При цьому кінематичні рівняння (1.7) – (1.12) запишуться у вигляді

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Далі впливають рівності

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (4.3)$$

Залишається тільки одна умова сумісності деформацій (2.17)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.4)$$

Ненульовими компонентами тензора напружень є σ_x , σ_y , τ_{xy} , а також σ_z . З закону Гука (1.16) виходять співвідношення

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y \right], \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x \right], \quad (4.6)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.8)$$

З рівнянь рівноваги (2.1) залишаються

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (4.9)$$

причому об'ємні сили тут не враховуються. Граничні умови (2.2) для напружень, якщо на краю циліндра задані напруження p_x і p_y , мають вигляд

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m, \\ p_y &= \tau_{xy} \ell + \sigma_y m, \\ p_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Якщо йдеться про призматичне тіло довжиною ℓ , кінцеві перерізи якого оперті, то для них справедливі граничні умови $w(x, y, 0) = w(x, y, \ell) = 0$. При цьому координати x, y фіксовані. Тоді сили, що діють у кінцевих поперечних перерізах, дорівнюють

$$F_z = \int_A \sigma_z dA, \quad (4.11)$$

причому напруження інтегруються по поперечному перерізі призматичного тіла. Нарешті, основні рівняння в переміщеннях (2.19) і напруженнях (2.18) запишуться відповідно як

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0, \quad (4.12)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = 0,$$

$$\begin{aligned}
(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \\
(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \\
(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

У рівняннях (4.12) і (4.13) об'ємні сили прийняті рівними нулю.

4.2. Плоский напружений стан

У другому випадку йдеться про плоске пружне тіло малої товщини (так звана пластинка), що навантажується тільки силами у своїй площині, причому нормальні напруження в напрямку товщини відсутні (рис. 4.2).

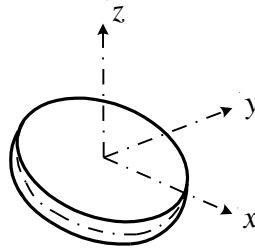


Рис. 4.2. Плоский напружений стан у тонкій пластинці

Прикладені сили або рівномірно розподілені по товщині і, отже, не залежать від z (що з добрим наближенням завжди виконується для тонких пластин), або розподілені симетрично відносно так званої серединної площини (уявлювана поверхня, що ділить навпіл товщину пластини). У такій пластинці, що відповідним чином закріплена, основним є плоский напружений стан. У площині x y є компоненти тензора напружень

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \tag{4.14}$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \tag{4.15}$$

Тоді компоненти переміщень u , v і w взагалі не залежать від z . При цьому кінематичні рівняння відповідають рівнянням (4.2) для плоского деформованого стану, умови спільності – рівнянню (4.4), рівняння рівноваги – рівнянням (4.9), а крайові умови – умовам (4.10) у напруженнях для першої граничної задачі.

Розходження між плоским деформованим станом і плоским напруженим станом проявляється при розгляді деформацій у законі Гука. З нього випливає

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.17)$$

Плоский напружений стан реалізується не точно, а лише приблизно в дуже тонких пластинках. Як було показано Файлоном, можна розглянути узагальнений випадок і модифікувати наведені вище співвідношення. При цьому передбачається, що прикладені сили симетрично розподілені щодо серединної площини.

Якщо припустити, що напруження σ_z в пластинці відсутні, а τ_{zx} і τ_{zy} на зовнішній і внутрішній поверхнях пластини дорівнюють нулю, то для основних величин, наприклад напружень σ_x , можна ввести їхні середні значення по товщині пластини

$$\bar{\sigma}_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz. \quad (4.18)$$

Цей випадок, за Лявом, називають узагальненим плоским напруженим станом. Він має велике практичне значення. На останок зазначимо, що з рівняння спільності деформації (4.4) при підстановці напружень для плоского деформованого стану або плоского напруженого стану при відсутності об'ємних сил виходить те саме співвідношення:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.19)$$

де $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ – оператор Лапласа другого порядку, який показує, що потрібно взяти другі похідні від $(\sigma_x + \sigma_y)$ окремо по x та y і скласти їх.

4.3. Функція напружень

Розв'язання плоских задач у двох вимірах зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги (4.9) разом з рівнянням спільності (4.4) і умовою на контурі (4.10). Звичайним прийомом Розв'язання цих рівнянь є введення нової функції, що називається функцією напружень:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho q x. \quad (4.20)$$

Неважко переконатися, що рівняння рівноваги будуть задоволені тотожно. Таким чином, ми одержали цілий ряд розв'язків рівнянь рівноваги (4.9). Дійсним розв'язком буде той, що задовольняє також рівнянню спільності (4.4). Підставимо функцію напружень (4.20) у рівняння (4.4). У результаті одержимо

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.21)$$

Отже, у нас спочатку було вісім спільно розв'язуваних рівнянь: два рівняння рівноваги (4.9); три рівняння (4.2), що зв'язують деформації і переміщення, і три фізичних рівняння (4.16), (4.17). Далі, виключивши переміщення, ми перейшли до шести рівнянь: (4.4), (4.8), (4.16), (4.17), (4.19). Тепер же залишилося тільки одне рівняння (4.21). Розв'язуючи яку-небудь задачу, ми повинні підібрати функцію φ так, щоб вона задовольняла рівнянню (4.21) і умовам на контурі (4.10). Підбравши функцію φ , ми можемо одержати відповідні формули для напружень і знайти напруження в будь-якій точці пружного тіла. Зазначимо також, що рівняння (4.21) носить назву бігармонічного рівняння.

4.4. Розв'язання диференціального рівняння плоскої задачі за допомогою поліномів

Як було показано в попередньому пункті, необхідно підібрати функцію φ , що задовольняла б диференціальному рівнянню (4.21) і умовам на контурі (4.10). Звичайно це буває важко, а іноді й взагалі не вдається зробити. Тому спробуємо спочатку розв'язати зворотню задачу (див. п. 2.3.2). Будемо задаватися видом функції і досліджувати, якому випадку напруженого стану вона відповідає. Задамося функцією напружень у вигляді такого виразу:

$$\varphi = 2xy + \frac{4}{3}y^3 + 6x^3y - 3y^2.$$

Диференціальне рівняння (4.21) тотожно задовольняється. Одержимо формули для визначення нормальних і дотичних напружень у будь-якій точці пластинки без урахування її власної ваги (рис. 4.3):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 36xy, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 8y - 6, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2(1 + 9x^2).$$

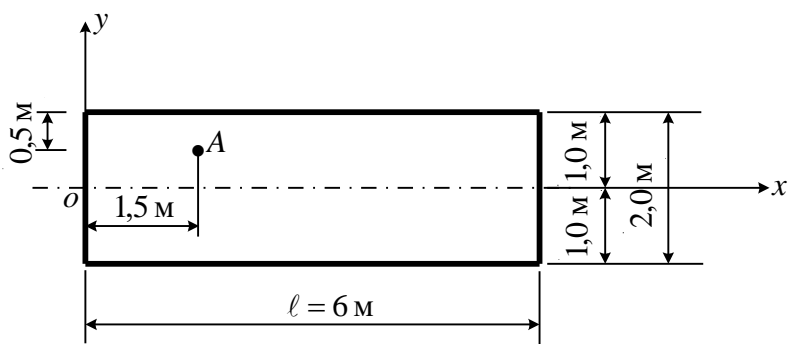


Рис. 4.3. Схема пластинки

Визначимо зовнішні сили, прикладені до граней пластинки. При цьому використаємо умову на поверхні тіла (4.10). Ліва грань: $x = 0$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\sigma_y = 0$; нормаль до площинки не збігається з додатним напрямком осі x , отже $\tau_{xy} = -2$,

$$\bar{X} = -(8y - 6), \quad \bar{Y} = 2.$$

Верхня грань: $y = 1$ м; $\sigma_y = 36x$; $\sigma_x = 2$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$; нормаль до площинки збігається з додатним напрямком осі y , отже, зовнішні сили дорівнюють

$$\bar{X} = -2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Права грань: $x = 6$ м; $\sigma_y = 216y$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\tau_{xy} = -650$; нормаль до площинки збігається з додатним напрямком осі x , отже, зовнішні сили дорівнюють

$$\bar{X} = (8y - 6), \quad \bar{Y} = -650.$$

Нижня грань: $y = -1$ м; $\sigma_y = -36x$; $\sigma_x = -14$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$; зовнішні сили дорівнюють

$$\bar{X} = 2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Епюри зовнішніх сил, що діють на грані пластинки, показані на рис. 4.4.

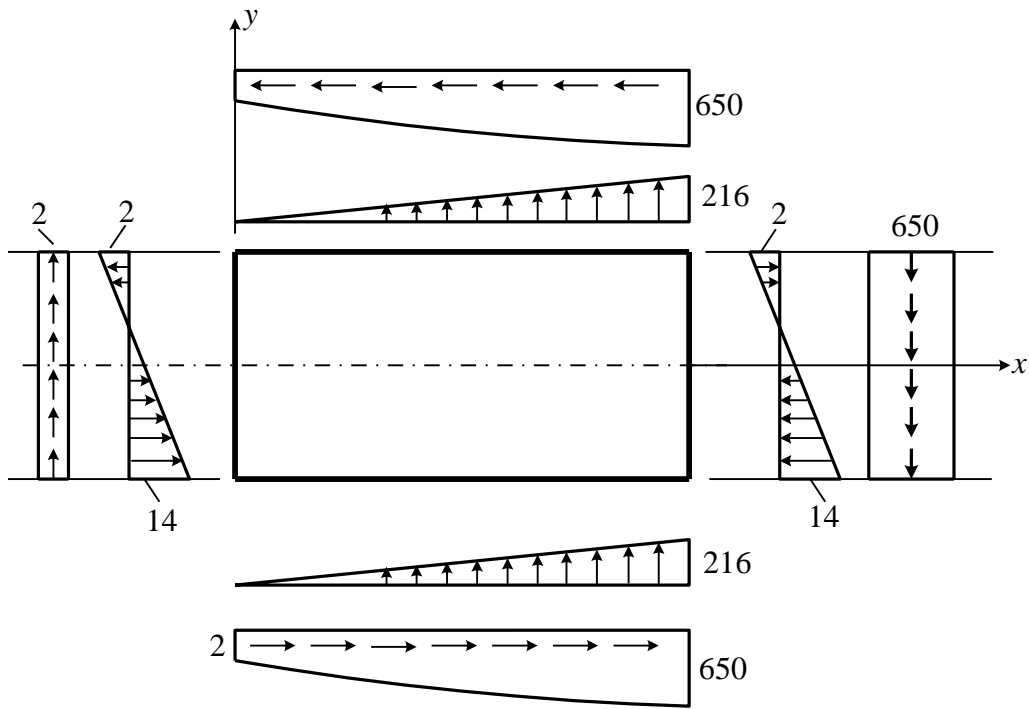


Рис. 4.4. Схема зусиль, що діють на грані пластинки

Перевіримо умову рівноваги пластинки. Як видно з рис. 4.4, умова рівноваги по горизонталі виконується, тому що епюри \bar{X} на лівій і правій гранях мають однакові значення ординат, але різні знаки. Те саме можна сказати про епюри \bar{X} на верхній і нижній гранях. Складемо суму проекцій всіх сил, що діють на пластинку, на вертикальну вісь:

$$\sum y = 0 \quad 2 \frac{1}{2} 216 \cdot 6 - 650 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Таким чином, задана пластинка під дією зовнішніх сил перебуває в рівновазі.

Перш ніж перейти до дослідження напруженого стану в точці А (рис. 4.3) зазначимо, що рівняння (4.21) є лінійним. Тому сума декількох розв'язків цього рівняння є також його розв'язком. Ми можемо накласти один на інший елементарні розв'язки, отримані тут, і в такий спосіб прийти до нових рішень, що мають практичне значення.

А зараз визначимо напружений стан у точці А (рис. 4.3):

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 36 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 27, \\ \sigma_x &= 8 \cdot 0,5 - 6 = -2, \\ \tau_{xy} &= -2(1 + 9 \cdot 2,25) = -42,5. \end{aligned}$$

Головні напруження:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-2 + 27}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2 - 27)^2 + 4(42,5)^2} = 12,5 \pm 44,21,$$

$$\sigma_1 = 57,41, \quad \sigma_2 = -32,41.$$

Розмірність напружень – МПа.

Кут нахилу головних площадок $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y},$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-42,5}{57,41 - 27} = -1,397, \quad \alpha = -54,41^\circ.$$

Схема напружень, що діють у точці А, показана на рис. 4.5.

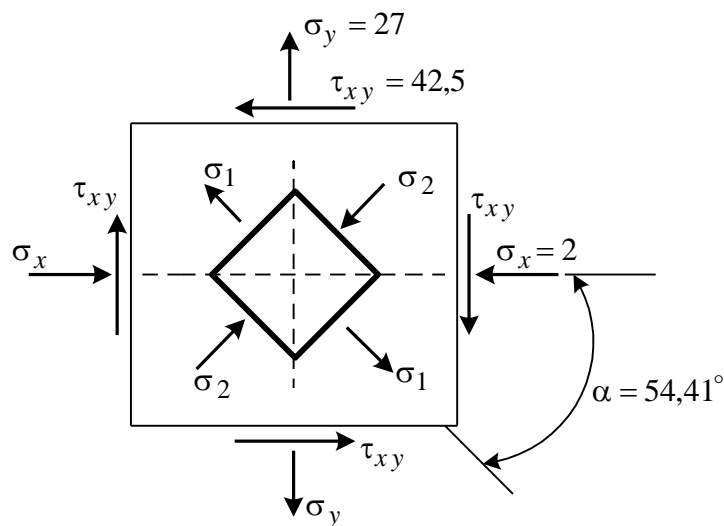


Рис. 4.5. Напружений стан у точці А

4.5. Згинання консольної балки

Розглянемо консоль, що має вузький прямокутний переріз розмірами $h \times 1$. Консоль згинається силою F , прикладеною на кінці. Верхній і нижній краї перерізу вільні від навантаження. Дотичні зусилля, рівнодіючою яких є сила F , розподілені в торцевому перерізі колони по квадратній параболі (рис. 4.6).

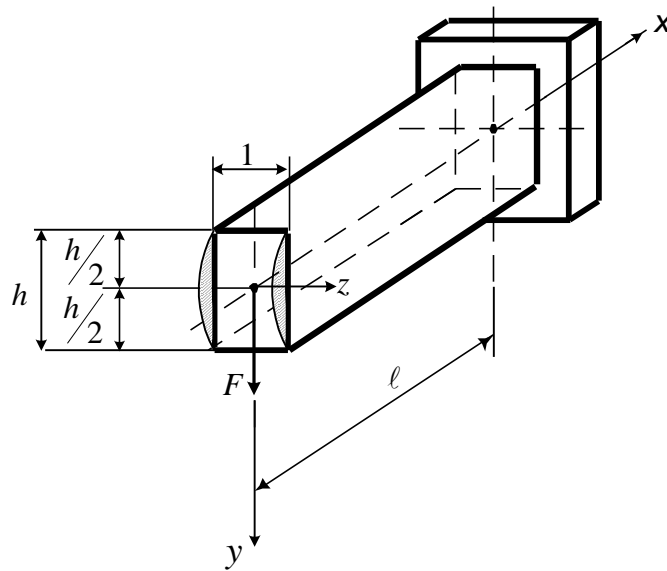


Рис. 4.6. Розрахункова схема консольної балки

Зазначені вище умови навантаження можуть бути задоволені, якщо функцію напружень уявити в як

$$\varphi = \frac{A}{6} xy^3 + Bxy . \quad (4.24)$$

Знайдемо напруження за виразом (4.20). При цьому будемо зневажати власною вагою балки. Тоді

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Axy , \quad (4.25)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 , \quad (4.26)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{A}{2} y^2 - B . \quad (4.27)$$

Для того щоб поздовжні сторони балки $\left(y = \pm \frac{h}{2} \right)$ були вільні від зусиль, повинна виконуватися така умова:

$$\tau_{xy} = -\frac{A}{2} \frac{h^2}{4} - B = 0 .$$

Звідси

$$A = -\frac{8B}{h^2} . \quad (4.28)$$

Тепер необхідно зажадати рівності сумі дотичних напружень силі F , тобто

$$-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{4B}{h^2} y^2 - B \right) dy = F. \quad (4.29)$$

Тут «мінус» перед інтегралом пов'язаний із правилом знаків для дотичних напружень. З (4.29) знайдемо

$$B = \frac{3F}{2h}. \quad (4.30)$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів A і B у вирази (4.25) і (4.27), одержимо

$$\sigma_x = -\frac{F_x}{J_z} y, \quad (4.31)$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{8J_z} (h^2 - 4y^2). \quad (4.32)$$

Отримані розв'язки збігаються з елементарними розв'язками, наведеними в курсі опору матеріалів. Слід зазначити, що цей розв'язок є точним тільки тоді, коли зусилля по кінцях стержня розподілені за законами (4.23) – (4.27). Якщо ж зусилля по кінцях розподілені яким-небудь іншим способом, то отриманий розподіл напружень можна вважати задовільним для поперечних перерізів, розташованих на деякій відстані від кінців стержня ($\approx h$).

4.6. Плоска задача в полярних координатах

4.6.1. Загальні рівняння в полярних координатах

При дослідженні напружень у круглих кільцях і дисках, кривих брусах і т. п. вигідно користуватися полярними координатами. Положення точки на серединній площині пластинки визначається відстанню r від початку координат O і кутом θ між напрямком r і деякою віссю Ox , що займає певне положення на площині.

Розглянемо рівновагу малого елемента $abcd$, вирізаного із пластинки радіальними перерізами Oc і Ob і двома нормальними до пластинки циліндричними поверхнями ad і bc , радіуси яких дорівнюють r і $(r + dr)$ (рис. 4.7).

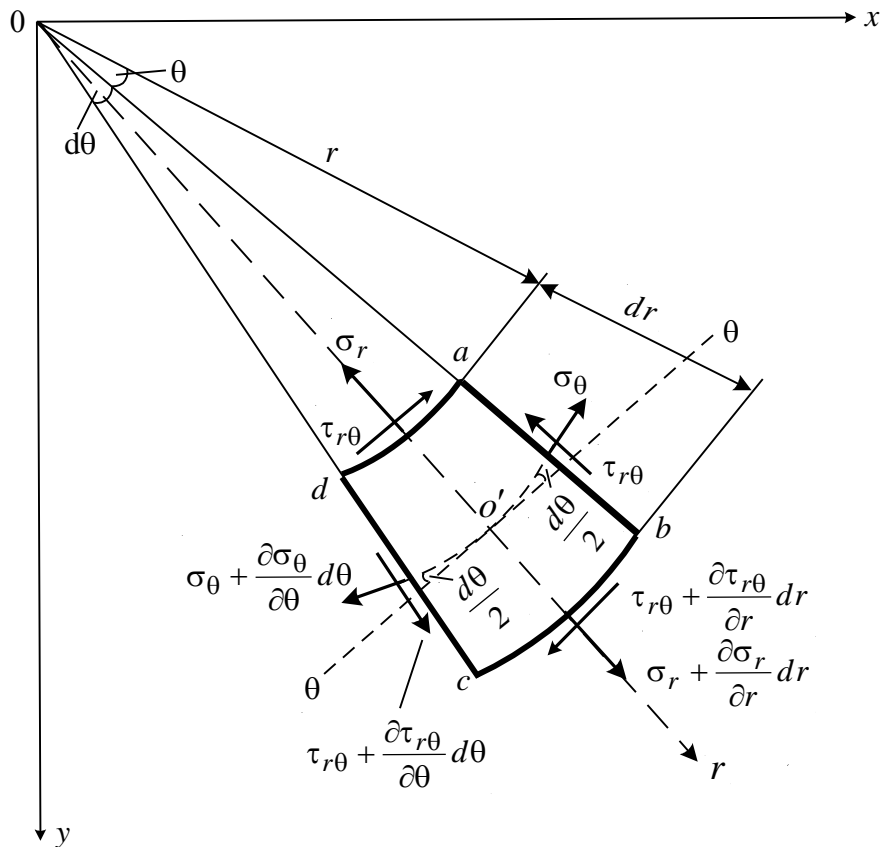


Рис. 4.7. Схема напружень, що діють на малий елемент, вирізаний із пластинки

Складові нормальних напружень у радіальному напрямку будемо позначати σ_r , а складові нормальних напружень у тангенціальному напрямку – σ_θ . Для складових дотичного напруження будемо користуватися позначенням $\tau_{r\theta}$. Додатні напрямки складових напружень зазначені на рис. 4.7.

Припускаючи, що напруження рівномірно розподіляються по сторонах розглянутого елемента, знайдемо нормальне зусилля в радіальному напрямку (товщину пластинки приймаємо рівною одиниці)

$$\sigma_r \cdot r d\theta.$$

Нормальне зусилля на стороні bc елемента з урахуванням зміни складового напруження σ_r буде дорівнювати

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

Аналогічно одержимо вирази для нормальних зусиль на сторонах ab і cd , дотичних зусиль на сторонах ad і bc і дотичних зусиль на сторонах ab і cd . Вважаємо також, що об'ємна сила відсутня, крім того, через

малість кута θ приймаємо $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$. Тепер запишемо рівняння рівноваги елемента. Для цього споектуємо зусилля на осі r (радіальний напрямок) і θ (тангенціальний напрямок). У результаті одержимо

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Ці два рівняння заміняють собою рівняння рівноваги для плоскої задачі в полярних координатах.

Рівняння (4.33) будуть задоволені, якщо прийняти

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad (4.34)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (4.35)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (4.36)$$

Для того щоб одержати розподіл напружень, що може мати місце в пружному тілі, повинна бути задоволена умова спільності. При декартових координатах ця умова вимагає, щоб функція напружень задовольняла рівнянню (4.21). У розглянутому випадку нам необхідно це рівняння подати в полярних координатах. Залежності між полярними і декартовими координатами визначаються такими формулами:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta, \quad (4.37)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Користуючись наведеними формулами і розглядаючи φ як функцію від r та θ , знайдемо

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Як і у випадку розв'язання плоскої задачі в декартових координатах, тут також підбирається функція φ , що задовольняє рівнянню (4.36) і умовам на контурі.

4.6.2. Деформації в полярних координатах

При розгляді переміщень у полярних координатах позначимо через u і v складові переміщення відповідно в радіальному й тангенціальному напрямках (рис. 4.8).

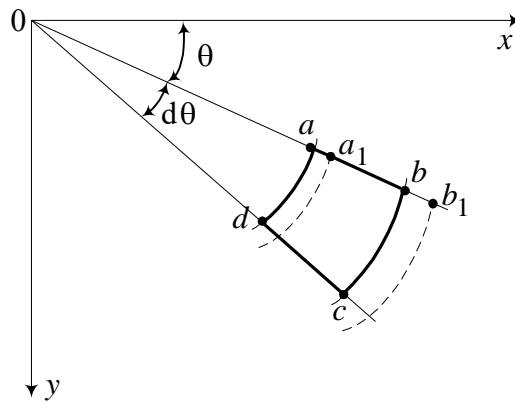


Рис. 4.8. До визначення деформації ε_r

Якщо u – радіальне переміщення сторони ad елемента $abcd$, то радіальне переміщення сторони bc дорівнює

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Тоді відносне подовження елемента $abcd$ в радіальному напрямку дорівнює

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (4.39)$$

Що стосується деформації в тангенціальному напрямку, то слід помітити, що вона залежить не тільки від переміщення v , але також і від радіального переміщення u (рис. 4.9). Внаслідок радіальних переміщень u елемент ad переходить на нову окружність. Початкова його довжина $ad = rd\theta$ тепер дорівнює $a_1d_1 = (r + u) d\theta$.

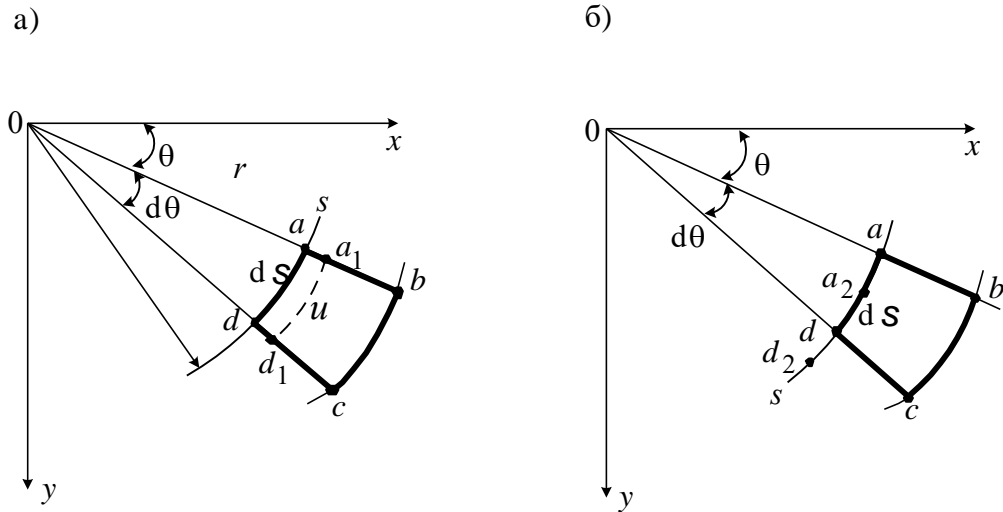


Рис. 4.9. До визначення деформації ε_θ

Звідси

$$\varepsilon'_\theta = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}.$$

Внаслідок різниці в переміщеннях точок a і d у напрямку дуги s

$$\varepsilon''_\theta = \frac{a_2 d_2 - ad}{ad} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Таким чином, тангенціальна деформація дорівнює

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + \varepsilon''_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (4.40)$$

Розглянемо тепер деформацію зсуву (рис. 4.10).

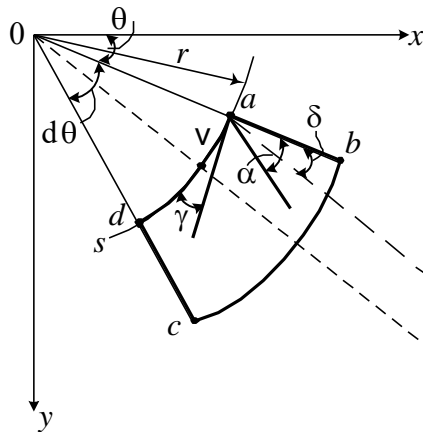


Рис. 4.10. До визначення деформації зсуву

Якби точка a не переміщалася, то зміна кута bad обумовлювалася б поворотом сторін ab та ad і дорівнювала б

$$\gamma'_{r\theta} = \alpha + \gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Внаслідок переміщення точки a по дузі s на величину v нахил грані ab зміниться на кут $\delta = v/r$, який потрібно відняти зі знайденої вище зміни кута $\gamma'_{r\theta}$. Отже, повна зміна кута bad , що є деформацією зсуву, дорівнює

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (4.41)$$

Підставивши тепер вирази для складових деформацій (4.39) – (4.41) у формули закону Гука для плоского напруженого стану (4.16), одержимо такі рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

які характеризують зв'язок між переміщеннями і напруженнями в полярних координатах.

4.6.3. Напружено-деформований стан труби при дії рівномірного тиску

Розглянемо товстостінний циліндр, який зазнає рівномірного тиску по внутрішній і зовнішній поверхнях (рис. 4.11).

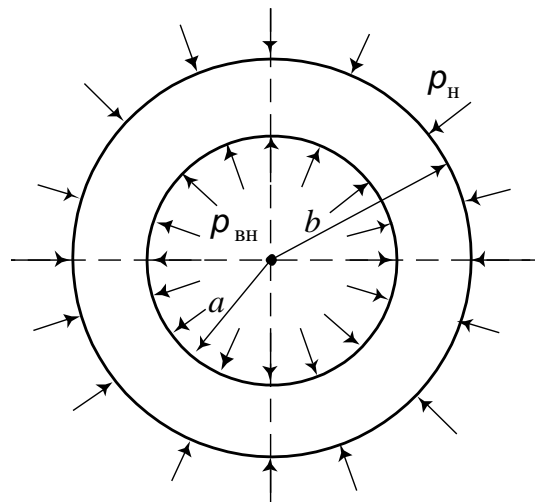


Рис. 4.11. До розрахунку труби на дію внутрішнього і зовнішнього тиску

Через a і b позначимо радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра, а через p_H і p_{BH} – зовнішній і внутрішній тиски. Граничні умови будуть мати вигляд

$$\sigma_r = -p_{BH} \text{ при } r = a,$$

$$\sigma_r = -p_H \text{ при } r = b.$$

Виходячи з граничних умов, напруження в цьому випадку повинні розподілятися симетрично відносно центральної осі циліндра, перпендикулярної до площини перерізу. Тоді складові напруження не залежать від кута θ і є функціями одного лише r . З умов симетрії випливає також, що дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ повинні дорівнювати нулю.

Таким чином, із двох рівнянь рівноваги (4.33) залишається лише одне

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4.43)$$

З тієї ж причини рівняння (4.38) набуває вигляду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (4.44)$$

Рівняння (4.44) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням, розв'язком його буде функція

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (4.45)$$

Складові напруження (4.34), (4.35), (4.36) будуть мати вигляд

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \quad (4.46)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \quad (4.47)$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

У виразах (4.46), (4.47) є три постійних інтегрування A, B, C . Граничні умови визначають тільки дві постійні. Для того щоб однозначно знайти ці постійні, розглянемо переміщення. Для цього скористаємося залежностями (4.42).

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta),$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r).$$

Інтегруючи перше рівняння, знаходимо

$$Eu = -\frac{A}{r}(1+\nu) + 2C(1-\nu)r + B[(1-3\nu r) + 2(1-\nu)(r \ln r - r)] + D_1. \quad (4.48)$$

Інтегрування другого рівняння дає

$$Eu = -\frac{A}{r}(1+\nu) + 2C(1-\nu)r + Br[(3-\nu) + 2 \ln r(1-\nu)]. \quad (4.49)$$

Для того щоб обидва вирази (4.48), (4.49) збігалися, повинні бути виконані умови

$$B = 0 \quad \text{і} \quad D_1 = 0.$$

З урахуванням цього маємо:

$$\varphi = A \ln r + Cr^2, \quad (4.50)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad (4.51)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (4.52)$$

Визначимо постійні A і C із граничних умов:

$$2C = \frac{p_{\text{вн}} - p_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}, \quad A = \frac{(p_{\text{н}} - p_{\text{вн}}) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (4.53)$$

Компоненти напружень дорівнюють

$$\sigma_r = \frac{(p_{\text{н}} - p_{\text{вн}}) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_{\text{вн}} a^2 - p_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}, \quad (4.54)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(p_{\text{н}} - p_{\text{вн}}) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_{\text{вн}} a^2 - p_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}. \quad (4.55)$$

Цікаво зазначити, що сума $\sigma_r + \sigma_\theta$ постійна по всій товщині стінок циліндра. Тому напруження σ_r і σ_θ викликають рівномірне розтягання або вкорочення в напрямку осі труби. Деформація в елементі труби, вирізаному двома суміжними поперечними перерізами, не перешкоджає деформації суміжних елементів. Внаслідок цього елемент перебуває в плоскому напруженому стані.

В окремому випадку, коли $p_{\text{вн}} = 0$,

$$\sigma_r = \left(\frac{p_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2} \right) \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \quad (4.56)$$

$$\sigma_{\theta} = -\left(\frac{p_{\text{н}} b^2}{b^2 - a^2}\right) \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right). \quad (4.57)$$

Напруження σ_r досягає найбільшого значення на зовнішній поверхні (рис. 4.12), де воно дорівнює зовнішньому тиску. Напруження $\sigma_{\theta \text{max}}$ більше, ніж зовнішній тиск. Воно наближається до величини останнього зі збільшенням радіуса b , але ніколи не може виявитися нижче $p_{\text{н}}$, як би ми не збільшували кількість матеріалу труби.

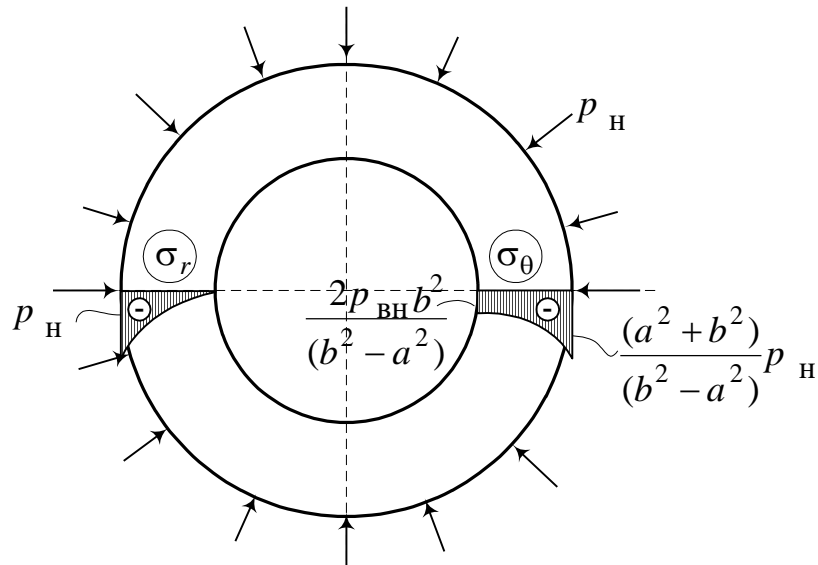


Рис. 4.12. Епюри σ_r і σ_{θ} у товстостінній трубці при зовнішньому тиску

4.6.4. Напружений стан пластинки з малим круглим отвором

Якщо суцільна пластинка зазнає рівномірного розтягання по напрямку x (рис. 4.13), то

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

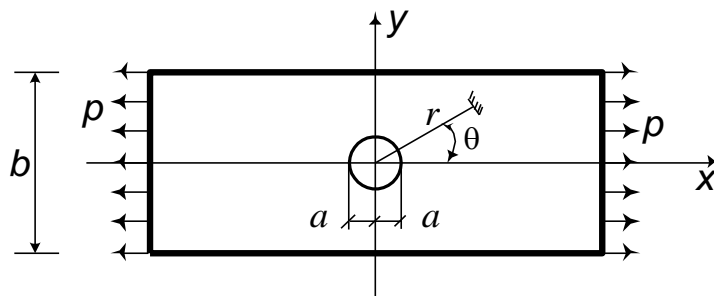


Рис. 4.13. До розрахунку пластинки з малим круглим отвором

Розглянемо, як змінюється напружений стан пластинки, якщо зробити в ній круглий отвір, діаметр якого $2a$ малий у порівнянні із шириною b . Очевидно, що напруження, викликані наявністю отвору, мають характер місцевих напружень: на досить великій відстані від отвору вони стануть майже такими самими, як і у суцільній пластинці. Шукана функція напружень φ для пластинки з отвором повинна давати при досить більших значеннях r ті ж напруження, що і функція φ для пластинки без отвору.

Для суцільної пластинки

$$\varphi_0 = \frac{p}{4} (r^2 - r^2 \cos 2\theta). \quad (4.58)$$

Для пластинки з отвором

$$\varphi = \frac{p}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (4.59)$$

Якщо у виразі (4.59) a спрямувати до нуля, то (4.59) зводиться до (4.58). Визначимо напруження. Оскільки найбільший інтерес являє тангенціальне напруження, то на ньому й зупинимося:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{p}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (4.60)$$

Зобразимо епюру σ_θ біля краю отвору (рис. 4.14).

При $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ $\cos 2\theta = -1$. Тоді

$$\sigma_\theta = p \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right). \quad (4.61)$$

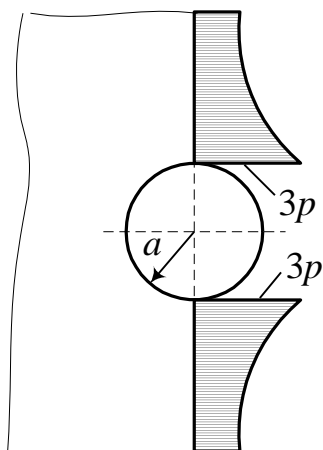


Рис. 4.14. Епюра σ_{θ} біля краю отвору

При: $r = a$	$\sigma_{\theta} = 3p$,
$r = 2a$	$\sigma_{\theta} = 1,22p$,
$r = 3a$	$\sigma_{\theta} = 1,07p$,
$r = 4a$	$\sigma_{\theta} = 1,04p$,
$r = \infty$	$\sigma_{\theta} = p$.

Отримані формули (4.60), (4.61) є правильними у випадку, якщо ширина пластинки b велика в порівнянні з отвором $2a$. Якщо ж ширина не дуже велика, але все-таки більш, ніж $4a$, то для визначення найбільшого напруження, що розтягує, можна користуватися наближеною формулою

$$\sigma_{\theta, \max} = 3p \frac{b}{(b-a)}. \quad (4.62)$$

З наведеного розв'язку можна зробити висновок про те, що на краях отворів, виточень і т. п. спостерігається різке збільшення напружень, назване концентрацією напружень. Це служить причиною утворення тріщини, що, швидко розвиваючись, призводить до руйнування конструкції.

Особливо небезпечна концентрація напружень при дії навантажень, що періодично змінюється в часі. Виникає питання про те, яким чином можна знизити концентрацію напружень. Для цього в різного роду тріщинах, виточеннях, у місцях різкої зміни площі поперечного перерізу слід замінити вістря виточення плавними кривими, тобто збільшити радіус кривизни кінця тріщини або отвору. Це незмінно призводить до зниження концентрації напружень. Так, наприклад, для припинення розвитку тріщини в пластинках іноді на кінці тріщини висвердлюється круглий отвір.

4.6.5. Напружений стан нескінченно великої пластинки одиничної товщини при дії на прямолінійний край зосередженої сили

Розглянемо нескінченно велику пластинку, навантажену зосередженою вертикальною силою (рис. 4.15).

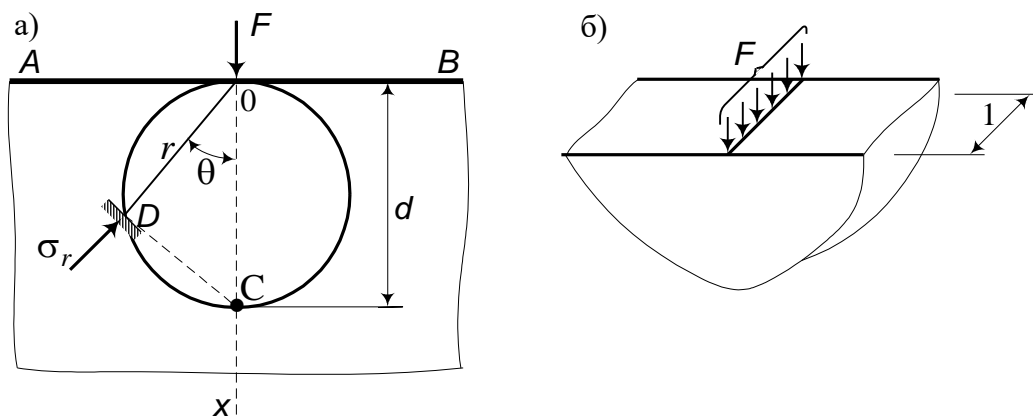


Рис. 4.15. Дія зосередженої сили на прямолінійний край нескінченно великої пластинки

Розподіл вантажу по товщині пластинки – рівномірний (рис. 4.15, б). Товщина пластинки прийнята рівною одиниці, так що F – сила, що припадає на одиницю площі пластинки. Розв’язок розглянутої задачі було отримано Фламаном з використанням розв’язку Я. Буссінеска в трьох вимірах. Розподіл напружень можна встановити з елементарних міркувань. У міру віддалення від точки прикладання сили напруження будуть убувати. Тому припустимо, що σ_r змінюється обернено пропорційно радіусу r . Крім того, припустимо, що найбільші напруження σ_r будуть виникати в напрямку дії сили F . У міру відхилення вліво або вправо від осі x вони також будуть убувати. Це відповідає тому, що σ_r змінюється прямо пропорційно $\cos\theta$. Таким чином, приймаємо

$$\sigma_r = -k \frac{\cos\theta}{r}, \quad (4.63)$$

де k – коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Вважаємо також, що

$$\sigma_\theta = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Щоб підтвердити правильність зроблених припущень, знайдемо функцію напружень φ . Легко перевірити, що при наступному виразі для цієї функції

$$\varphi = -\frac{k}{2} r\theta \sin\theta \quad (4.64)$$

диференціальні рівняння рівноваги (4.33) і рівняння спільності (4.38) задовольняються. При цьому σ_r відповідає виразу (4.63), а σ_θ та $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю.

Залишається визначити коефіцієнт k із граничних умов. Верхній край пластинки (рис. 4.16) вільний від напруження скрізь, за винятком точки прикладання сили. Тут виникають дуже великі напруження, що

перевищують межу пружності матеріалу, і в результаті сила F виявляється розподіленою по площадці скінченної величини.

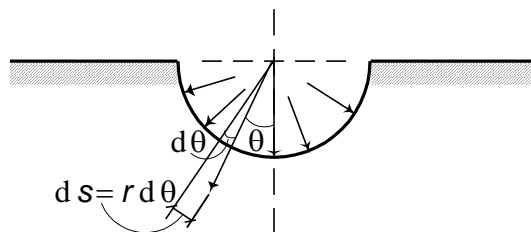


Рис. 4.16. Схема передачі зосередженої сили на прямолінійний край пластинки

Виріжемо із пластинки по круглій циліндричній поверхні малого радіуса частину матеріалу, що зазнає пластичної деформації. Тоді до частини пластинки, що залишилася, можна застосувати рівняння теорії пружності. Рівнодіюча зусиль, що діють по циліндричній поверхні, повинна дорівнювати силі F :

$$\int_0^{\pi} \sigma_r \cdot r \cos \theta d\theta = F.$$

Підставимо сюди σ_r за виразом (4.63). Знак мінус при підстановці виразу σ_r не вводимо, тому що він уже врахований при виборі напрямку зусиль. У результаті одержимо

$$k \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = F \quad \text{і}$$

$$k = \frac{2F}{\pi}.$$

Формула для напружень набуває остаточного вигляду

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r}. \quad (4.65)$$

Щоб наочно уявити картину розподілу напружень, зробимо наступну побудову. Візьмемо довільну точку D (рис. 4.15). Покажемо для неї нормальну до радіуса площадку і діюче на ній радіальне напруження σ_r . Продовжимо напрямок площинки до перетинання з віссю x в точці C . Відрізок OC приймемо за діаметр d , на якому побудуємо окружність. Із трикутника OCD знайдемо

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Це співвідношення справедливе для будь-якої точки окружності, тому у всіх її точках по площадках, нормальних до радіуса, будуть діяти однакові нормальні напруження

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}.$$

Можна побудувати цілий ряд таких окружностей. Вони називаються колами рівних напружень або колами Буссінеска. Кожна з таких окружностей є геометричним місцем точок з рівними головними напруженнями (рис. 4.17).

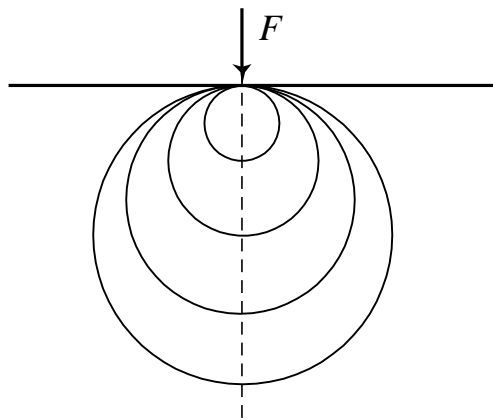


Рис. 4.17. Кола рівних напружень (кола Буссінеска)

Отримане уявлення про розподіл напружень надзвичайно наочне, але не цілком зручне для практичного застосування. Щоб судити про надійність споруд, необхідно знати, як розподіляються на заданій глибині нормальні та дотичні напруження по горизонталі і вертикалі. Визначимо напруження в горизонтальному і вертикальному перерізах (рис. 4.18).

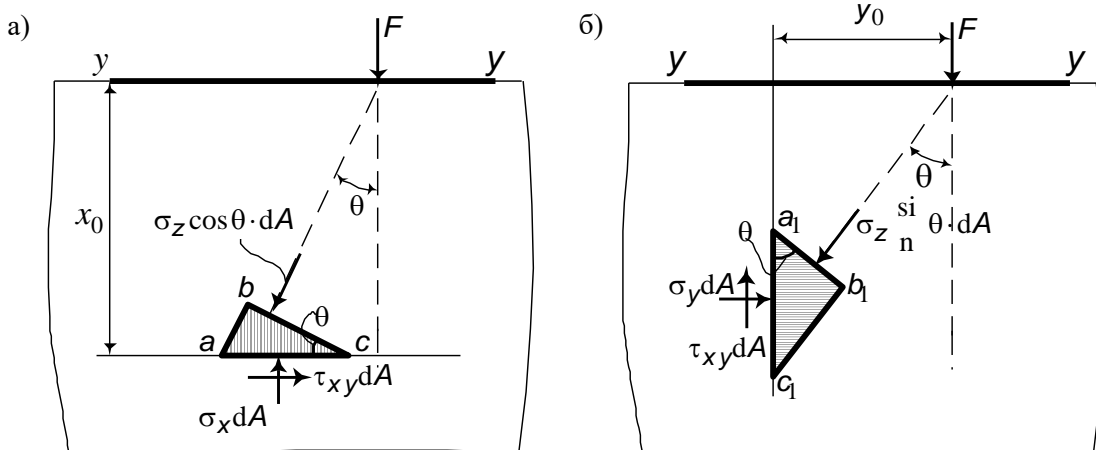


Рис. 4.18. Зусилля у вертикальних і горизонтальних перерізах нескінченно великої пластинки

Виділимо із пластинки елементарні призми abc і $a_1b_1c_1$. Використовуючи умови проєкцій на координатні осі і вирази (4.37), знайдемо

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.66)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.67)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4.68)$$

Для заданої постійної глибини x_0 напруження σ_x (рис. 4.19, а) досягають максимального значення по лінії дії сили F , тобто при $y = 0$. З віддаленням від місця прикладання вантажу напруження убувають по величині і розподіляються на все більшу площу.

Напруження σ_y (рис. 4.19) біля верхнього краю пластинки дорівнюють нулю. Зі збільшенням x зростають, на деякій глибині досягають найбільших значень і потім убувають. З віддаленням перерізу від лінії дії сили чисельні значення напружень убувають, а максимум зміщається вниз. Різні знаки τ_{xy} (рис. 4.19, б) праворуч і ліворуч від осі x показують на розходження в напрямку напружень.

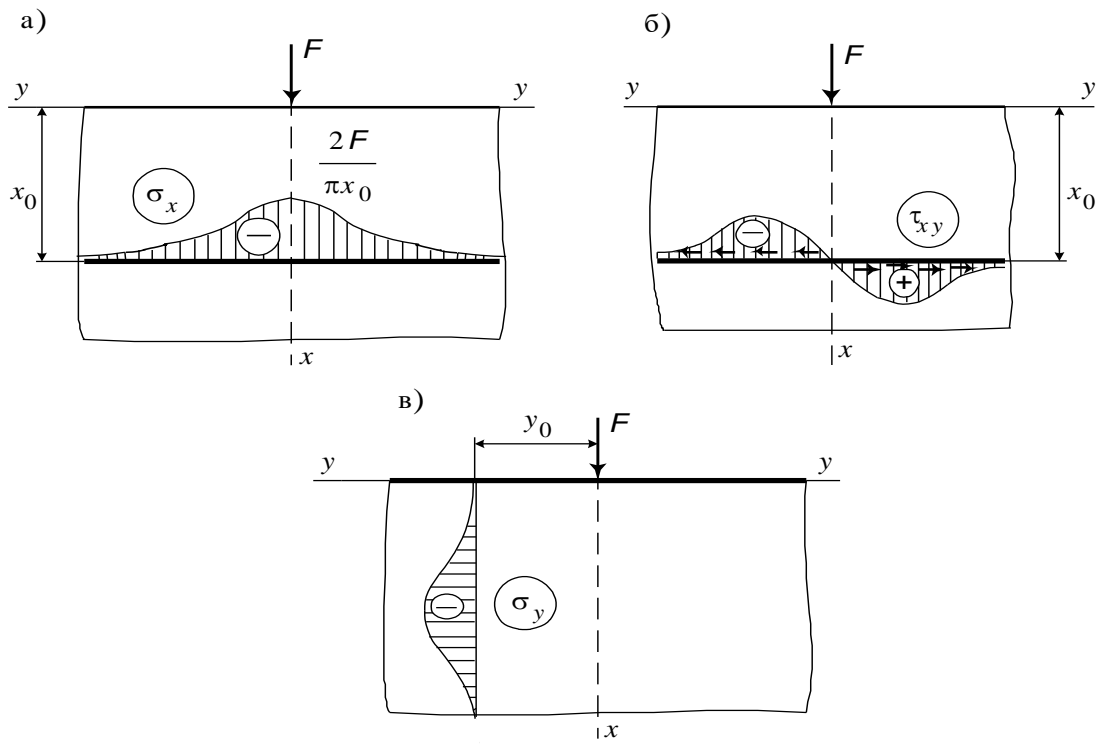


Рис. 4.19. Епюри σ_x , σ_y , τ_{xy}

4.7. Згинання пластин

4.7.1. Загальні положення

Пластинкою називається тіло призматичної або циліндричної форми, обмежене двома паралельними основами (рис. 4.20).

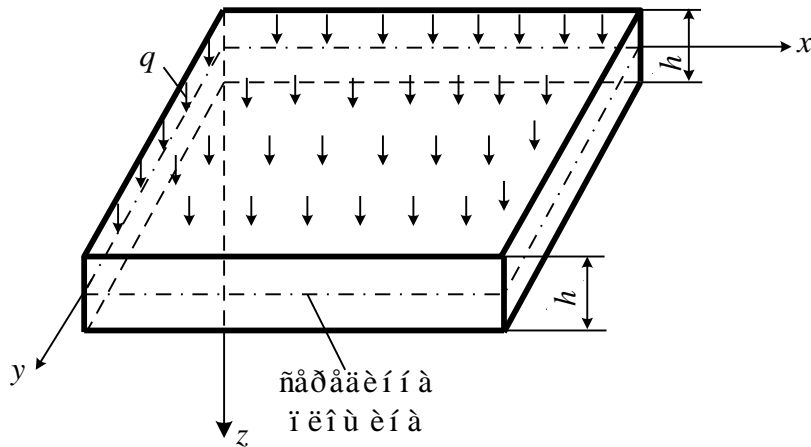


Рис. 4.20. Схема пластинки

Площина, що ділить висоту h пластинки навпіл, називається серединною площиною. Лінія перетинання серединної площини з бічною поверхнею називається контуром пластинки. При згинанні пластинки серединна площина має те саме значення, що й нейтральний шар у балці. Початок координат помістимо в одній із точок серединної площини (рис. 4.20). При дослідженні будемо вважати, що система осей координат нерухома і не переміщається разом із пластинкою при її деформації. У загальному випадку на пластинку може діяти багато сил різних напрямків. Ми будемо вивчати згинання пластинки під навантаженням, яке перпендикулярне до серединної площини.

Пластинку можна розглядати точно так, як просторове тіло, використовуючи основні рівняння теорії пружності (2.1), (2.2), (2.17), (2.18), (2.19), але такий розрахунок виходить дуже складним і застосовується рідко. При практичному розрахунку пластинки введемо ряд гіпотез і допущень, які значно полегшують дослідження.

Будемо припускати, що окремі шари пластинки не тиснуть один на одного, і у всіх точках пластини $\sigma_z = 0$. Це призводить до того, що формули для напружень набувають вигляду

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (4.69)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (4.70)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \quad (4.71)$$

Підставивши в ці рівняння залежності (1.7), (1.8), (1.10), знайдемо

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (4.72)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.73)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.74)$$

У подальшому зручніше у формулах напружень мати не горизонтальні переміщення u і v , а вертикальні, тобто прогини w . Установимо залежність між переміщеннями. Для цього введемо таку передумову: вертикальні лінії, проведені перпендикулярно до площини пластинки, при деформації тільки нахиляються, але не викривляються (це припущення аналогічно гіпотезі Бернуллі при розрахунку балок) (рис. 4.21).

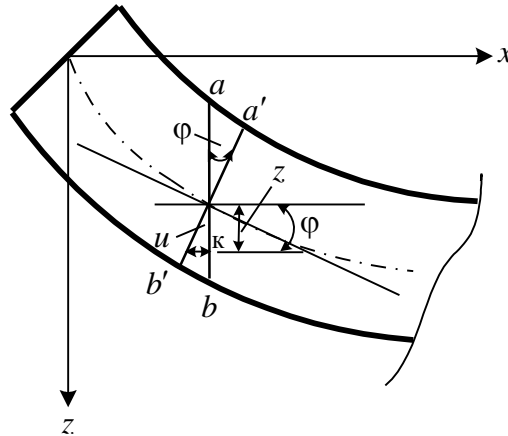


Рис. 4.21. Ілюстрація гіпотези прямих нормалей

Вертикальна лінія ab , проведена в пластинці, при деформації останньої не згинається, а тільки нахиляється на деякий кут φ , приймаючи положення $a'b'$.

Переміщення по напрямку x якої-небудь точки k , що має до деформації координату z , дорівнює

$$u = -z \operatorname{tg} \varphi.$$

Кут φ – кут нахилу дотичної до серединної поверхні після деформації

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Тому

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.75)$$

Аналогічно

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.76)$$

Знак мінус у формулах (4.75) і (4.76) показує, що при додатному z переміщенні u і v спрямовані в протилежні боки додатним напрямкам осей x і y .

Підставимо вирази (4.75), (4.76) у формули (4.72) – (4.74) і одержимо

$$\sigma_x = -\left(\frac{E z}{1-\nu^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (4.77)$$

$$\sigma_y = -\left(\frac{E z}{1-\nu^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (4.78)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E z}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.79)$$

Знайдемо тепер моменти, що діють на одиницю ширини (довжини) пластинки:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.80)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.81)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.82)$$

У виразах (4.80) – (4.82) D – циліндрична жорсткість, яка дорівнює

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.83)$$

4.7.2. Рівняння рівноваги

Виділимо із пластинки нескінченно малий елемент розмірами в плані dx , dy (рис. 4.22) і висотою h та покажемо діючі на нього зусилля.

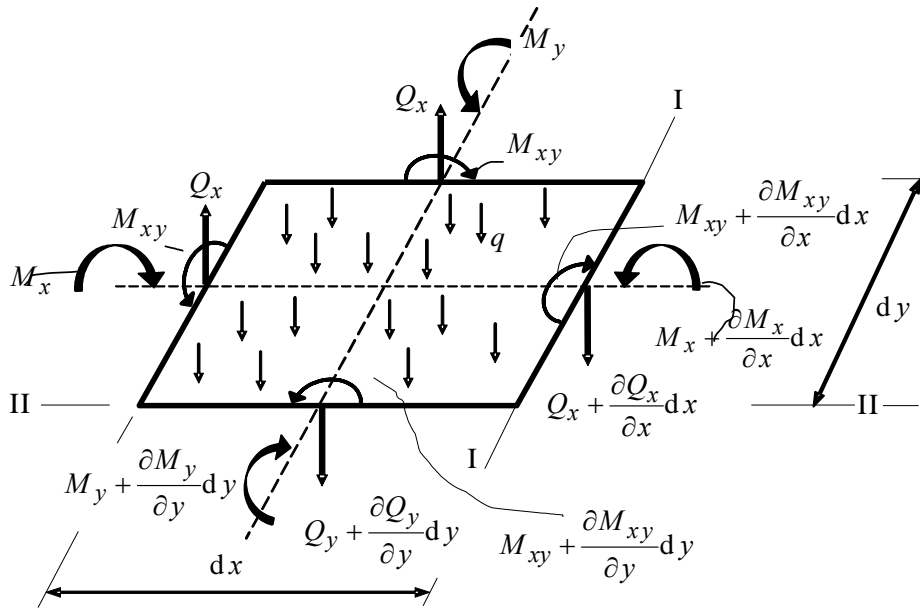


Рис. 4.22. До виведення диференціальних рівнянь рівноваги

Спроекуємо всі сили на вертикальну вісь:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (4.84)$$

Візьмемо тепер суму моментів щодо осі I - I:

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0.$$

Звідси

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (4.85)$$

Так само, взявши суму моментів щодо осі II - II (рис. 4.22), одержимо

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0,$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.86)$$

Якби не існувало крутних моментів, то залежності між поперечними силами і моментами були б такими самими, як і для балок. Підставимо значення Q_x та Q_y у формулу (4.84). У результаті одержимо

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (4.87)$$

Тепер підставимо в рівняння (4.87) знайдені вище значення моментів (4.80) – (4.82):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (4.88)$$

Отримане нами рівняння має подібність із рівнянням спільності (4.21). Однак у рівняння (4.88) замість функції φ входить фізична величина – прогин w . Між цими двома рівняннями істотна різниця. Рівняння плоскої задачі (4.21) виведене як рівняння спільності, рівняння ж (4.88) є рівнянням рівноваги. При виведенні його ми обійшлися без рівняння спільності.

4.7.3. Згинання еліптичної пластинки, затисненої по контуру

Задача про згинання еліптичної пластинки (рис. 4.23) із затиснутими краями у випадку дії рівномірно розподіленого навантаження розв’язується особливо просто. Покажемо це.

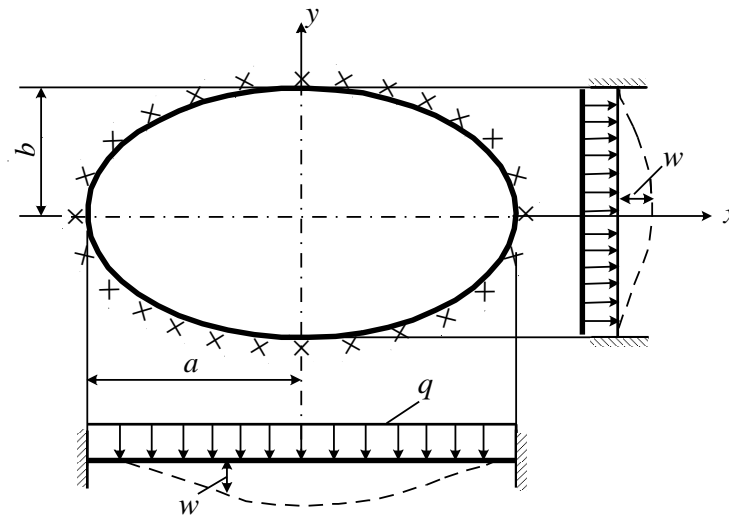


Рис. 4.23. Розрахункова схема еліптичної пластинки

Рівняння контуру пластинки

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1, \quad (4.89)$$

де \bar{x} і \bar{y} – координати точок на опорному контурі.

Задаємося виразом прогину пластинки в такому вигляді:

$$w = w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.90)$$

Очевидно, що на контурі пластинки, тобто при $x = \bar{x}$ і $y = \bar{y}$, згідно з виразом (4.89) прогин дорівнює нулю. Інша гранична умова повинна відповідати тому, що контур затиснений та кути повороту $\frac{\partial w}{\partial x}$ і $\frac{\partial w}{\partial y}$ дорівнюють нулю, де

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2x}{a^2}, \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2y}{b^2}. \quad (4.92)$$

Наведені похідні при $x = \bar{x}$ і $y = \bar{y}$ дорівнюють нулю, а отже, дорівнюють нулю $\frac{\partial w}{\partial n}$ і $\frac{\partial w}{\partial s}$, де n – нормаль до еліптичного контуру в розглянутій точці, а s – дотична до нього ж. Отже, обране рівняння пружної лінії задовольняє граничним умовам. Для того щоб визначити, чи задовольняє це рівняння вихідному диференціальному рівнянню (4.88)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

виконаємо низку диференціювань:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 24 \frac{w_0}{a^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24 \frac{w_0}{b^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 8 \frac{w_0}{a^2 b^2}.$$

Підставивши ці похідні у (4.88), одержимо

$$w_0 \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = \frac{q}{D}. \quad (4.93)$$

Звідси

$$w_0 = \frac{q}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D}. \quad (4.94)$$

Отже, функція $w(x, y)$ відома:

$$w(x, y) = \frac{q}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right) D} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2. \quad (4.95)$$

Одержимо вирази для напружень ($x = y = 0$):

$$\sigma_x = -\frac{E z}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\frac{4E w_0}{(1-\nu^2)} z \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right). \quad (4.96)$$

$$\sigma_y = -\frac{E z}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\frac{4E w_0}{(1-\nu^2)} z \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2}\right). \quad (4.97)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E z}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E z}{1+\nu} \frac{8w_0 xy}{a^2 b^2}. \quad (4.98)$$

У випадку круглої пластинки $b = a$ і

$$w_0 = \frac{q a^4}{64D}, \quad w = \frac{w_0}{a^4} (a^2 - r^2)^2. \quad (4.99)$$

4.7.4. Згинання круглої пластинки

У загальному випадку навантаження круглої пластинки досить зручно користуватися полярними координатами r і θ (див. п. 4.6). Тому всі основні рівняння згинання пластинки запишемо в полярних координатах, обмежимося найпростішим випадком, коли навантаження, що згинає пластинку, розподілене симетрично щодо центра. При цій умові серединна поверхня вигнутої пластинки буде поверхнею обертання і величина прогину w буде залежати лише від відстані r розглянутої точки до центра пластинки. У такому випадку в рівнянні (4.38) пропадуть члени, що містять похідні по θ , і ми одержимо диференціальне рівняння для вигнутої пластинки в такому вигляді:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}. \quad (4.100)$$

Загальний інтеграл рівняння (4.100) для випадку, коли інтенсивність навантаження q є цілою алгебраїчною функцією від r (візьмемо, наприклад, рівномірно розподілене навантаження), запишеться так:

$$w = C_1 r^2 + C_2 + \frac{q r^4}{64D}. \quad (4.101)$$

Умови на контурі ($r = a$) запишуться по-різному залежно від способу закріплення:

– для затисненого краю

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0; \quad (4.102)$$

– для шарнірно опертого краю

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (4.103)$$

Визначаючи довільні постійні C_1 і C_2 на підставі умов (4.102) і (4.103), одержуємо:

– для пластинки із затиснутим краєм

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2; \quad (4.104)$$

– для пластинки з шарнірно опертим краєм

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \nu} \right]. \quad (4.105)$$

Маючи рівняння вигнутої поверхні, легко знайти значення згинаючих моментів і моментів, що скручують, а також відповідні їм напруження.

4.7.5. Розв'язання задач на згинання прямокутних пластинок

Розрахунок пластинки слід починати зі знаходження такої функції w , що задовольняла б основному рівнянню (4.88) і умовам на контурі (рис. 4.24). Як і в інших задачах, таку функцію w доводиться підбирати, задаючись нею і роблячи перевірки.

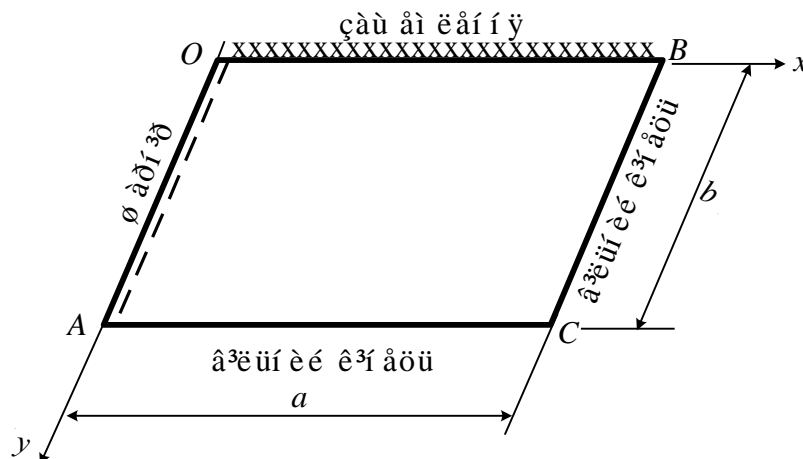


Рис. 4.24. Умови на контурі пластинки

На шарнірному кінці ($x = 0$) відсутній прогин $w = 0$ і згинальний момент $M_x = 0$.

У випадку защемлення ($y = 0$) кінці повинні перетворювати в нуль прогин $w = 0$ і кут повороту в напрямку, перпендикулярному до цього кінця, тобто $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

На вільному кінці повинні перетворюватись в нуль згинальні, крутні моменти і поперечна сила:

$$\text{при } x = a \quad M_x = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad Q_x = 0,$$

$$\text{при } y = b \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad Q_y = 0.$$

Таким чином, замість двох граничних умов, які ми мали у випадку опертого і защемленого кінців, тут виходять три умови. Дві останні не можуть бути задоволені одночасно. Розподілений крутний момент рівносильний поперечній силі $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ (или $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$). Тому, додаючи її до основної поперечної сили Q_x (Q_y), одержимо

$$\text{при } x = a \quad M_x = 0, \quad Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{4.106}$$

$$\text{при } y = b \quad M_y = 0, \quad Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Якщо для даного конкретного випадку буде знайдена функція прогинів w , то далі можуть бути знайдені згинальні і крутні моменти в будь-якому місці пластинки, визначеному координатами x і y :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tag{4.107}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \tag{4.108}$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{4.109}$$

Поперечні сили будуть визначатися за формулами

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \tag{4.110}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.111)$$

Можна поперечні сили виразити безпосередньо через прогини, підставивши у формули (4.110), (4.111) значення моментів (4.107) – (4.109):

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (4.112)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (4.113)$$

Знаючи моменти, знайдемо нормальні напруження

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{J}, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{J}. \quad (4.114)$$

Епюри розподілу напружень по товщині пластинки показані на рис. 4.25 (дотичні напруження τ_{xz} тут не показані).

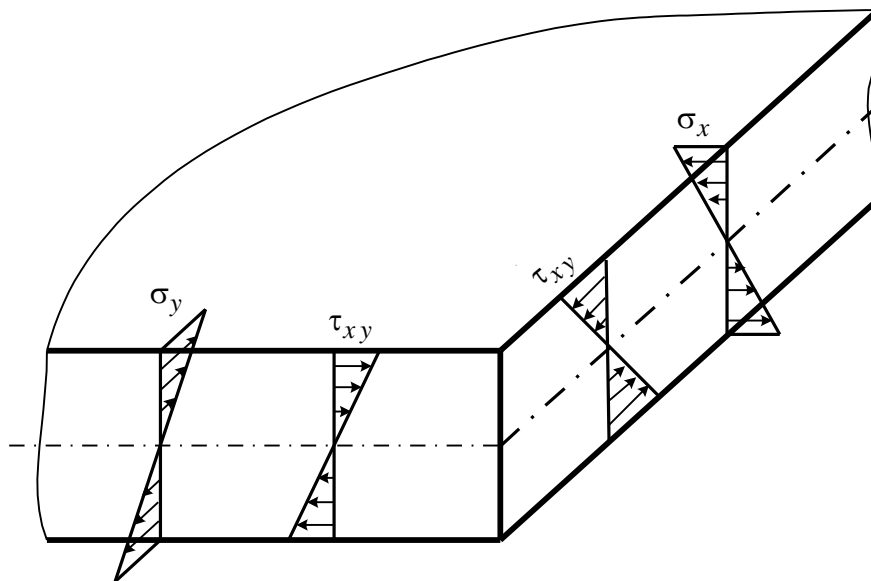


Рис. 4.25. Епюри напружень по товщині пластинки

У загальному випадку задача про згинання пластинки не розв'язується аналітично (тобто її розв'язок не виписується у вигляді формули, а знаходиться різними наближеними, чисельними методами за допомогою програмування). Однак у деяких окремих випадках аналітичне розв'язання можливо. Розглянемо такі випадки.

4.7.6. Розв'язання диференціального рівняння для пластинки, дві протилежні грані якої шарнірно оперті, а дві інші закріплені довільним чином

Розглянемо пластинку, у якої два протилежних краї, наприклад, OB і AC оперті шарнірно; два інших – OA і BC можуть бути опертими як завгодно або вільними (рис. 4.26).

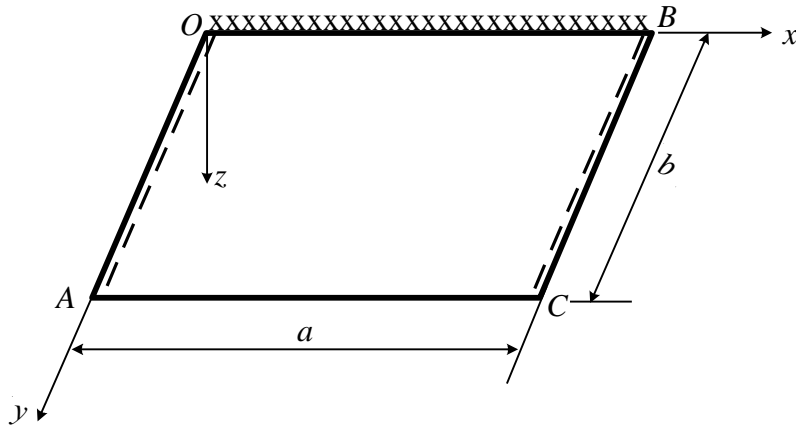


Рис. 4.26. Схема пластинки

Розв'язок диференціального рівняння (4.88) будемо шукати як

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m \pi x}{a}. \quad (4.115)$$

Тут $f_m(y)$ – невідома поки функція y , що повинна бути обрана таким чином, щоб було задоволене рівняння (4.88) і умови по сторонах пластинки, паралельних осі x . Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \left(\frac{m \pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m \pi x}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{IV}(y) \sin \frac{m \pi x}{a}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m''(y) \left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m \pi x}{a}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Підставивши вирази (4.116) у диференціальне рівняння (4.88), знайдемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[f_m^{IV}(y) - 2f_m''(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + f_m(y) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (4.117)$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.117) на $\sin \frac{n\pi x}{a}$ ($n = 1, 2, \dots$) і проінтегруємо у межах від нуля до a . З урахуванням того, що

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ a/2 & \text{при } m = n \end{cases},$$

одержимо

$$f_n^{IV}(y) - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 f_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 f_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (4.118)$$

Уведемо позначення

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad (4.119)$$

$$\Phi_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \alpha x dx. \quad (4.120)$$

З урахуванням позначень (4.119) і (4.120) одержимо диференціальне рівняння щодо функції $f_n(y)$

$$f_n^{IV} - 2\alpha^2 f_n'' + \alpha^4 f_n = \frac{\Phi_n}{D}. \quad (4.121)$$

Загальний розв'язок цього рівняння складається із загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку $\frac{\Phi_n}{D\alpha^4}$ повного рівняння:

$$f_n = \frac{\Phi_n}{D\alpha^4} + A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n \operatorname{sh} \alpha y + C_n y \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (4.122)$$

Довільні постійні A_n, B_n, C_n, D_n визначаються із граничних умов на краю.

Граничні умови, виражені через змінну f_n , будуть мати такий вигляд:

– повне затиснення:

$$y = 0, y = b: \quad f_n = 0; \quad f_n' = 0; \quad (4.123)$$

– шарнірне опирання:

$$y = 0, y = b: f_n = 0; \alpha^2 f_n \nu - f_n'' = 0; \quad (4.124)$$

– вільний край:

$$y = 0, y = b: \alpha^2 f_n \nu - f_n'' = 0; \alpha^2 (2 - \nu) f_n' - f_n''' = 0. \quad (4.125)$$

Продиференціюємо рівняння (4.122) один, два і три рази по y , що буде відповідати умовам (4.123) – (4.125):

$$f_n' = \alpha(A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y) + (C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y) + \alpha y(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y), \quad (4.126)$$

$$f_n'' = \alpha^2(A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n \operatorname{sh} \alpha y) + 2\alpha(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y) + \alpha^2 y(C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y), \quad (4.127)$$

$$f_n''' = \alpha^3(A_n \operatorname{sh} \alpha y + B_n \operatorname{ch} \alpha y) + 3\alpha^2(C_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y) + \alpha^3 y(C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n \operatorname{ch} \alpha y). \quad (4.128)$$

Тепер визначимо постійні A_n, B_n, C_n, D_n . Формули для цих постійних інтегрування наведені в дод. 1.

4.7.7. Розв'язання диференціального рівняння для симетричної пластинки, завантаженої симетричним навантаженням

Якщо пластинка симетрична і завантажена симетрично, то в розв'язку диференціального рівняння (4.121) залишаємо тільки симетричні члени. Тоді

$$f_n = \frac{\Phi_n}{D\alpha^4} + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + A_n \operatorname{ch} \alpha y. \quad (4.129)$$

Тут

$$\Phi_n = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} q(x) \cos \alpha x \, dx. \quad (4.130)$$

Постійні інтегрування A_n і D_n для цього випадку наведені в дод. 2.

Прогин w у симетричній пластинці, завантаженої симетричним навантаженням, визначається за такою формулою:

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(y) \cos \alpha x. \quad (4.131)$$

Згинальні і крутні моменти, а також напруження визначаються за формулами (4.107), (4.108), (4.109), (4.114).

Приклад розрахунку

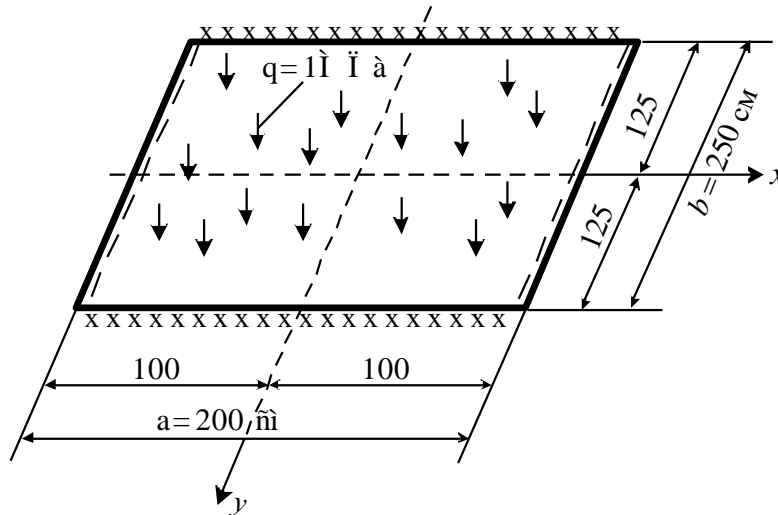


Рис. 4.27. Розрахункова схема пластинки

Вихідні дані:

$$\nu = 0,3; E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; h = 5 \text{ см.}$$

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n \cos \alpha x;$$

$$f_n = D_n y \operatorname{sh} \alpha y + A_n \operatorname{ch} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D \alpha^4};$$

$$\varphi_n = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} q \cos \alpha x dx; \quad \varphi_n = \frac{2q}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Граничні умови:

– на шарнірно-опертих сторонах

$$f_n = 0, \quad \nu f_n'' - \alpha^2 f_n = 0;$$

– на защемленных сторонах

$$f_n = 0, \quad f'_n = 0;$$

$$A_n = -\frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha b}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2}}{\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b},$$

$$D_n = \frac{2\varphi_n}{D\alpha^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2}}{\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b}.$$

Прогиб ($x = 0, \quad y = 0$)

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \right) \cos \alpha x,$$

$$w = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_n + \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha^2 \left(A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\varphi_n}{D\alpha^4} \right) \cos \alpha x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha A_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \alpha \operatorname{ch} \alpha y) \cos \alpha x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha^2 A_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha D_n \operatorname{ch} \alpha y + \alpha D_n \operatorname{ch} \alpha y + D_n y \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y) \cos \alpha x,$$

при $x = 0, \quad y = 0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\alpha^2 A_n + \frac{\varphi_n}{D\alpha^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (\alpha^2 A_n + 2\alpha D_n),$$

$$M_x = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D \left[\left(\alpha^2 A_n + \frac{\Phi_n}{D\alpha^2} \right) - \nu (\alpha^2 A_n + 2\alpha D_n) \right],$$

$$M_y = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D \left[-(\alpha^2 A_n + 2\alpha D_n) + \nu \left(\alpha^2 A_n + \frac{\Phi_n}{D\alpha^2} \right) \right],$$

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{J}, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Обчислюємо значення прогинів w та напружень σ_x і σ_y , записуючи проміжні результати у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Чисельні значення параметрів

Величин а	n			$\sum_{n=1,3,5}$
	1	3	5	
α	0,0157	0,0471	0,0785	
Φ_n	0,637q	-0,212q	0,127q	
A_n	$-76 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$1642 \frac{q}{D}$	$-3,960 \frac{q}{D}$	
D_n	$39,2 \cdot 10^3 \frac{q}{D}$	$-11,25 \frac{q}{D}$	$0,0287 \frac{q}{D}$	
w	$29,5 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$-0,41 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$0,033 \cdot 10^5 \frac{q}{D}$	$28,623 \cdot 10^5 \frac{q}{D} = 1,19 \text{ см}$
M_x	899,38q	-92,73q	20,58q	827,23q
M_y	855,7q	-30,1q	6,19q	831,8q
σ_x				198,5 МПа

σ_y				199,65 МПа
------------	--	--	--	------------

Епюри напружень σ_x і σ_y див. на рис. 4.25.

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

5.1. Метод скінченних різниць

Метод скінченних різниць є одним з найефективніших методів розрахунку пластинок, придатних для будь-яких умов опирання, для будь-якого навантаження і для будь-яких обрисів пластинки. Сутність цього методу полягає в тому, що диференціальне рівняння пластинки (4.88)

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$$

замінюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у яких невідомими є прогини w в окремих точках поверхні пластинки. Перед тим як здійснити перехід від диференціального рівняння в частинних похідних до рівнянь у кінцевих різницях, зупинимося на головних положеннях цього методу.

5.1.1. Функція w залежить від змінної x

Розглянемо неперервну функцію $w(x)$, що залежить від змінної x , і припустимо, що відомі значення $w(x)$, які відповідають рівновіддаленим одне від одного значенням x (рис. 5.1).

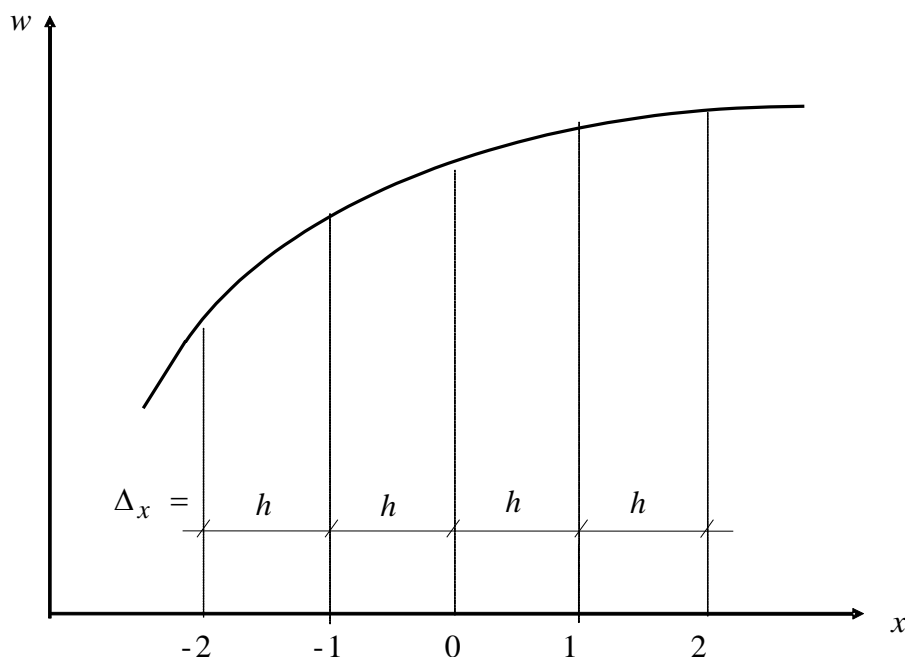


Рис. 5.1. Крива $w = w(x)$

Для точки O запишемо значення похідної в скінченних різницях:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{h}(w_1 - w_0) - \text{перша права різниця};$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{h}(w_0 - w_{-1}) - \text{перша ліва різниця};$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2h}(w_1 - w_{-1}) - \text{перша центральна різниця}.$$

У такий же спосіб можна приблизно виразити другу похідну:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_1) - \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_0) = \frac{1}{h^2}(w_2 - 2w_1 + w_0) -$$

друга права різниця;

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_0) - \frac{1}{h} \frac{d}{dx}(w_{-1}) = \frac{1}{h^2}(w_0 - 2w_{-1} + w_{-2}) -$$

друга ліва різниця;

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{h^2}(w_1 - 2w_0 + w_{-1}) - \text{друга центральна різниця}.$$

Взагалі похідні в тій або іншій точці будуть апроксимуватися з найбільшою точністю через центральні різниці.

5.1.2. Функція w залежить від змінних x і y

Якщо w є функцією x і y , то повинні бути введені частинні похідні. Скористаємося тими самими міркуваннями, що і в п. 5.1.1, та прийmemo $\Delta_x = \Delta_y = h$ (рис. 5.2).

Із визначення частинних похідних випливають рівності:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2h}(w_1 - w_3), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2h}(w_2 - w_4),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(w_1 - 2w_0 + w_3), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(w_2 - 2w_0 + w_4),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(w_5 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_3 + w_9),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4}(w_7 - 4w_2 + 6w_0 - 4w_4 + w_{11}),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4}(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12} - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 4w_0).$$

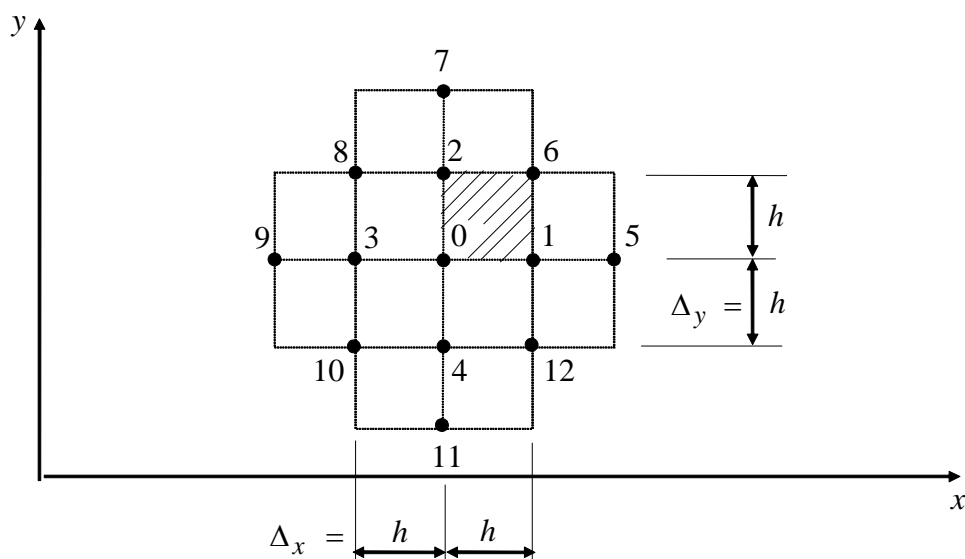


Рис. 5.2. Досліджувана область пластинки

Рівняння (4.88) в точці O набуває вигляду

$$\frac{1}{h^2} [20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12}) + (w_5 + w_7 + w_9 + w_{11})] = \frac{q_0}{D}. \quad (5.1)$$

Тут вільний член рівняння визначається шляхом збору навантаження q_0 з площі, що відповідає вузлу 0 (вона заштрихована на рис. 5.2), і діленням її на циліндричну жорсткість пластинки D відповідно до (4.83). При цьому праву частину рівняння треба помножити на площу елемента h^2 .

Складаючи рівняння (5.1) для кожного вузла сітки, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, число яких дорівнює числу вузлів сітки, тобто числу невідомих прогинів w . Тільки для тих вузлів, в яких

прогини заздалегідь відомі (наприклад, у місцях опирання пластинки, де прогини дорівнюють нулю), рівняння (5.1) складати не треба.

Точність розв'язку залежить від густоти сітки. Правильність одержаного методом кінцевих різниць розв'язку можна контролювати з використанням принципу Рунге, що при наявності двох розв'язків з різним кроком сітки дозволяє одержати уточнений розв'язок і оцінку погрішності.

5.1.3. Граничні умови

Для крайніх вузлів, а також для ліній, сусідніх з крайніми, при складанні рівняння (5.1) доводиться вводити законтурні точки, як показано на рис. 5.3.

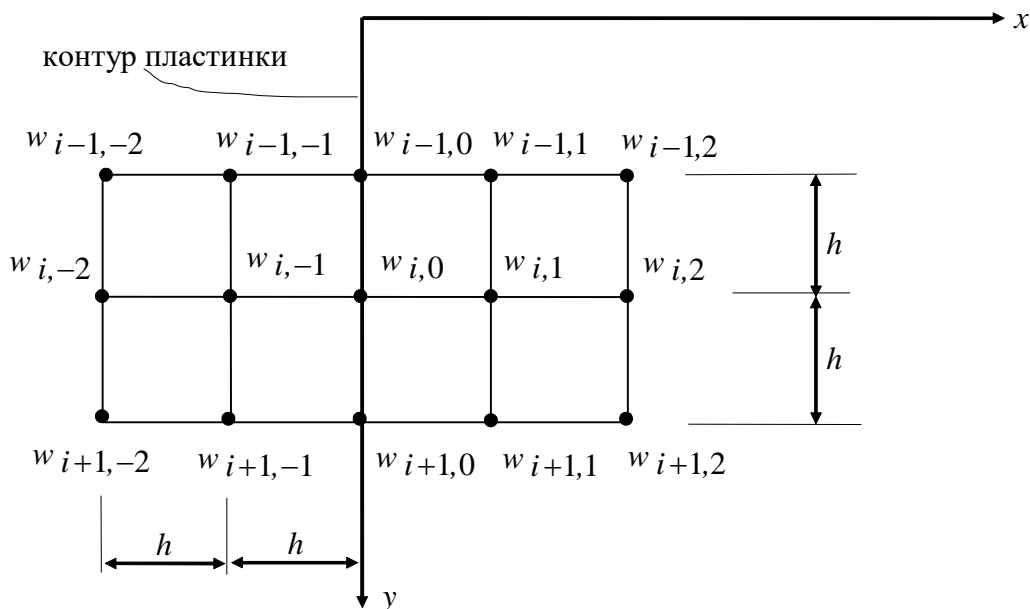


Рис. 5.3. До виведення різницевої апроксимації граничних умов

При цьому з'являється значна кількість додаткових невідомих, таких як прогини в законтурних точках. Відсутні рівняння складаються як граничні умови, виражені в кінцевих різницях.

5.1.4. Шарнірне опирання пластинки по лінії $x = 0$

При шарнірному опиранні функція прогинів може бути продовжена за лінію шарнірного опирання (рис. 5.4).

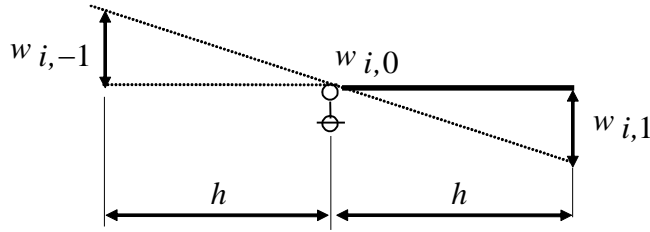


Рис. 5.4. Шарнірне опирання

Тоді

$$w_{i,-1} = -w_{i,1}. \quad (5.2)$$

У відповідності до п. 4.7.5 граничні умови при шарнірному опиранні будуть мати вигляд

$$w_{i,0} = 0, \quad w_{i,-1} = -w_{i,1}. \quad (5.3)$$

5.1.5. Жорстко закріплений край пластинки при $x = 0$

Для жорстко закріпленого краю пластинки функцію прогинів продовжимо за лінію закріплення, як показано на рис. 5.5.

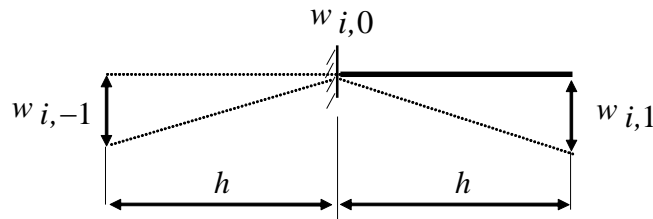


Рис. 5.5. Жорстке закріплення

Тоді

$$w_{i,-1} = w_{i,1}. \quad (5.4)$$

У відповідності з п. 4.7.5 граничні умови в кінцево-різницевій формі мають вигляд

$$w_{i,0} = 0, \quad (w_{i,1} - w_{i,-1}) = 0. \quad (5.5)$$

5.1.6. Вільний край пластинки при $x = 0$

Для вільного краю пластинки повинні бути виконані такі умови:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

У кінцево-різницевій формі ці умови мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 & w_{i,2} - 2w_{i,1} + 2w_{i,-1} - w_{i,-2} + \\
 & + (2 - \nu)(w_{i+1,1} - 2w_{i,1} + w_{i-1,1} - w_{i+1,-1} + 2w_{i,-1} - w_{i-1,-1}) = 0, \\
 & (w_{i,1} - 2w_{i,0} + 2w_{i,-1}) + \nu(w_{i+1,0} - 2w_{i,0} + 2w_{i-1,0}) = 0. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 w_{i,-1} &= -w_{i,1} + 2(1 + \nu)w_{i,0} - \nu(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}), \\
 w_{i,-2} &= w_{i,2} - 4(3 - \nu)w_{i,1} + 6(2 + 2\nu - \nu^2)w_{i,0} - \\
 & - 4(1 + 2\nu - \nu^2)(w_{i+1,0} + w_{i-1,0}) + 2(2 - \nu)(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}) + \\
 & + \nu(2 - \nu)(w_{i+2,0} + w_{i-2,0}). \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

5.1.7. Складання системи різницевих рівнянь

Розіб'ємо пластинку на $n \times n$ елементів зі стороною h , тобто введемо різницеву сітку розміром $n \times n$ (наприклад, на рис. 5.6 наведена сітка розміром 7×7).

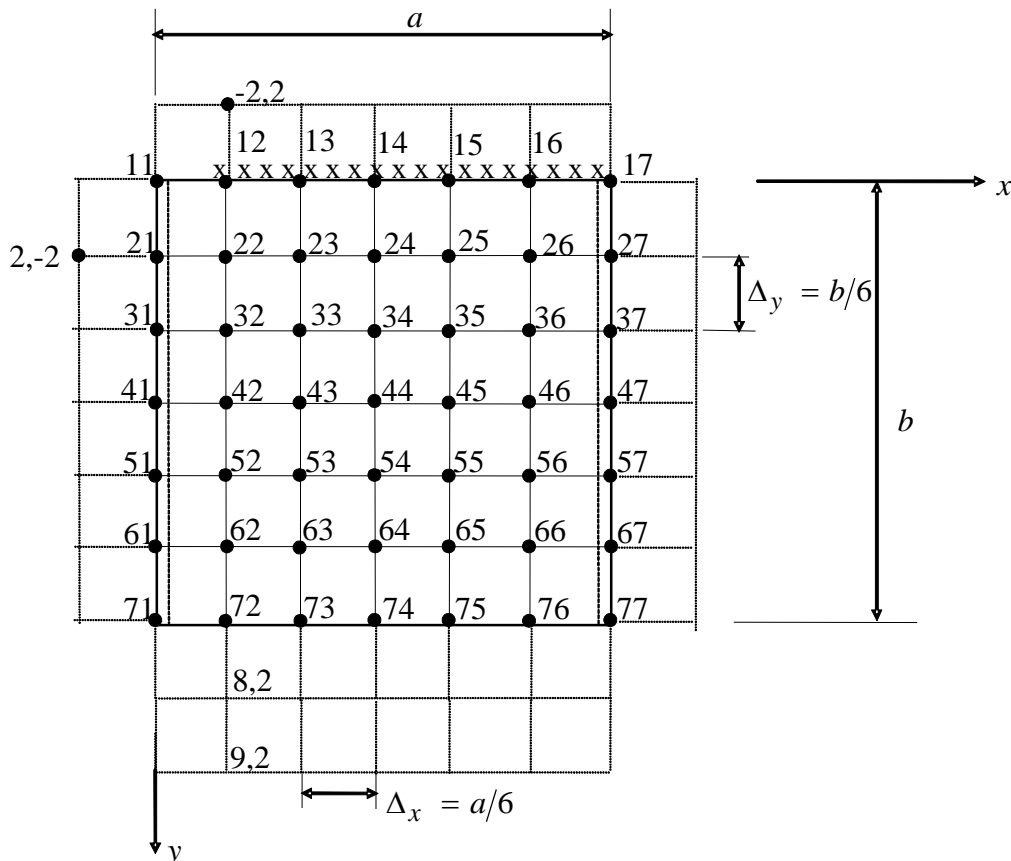


Рис. 5.6. Різницева сітка

Згідно з (5.1) різницеве рівняння у вузлах (i,j) , $i,j = 1, \dots, n$ запишеться таким чином:

$$\begin{aligned}
 & 20w_{ij} - 8(w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1}) + \\
 & + 2(w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\
 & + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} = \frac{q_{ij}}{D} h^2.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Додаткові рівняння записуються для законтурних вузлів ($i,j = -2,-3, n+1, n+2$) в залежності від виду закріплення краю пластинки у відповідності з (5.3), (5.4) або (5.7). Їх кількість у залежності від виду закріплення складає від $4(n-2)$ до $8(n-2)$, тобто кількість рівнянь може на $8(n-2)$ перевищувати кількість вузлів сітки. Для прикладу, для сітки розміром $n = 10 \times 10 = 100$ загальна кількість вузлів для вільних країв складає $10 \times 10 + 8(10-2) = 164$. Це означає, що необхідно розв'язати систему 164 рівнянь із 164 невідомими, тобто матриця системи має розмір 164×164 , що більше, ніж на 50% перевищує розмірність сітки. Робота з таким об'ємом пам'яті викликає значні труднощі при написанні програми і робить її незручною для читання.

Для зменшення розмірності системи доцільно вирази для граничних умов (5.3), (5.4) або (5.7) підставити в рівняння (5.9). При цьому розмірність матриці системи при будь-якому виді закріплення буде дорівнювати $n \times n$.

5.1.8. Приклади складання системи лінійних рівнянь

Наведено приклади складання системи лінійних рівнянь для пластинок з різними видами закріплення.

5.1.8.1. Система рівнянь для пластинки з жорстко закріпленим верхнім краєм, вільним нижнім і шарнірами по бічних сторонах

Схему пластинки наведено на рис. 5.6, $n = 7$.

На краях пластинки маємо:

– на лівому і правому краях відповідно до (5.3)

$$w_{i,1} = 0, \quad w_{i,-2} = -w_{i,2}, \quad i=1, \dots, 7,$$

$$w_{i,7} = 0, \quad w_{i,8} = -w_{i,6}, \quad i=1,\dots,7; \quad (5.10)$$

– на верхньому краї

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{-2,j} = w_{2,j}, \quad j=1,\dots,7; \quad (5.11)$$

– на нижньому краї

$$\begin{aligned} w_{n+1,j} &= -w_{n-1,j} + 2(1+\nu)w_{n,j} - \nu(w_{n,j+1} + w_{n,j-1}), \\ w_{n+2,j} &= w_{n-2,j} - 4(3-\nu)w_{n-1,j} + 6(2+2\nu-\nu^2)w_{n,j} - \\ &- 4(1+2\nu-\nu^2)(w_{n,j+1} + w_{n,j-1}) + 2(2-\nu)(w_{n-1,j+1} + w_{n-1,j-1}) + \\ &+ \nu(2-\nu)(w_{n,j+2} + w_{n,j-2}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Складаючи рівняння (5.9) у вузлах і підставляючи у нього вирази (5.10) – (5.12), одержимо систему лінійних рівнянь розмірністю 49×49 :

$$w_{1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$20w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$21w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$\begin{aligned} 21w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24}, \end{aligned}$$

$$21w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0,$$

$$w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$\begin{aligned} 20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + \\ + w_{53} + w_{35} = W_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + \\ + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + \\ + w_{55} + w_{33} = W_{35}, \end{aligned}$$

$$19w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36},$$

$$w_{37} = 0,$$

$$w_{41} = 0,$$

$$19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = \\ = W_{42},$$

$$20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + \\ + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43},$$

$$20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + \\ + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44},$$

$$20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + \\ + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45},$$

$$19w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = \\ = W_{46},$$

$$w_{47} = 0,$$

$$w_{51} = 0,$$

$$19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{72} + w_{32} + w_{54} = \\ = W_{52},$$

$$20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + \\ + w_{73} + w_{33} + w_{55} = W_{53},$$

$$20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + \\ + w_{74} + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54},$$

$$20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + \\ + w_{75} + w_{53} + w_{35} = W_{55},$$

$$19w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45} + w_{46}) + w_{76} + w_{54} + w_{36} = W_{56},$$

$$w_{57} = 0,$$

$$w_{61} = 0,$$

$$18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} + w_{72}[2(1+v) - 8] + w_{73}(2-v) = W_{62},$$

$$19w_{63} - 8(w_{62} + w_{53} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} + w_{73}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{72} + w_{74}) = W_{63},$$

$$19w_{64} - 8(w_{63} + w_{54} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{62} + w_{44} + w_{66} + w_{74}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{73} + w_{75}) = W_{64},$$

$$19w_{65} - 8(w_{64} + w_{55} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{63} + w_{45} + w_{75}[2(1+v) - 8] + (2-v)(w_{74} + w_{76}) = W_{65},$$

$$18w_{66} - 8(w_{65} + w_{56}) + 2w_{55} + w_{64} + w_{46} + w_{76}[2(1+v) - 8] + w_{75}(2-v) = W_{66},$$

$$w_{71} = 0,$$

$$(15 - 8v - 5v^2)w_{72} + 4(-2 + v + v^2)w_{73} + (1 - v^2)w_{74} + 2(2-v)w_{63} - 4(3-v)w_{62} + 2w_{52} = W_{72},$$

$$(16 - 8v - 6v^2)w_{73} + 4(-2 + v + v^2)(w_{72} + w_{74}) + (1 - v^2)w_{75} + 2(2-v)(w_{62} + w_{64}) - 4(3-v)w_{63} + 2w_{53} = W_{73},$$

$$(16 - 8v - 6v^2)w_{74} + 4(-2 + v + v^2)(w_{73} + w_{75}) + (1 - v^2)(w_{72} + w_{76}) + 2(2-v)(w_{63} + w_{65}) - 4(3-v)w_{64} + 2w_{54} = W_{74},$$

$$(16 - 8v - 6v^2)w_{75} + 4(-2 + v + v^2)(w_{76} + w_{74}) + (1 - v^2)w_{73} + 2(2-v)(w_{66} + w_{64}) - 4(3-v)w_{65} + 2w_{55} = W_{75},$$

$$(15 - 8v - 5v^2)w_{76} + 4(-2 + v + v^2)w_{75} + (1 - v^2)w_{74} + 2w_{56} - 4(3-v)w_{66} + 2(2-v)w_{65} = W_{76},$$

$$w_{77} = 0,$$

$$W_{ij} = \frac{q_{ij}}{D} h^2, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

5.1.8.2. Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням бічних і верхнього країв і вільним нижнім краєм

Схему пластинки наведено на рис. 5.7, $n = 7$

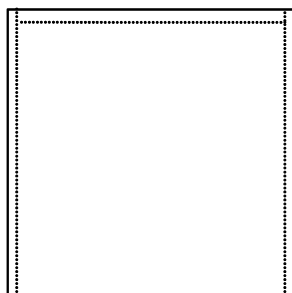


Рис. 5.7. Схема пластинки з шарнірним опиранням бічних і верхнього країв і вільним нижнім краєм

На краях пластинки маємо:

– на правому і лівому краях умови (5.10);

– на верхньому краї

$$w_{1,j} = 0, w_{-2,j} = w_{2,j}; \quad j=1,\dots,7;$$

– на нижньому краї умови (5.12).

Рівняння, записані для вузлів з номерами $i=3,\dots,7, j=1,\dots,7$, мають такий вигляд:

$$w_{1,j} = 0, j = 1,\dots,n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$18w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$19w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$19w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24},$$

$$19w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25}, \quad (5.13)$$

$$18w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0.$$

Рівняння, які залишились (тобто рівняння, записані для вузлів з номерами $i=3,\dots,7, j=1,\dots,7$), і праві частини W_{ij} мають такий саме вигляд, як і в попередньому випадку рівняння (5.13).

5.1.8.3. Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням бічних і нижнього країв і жорстко закріпленим верхнім краєм

Схему пластинки наведено на рис. 5.8, $n = 7$

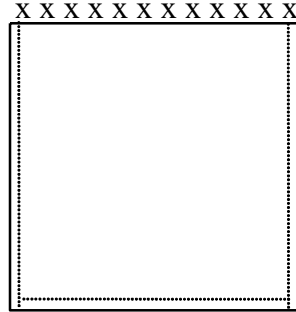


Рис. 5.8. Схема пластинки з шарнірним опиранням бічних і нижнього країв і жорстко закріпленим верхнім краєм

На краях пластинки маємо:

– на правому і лівому краях умови (5.10);

– на верхньому краї

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{-2,j} = w_{2,j}, j=1, \dots, 7;$$

– на нижньому краї

$$w_{7,j} = 0, \quad w_{8,j} = -w_{6,j}, j=1, \dots, 7.$$

Система лінійних рівнянь з правими частинами має вигляд:

$$w_{1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$20w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$21w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$21w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24},$$

$$21w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0,$$

$$w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$\begin{aligned}
& 20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + \\
& + w_{53} + w_{35} = W_{33}, \\
& 20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + \\
& + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34}, \\
& 20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + \\
& + w_{55} + w_{33} = W_{35}, \\
& 19w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36}, \\
& w_{37} = 0, \\
& w_{41} = 0, \\
& 19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = \\
& = W_{42}, \\
& 20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + \\
& + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43}, \\
& 20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + \\
& + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44}, \\
& 20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + \\
& + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45}, \\
& 19w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = \\
& = W_{46}, \\
& w_{47} = 0, \\
& w_{51} = 0, \\
& 19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{32} + w_{54} = W_{52}, \\
& 20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + \\
& + w_{33} + w_{55} = W_{53}, \\
& 20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + \\
& + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54}, \\
& 20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + \\
& + w_{53} + w_{35} = W_{55},
\end{aligned}$$

$$19w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45}) + w_{54} + w_{36} = W_{56},$$

$$w_{57} = 0, \quad (5.14)$$

$$w_{61} = 0,$$

$$18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} = W_{62},$$

$$19w_{63} - 8(w_{53} + w_{62} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} = W_{63},$$

$$19w_{64} - 8(w_{54} + w_{63} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{44} + w_{62} + w_{66} =$$

$$= W_{64},$$

$$19w_{65} - 8(w_{55} + w_{64} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{45} + w_{63} = W_{65},$$

$$18w_{66} - 8(w_{56} + w_{65}) + 2w_{55} + w_{46} + w_{64} = W_{66},$$

$$w_{67} = 0, \quad w_{7,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

5.1.8.4. Система рівнянь для пластинки з шарнірним опиранням лівого і верхнього країв, вільним нижнім краєм і жорстко закріпленим правим

Схему пластинки наведено на рис. 5.9, $n = 7$

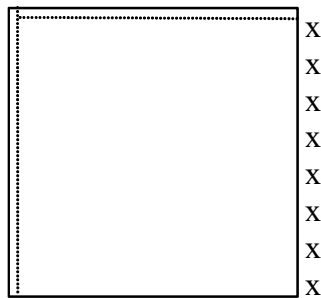


Рис. 5.9. Схеми опирання пластинки з шарнірним опиранням лівого і верхнього країв, вільним нижнім краєм і жорстко закріпленим правим

На краях пластинки маємо:

– на лівому краї (5.10)

$$w_{i,1} = 0, \quad w_{i,-2} = -w_{i,2}, \quad i=1, \dots, 7;$$

– на правому краї

$$w_{i,7} = 0, \quad w_{i,8} = w_{i,6}, \quad i=1, \dots, 7;$$

– на верхньому краї

$$w_{1,j} = 0, \quad w_{-2,j} = -w_{2,j}, \quad j=1, \dots, 7;$$

– на нижньому краї умова (5.12).

Система лінійних рівнянь розмірністю 49×49 має такий вигляд:

$$w_{1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$w_{21} = 0,$$

$$18w_{22} - 8(w_{32} + w_{23}) + 2w_{33} + w_{42} + w_{24} = W_{22},$$

$$19w_{23} - 8(w_{33} + w_{22} + w_{24}) + 2(w_{32} + w_{34}) + w_{43} + w_{25} = W_{23},$$

$$19w_{24} - 8(w_{34} + w_{23} + w_{25}) + 2(w_{33} + w_{35}) + w_{44} + w_{22} + w_{26} = \\ = W_{24},$$

$$19w_{25} - 8(w_{35} + w_{24} + w_{26}) + 2(w_{34} + w_{36}) + w_{45} + w_{23} = W_{25},$$

$$20w_{26} - 8(w_{36} + w_{25}) + 2w_{35} + w_{46} + w_{24} = W_{26},$$

$$w_{27} = 0, \quad w_{31} = 0,$$

$$19w_{32} - 8(w_{42} + w_{22} + w_{33}) + 2(w_{23} + w_{43}) + w_{52} + w_{34} = W_{32},$$

$$20w_{33} - 8(w_{43} + w_{32} + w_{23} + w_{34}) + 2(w_{42} + w_{22} + w_{24} + w_{44}) + \\ + w_{53} + w_{35} = W_{33},$$

$$20w_{34} - 8(w_{44} + w_{33} + w_{24} + w_{35}) + 2(w_{43} + w_{23} + w_{25} + w_{45}) + \\ + w_{54} + w_{32} + w_{36} = W_{34},$$

$$20w_{35} - 8(w_{45} + w_{34} + w_{25} + w_{36}) + 2(w_{44} + w_{24} + w_{26} + w_{46}) + \\ + w_{55} + w_{33} = W_{35},$$

$$21w_{36} - 8(w_{46} + w_{35} + w_{26}) + 2(w_{45} + w_{25}) + w_{56} + w_{34} = W_{36},$$

$$w_{37} = 0, \quad w_{41} = 0,$$

$$19w_{42} - 8(w_{52} + w_{32} + w_{43}) + 2(w_{33} + w_{53}) + w_{62} + w_{22} + w_{44} = \\ = W_{42},$$

$$20w_{43} - 8(w_{53} + w_{42} + w_{33} + w_{44}) + 2(w_{52} + w_{32} + w_{34} + w_{54}) + \\ + w_{63} + w_{23} + w_{45} = W_{43},$$

$$\begin{aligned}
& 20w_{44} - 8(w_{54} + w_{43} + w_{34} + w_{45}) + 2(w_{53} + w_{33} + w_{35} + w_{55}) + \\
& + w_{64} + w_{42} + w_{24} + w_{46} = W_{44}, \\
& 20w_{45} - 8(w_{55} + w_{44} + w_{35} + w_{46}) + 2(w_{54} + w_{34} + w_{36} + w_{56}) + \\
& + w_{65} + w_{43} + w_{25} = W_{45}, \\
& 21w_{46} - 8(w_{56} + w_{45} + w_{36}) + 2(w_{55} + w_{35}) + w_{66} + w_{44} + w_{26} = \\
& = W_{46}, \\
& w_{47} = 0, w_{51} = 0, \\
& 19w_{52} - 8(w_{62} + w_{42} + w_{53}) + 2(w_{43} + w_{63}) + w_{72} + w_{32} + w_{54} = \\
& = W_{52}, \\
& 20w_{53} - 8(w_{63} + w_{52} + w_{43} + w_{54}) + 2(w_{62} + w_{42} + w_{44} + w_{64}) + \\
& + w_{73} + w_{33} + w_{55} = W_{53}, \\
& 20w_{54} - 8(w_{64} + w_{53} + w_{44} + w_{55}) + 2(w_{63} + w_{43} + w_{45} + w_{65}) + \\
& + w_{74} + w_{52} + w_{34} + w_{56} = W_{54}, \\
& 20w_{55} - 8(w_{65} + w_{54} + w_{45} + w_{56}) + 2(w_{64} + w_{44} + w_{46} + w_{66}) + \\
& + w_{75} + w_{53} + w_{35} = W_{55}, \\
& 21w_{56} - 8(w_{66} + w_{55} + w_{46}) + 2(w_{65} + w_{45}) + w_{76} + w_{54} + w_{36} = \\
& = W_{56}, \\
& w_{57} = 0, w_{61} = 0, \\
& 18w_{62} - 8(w_{52} + w_{63}) + 2w_{53} + w_{42} + w_{64} + \\
& + w_{72}[2(1+\nu) - 8] + w_{73}(2 - \nu) = W_{62}, \\
& 19w_{63} - 8(w_{62} + w_{53} + w_{64}) + 2(w_{52} + w_{54}) + w_{43} + w_{65} + \\
& + w_{73}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{72} + w_{74}) = W_{63}, \\
& 19w_{64} - 8(w_{63} + w_{54} + w_{65}) + 2(w_{53} + w_{55}) + w_{62} + w_{44} + w_{66} + \\
& + w_{74}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{73} + w_{75}) = W_{64}, \\
& 19w_{65} - 8(w_{64} + w_{55} + w_{66}) + 2(w_{54} + w_{56}) + w_{63} + w_{45} + \\
& + w_{75}[2(1+\nu) - 8] + (2 - \nu)(w_{74} + w_{76}) = W_{65}, \\
& 20w_{66} - 8(w_{65} + w_{56}) + 2w_{55} + w_{64} + w_{46} + \\
& + w_{76}[2(1+\nu) - 8] + w_{75}(2 - \nu) = W_{66}, \\
& w_{71} = 0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
& (15 - 8v - 5v^2)w_{72} + 4(-2 + v + v^2)w_{73} + (1 - v^2)w_{74} + \\
& + 2(2 - v)w_{63} - 4(3 - v)w_{62} + 2w_{52} = W_{72}, \\
& (16 - 8v - 6v^2)w_{73} + 4(-2 + v + v^2)(w_{72} + w_{74}) + (1 - v^2)w_{75} + \\
& + 2(2 - v)(w_{62} + w_{64}) - 4(3 - v)w_{63} + 2w_{53} = W_{73}, \\
& (16 - 8v - 6v^2)w_{74} + 4(-2 + v + v^2)(w_{73} + w_{75}) + (1 - v^2)(w_{72} + \\
& + w_{76}) + 2(2 - v)(w_{63} + w_{65}) - 4(3 - v)w_{64} + 2w_{54} = W_{74}, \\
& (16 - 8v - 6v^2)w_{75} + 4(-2 + v + v^2)(w_{76} + w_{74}) + (1 - v^2)w_{73} + \\
& + 2(2 - v)(w_{66} + w_{64}) - 4(3 - v)w_{65} + 2w_{55} = W_{75}, \\
& (17 - 4v - 7v^2)w_{76} + 4(-2 + v + v^2)w_{75} + (1 - v^2)w_{74} + \\
& + 2w_{56} - 4(3 - v)w_{66} + 2(2 - v)w_{65} = W_{76}, \\
& w_{77} = 0.
\end{aligned}$$

5.2. Матричний метод переміщень і метод скінченних елементів стержневих систем

В основі метода скінченних елементів лежить дискретизація розв'язуваної задачі, яка здійснюється іншими способами, ніж в методі сіток (див. п. 5.1). Після того, як приблизно з початку 50-х років минулого сторіччя стали з'являтися швидкодіючі обчислювальні машини, почали розвиватися матричні методи в статистиці пружних систем для розрахунку складних конструкцій. Виникли різні обчислювальні методи для аналізу багаторазово статично невизначених систем. Аргіріс в особливості довів методи переміщень і сил в матричній формі до ефективних загальних обчислювальних методів розрахунку статичної і динаміки складних систем. Приблизно до того ж часу належить узагальнення цих методів завдяки ідеї розчленування суцільного середовища на кінцеву множину частин з наступним застосуванням до них обчислювальних матричних методів. В різних роботах уперше з'явилося поняття «скінченного» елемента і пішло застосування методу спочатку до плоских задач теорії пружності з використанням трикутних або прямокутних скінченних елементів.

Звичайно метод скінченних елементів уводиться через енергію деформації і інтерполяційні функції. Однак простіше одержати рівняння МСЕ через матричний метод переміщень. Це і буде виконано в даній книзі.

5.2.1. Метод переміщень у матричній формі

5.2.1.1. Загальні положення і передумови

Прийmemo, як і в класичному методі переміщень, такі гіпотези: деформації розтягання-стискання і зсуву малі в порівнянні з деформаціями згину і ними можна знехтувати, тобто вважати, що переміщення вузлів відбуваються тільки за рахунок згину стержнів; переміщення системи малі, тому нехтуємо зближенням кінців стержнів при згині, тобто довжина стержня залишається рівною довжині хорди, що з'єднує його кінці після скривлення; у шарнірно-стержневих системах (фермах) деформації розтягання-стискання урахуються як єдині.

Розглянемо раму (рис. 5.10).

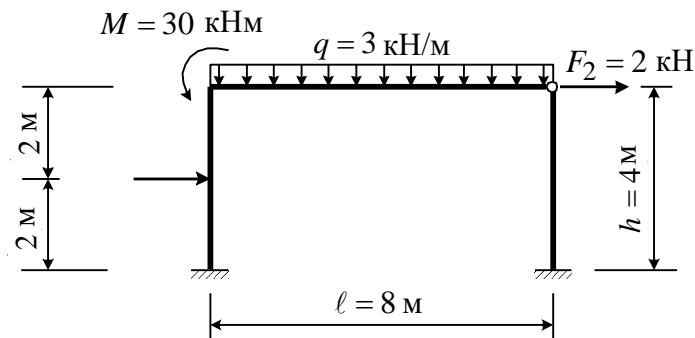


Рис. 5.10. Схема заданої рами

У рамі буде два невідомі – повороти жорсткого вузла Z_1 і лінійне переміщення обох вузлів по горизонталі Z_2 (рис. 5.11).

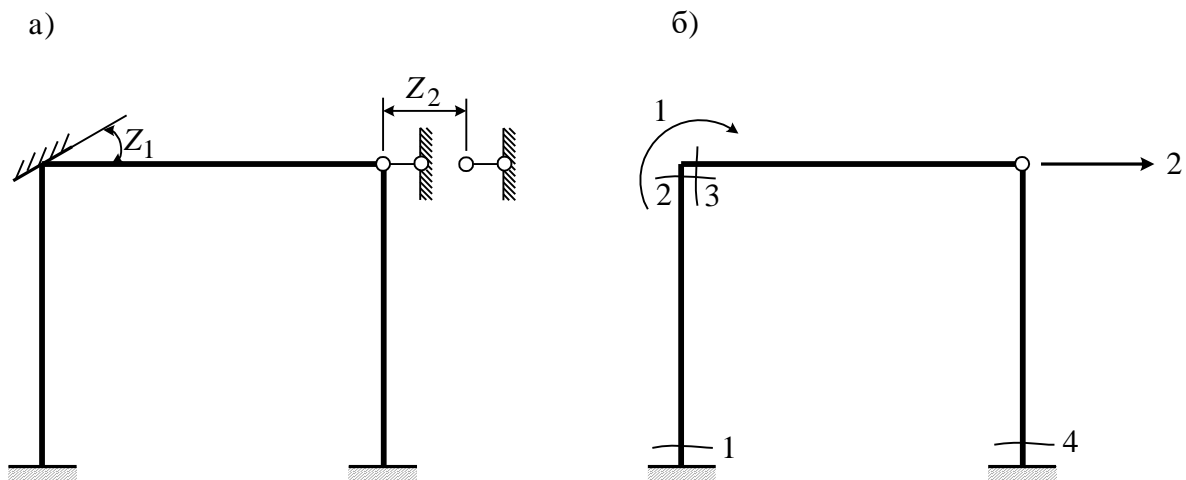


Рис. 5.11. Основна система методу переміщень (а), напрямки переміщень, переріз з невідомими зусиллями (моментами) $S_1 - S_4$ (б)

На рис. 5.11, б зв'язки, що закріплюють вузли від можливих переміщень, умовно не показані.

Побудуємо вантажну епюру методу переміщень (рис. 5.12).

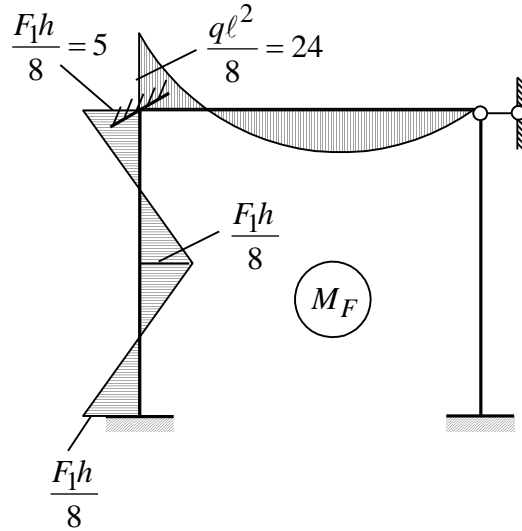


Рис. 5.12. Вантажна епюра M_F

Вирізуємо жорсткий вузол і знаходимо сумарний момент у жорсткому вузлі (рис. 5.13).

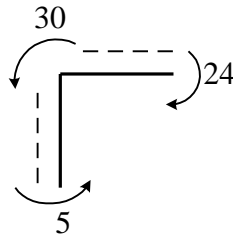


Рис. 5.13. До визначення сумарного моменту у жорсткому вузлі

Сумарний момент у жорсткому вузлі дорівнює

$$P_1 = 24 - 5 - 30 = -11 \text{ кНм.}$$

Щоб знайти сумарну силу в напрямку z_2 , розглянемо рівновагу ригеля, двома перерізами відділеного від рами (рис. 5.14).

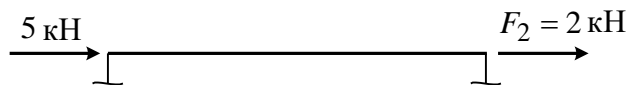


Рис. 5.14. До визначення сумарної сили в напрямку z_2

Тоді сумарна сила в напрямку z_2 дорівнює

$$P_2 = 2 + 5 = 7 \text{ кН.}$$

Тепер вектор зовнішніх сил буде мати вигляд

$$P = \begin{bmatrix} -11 & 7 \end{bmatrix}^T.$$

Розрахункова схема рами, що відповідає даному вектору, показана на рис. 5.15.

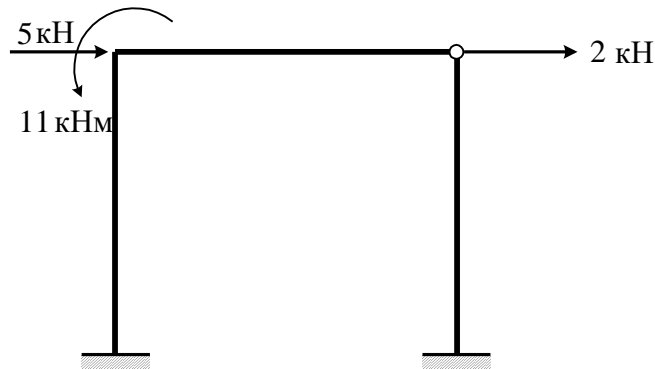


Рис. 5.15. Розрахункова схема рами

Зазначимо, що вертикальні реакції від рівномірно-розподіленого навантаження не дають складових у вектор (5.15).

Щоб записати вектор вантажної епюри (рис. 5.12), установимо правило знаків. Умовимося додатними моментами вважати моменти, що обертають елемент за годинниковою стрілкою (рис. 5.16).

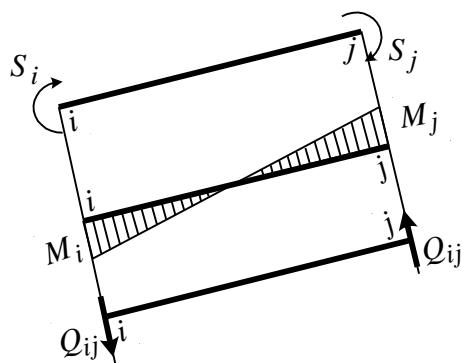


Рис. 5.16. Правило знаків

У цьому випадку в стержні виникає від'ємна поперечна сила Q_{ij} , що обертає елемент проти годинникової стрілки (рис. 5.16),

$$Q_{ij} = \frac{-M_j - M_i}{\ell} = -\frac{M_i + M_j}{\ell}.$$

Вектор вантажної епюри (рис. 5.12) запишеться в такий спосіб:

$$S_0 = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -24 & 0 \end{vmatrix}^T. \quad (5.16)$$

5.2.1.2. Рівняння рівноваги. Статична матриця

Напрямок зовнішніх сил відповідає напрямку, обраному в розрахунковій схемі (рис. 5.15), напрямок внутрішніх сил отримано відповідно до правила знаків (рис. 5.16).

Додатні моменти обертають стержні за годинниковою стрілкою, отже, відповідно до третього закону Ньютона моменти S_2 і S_3 обертають вузол проти годинникової стрілки (рис. 5.17).

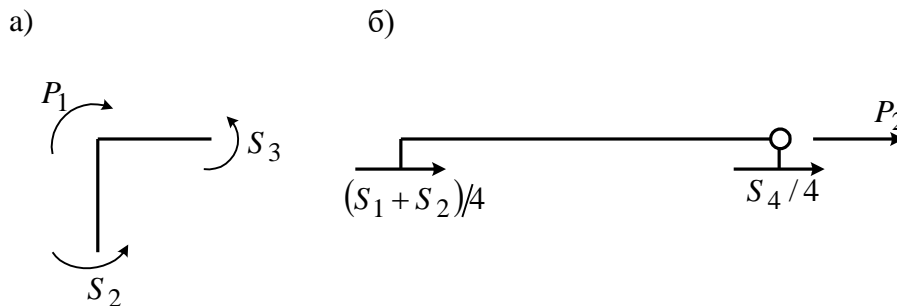


Рис. 5.17. До складання рівнянь рівноваги

Поперечні сили в стержнях завжди від'ємні, тому вузли рами вони обертають проти годинникової стрілки (рис. 5.17, б).

Рівняння рівноваги жорсткого вузла і верхньої частини рами (рис. 5.11) мають вигляд

$$\begin{aligned} P_1 &= S_2 + S_3, \\ P_2 &= -S_1/4 - S_2/4 - S_4/4. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Запишемо систему рівнянь (5.17) у матричній формі:

$$P = A \cdot S, \quad (5.18)$$

де

$$P = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \end{vmatrix}^T, \quad S = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}^T, \quad (5.19)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}. \quad (5.20)$$

Покажемо, що запис рівнянь (4.150) у матричній формі відповідає дійсності:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix},$$

звідси $P_1 = 0 \cdot S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4,$

$$P_2 = -\frac{S_1}{4} - \frac{S_2}{4} + 0 - \frac{S_4}{4}.$$

Статична матриця A (5.20) має розмір $m \cdot n$, де m – число рядків, яке дорівнює числу можливих переміщень вузлів; n – число стовпців, що дорівнює числу внутрішніх зусиль.

При $m > n$ – система змінювана ($W = m - n > 0$).

При $m = n$ – система незмінювана і статично визначна, якщо $Det A \neq 0$ (при $Det A = 0$ – система миттєво змінювана).

При $m < n$ – система незмінювана і статично невизначна (число зайвих зв'язків $L = n - m$).

5.2.1.3. Принцип подвійності статичних і геометричних рівнянь

Для доведення цього принципу використаємо принцип можливих переміщень Лагранжа, відповідно до якого для системи, що перебуває в рівновазі, сумарна робота зовнішніх і внутрішніх сил на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

Робота зовнішніх сил $P = AS$ на можливих переміщеннях δZ визначається виразом

$$V_P = P^T \delta Z = (AS)^T \delta Z = A^T S^T \delta Z. \quad (5.21)$$

Робота внутрішніх сил S на можливих деформаціях $\delta e = \delta(BZ) = B\delta Z$ запишеться як

$$V_S = -S^T \delta e = -S^T B\delta Z. \quad (5.22)$$

Тут знак мінус показує, що робота внутрішніх сил завжди від'ємна, тому що внутрішні сили перешкоджають деформаціям. Відповідно до принципу можливих переміщень

$$V_P + V_S = 0. \quad (5.23)$$

Підставляємо вирази (5.21), (5.22) в (5.23). У результаті одержуємо

$$S^T A^T \delta Z = S^T B \delta Z .$$

Ця рівність можлива за умови

$$B = A^T . \quad (5.24)$$

Відповідно до доведеного принципу рівняння нерозривності деформацій для будь-якої пружної системи можуть бути отримані з рівнянь рівноваги простою заміною рядків стовпцями матриці коефіцієнтів рівнянь рівноваги (5.20) і навпаки:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} . \quad (5.25)$$

Матриця деформацій (5.25) виражає деформації e_i елементів стержневої системи через переміщення Z_k її вузлів. Її розмір $m \cdot n$, де m – число рядків, що дорівнює числу деформацій e_i і дорівнює числу невідомих зусиль S_i , n – число стовпців, що дорівнює числу можливих вузлових переміщень Z_k ,

$$e = BZ = A^T Z , \quad (5.26)$$

де $e = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)^T$ – вектор деформацій елементів;

$Z = (Z_1 Z_2)^T$ – вектор переміщень вузлів.

5.2.1.4. Фізичні рівняння. Матриця жорсткості системи

Встановимо зв'язок між зусиллями і деформаціями системи. Для n -го елемента системи цей зв'язок на підставі закону Гука можна подати як

$$S_n = k_n e_n , \quad (5.27)$$

де S_n і e_n – вектори зусиль і деформацій в елементі;

k_n – матриця жорсткості елемента.

Покажемо, як одержати матрицю жорсткості типових стержневих елементів на площині.

а) шарнірно-стержневий елемент (рис. 5.18).

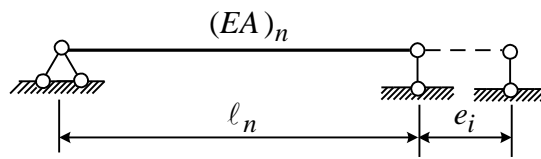


Рис. 5.18. Шарнірно-стержневий елемент

Відповідно до закону Гука для осового розтягання-стискання подовження елемента пов'язане з осовою силою формулами

$$e_i = \frac{S_i l_n}{(EA)_n} \quad \text{або} \quad S_i = \left(\frac{EA}{l} \right)_n e_i,$$

і отже,

$$k_n = \left(\frac{EA}{l} \right)_n ; \quad (5.28)$$

б) комбінований балковий елемент із защемленням і шарніром на кінцях (рис. 5.19).

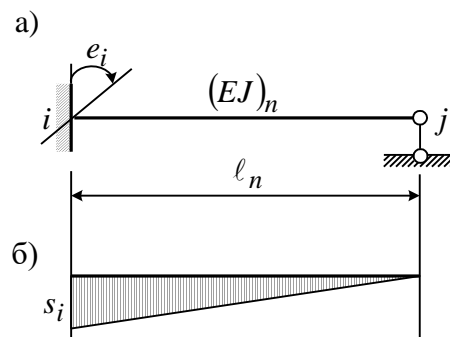


Рис. 5.19. Комбінований балковий елемент (а), епюра моментів від повороту защемлення (б)

Як відомо, ордината епюри моментів дорівнює $S_i = 3 \left(\frac{EJ}{l} \right)_n e_i$, і матриця жорсткості елемента має вигляд

$$k_n = 3 \left(\frac{EJ}{l} \right)_n ; \quad (5.29)$$

в) балковий елемент із двома защемленнями по кінцях (рис. 5.20).

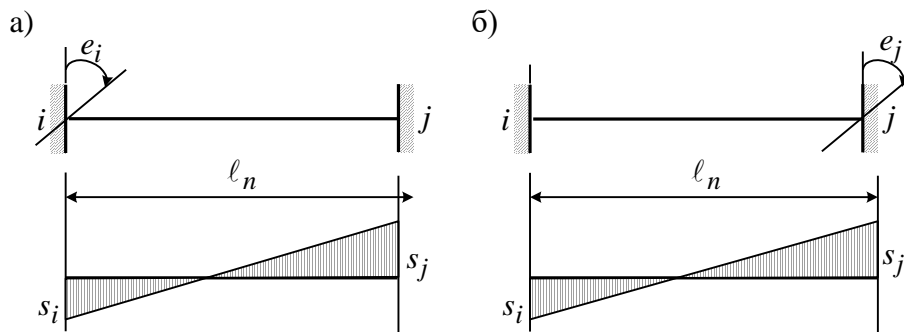


Рис. 5.20. Балковий елемент із двома защемленнями на кінцях

Опорні моменти S_i і S_j при повороті перерізу i на e_i і перерізу j на e_j можна одержати підсумовуванням епюр моментів, отриманих при повороті спочатку вузла i на e_i (рис. 5.20, а), потім вузла j на кут e_j (рис. 5.20, б)

$$S_i = \left(\frac{4EJ}{\ell}\right)_n e_i + \left(\frac{2EJ}{\ell}\right)_n e_j,$$

$$S_j = \left(\frac{2EJ}{\ell}\right)_n e_i + \left(\frac{4EJ}{\ell}\right)_n e_j.$$

Тоді складові формули (5.27)

$$S_n = k_n e_n$$

будуть:

$$S_n = (S_i \ S_j)^T \text{ – вектор зусиль елемента "n";}$$

$$e_n = (e_i \ e_j)^T \text{ – вектор деформацій елемента "n";}$$

$$k_n = \left(\frac{EJ}{\ell}\right)_n \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ – матриця жорсткості елемента.} \quad (5.30)$$

Для всіх елементів системи, що містить m шуканих внутрішніх зусиль, зв'язок між зусиллями і деформаціями запишемо як

$$S = k e, \quad (5.31)$$

де $S = [S_1, S_2 \dots S_m]^T$ – вектор зусиль у системі;

$e = [e_1, e_2 \dots e_n]^T$ – вектор деформацій системи;

k – матриця жорсткості всіх елементів системи,

$$k = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & K_e \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Матриця k – квадратна, симетрична щодо головної діагоналі, порядок її дорівнює числу m – числу шуканих зусиль, e – кількість елементів. Для розглянутої рами (рис. 5.10, 5.11) матриці жорсткості окремих стержнів мають вигляд:

$$k_{1,2} = \frac{EJ}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4},$$

$$k_3 = \frac{4EJ}{8} \cdot 3 = 6i, \quad k_4 = \frac{EJ}{4} \cdot 3 = 3i,$$

а матриця жорсткості всіх елементів буде такою:

$$k = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2.1.5. Розв'язна система рівнянь

Запишемо ще раз три групи рівнянь, що відображають три сторони задачі розрахунку пружних систем: статичну, геометричну і фізичну.

1. Рівняння рівноваги (5.18)

$$P = A \cdot S.$$

2. Рівняння нерозривності деформацій (5.26)

$$e = BZ = A^T Z.$$

3. Узагальнений закон Гука для всієї системи (5.31)

$$S = ke.$$

Якщо матриця A (5.20) квадратна і $\text{Det } A \neq 0$, то задана система статично визначна, і можна знайти внутрішні зусилля

$$S = A^{-1} P.$$

Після цього розв'язання задачі можна завершити. Якщо матриця A (5.20) прямокутна, то при $n > t$ система статично невизначна і, крім рівнянь рівноваги (5.18), необхідно розглянути геометричні (5.26) і фізичні (5.31) рівняння. У системі (5.18), (5.26), (5.31) невідомими є вектори зусиль S , деформацій e , переміщень Z . Для перевірки міцності і жорсткості необхідно і достатньо знати зусилля і переміщення. Тому вектор "e" виключимо, підставивши (5.26) в (5.31):

$$S = kA^T Z. \quad (5.33)$$

Формула (5.33) дозволяє знайти зусилля S за відомими переміщеннями Z . Підставляючи (5.33) в (5.18), одержимо

$$P = AkA^T Z = KZ, \quad (5.34)$$

де $K = AkA^T$ називається матрицею жорсткості всієї конструкції. Вона встановлює зв'язок між зовнішніми вузловими силами і переміщеннями вузлів. Матриця K – квадратна, симетрична, має порядок t , де t – число можливих переміщень вузлів. Розв'язання рівняння (5.34) дає

$$Z = K^{-1}P, \quad (5.35)$$

де K^{-1} – зворотна матриця, що завжди існує для геометрично незмінних систем. Розв'язок (5.35) має формальний сенс, тому що одержання зворотної матриці досить трудомістка процедура. Тому на практиці і у всіх обчислювальних комплексах вектор Z одержують безпосереднім розв'язанням системи розв'язних рівнянь (5.34). Після визначення вектора Z зусилля визначається за (5.33). У методі переміщень необхідною і достатньою перевіркою правильності розв'язку є статична перевірка, тобто перевірка рівноваги вузлів системи. Матричний аналог статичної перевірки – рівняння рівноваги (5.18), тобто отриманий вектор S треба помножити ліворуч на статичну матрицю A і порівняти результат з вектором вузлових сил.

При розрахунку на позавузлове навантаження до розрахункових зусиль треба додати зусилля від позавузлового навантаження S_0 згідно (5.16):

$$S_{ok} = kA^T Z + S_0. \quad (5.36)$$

Матричне рівняння (5.34) еквівалентне системі канонічних рівнянь методу переміщень: кожен елемент k_{ij} матриці жорсткості k (5.32) дорівнює коефіцієнту r_{ij} , що є реактивним зусиллям у зв'язку за напрямком переміщення Z_i від переміщення $Z_j = 1$. Порівняємо формулу (5.36) з розв'язною формулою класичного методу переміщень

$$M_{ok} = \sum M_i Z_i + M_P. \quad (5.37)$$

Очевидно, що формули (5.36) і (5.37) еквівалентні з точністю до позначень, якщо під S розуміти згинальні моменти в рамах. Крім того, очевидно, що матриця $K A^T$ у формулі (5.36) має сенс матриці одиничних зусиль.

Наприкінці цього пункту викладемо порядок розрахунку за ММП.

1. Вибираємо основну систему методу переміщень (рис. 5.11, а). Будуємо розрахункову схему (рис. 5.15), визначаючи напрямки невідомих переміщень Z (рис. 5.11) і шуканих зусиль S (рис. 5.17).

2. У випадку позавузлого навантаження будуємо епюру M_F (рис. 5.12), приводимо навантаження до вузлового і будуємо вектори P (5.15), S_0 (5.16).

3. Будуємо статичну матрицю A (5.20) і матрицю жорсткості всіх елементів (5.32).

4. Виконуємо матричні операції $k A^T$, $K = A k A^T$.

5. Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги (5.34), знаходимо вектор Z .

6. Визначаємо внутрішні зусилля (5.33).

7. Виконуємо матричну перевірку $AS = P$ (5.18).

8. Остаточне значення зусиль визначаємо за формулою (5.36).

9. За знайденими зусиллями будуємо відповідні епюри.

Приклад. Розрахувати раму, наведену на рис. 5.10. Вектор зовнішніх сил – (5.15), (рис. 5.15). Вектор вантажної епюри – (5.16), (рис. 5.12). Статична матриця – (5.20). Матриця жорсткості (див. п. 5.2.1.5)

$$k = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad i = \frac{EJ}{4}.$$

Виконуємо матричні операції

$$k A^T = i \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix},$$

$$K = A \cdot k A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix} \times i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 10 & -1,5 \\ -1,5 & 0,9375 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо рівняння

$$KZ = P, \text{ або}$$

$$10Z_1 - 1,5Z_2 = -11/i$$

$$-1,5Z_1 + 0,9375Z_2 = 7/i.$$

Звідси $Z_1 = 0,0263/i$, $Z_2 = 7,5088/i$.

Визначаємо внутрішні зусилля

$$S = k A^T Z = i \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ 4 & -1,5 \\ 6 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0263 \\ 7,5088 \end{pmatrix} \frac{1}{i} = \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,158 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix}.$$

Здійснюємо матричну перевірку

$$A S \cong P,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11,2106 \\ -11,1580 \\ 0,1578 \\ -5,6316 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,002 \\ 7,00005 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо практично точно вектор P (5.15). Остаточні значення зусиль визначаємо за формулою

$$S_{ok} = S + S_0 = (-11,2106 \quad -11,1580 \quad 0,1578 \quad -5,6316)^T + (-5 \quad 5 \quad -24 \quad 0)^T = (-16,21 \quad -6,16 \quad -23,84 \quad -5,63)^T.$$

За знайденими значеннями будуємо остаточну епюру.

5.2.2. Загальні положення методу скінченних елементів

Матричний метод переміщень дозволяє скласти розрахунковий алгоритм аж до одержання зусиль у всіх елементах розглянутої системи і доручити всі обчислення ЕОМ. Але для цього спочатку необхідно вручну скласти вихідні матриці A (5.20), K (5.32) і вектори P (5.18), S_0 (5.16).

У методі скінченних елементів також одержується система рівнянь $KZ = P$, але матриця жорсткості K обчислюється не за відомою формулою

$$K = A k A^T,$$

а шляхом підсумовування матриць жорсткості окремих елементів K_9 , тобто

$$K = \sum_{\vartheta=1}^n K_{\vartheta},$$

де $K_{\vartheta} = \begin{pmatrix} A & k & A^T \end{pmatrix}$, а після визначення переміщень Z зусилля обчислюються поелементно за формулою

$$S_{\vartheta} = \begin{pmatrix} k & A^T \end{pmatrix}_{\vartheta} Z_{\vartheta},$$

де вектор зусиль S_{ϑ} , матриця зусиль $\begin{pmatrix} k & A^T \end{pmatrix}_{\vartheta}$ і вектор переміщень Z_{ϑ} відносяться до елемента. Такий підхід дозволяє один раз одержати матриці жорсткості типових елементів, довільно розташованих у просторі, скласти алгоритм розрахунку і програму, за якою ЕОМ виконає всю роботу з обчислення елементів матриці K_{ϑ} , їх підсумовування, тобто зі складання ансамблю елементів. Назва методу відбиває його головну ідею – подання конструкції як сукупності окремих скінченних елементів, з'єднаних між собою у вузлах, у яких прикладені зовнішні сили.

На площині типові скінченні елементи можуть бути тільки трьох типів:

- шарнірно-стержневий елемент;
- балковий жорстко закріплений елемент;
- балковий комбінований елемент.

Будь-яку найскладнішу конструкцію на площині можна подати як сукупність названих елементів. Отже, задача полягає в побудові матриці жорсткості K_{ϑ} для трьох типових елементів.

Відзначимо одну принципову особливість. У ММП (матричний метод переміщень) рамних систем, як і у методі переміщень, осьовими деформаціями стержнів нехтують. В основній системі закріплюють вузли від поворотів і вводять зв'язки, що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів відповідної шарнірної схеми. У МСЕ цього зробити принципово неможливо, тому що при довільному переміщенні кінців балкового елемента обов'язково виникають осьові деформації. Отже, в основній системі МСЕ слід закріплювати кожен вузол як від кутових, так і від лінійних переміщень, відповідно збільшується число невідомих переміщень. Тому результати розрахунку за ММП і МСЕ в загальному випадку не повинні збігатися, хоча для реальних конструкцій, що складаються з елементів з великою осьовою жорсткістю, і повинні бути близькі.

При побудові матриць жорсткості $K_{\vartheta} = \begin{pmatrix} A & k & A^T \end{pmatrix}$ стержневих елементів у МСЕ, як і в ММП, задовольняються рівняння рівноваги (5.18), фізичні рівняння (5.31), рівняння нерозривності (5.26), тому переміщення вузлів системи, знайдені з системи рівнянь $KZ = P$, будуть точно

відбивати поле переміщень. Так само знаходяться деформації і зусилля в елементах. Отже, МСЕ є точним методом розрахунку стержневих систем, природно, у межах точності гіпотез, що лежать в основі розрахунку стержневих систем.

Такий самий шлях розв'язання в МСЕ для систем із пластин, оболонки, об'ємних елементів. Скінченними елементами для таких систем служать плоскі трикутні, прямокутні, ізопараметричні (із криволінійними краями) елементи або об'ємні – тетраедри, паралелепіпеди з різним числом вузлових точок.

При обчисленні матриць жорсткості континуальних елементів не вдається одержати точні розв'язки, тому МСЕ для континуальних систем є наближеним методом. Підвищення точності розв'язання при розрахунку континуальних систем досягається за рахунок більш дрібного розбиття конструкції на елементи або за рахунок застосування елементів більш високої точності.

Приведемо порівняльну таблицю алгоритмів ММП і МСЕ (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Порівняння алгоритмів ММП і МСЕ

ММП	МСЕ
1. Будуються вручну вихідні матриці A (5.20), k (5.32), вектори P (5.15), S_0 (5.16)	1. Вводяться в машину координати вузлів X_i , Y_i . Задаються елементи відповідними вузлами і жорсткостями A, E , зовнішні впливи (навантаження, температурні, осідання опор)
2. Обчислюється матриця зусиль $k A^T$, матриця жорсткості $K = A k A^T$ конструкції	2. Машина за стандартним алгоритмом обчислює матриці зусиль $(k A^T)_e$, матриці жорсткості всіх елементів $K_e (A k A^T)$ і записує їх на жорсткий диск комп'ютера
3. Розв'язується система рівнянь $KZ = P$, знаходиться вектор Z	3. Складається матриця жорсткості конструкції $K = \sum_{e=1}^n K_e$
4. Визначаються розрахункові зусилля $S = k A^T Z$	4. Розв'язується система $KZ = P$
5. Додаються зусилля від позавузлового навантаження $S_{ok} = S + S_0$	5. Знаходяться зусилля у всіх елементах $S_e = (k A^T)_e Z_e$

6. Додаються зусилля від позавузлового навантаження $S_{\varepsilon,ok} = S_{\varepsilon} + S_{o,\varepsilon}$
--

Незважаючи на зовнішню схожість алгоритмів розрахунку, методи відрізняються не тільки способом розрахунку – вручну або на машині. Головна відмінність – у ММП вихідні матриці доводиться будувати вручну для кожної нової конструкції, у МСЕ – глобальна матриця жорсткості і конструкції знаходиться простим підсумовуванням за певним правилом матриць жорсткості всіх елементів, обчислених за стандартними алгоритмами, закладеними у машині.

5.2.2.1. Підготовка розрахунку. Введення вихідних даних

Потрібно розрахувати довільну плоску стержневу конструкцію на дію силових навантажень, теплового впливу, осідання опор. Введемо послідовно всі вузли конструкції за їхніми координатами: вузлами будемо вважати опори, точки перелому стержнів, шарніри, точки східчастої зміни жорсткості, точки прикладання сил або зосереджених моментів. Координати вузлів зчитуються з вузлів растрової сітки або задаються з екрана.

Введемо елементи за початковим вузлом i і за кінцевим вузлом j , попередньо призначаючи його жорсткісні характеристики – модуль пружності E , площа поперечного перерізу A , момент інерції J . Зазначимо, що балкові елементи задаються вузлами i, j, k , де третій вузол k визначає площину елемента в просторі. Єдина умова – вузол k не повинен лежати по лінії $i-j$.

Програма відразу визначає його геометричні характеристики:

$$\text{довжина } \ell = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2};$$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta Y}{\ell}, \quad \cos \alpha = \frac{\Delta X}{\ell};$$

$$\Delta X = X_j - X_i, \quad \Delta Y = Y_j - Y_i.$$

Тут α – кут нахилу елемента до горизонту.

Вводимо вузлові навантаження – сили і зосереджені моменти, а також позавузлове навантаження – рівномірно розподілене навантаження, що діє:

q_1 – уздовж стержня від вузла i до вузла j ;

q_2 – у поперечному напрямку в площині елемента;

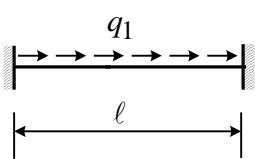

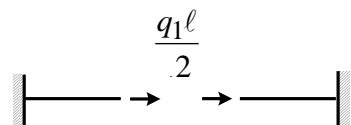
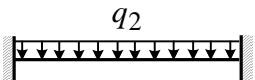
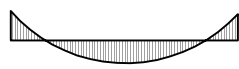
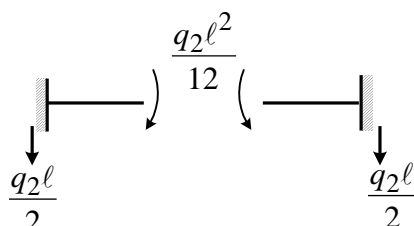
q_3 – у поперечному напрямку із площини елемента.

5.2.2.2. Силовий вплив

Розрахункова схема елемента, епюра зусиль і вузлове навантаження наведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Епюри зусиль і вузлові навантаження при силових впливах

Розрахункова схема	Епюра S_0	Вузлове навантаження
		
		

5.2.2.3. Тепловий вплив

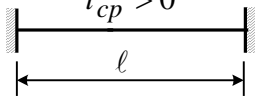
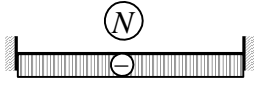
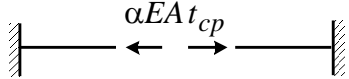
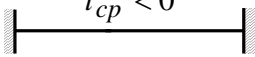
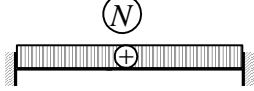
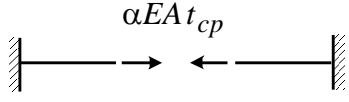
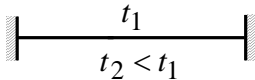

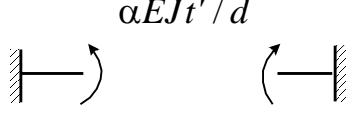
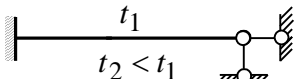
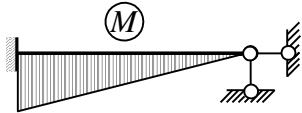
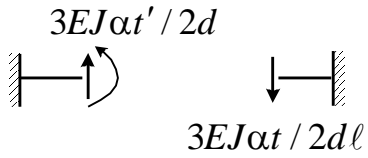
При зміні температури крайніх волокон стержневого елемента товщиною d на t_1 і $t_2 < t_1$ розкладемо, як звичайно, тепловий вплив на дві складові: перепад температур $t' = \Delta t = t_1 - t_2$ і рівномірне нагрівання (охолодження) всіх волокон $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$. Від рівномірного нагрівання на t_{cp} стержень довжиною l повинен був би подовжитися на $\Delta l = \alpha t_{cp} l$, де α – коефіцієнт лінійного розширення. Оскільки в основній системі МСЕ всі вузли закріплені від переміщень як кутових, так і лінійних, стержень виявиться стиснутим силою N , укорочення від якої дорівнює Δl , тобто

$$N = \frac{EA}{l} \Delta l = \frac{EA}{l} \alpha t_{cp} l = \alpha EA t_{cp}.$$

При рівномірному охолодженні, тобто при $t_{cp} < 0$, стержень буде розтягнутий такою самою силою $N = \alpha EA t_{cp}$. У табл. 5.3 показані розрахункові схеми, а також епюри S_0 поздовжніх сил і вузлові навантаження від рівномірного нагрівання при $t_{cp} > 0$ і від рівномірного охолодження при $t_{cp} < 0$.

Таблиця 5.3

Епюри зусиль і вузлові навантаження при впливі температури

Розрахункова схема	Епюра S_0	Вузлове навантаження
а) $t_{cp} > 0$ 		
б) $t_{cp} < 0$ 		
в) t_1 $t_2 < t_1$ 		
г) t_1 $t_2 < t_1$ 		

Від перепаду температур Δt у стержнях виникнуть згинальні моменти, при цьому розтягнутими будуть завжди менш нагріті волокна. У табл. 5.3 на схемах в) і г) показані епюри моментів і вузлові навантаження в балковому і комбінованому елементах висотою перерізу d від перепаду температур Δt .

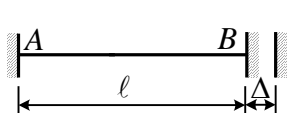
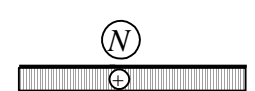
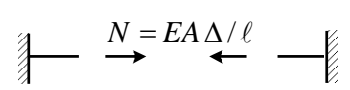

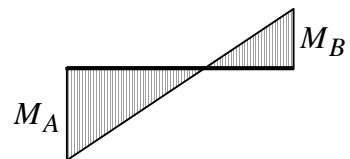
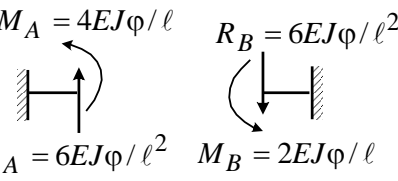
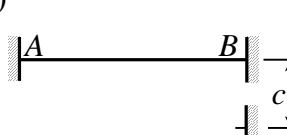
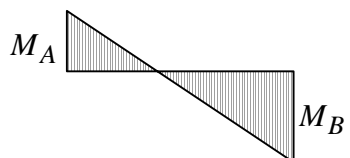
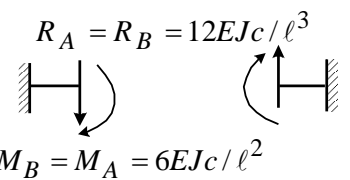
5.2.2.4. Осідання опор

При заданому осіданні опор всі елементи, прикріплені до них, одержують відповідні деформації, у них виникають зусилля, тому що в основній системі МСЕ всі вузли закріплені від переміщень. Так, від

заданого лінійного переміщення Δ однієї з опор у напрямку осі будь-якого стержня він подовжиться (укоротиться) на таку саму величину Δ , що викличе в ньому розтягуючу (стискаючу) поздовжню силу $N = EA \Delta / \ell$ і відповідні опорні реакції на кінцях. У табл. 5.4 наведені епюри поздовжніх зусиль S_0 і відповідні вузлові навантаження, що виникають у стержневих елементах будь-якого типу від переміщення однієї з опор уздовж осі стержня на Δ .

Таблиця 5.4

Епюри зусиль і вузлові навантаження при осіданні опор

Розрахункова схема	Епюра S_0	Вузлове навантаження
<p>а)</p> 		 $N = EA \Delta / \ell$
<p>б)</p> 		 $M_A = 4EJ\varphi / \ell \quad R_B = 6EJ\varphi / \ell^2$ $R_A = 6EJ\varphi / \ell^2 \quad M_B = 2EJ\varphi / \ell$
<p>в)</p> 		 $R_A = R_B = 12EJc / \ell^3$ $M_B = M_A = 6EJc / \ell^2$

На схемах б), в) у табл. 5.4 показані епюри моментів і відповідні вузлові навантаження в балкових елементах при повороті опорного перерізу на кут φ і від лінійного зсуву «с» у напрямку нормалі до осі стержня.

5.2.2.5. Матриці жорсткості типових стержневих елементів

Побудова матриць жорсткості K_9 типового елемента є центральною задачею методу скінченних елементів. Ця матриця встановлює зв'язок між вузловими переміщеннями і силами. Використаємо формулу матричного методу переміщень (5.34)

$$K_9 = (A k A^T)_9$$

для окремого елемента, розглянутого як ціла конструкція. Тут матриці A і k – статична матриця (див. п. 5.2.1.2) і матриця жорсткості елемента (див. п. 5.2.1.4).

Розглянемо виведення матриць жорсткості типових стержневих елементів.

Шарнірно-стержневий елемент

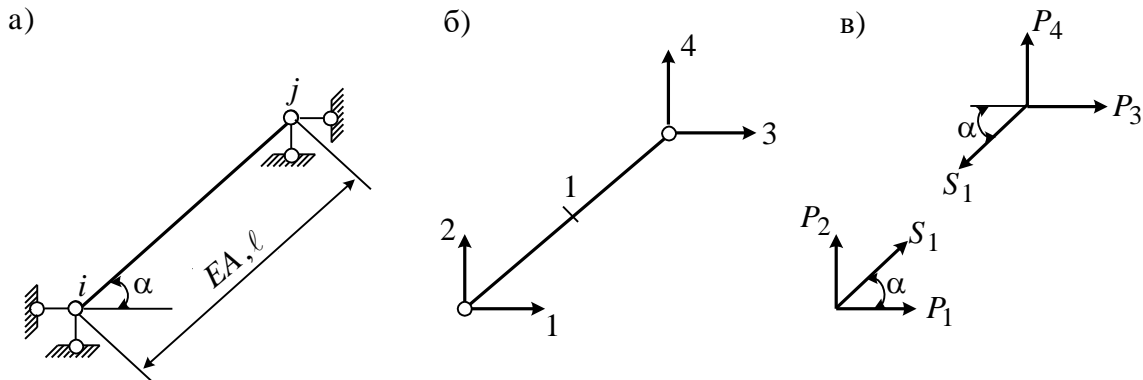


Рис. 5.21. Схеми шарнірно-стержневого елемента

Для шарнірно-стержневого елемента (див. рис. 5.21, а) спочатку побудуємо розрахункову схему (рис. 5.21, б), де стрілками зазначені можливі локальні ступені свободи, пов'язані з переміщеннями $Z_1 - Z_4$ і відповідними можливими зовнішніми силами $P_1 - P_4$. Крім того, в елементі можливі одне осьове зусилля S_1 і відповідна деформація e_1 . Розглянувши рівновагу вузлів (рис. 5.21, в), запишемо співвідношення між зовнішніми і внутрішніми силами:

$$P_1 = -S_1 \cos \alpha, \quad P_2 = -S_1 \sin \alpha, \quad P_3 = S_1 \cos \alpha, \quad P_4 = S_1 \sin \alpha. \quad (5.38)$$

Якщо систему (5.38) записати в матричному вигляді $P = AS$, то матриця A елемента буде

$$A = [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T.$$

Матриця жорсткості шарнірно-стержневого елемента k була отримана раніше в матричному методі переміщень ((5.28), п. 5.2.1.4)

$$k = \left(\frac{EA}{l} \right).$$

Обчислюємо матрицю одиничних зусиль

$$kA^T = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}.$$

Нарешті, обчислимо матрицю жорсткості елемента K

$$K_{4 \times 4}^e = A \cdot kA^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} = [K_{ij}], \quad (5.39)$$

де $K_{11} = \frac{EA}{\ell} \cos^2 \alpha$ і т. д.

Не вписані елементи матриці (5.39) симетричні щодо головної діагоналі.

Балковий затиснений елемент

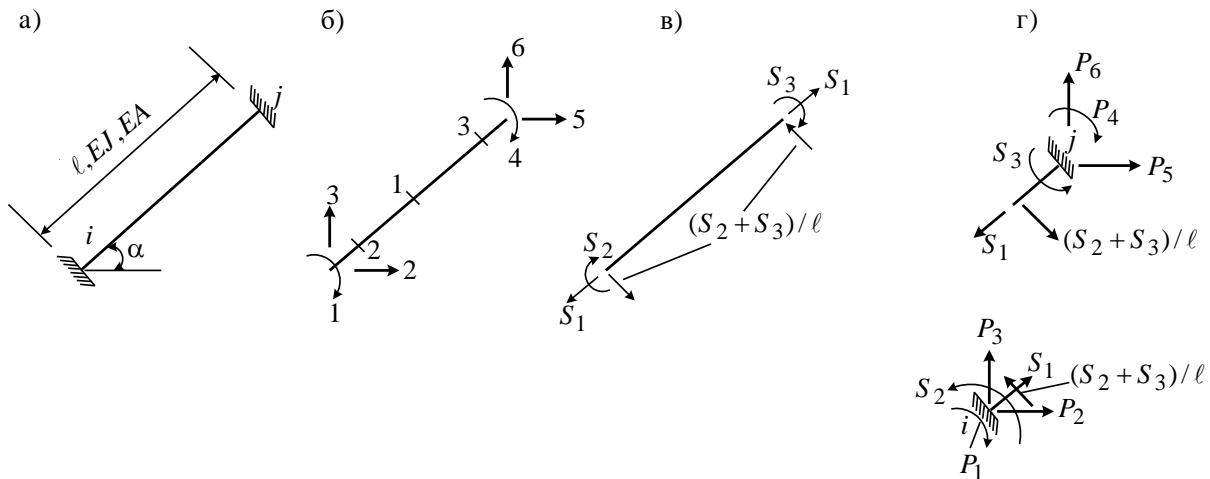


Рис. 5.22. Схеми балкового затисненого елемента

Для балкового затисненого елемента, показаного на рис. 5.22, а, складемо розрахункову схему (рис. 5.22, б), де стрілками показані шість локальних ступенів свободи $Z_1 - Z_6$ і відповідні їм можливі вузлові сили $P_1 - P_6$. Зарубками позначені осьова сила S_1 і згинальні моменти по кінцях S_2 і S_3 . На рис. 5.22, в окремо зазначені ці сили, а також виникаючі по кінцях поперечні сили. Розглянемо рівновагу вузлів i і j (рис. 5.22, г):

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 & P_1 &= S_2, \\ \text{Вузол } i & \sum X &= 0 & P_2 = -S_1 \cos\alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin\alpha, \\ & \sum Y &= 0 & P_3 = -S_1 \sin\alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos\alpha; \end{aligned}$$

(5.40)

$$\begin{aligned} \sum M = 0 & \quad P_4 = S_3, \\ \text{Вузол } j \quad \sum X = 0 & \quad P_5 = S_1 \cos \alpha - \frac{S_2 + S_3}{\ell} \sin \alpha, \\ \sum Y = 0 & \quad P_6 = S_1 \sin \alpha + \frac{S_2 + S_3}{\ell} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Запишемо тепер матрицю A як матрицю коефіцієнтів системи рівнянь (5.40):

$$A = \begin{array}{c|cc} & & 1 \\ \hline & -\cos \alpha & \sin \alpha / \ell & \sin \alpha / \ell \\ & -\sin \alpha & -\cos \alpha / \ell & -\cos \alpha / \ell \\ & & & 1 \\ \hline & \cos \alpha & -\sin \alpha / \ell & -\sin \alpha / \ell \\ & \sin \alpha & \cos \alpha / \ell & \cos \alpha / \ell \\ \hline \end{array} .$$

Матриця жорсткості всіх елементів k для балкового затисненого елемента при обліку деформації розтягання-стискання визначиться як комбінація, або сума матриць внутрішньої жорсткості для шарнірного і балкового елементів матричного методу переміщень (5.28), (5.29):

$$k = \begin{array}{c|cc} EA / \ell & & \\ \hline & 4EJ / \ell & 2EJ / \ell \\ \hline & 2EJ / \ell & 4EJ / \ell \\ \hline \end{array} .$$

Матриця одиничних зусиль обчислюється за формулою kA^T і має розмір 3×6 . Матриця жорсткості $K = AkA^T$ має розмір 6×6 , симетрична щодо головної діагоналі.

Балковий комбінований елемент

Матриці балкового комбінованого елемента (рис. 5.19) знаходяться так само, як і балкового затисненого (рис. 5.22, а), якщо у вузлі j поставити шарнір. Тоді ступенів свободи буде 5, шуканих зусиль 2, матриця k буде мати розмір 5×5 .

Просторовий затиснений елемент

Як відомо, у жорсткому вузлі просторової стержневої системи є 6 ступенів свободи – 3 лінійні переміщення і 3 повороти навколо осей, тому стержень, що з'єднує два вузли, буде мати 12 ступенів свободи. Зусиль у стержні, що підлягають визначенню, усього 6: нормальна сила S_1 , згинальні моменти по кінцях із площини стержня S_2 і S_3 , згинальні моменти в площині стержня S_4 і S_5 і крутний момент S_6 . Статична матриця розміром 12×6 будується так само, як і для елемента на площині, а матриця жорсткості k буде

$$k = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline EA/\ell & & & & & \\ \hline & 4EJ_2/\ell & 2EJ_2/\ell & & & \\ \hline & 2EJ_2/\ell & 4EJ_2/\ell & & & \\ \hline & & & 4EJ_3/\ell & 2EJ_3/\ell & \\ \hline & & & 2EJ_3/\ell & 4EJ_3/\ell & \\ \hline & & & & & GJ_1/\ell \\ \hline \end{array}.$$

Тут J_1 – момент інерції при крученні; J_2 – момент інерції із площини елемента; J_3 – момент інерції в площині елемента; G – модуль зсуву.

Формування матриці жорсткості k просторового стержневого елемента проводиться за тим самим алгоритмом, що й для елемента на площині.

5.2.2.6. Формування матриці жорсткості конструкції

Раніше було показано (п. 5.2.1.5), що розв'язна система рівнянь матричного методу переміщень $KZ = P$ є системою канонічних рівнянь методу переміщень, отже, кожен компонент K_{ij} матриці K є реакцією у i -му зв'язку при переміщенні j -го зв'язку на одиницю. Реакція в будь-якому вузлі по напрямку i -го зв'язку, очевидно, складається з реакцій, що виникають у всіх елементах, що примикають до вузла, по тому ж напрямку i . Отже, матриця жорсткості системи K утворюється додаванням матриць жорсткості елементів K_α , що складають систему

$$K = \sum_{\alpha=1}^m K_\alpha,$$

де m – число елементів.

Очевидно, матриця K квадратна, симетрична щодо головної діагоналі, її розмір дорівнює числу ступенів свободи системи. Процедуру додавання простежимо на простому прикладі рис. 5.23, де наочно продемонструємо процес послідовного наповнення матриці K шляхом вкладення в неї матриць жорсткості елементів K_e .

На рис. 5.23 цифрами в кружках позначені вузли, стрілками і цифрами – глобальні ступені свободи, усього 9. Ферма складається із шарнірних елементів, локальні ступені свободи для трьох елементів показані на рис. 5.24.

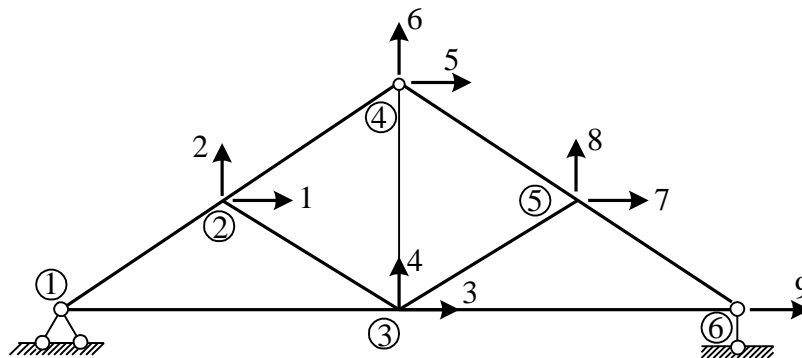


Рис. 5.23. Схема ферми

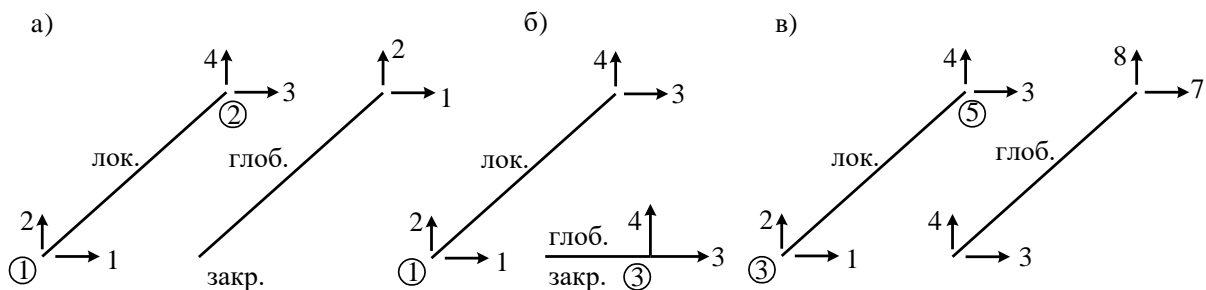


Рис. 5.24. Елементи ферми

Заготовимо матрицю розміром 9×9 з усіма компонентами, рівними нулю (рис. 5.25).

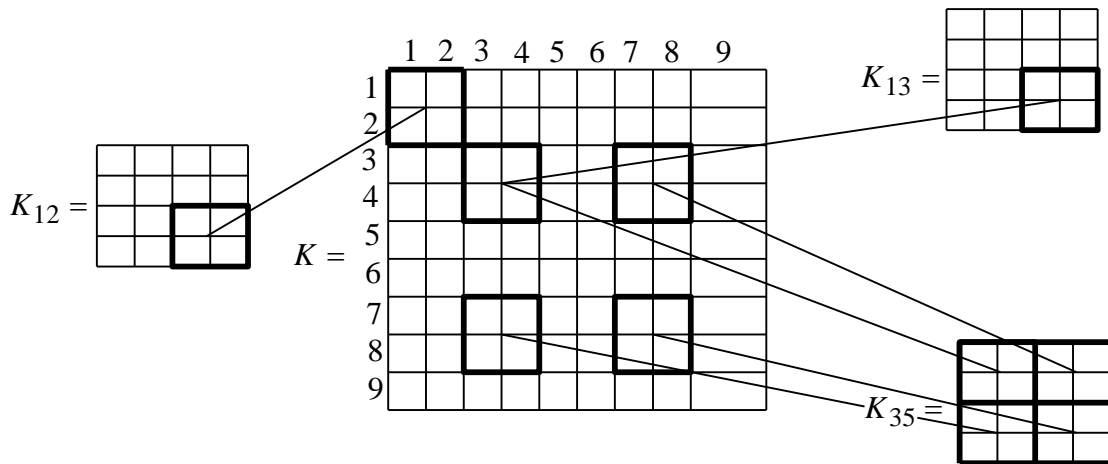


Рис. 5.25. Схема матриці розміром 9 – 9

Беремо перший елемент 1-2 (рис. 5.24, а). Вузол 1 закріплений, тому компоненти K_{12} відповідають локальним ступеням свободи 1 і 2 (два перші рядки і стовпці не використовуються). Локальні ступені свободи 3, 4 відповідають глобальним ступеням 1 і 2, тому субматриця 3-4 міститься на перетинанні 1-2 рядків і стовпців матриці K , як показано на рис. 5.25. Ми вклали в матрицю K тільки три матриці з дев'яти, але, сподіваємося, головна ідея засвоєна.

5.2.2.7. Визначення переміщень і зусиль в елементах

Після формування матриці жорсткості системи K розв'язується система лінійних рівнянь $KZ = P$ і знаходиться вектор Z , тобто переміщення всіх вузлів.

Зусилля в конструкції знаходяться поелементно за формулою

$$S_{\mathcal{J}} = (kA^T)_{\mathcal{J}} \cdot Z_{\mathcal{J}}. \quad (5.41)$$

Тут матриця одиничних зусиль елемента (kA^T) була обчислена при формуванні матриці жорсткості елемента $K_{\mathcal{J}} = (AkA^T)_{\mathcal{J}}$. Вектор $Z_{\mathcal{J}}$ – це компоненти вектора Z , що відповідають локальним ступеням свободи. Наприклад, для елемента 3-6 ферми (рис. 5.23) складові формули (5.41) будуть

$$(kA^T)_{35} = (EA/\ell)_{35} [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha],$$

$$(Z)_{35} = (Z_3 \ Z_4 \ Z_7 \ Z_8)^T.$$

У результаті множення за формулою (5.41) вектора-рядка на вектор-стовпець одержимо зусилля S_{35} – одне число, що відповідає осьовій силі в

елементі 3-5. Для балкових елементів відповідно до рис. 5.22 S_1 – осьове зусилля, S_2 і S_3 – моменти по кінцях стержня. Для комбінованого елемента S_1 – осьове зусилля, S_2 – момент у защемленні.

Для просторового стержневого елемента відповідно до його матриці жорсткості k S_1 – осьове зусилля, S_2 і S_3 – згинальні моменти із площини стержня, S_4 і S_5 – згинальні моменти в площині стержня, S_6 – крутний момент (див. п. 5.2.2.5). Поперечні сили визначаються за формулою $Q_{ij} = -(M_i + M_j)/\ell$ відповідно до прийнятого знака для згинальних моментів, коли кінцеві моменти обертають стержень за годинниковою стрілкою (рис. 5.16).

Нарешті, якщо був заданий позавузловий вплив типу розподіленого навантаження, температури або осідання опор, то вантажні епюри додаються до розрахункових за відомою формулою

$$S_{ok} = S + S_0.$$

5.2.2.8. Матриці жорсткості стержневих елементів з використанням інтерполяційних поліномів і функцій форми

5.2.2.8.1. Матриця жорсткості в локальній системі координат

Розглянемо стержневий елемент постійного перерізу в локальній системі координат x, z , що зазнає дію сил тільки у вузлах i та j (рис. 5.26).

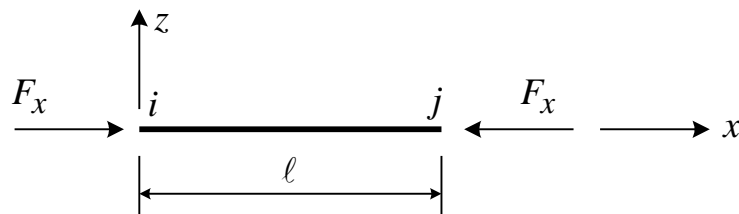


Рис. 5.26. Схема впливів на стержневий елемент

Крім зазначених на кресленні (рис. 5.26) осьових сил F_x , діють також сили F_z і моменти M у вузлах i та j ; u і w – переміщення уздовж осей x і z . При урахуванні тільки розтягання і згину деформація ε_x визначиться так:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2w}{dx} \right)^2, \quad (5.42)$$

де перший член – осьова деформація, другий член – деформація згину, третій член – зв'язана деформація згину й розтягання, нелінійна за w .

Перші два члени отримані в курсі опору матеріалів і лінійної теорії пружності (розд. 1), появу третього члена можна пояснити тим, що в деформованому стані, для якого й виконується розрахунок, довжина елементарного стержня dx змінюється і дорівнює

$$d\bar{x} = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx .$$

Розкладаючи останній вираз у ряд, одержимо

$$d\bar{x} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] dx .$$

Обмежуючись двома членами ряду, бачимо, що в деформованому стані довжина елемента dx змінюється на $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, що й призводить до появи третього члена у виразі (5.42).

Енергія деформації для елемента визначається роботою напружень $\sigma_x = E\varepsilon_x$ на деформаціях ε_x по всьому об'єму елемента V довжиною ℓ і площею поперечного перерізу A :

$$U = \frac{1}{2} \int_V E\varepsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\ell} \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx , \quad (5.43)$$

де перший член пов'язаний з осовою деформацією, інші зі згинальною.

Підставимо $U = U_c + U_u$, де

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\ell} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx , \quad (5.44)$$

$$U_u = \frac{1}{2} \int_{\ell} \left[EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx .$$

Запишемо $W(x)$ і $U(x)$ через вузлові переміщення стержня:

$$W(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \left\{ \begin{array}{l} W_i \\ \Phi_i \\ W_j \\ \Phi_j \end{array} \right\} = N_u \Delta_u , \quad (5.45)$$

$$U(x) = [N_5(x) \quad N_6(x)] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = N_c \Delta_c,$$

де $N_i(x)$ – функції форми, які відіграють фундаментальну роль у МСЕ, що дозволяють подати переміщення будь-якої точки в елементі через переміщення його вузлів.

Підставивши (5.45) в (5.44), одержимо

$$U_c = \frac{1}{2} \Delta_c^T k_c \Delta_c, \quad (5.46)$$

$$U_H = \frac{1}{2} \Delta_u^T k_u \Delta_u + \frac{1}{2} \Delta_u^T k_T \Delta_u,$$

де

$$k_c = \int_0^\ell EA (N'_c)^T N'_c dx, \quad k_u = \int_0^\ell EA (N''_u)^T N''_u dx, \quad (5.47)$$

$$k_T = \int_0^\ell F_x (N'_u)^T N'_u dx.$$

Тут матриця k_c – матриця осьової жорсткості елемента; k_u – матриця згинальної жорсткості елемента; k_T – геометрична матриця жорсткості, що характеризує збільшення згинальної жорсткості внаслідок наявності осьових сил F_x і залежна від геометричних розмірів елемента (для стержня – від довжини ℓ).

Для побудови матриць жорсткості елемента (5.47) необхідно одержати функції форми $N_i(x)$. Розглянемо балковий елемент, зображений на рис. 5.27.

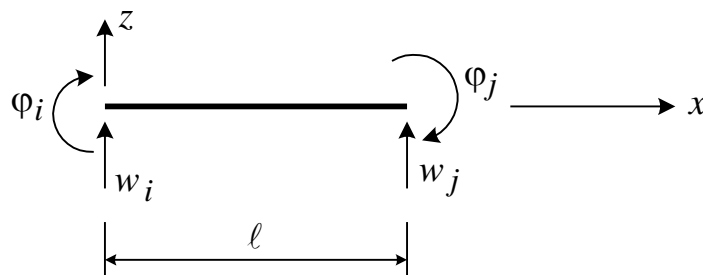


Рис. 5.27. Балковий елемент

Розглянемо вектор вузлових переміщень

$$\Delta_u = [W_i, \Phi_i, W_j, \Phi_j]^T,$$

де

$$\varphi_i = -\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0}, \quad \varphi_j = -\frac{dw}{dx}\Big|_{x=\ell}.$$

Кути повороту φ_i та φ_j дорівнюють від'ємному значенню тангенса кута нахилу нейтральної осі, тому що вираз у додатному напрямку, тобто за годинниковою стрілкою, викликає від'ємний зсув w .

Для опису поля переміщень функції w виберемо повний кубічний поліном, що містить чотири члени, тому що маємо чотири ступені свободи у векторі Δ_u :

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = M(x)\alpha. \quad (5.48)$$

Запишемо вектор Δ_u з використанням співвідношення (5.48):

$$\Delta_u = \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_x = 0 \\ -\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} \\ w_x = \ell \\ -\frac{dw}{dx}\Big|_{x=\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & -1 & -2\ell & -3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (5.49)$$

Перепишемо (5.49) у більш компактній формі

$$\Delta_u = A \alpha,$$

звідки знайдемо

$$\alpha = A^{-1}\Delta_u. \quad (5.50)$$

Підстановка (5.50) в (5.48) дає

$$w(x) = M(x)\alpha = M(x)A^{-1}\Delta_u = N_u\Delta_u, \quad (5.51)$$

де функція форми

$$N_u = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} A^{-1}, \quad (5.52)$$

а зворотна матриця A^{-1} має такий вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\ell^3} \begin{bmatrix} \ell^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell^3 & 0 & 0 \\ -3\ell & 2\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ 2 & -\ell & -2 & -\ell \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Обчислимо відповідно до (5.52) функції форми

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3},$$

$$N_2(x) = -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2},$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3},$$

$$N_4(x) = \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}.$$
(5.54)

На рис. 5.28 показані деформації балки від одиничних зсувів опор.

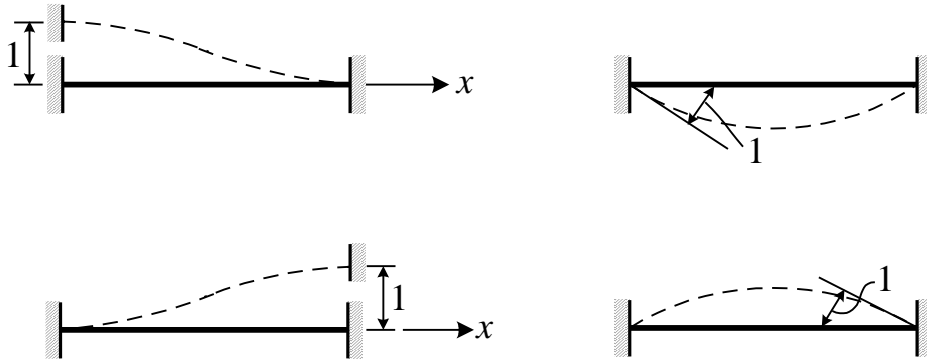


Рис. 5.28. Деформації балки від одиничних зсувів опор

Ці деформації саме й описуються відповідними функціями форми, які називаються балковими функціями і являють собою поліноми Ерміта.

Матриця жорсткості k_u відповідно до виразу (5.47) може бути подана як

$$k_u = \ell \int_0^{\ell} EJ \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}'' [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]'' dx. \quad (5.55)$$

Очевидно, розмір матриці k_u буде 4×4 . Визначимо для ілюстрації компоненту матриці $(k_u)_{44}$:

$$(k_u)_{44} = \int_0^{\ell} EJ (N_4)''^2 dx = \int_0^{\ell} EJ \left(\frac{2}{\ell} - \frac{6x}{\ell^2} \right)^2 dx = \frac{4EJ}{\ell^2} \left(\ell - \frac{6\ell^2}{2\ell} + \frac{9\ell^3}{3\ell^2} \right) = \frac{4EJ}{\ell}.$$

Аналогічно знаходяться всі інші компоненти матриці k_u . Остаточного одержуємо

$$k_u = \begin{bmatrix} 12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 & -12EJ/\ell^2 & -6EJ/\ell^2 \\ -6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell \\ -12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 & 12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 \\ -6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Порівнявши компоненти матриці жорсткості (5.55) з реакціями однопрогонових балок методу переміщень на одиничні переміщення опор, виявляємо їхню рівність. Приміром, при повороті вузла j на кут $\varphi=1$ епюра моментів і реакції зображені на рис. 5.29.

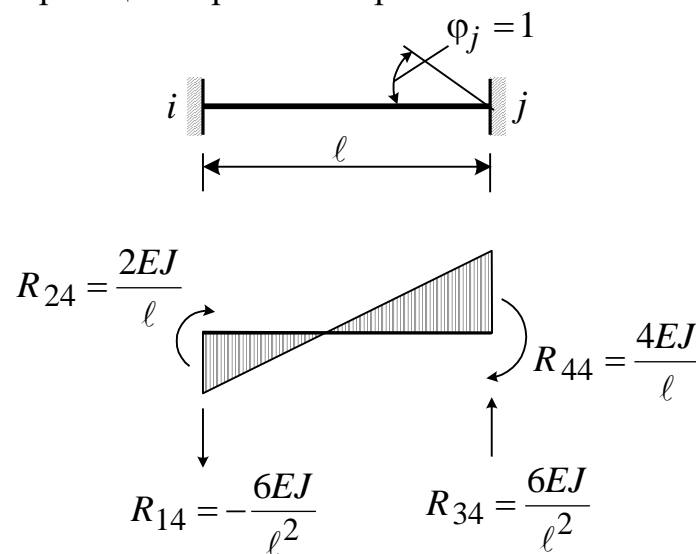


Рис. 5.29. Епюра моментів і реакції однопрогонової балки від повороту вузла j на одиницю

Реакції з табличної епюри на рис. 5.29 і компоненти четвертого стовпця матриці k_u збігаються. Це означає, що вибір функції W у вигляді кубічного полінома (5.48) призвів до точного рішення для стержня постійної жорсткості, не навантаженого в прольоті, за відсутності осьової сили. Якщо ми скористаємося таким самим поліномом для обчислення геометричної матриці K_2 , то це призведе до наближеного розв'язку, тобто ми будемо вважати, що за наявності осьових сил вигнута вісь стержня буде описуватися кубічною параболою. Вважаючи, що осьова сила F_x уздовж стержня постійна, відповідно до (5.47) визначимо

$$K_2 = F_x \int_0^\ell (N'_u)^T N'_u dx = F_x L_2, \quad (5.57)$$

де матриця L_2 після відповідних обчислень буде

$$L_2 = \frac{1}{30\ell} \begin{bmatrix} 36 & -3\ell & -36 & -3\ell \\ -3\ell & 4\ell^2 & 3\ell & -\ell^2 \\ -36 & 3\ell & 36 & 3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Матриця осьової жорсткості k_c відповідно до (5.47) при $EA = const$ має вигляд

$$k_c = EA \int_0^\ell \left\{ \begin{matrix} N_5 \\ N_6 \end{matrix} \right\}' [N_5 \ N_6]' dx, \quad (5.59)$$

де функції форми N_5 і N_6 можуть бути отримані аналогічно попередньому при завданні функції $u(x) = b_0 + b_1x$ у вигляді лінійного полінома. Надамо читачеві проробити необхідні формальні викладення, ми ж побудуємо лінійні функції N_5 і N_6 відповідно до загальної вимоги до функцій форми, а саме функція форми N_i повинна приймати значення, що дорівнює 1 у вузлі, де задана величина Δ_i , і дорівнює нулю в інших вузлах, що відповідають іншим ступеням свободи. Цій вимозі відповідають такі функції:

$$N_5(x) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad (5.60)$$

$$N_6(x) = \frac{x}{\ell}.$$

Тепер нескладно побудувати матрицю осьової жорсткості k_c :

$$k_c = \frac{EA}{\ell} \int_0^\ell \left\{ \begin{matrix} -1/\ell \\ 1/\ell \end{matrix} \right\} \cdot [-1/\ell \quad 1/\ell] dx = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Об'єднаємо вектори Δ_c і Δ_u :

$$\Delta = \left\{ \begin{matrix} \Delta_c \\ \Delta_u \end{matrix} \right\} = [u_i \quad u_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T. \quad (5.62)$$

Тоді загальна матриця жорсткості і геометрична матриця в локальній системі координат матимуть вигляд

$$k = \begin{bmatrix} k_c & 0 \\ 0 & k_u \end{bmatrix}; \quad K_T = F_x L_1 = F_x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

або в розгорнутому вигляді

$$k = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/\ell & EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 & -12EJ/\ell^3 & -6EJ/\ell^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell \\ 0 & 0 & -12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 & 12EJ/\ell^3 & 6EJ/\ell^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell & 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$$L_1 = \frac{1}{30\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 36 & 36 & -36 & -3\ell \\ 0 & 0 & -3\ell & 4\ell^2 & 3\ell & -\ell^2 \\ 0 & 0 & -36 & 3\ell & 36 & 3\ell \\ 0 & 0 & -3\ell & -\ell^2 & 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

5.2.2.8.2. Матриця жорсткості в глобальній системі координат

Розглянемо стержневий елемент $i-j$, пов'язаний з локальною системою координат xz , у глобальній системі координат XU (рис. 5.30).

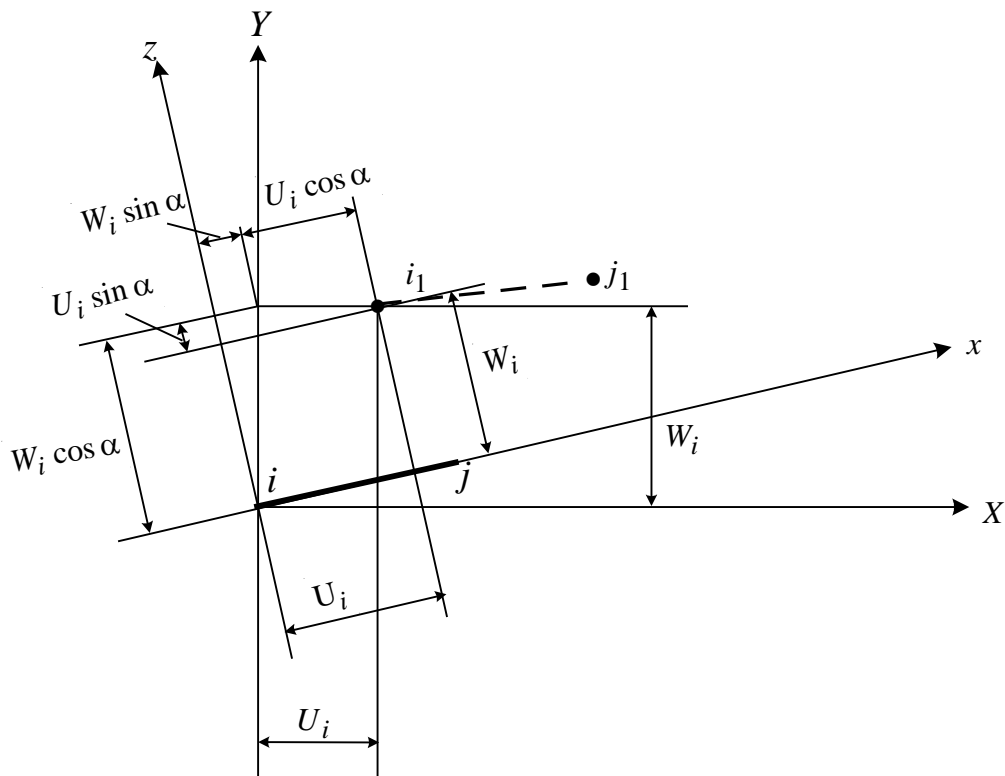


Рис. 5.30. Стержневий елемент $i - j$ у глобальній системі координат

Після деформації конструкції стержень займе нове положення (штрихова лінія). З аналізу рис. 5.30 випливає, що

$$U_i = U_i \cos \alpha + W_i \sin \alpha, \quad (5.66)$$

$$W_i = -U_i \sin \alpha + W_i \cos \alpha.$$

Складаючи подібні співвідношення для вузла j та враховуючи, що поворот вузлів не залежить від вибору системи координат, перепишемо співвідношення (5.66) у матричній формі

$$\Delta = BZ, \quad (5.67)$$

де

$$\Delta = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T, \quad (5.68)$$

$$Z = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут матриця B являє собою матрицю переведення переміщень із глобальної системи координат у локальну або матрицю зв'язку переміщень у локальній і глобальній системах координат, тобто є матрицею деформації.

Для того щоб одержати матрицю жорсткості K елемента в глобальній системі координат, запишемо спочатку фізичне рівняння, що зв'язує вектор вузлових сил елемента S з вектором Δ у локальній системі координат XU :

$$S = k\Delta, \quad (5.69)$$

де k – матриця жорсткості елемента в локальній системі координат.

Прирівняємо роботу вузлових сил P на переміщеннях Z глобальної системи координат до роботи вузлових сил S на переміщеннях Δ локальної системи координат, оскільки робота – скалярна величина і не залежить від вибору системи координат,

$$P^T Z = S^T \Delta = S^T BZ. \quad (5.70)$$

Тут використано співвідношення (5.67), що є геометричним рівнянням, а матриця B має сенс матриці деформацій. Скорочуючи (5.70) на Z і транспонуючи обидві частини рівності, одержуємо статичне рівняння рівноваги

$$P = B^T S, \quad (5.71)$$

де $B^T = A$ – статична матриця (5.24).

Заміняючи в (5.71) S згідно (5.69), а Δ згідно (5.67), одержимо

$$P = B^T k B Z = K Z. \quad (5.72)$$

Таким чином, при виведенні матриці K ми використали три сторони завдання – фізичну, геометричну й статичну аналогічно до ММП у п. 5.2.1. Відмінність тут у тому, що при виведенні матриці K використали не статичну матрицю A , а матрицю деформацій B . Отже, переведення матриці жорсткості з локальної системи координат у глобальну зводиться до виконання перетворення

$$K = B^T k B. \quad (5.73)$$

Матриця K враховує осьові деформації та згин стержнів. Та обставина, що при поздовжньо-поперечному згині виникають додаткові реакції від поздовжньої сили, враховує матриця геометричної жорсткості L . Переведення матриці L_1 в глобальну систему координат виконується аналогічно (5.73):

$$L = B^T L_1 B. \quad (5.74)$$

Поздовжнє зусилля F_x залежить від переміщень вузлів стержня Δ . Відомо, що поздовжнє зусилля пропорційне подовженню стержня, тобто

$$F_x = \frac{EA}{\ell} \Delta_x = \frac{EA}{\ell} (U_i - U_j), \quad (5.75)$$

де Δ_x – подовження стержня; U_i і U_j – переміщення вузлів i і j уздовж стержня в локальній системі координат.

Рівняння (5.75) можна переписати в матричній формі:

$$F_x = T^T \Delta, \quad (5.76)$$

де

$$T^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

$$\Delta = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]^T.$$

Підставляючи (5.67) в (5.76), знаходимо поздовжнє зусилля

$$F_x = T^T B Z. \quad (5.78)$$

Виконуючи наступні підстановки (5.78) в (5.71) і потім в (5.74) з урахуванням того, що для окремого стержня $F_x = const$, одержуємо

$$L(Z) = B^T L_1 B T^T B Z. \quad (5.79)$$

Побудуємо матрицю жорсткості і геометричну матрицю жорсткості для комбінованого балкового елемента із шарніром у вузлі j (рис. 5.19). У цьому випадку згинальний момент $M_j = 0$. Використовуючи шостий рядок з (5.64), запишемо вирази для цього моменту:

$$M_j = -\frac{6EJ}{\ell^2} w_i + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{6EJ}{\ell^2} w_j + \frac{4EJ}{\ell} \varphi_j = 0. \quad (5.80)$$

Перетворюючи рівняння (5.80), одержимо

$$\varphi_j = \frac{3}{2\ell} w_i - \frac{1}{2} \varphi_i - \frac{3}{2\ell} w_j. \quad (5.81)$$

Запишемо зв'язок між вектором переміщень балкового затисненого елемента $\Delta = [U_i \ U_j \ W_i \ \varphi_i \ W_j \ \varphi_j]^T$ і вектором переміщень комбінованого балкового елемента $\Delta_k = [U_i \ U_j \ W_i \ \varphi_i \ W_j]^T$ як

$$\Delta = C\Delta_k, \quad (5.82)$$

де матриця перетворення C будується з урахуванням (5.81):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2\ell & -1/2 & -3/2\ell \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Тепер подібно до того, як вираз (5.67) є перетворенням вектора Z на вектор Δ через матрицю B і призводить до формул (5.73) і (5.74), ми можемо, з огляду на аналогію рівнянь (5.67) і (5.82), одержати матриці жорсткості комбінованого елемента, замінивши у формулах (5.73) і (5.74) матрицю B на матрицю C :

$$K_k = C^T k C, \quad (5.84)$$

$$L_k = C^T L_1 C.$$

Для шарнірно-стержневих елементів (рис. 5.18) згинальні моменти у вузлах i і j дорівнюють нулю, тому з (5.64) знаходимо

$$M_i = -\frac{6EJ}{\ell^2} w_i - \frac{4EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{6EJ}{\ell^2} w_j + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_j = 0. \quad (5.85)$$

$$M_j = -\frac{6EJ}{\ell^2} w_i - \frac{2EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{6EJ}{\ell^2} w_j + \frac{4EJ}{\ell} \varphi_j = 0.$$

Розв'язання системи рівнянь (5.85) щодо невідомих φ_i і φ_j дає

$$\varphi_i = \frac{w_i}{\ell} - \frac{w_j}{\ell}, \quad (5.86)$$

$$\varphi_j = \frac{w_j}{\ell} - \frac{w_i}{\ell}.$$

Записавши зв'язок між вектором переміщень балкового затисненого елемента Δ і вектором переміщень шарнірно-стержневого елемента $\Delta_{\text{ш}} = [U_i \quad U_j \quad W_i \quad W_j]$ як

$$\Delta = C\Delta_{\text{ш}}, \quad (5.87)$$

з урахуванням (5.86) одержимо матрицю перетворень C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \end{bmatrix}. \quad (5.88)$$

Дотримуючись вищевикладеної процедури для комбінованого елемента, одержимо матриці жорсткості

$$k_{\text{ш}} = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell & 0 & 0 \\ -EA/\ell & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

$$L_{1, \text{ш}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 0 & -1/\ell & 1/\ell \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Матриця (5.90) відображає той факт, що при поперечному зсуві W_j шарнірної опори j елемента ферми, навантаженого осьовою силою N , виникають поперечні опорні реакції NW_j/ℓ , однакові й протилежно спрямовані.

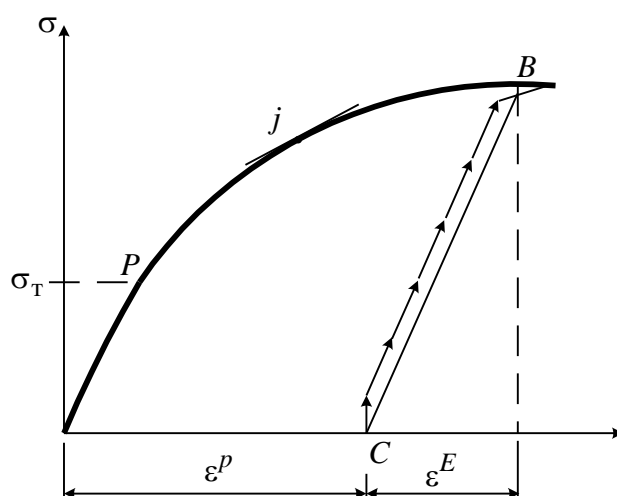
ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ПЛАСТИЧНІСТЬ МАТЕРІАЛІВ

6.1. Загальні положення

Пружні деформації, які вивчалися в попередніх розділах, мають властивість повного відновлення після зняття прикладених навантажень. Крім того, пружні деформації залежать тільки від величини напружень і не залежать від історії деформування або навантаження. Будь-яка деформація, що виникає як відповідна реакція матеріалу на прикладені навантаження або впливи навколишнього середовища і не підкоряється законам лінійної теорії пружності, може розглядатися як непружна деформація. Зокрема необоротні зсуви, які відбуваються в результаті ковзання або дислокацій на атомному рівні і, як наслідок, ведуть до залишкових змін розмірів, називаються пластичними деформаціями. Такі деформації мають місце тільки при інтенсивності напруження вище деякого порога, відомого як границя текучості. Будемо називати цю границю σ_T . Основні проблеми теорії пластичності полягають у математичному формулюванні співвідношень між напруженнями й деформаціями і в установленні правил визначення кількісних критеріїв для зазначення початку настання пластичності.

Розглянемо діаграму залежності напруження від деформації при випробуванні деякого гіпотетичного матеріалу на просте одноосьове розтягання (або стискання). Така діаграма наведена на рис. 6.1.

Навантаження вважають простим, якщо всі компоненти навантажень, починаючи з нуля, зростають одночасно і так, що співвідношення між компонентами навантажень у будь-який момент часу зберігаються незмінними, тобто всі зовнішні сили зростають пропорційно загальному параметру*.



* Більш повне визначення простого та складного навантаження див. у роботі [20]

Рис. 6.1. Діаграма залежності напружень від деформацій

Границя текучості точка Р, що відповідає граничному напруженню σ_T , розділяє криву напруження-деформація (рис. 6.1) на пружну й пластичну області. Границя пружності найчастіше береться як границя пропорційності і лежить у верхньому кінці лінійної частини кривої. Іноді за неї приймають точку J, де нахил кривої досягає 50 % свого початкового значення, в іншому способі розрахунку за границю текучості приймається таке значення напруження, що дає 0,2 % залишкової деформації. У пружній області існує взаємно однозначна відповідність між напруженням і деформацією. У пластичній області інша справа. При розвантаженні від деякого стану, наприклад, точка В на рис. 6.1, що зображує стан, прямує шляхом ВР, практично паралельним лінійній пружній частині кривої. У точці С, де напруження досягає нуля, виявляється залишкова пластична деформація ε^P .

На рис. 6.1 символом ε^E позначена відновлена пружна деформація, що відповідає точці В. При повторному навантаженні точка, що зображує стан, рухається із С назад до В шляхом, дуже близьким до ВС, але не попадає точно у В і через втрату енергії в циклі розвантаження-навантаження утвориться невелика петля гістерезису. Після повернення до точки В знадобиться збільшення навантаження, щоб викликати подальшу деформацію. Отже, зрозуміло, що в пластичній області напруження залежить від всієї історії навантаження або деформування середовища.

Хоча відомо, що температура впливає на пластичне поведіння матеріалу, у теорії пластичності часто приймають умови ізотермії і вважають температуру просто параметром. Так само у загальноприйнятій теорії пластичності на практиці звичайно нехтують впливом швидкості навантаження на діаграму напруження-деформація. Відповідно до цього пластичні деформації вважаються не залежними від часу і вивчаються окремо від таких явищ, як повзучість і релаксація.

6.2. Ідеалізовані діаграми пластичного поведіння матеріалу

Чотири з найбільш часто вживаних ідеалізованих діаграм наведені на рис. 6.2.

На рис. 6.2, а пружна область і явище зміцнення повністю відсутні, тоді як на рис. 6.2, б існує пружна зона, що передуює границі текучості, а зміцнення немає. За відсутності зміцнення деформація називається ідеально-пластичною. Подання рис. 6.2, а і рис. 6.2, б найбільш корисні при вивченні обмежених пластичних деформацій, коли великі деформації заборонені.

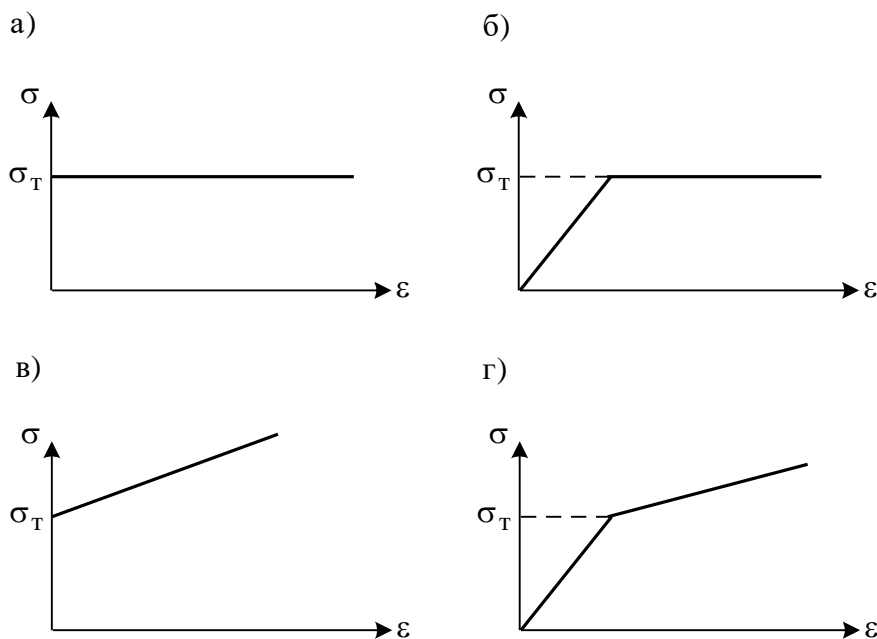


Рис. 6.2. Ідеалізовані діаграми $\sigma - \epsilon$ пластичного матеріалу: а) жорстко-ідеально-пластичний матеріал; б) пружно-ідеально-пластичний-матеріал; в) жорстко-пластичний матеріал з лінійним зміцненням; г) пружно-пластичний матеріал з лінійним зміцненням

На рис. 6.2, в пружна зона відсутня, а зміцнення передбачається лінійним. Ця модель, так само як і модель, подана на рис. 6.2, г, широко використовується при вивченні не обмеженої зовнішніми умовами пластичної текучості. Зазначимо, що існують і інші моделі деформування, наприклад ступінчате зміцнення.

6.3. Умови пластичності

Умови пластичності є важливим узагальненням на тривимірний напружений стан. Із численних умов пластичності дві прийнятно прості математично і в той же час досить точні, щоб бути досить корисними при вивченні початкової стадії пластичності ізотропних матеріалів. Це умови (критерії) Тріска і Мізеса.

6.3.1. Критерій текучості Тріска

Відповідно до цього критерію пластичне поведіння починається тоді, коли максимальне дотичне напруження досягає границі текучості при простому розтяганні

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (6.1)$$

6.3.2. Критерій текучості Мізеса

Відповідно до цього критерію пластичне поведіння починається тоді, коли другий інваріант девіатора напружень (п. 1.1.4) досягає деякого критичного значення

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (6.2)$$

Зобразимо простір головних напружень. Цей простір визначається тим, що як міра відстаней уздовж осей координат беруться величини напружень (рис. 6.3, а). Кожна точка такого простору відповідає деякому напруженому стану. Радіус вектор OP будь-якої точки $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ може бути розкладений на дві компоненти: OA – уздовж прямої OZ , яка складає рівні кути з осями координат, і OB – в площині, яка перпендикулярна до OZ , проходить через початок координат і має рівняння $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Компонента уздовж осі OZ , для якої $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, являє собою гідростатичний тиск, а компонента в перпендикулярній площині – девіаторну частину напруження. Якщо подивитися уздовж прямої OZ (рис. 6.3, а) у напрямку до початку координат – точки O , то стане зрозуміло, що проєкції осей координат на перпендикулярну до осі OZ площину виявляються розташованими симетрично під кутом 120° одна до одної, як показано на рис. 6.3, б.

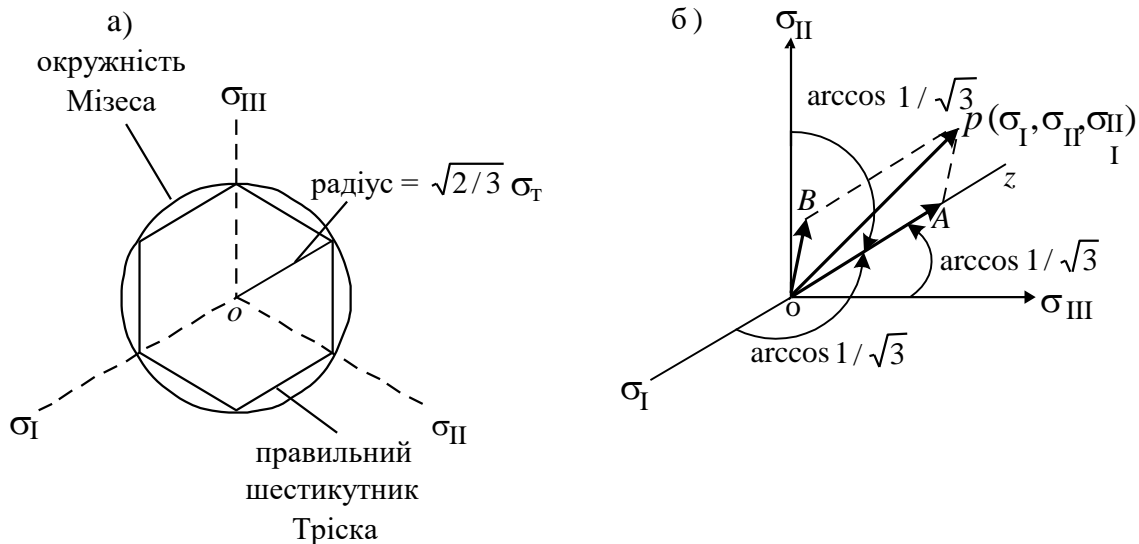


Рис. 6.3. Простір напружень (а); проєкції осей координат на площину, яка перпендикулярна до осі Z і проходить через початок координат (б)

Криві текучості, що відповідають критеріям Тріска (6.1) і Мізеса (6.2), зображені на рис. 6.3, а. За основу (точку, через яку повинна проходити крива) прийнято пластичний напружений стан при простому

розтяганні. У такій ситуації окружність Мізеса радіуса $\sqrt{2/3} \sigma_T$ виявляється описаною навколо правильного шестикутника Тріска.

Продовження навантаження після досягнення початкової границі текучості призводить до пластичних деформацій, які можуть супроводжуватися змінами первісної поверхні текучості. Якщо матеріал припускається ідеально-пластичним, то поверхня текучості не змінюється в процесі пластичного деформування і початкова умова пластичності залишається в силі. Цьому відповідають одномірні діаграми напруження-деформація, зображені на рис. 6.2, а, б. Однак для матеріалу зі зміцненням (рис. 6.2, в, г) пластичне деформування в загальному випадку супроводжується змінами поверхні текучості. Для урахування таких змін розглянемо найбільш простий закон зміцнення. Гіпотеза ізотропного зміцнення при навантаженні постулює, що поверхня текучості просто збільшується в розмірах, зберігаючи при цьому свою початкову форму. Криві текучості для критеріїв Мізеса і Тріска будуть концентричними окружностями і правильними шестикутниками відповідно.

6.4. Співвідношення між напруженнями і деформаціями

Умову переходу із пружного стану в пластичний визначимо за формулою граничного стану Мізеса (6.2). За цією гіпотезою перехід із пружного стану в пластичний відбувається тоді, коли величина

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}, \quad (6.3)$$

названа інтенсивністю напружень, досягає границі текучості. Величина σ_i в пружному стані може бути виражена за допомогою співвідношень (1.16), (1.17) через деформації

$$\sigma_i = E \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)}. \quad (6.4)$$

Позначимо через

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)} \quad (6.5)$$

інтенсивність деформацій.

Тоді для пружного стану

$$\sigma_i = E \varepsilon_i. \quad (6.6)$$

Для законів пластичності зручно вибрати ту саму форму написання. При складному напруженому стані

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i, \quad (6.7)$$

де E' – січний модуль деформації, що залежить від ступеня деформації, тобто $E' = f(\varepsilon)$.

Таким чином, основну гіпотезу теорії пластичності при простому навантаженні можна сформулювати так:

при складному напруженому стані залежність між інтенсивністю напруження та інтенсивністю деформації для кожної точки тіла приймається такою самою, як залежність між напруженням та подовженням при простому розтяганні одного і того тіла.

Виняткова важливість закону (6.7) для механіки пружних і пластичних деформацій, а отже, і важливість понять інтенсивності напружень та інтенсивності деформацій полягає насамперед у тому, що за допомогою цього закону будь-який складний об'ємний напружений стан незалежно від того, чи має розглянута область пружні або непружні деформації, ніби зводиться до простого розтягання або стискання стержня.

Установимо залежності між компонентами напруження і компонентами деформації, за формою аналогічні відомим у теорії пружності виразам (1.16) і (1.17), але із заміною постійного модуля

пружності E на змінний $G' = E'/3 = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy},$$

$$\tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz},$$

$$\tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}.$$

Оскільки об'ємна деформація при пластичній деформації практично дорівнює нулю, то в перших трьох рівняннях (6.8) доданок ε_{cp} часто виключають і рівняння набувають вигляду

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_x \quad \text{і т. д.}$$

При плоскому напруженому пружному-пластичному стані рівняння теорії пластичності іноді зручно виразити у формі, аналогічній виразу (4.16),

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E'} (\sigma_y - \nu' \sigma_x),$$

де для області пластичних деформацій припустимо прийняти $\nu = 0,5$. З останніх рівнянь одержуємо формули для напружень, виражені через деформації

$$\sigma_x = \frac{4}{3} E' (\varepsilon_x + 0,5 \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{4}{3} E' (\varepsilon_y + 0,5 \varepsilon_x),$$
(6.9)

де $E' = \sigma_i / \varepsilon_i$.

6.5. Основні рівняння теорії пластичності (теорія малих пружно-пластичних деформацій)

Математичний апарат цієї теорії пластичності складають такі рівняння: три статичних рівняння (2.1), єдині для пружного й пластичного тіл; шість геометричних співвідношень (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), також загальних для механіки деформованого тіла незалежно від природи тіла; шість фізичних рівнянь (6.8), що відбивають конкретні властивості пружного-пластичного тіла, виражених через компоненти напружень і деформацій, виразів для інтенсивності напружень і деформацій (6.3), (6.5) і рівняння (6.7), що зв'язує останні між собою.

Таким чином, усього маємо 18 рівнянь, куди входять 18 невідомих. Розв'язком задачі теорії пластичності, отже, буде такий, котрий для кожної точки деформованого тіла задовольняє цим 18 рівнянням і, крім того, на границі тіла задовольняє контурним умовам (6.2).

Розглянемо приклад. Товстостінна циліндрична труба, розміри якої зазначені на рис. 6.4, зазнає дії внутрішнього рівномірного тиску p_0 ; труба

закрита з торців. Необхідно знайти значення p_o , при якому вперше досягається границя текучості. При цьому слід використати критерії текучості Мізеса (6.2) і Тріска (6.1).

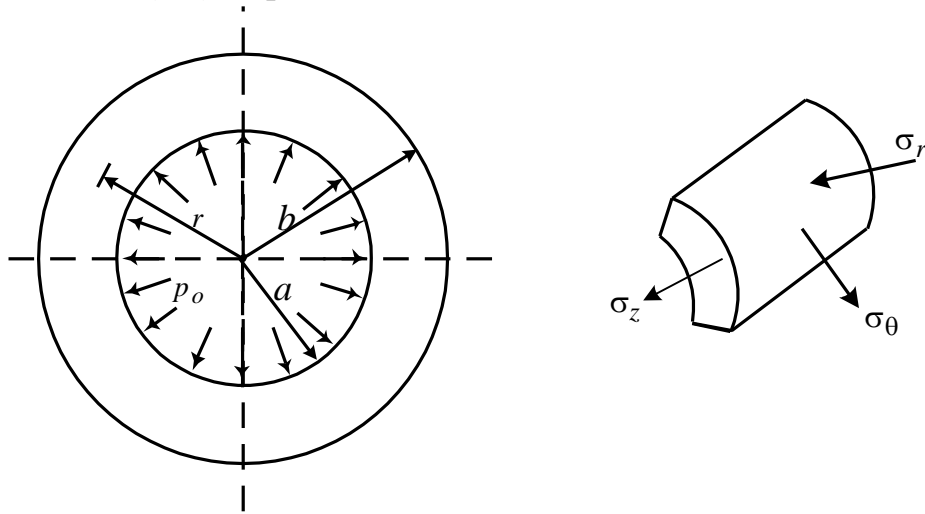


Рис. 6.4. Схема товстостінної труби

Компоненти напруження в циліндричних координатах будуть головними напруженнями. Аналіз пружного стану (див. п. 4.6.3) дозволяє показати, що

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_o \left(b^2 / r^2 - 1 \right) / Q, \\ \sigma_\theta &= p_o \left(b^2 / r^2 + 1 \right) / Q, \\ \sigma_z &= p_o / Q,\end{aligned}$$

де $Q = (b^2 / a^2 - 1)$.

Для даної задачі критерій Мізеса (5.2) має вигляд

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_T^2,$$

або

$$p_o^2 b^4 / r^4 = Q^2 \sigma_T^2 / 3.$$

Границя текучості вперше досягається при $r = a$ і

$$p_o = (\sigma_T / \sqrt{3}) \left(1 - a^2 / b^2 \right).$$

Критерій Тріска (6.1) зводиться до рівності

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_T,$$

тому що σ_z – проміжне за величиною головне напруження. Таким чином, $2p_o b^2 / r^2 = Q\sigma_T$ і тепер границя текучості вперше досягається при $r = a$ і

$$p_o = (\sigma_T / 2) \left(1 - a^2 / b^2 \right).$$

ПОВЗУЧІСТЬ МАТЕРІАЛІВ

7.1. Загальні положення

У цьому розділі розглядається властивість матеріалів, пов'язана з деформуванням їх у часі при постійному навантаженні або напруженні.

Здатність матеріалу деформуватися в часі при дії постійних навантажень називається повзучістю.

Явище повзучості властиве таким матеріалам, як бетон, цегла, деревина, полімери, природний камінь, ґрунти і т. п. Метали також виявляють цю властивість деформування, що стає особливо помітною при високій температурі, а в кольорових металах (свинці, міді і т. п.) навіть при кімнатній температурі.

Фактор повзучості має істотне значення для роботи конструкцій. Досить зазначити, що напруження в арматурах залізобетонних конструкцій може в процесі повзучості бетону збільшитися в 2-2,5 рази, а переміщення – в 3-4 рази. Хоча явище повзучості було відомо давно, експериментально його досліджував одним з перших В. Вебер в 1835 р. у дослідях з впливу крутного моменту на кварцові волокна. У них виявлялася дивна для неживої матерії властивість зберігати «пам'ять» про впливи, які вона зазнавала в минулому.

Досліди з вивчення повзучості показали, що вона спостерігається при будь-яких напруженнях, навіть таких, які при короткочасній дії навантаження викликають тільки пружні деформації. Результати випробувань зображують у вигляді кривих повзучості, тобто кривих залежності деформацій від часу (рис. 7.1).

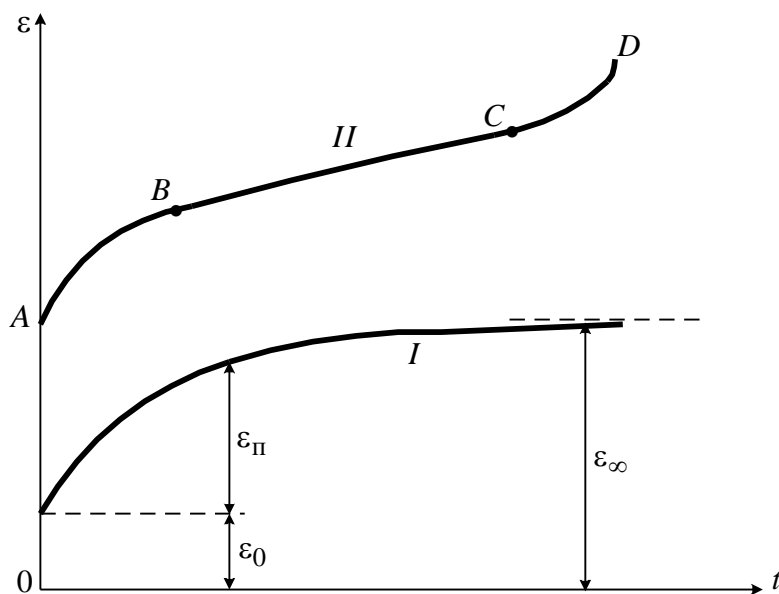


Рис. 7.1. Характерні криві повзучості матеріалу

У початковий момент часу деформація має значення ε_0 , яке дорівнює пружній деформації або сумі пружної й пластичної деформацій. Звичайно вважається, що часом навантаження (або розвантаження) зразка можна знехтувати в порівнянні із часом проведення експерименту, у зв'язку із чим можна припустити, що напруження і деформації ε_0 з'являються миттєво.

Зі збільшенням часу t спостерігається зростання деформацій, характер якого визначається швидкістю $\dot{\varepsilon}$ (точкою позначена похідна за часом t). На графіку I (рис. 7.1) процес деформування супроводжується зменшенням швидкості $\dot{\varepsilon}$ і асимптотичним прямуванням її до нуля. Повна деформація зразка, обумовлена сумою початкової деформації ε_0 і деформації повзучості, тобто $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{п}}$, прямує до граничного значення ε_{∞} . На графіку II можна виділити три ділянки: АВ, ВС, CD. Ділянка АВ характеризується зменшенням швидкості деформування й відповідає несталій повзучості. По закінченні її швидкість $\dot{\varepsilon}$ приймає мінімальне значення: настає фаза сталої повзучості, коли швидкість $\dot{\varepsilon}$ постійна (ділянка ВС). Зі збільшенням напруження σ тривалість переходу сталої повзучості скорочується. Випробування закінчується або крихким руйнуванням зразка в момент часу, що відповідає точці С, або в'язким руйнуванням, що відбувається з утворенням шийки. В останньому випадку з'являється ділянка CD.

Якщо збільшення деформацій повзучості пропорційно збільшенню напружень, то говорять про лінійну повзучість, у іншому випадку – про нелінійну повзучість. Повзучість бетону, пластмас при малих напруженнях лінійна. Зокрема лінійна повзучість бетону при стисканні має місце при напруженнях, менших приблизно за половину призмової міцності. Повзучість металів при високих температурах нелінійна. На повзучість різних матеріалів, крім величини діючих напружень і температури, значно впливають й інші фактори. Наприклад, на повзучості бетону позначається водоцементне відношення, вид цементу, масштабний характер, вологість бетону, характер заповнення і т. д.

Сучасний стан теорії повзучості характеризується великою кількістю різних теорій, які по відношенню одна до одної далеко не є погодженими, а в застосуванні їх до окремих задач виявляються навіть суперечливими. Експериментальні дослідження, які в області теорій повзучості проводилися та інтенсивно ведуться в багатьох країнах, виявляються усе ще далеко не достатніми, щоб побудувати єдину теорію повзучості. Виходячи із цих міркувань, у даному розділі переважно розглянута теорія, в основі якої лежить подання про в'язко-пружне тіло. Теорії, побудовані на таких уявленнях, виявляються найбільш стрункими і у якісному відношенні відбивають правильний процес розвитку деформацій у часі.

7.2. Залежності між напруженнями і деформаціями при лінійній повзучості

Розглянемо зразок із в'язко-пружного матеріалу, що має властивість лінійної повзучості, при одноосьовому напруженому стані. Зовнішнє навантаження прикладається в момент часу $\tau > 0$ (рис. 7.2, а, б).

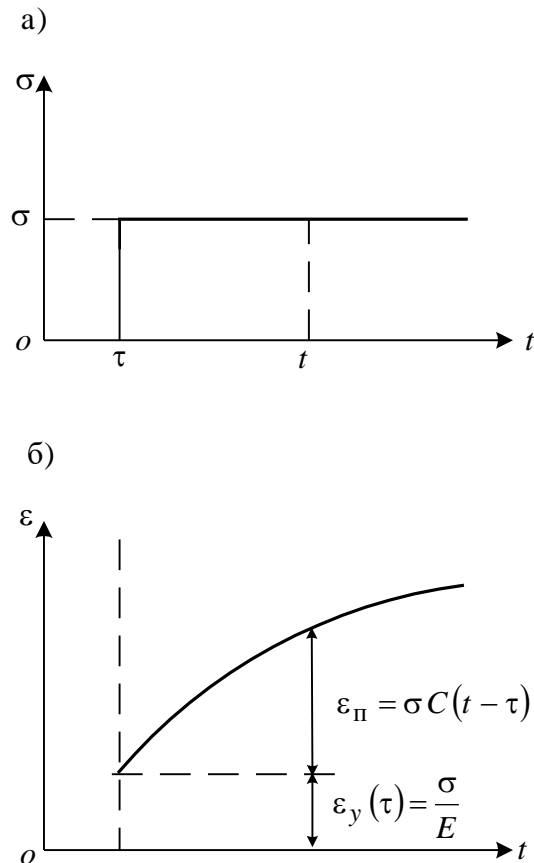


Рис. 7.2. Крива повзучості для зразка, навантаженого в момент часу τ

За початок відліку часу приймається момент виготовлення зразка. Температура зразка постійна й дорівнює кімнатній. Якщо навантаження постійне, то деформація зразка в момент часу t ($t > \tau > 0$) визначається виразом

$$\epsilon(t, \tau) = \sigma \delta(t - \tau), \quad (7.1)$$

причому

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E} + C(t - \tau). \quad (7.2)$$

Функція $C(t - \tau)$ визначає деформацію повзучості при $\sigma = 1$. Тут передбачається, що властивості матеріалу не залежать від часу (матеріал не має властивості старіння).

У момент часу τ повзучість виявиться не встигла, тому

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E}.$$

Для $t > \tau$ виконується умова $C(t - \tau) > 0$, тому що деформація повзучості монотонно зростає зі збільшенням часу.

Для одержання залежностей між напруженнями й деформаціями важливе значення має принцип накладення. Відповідно до нього сумарна деформація повзучості при змінному напруженні може бути знайдена як сума деформацій повзучості, викликаних відповідними збільшеннями напружень. Повна деформація зразка буде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (7.3)$$

Тут уведене позначення

$$K(t - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \geq 0. \quad (7.4)$$

Функція $K(t - \tau)$ має розмірність $1/(\text{доб} \cdot \text{МПа})$. Перший доданок у співвідношенні (7.3) відповідає пружній деформації, а інтегральний член – деформації повзучості, що накопичується в зразку при дії навантаження від моменту часу t_0 до t . Функція $K(t - \tau)$ вказує на те, що якщо в момент часу τ було прикладене напруження $\sigma(\tau)$, яке діяло протягом часу $d\tau$, то матеріал зберігає спогад про дію цього напруження у вигляді малої деформації $d\varepsilon_{\text{п}} = K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$.

Теорія повзучості, подана співвідношенням (7.3), одержала назву спадкоємної теорії повзучості. Функція $K(t - \tau)$ може мати різне подання. Наприклад, залежно від матеріалу для $K(t - \tau)$ використовуються вирази

$$K(t - \tau) = \gamma \frac{K}{E} e^{-\gamma(t - \tau)}, \quad K(t - \tau) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{k_i}{E} e^{-\gamma_i(t - \tau)}, \quad \gamma_i > 0,$$

$$K(t - \tau) = \frac{k}{E^\alpha \sqrt{t - \tau}}, \quad K(t - \tau) = \frac{k}{E^\alpha \sqrt{t - \tau}} e^{-\gamma(t - \tau)}, \quad 0 < \frac{1}{\alpha} < 1,$$

де γ , K , α – постійні коефіцієнти.

Розглянемо більш детально явище повзучості, описуване рівнянням (7.3). Підставимо в це рівняння функцію K у вигляді $K(t - \tau) = \gamma \frac{k}{E} e^{-\gamma(t-\tau)}$. У результаті одержимо таку залежність:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \gamma k \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right], \quad t_0 = 0.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $e^{\gamma t}$, одержимо

$$E e^{\gamma t} \varepsilon(t) = e^{\gamma t} \sigma(t) + \gamma k \int_0^t e^{\gamma \tau} \sigma(\tau) d\tau.$$

Після чого продиференціюємо їх один раз за часом t :

$$E(\gamma e^{\gamma t} \varepsilon + e^{\gamma t} \dot{\varepsilon}) = \gamma e^{\gamma t} \sigma + e^{\gamma t} \dot{\sigma} + \gamma k e^{\gamma t} \sigma.$$

Поділивши тепер рівняння на $e^{\gamma t}$, одержимо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\gamma E \varepsilon + E \dot{\varepsilon} = \gamma(1+k)\sigma + \dot{\sigma},$$

розв'язок якого повинен задовольняти початковій умові $\varepsilon(0) = \sigma(0) | E$.

Для старіючих матеріалів механічні властивості змінюються за часом. Пружні деформації і деформації повзучості залежать від того, у якому віці був завантажений зразок. Залежність між деформаціями та напруженнями записується як (див. 7.1)

$$\varepsilon(t, \tau) = \sigma \delta(t, \tau), \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \quad (7.5)$$

Зокрема при розрахунку бетонних і залізобетонних конструкцій для функцій $E(t)$ і $C(t, \tau)$ часто приймають вирази

$$\begin{aligned} E(\tau) &= E_0 (1 - \beta e^{-\alpha \tau}), & C(t, \tau) &= \varphi(t) f(t - \tau), \\ \varphi(t) &= A + \frac{B}{D + \tau}, & \text{або } \varphi(t) &= A + B e^{-\alpha t}, \\ f(t - \tau) &= 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Зі збільшенням τ функції $E(\tau)$, $\varphi(\tau)$ прямують до постійних значень, а $\delta(t, \tau)$ визначається при цьому співвідношенням

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_0} + A \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]. \quad (7.6)$$

Важливо зазначити, що при $t \rightarrow \infty$ і постійному напруженні деформація повзучості не залежить від моменту часу τ (від віку матеріалу,

при якому було зроблено навантаження зразка), а залежить тільки від тривалості дії навантаження $t - \tau$.

Кількісно про деформації повзучості і швидкості їхнього наближення до граничного значення можна судити за такими даними, які задовільно погоджуються з результатами експериментів для бетону: $E_0 = 20$ ГПа, $\beta = 1$, $\alpha = 0,03$ (1/доб), $A = 0,09$ (1/ГПа), $B = 0,482$ (доб/ГПа), $D = 0$, $\gamma = 0,026$ (1/доб). Значення модуля пружності $E(\tau)$, функції $C(t, \tau)$ і деформації ε_∞ (при $\sigma = 0,1$ МПа) для різних t і τ містяться в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Значення модуля пружності, функції $C(t, \tau)$ і граничної деформації ε_∞

$\tau_{\text{доб}}$	$E(\tau)$ МПа	$t_{\text{доб}}$					$\varepsilon_\infty \cdot 10^5$
		50	100	150	360	720	
		$E(\tau) \cdot C(t - \tau)$					
7	3800	0,40	0,55	0,59	0,60	0,60	4,22
14	6900	0,52	0,76	0,83	0,86	0,86	2,69
28	11400	0,53	1,03	1,17	1,22	1,22	1,95
90	18600	–	0,41	1,41	1,78	1,78	1,50

Графіки зміни деформацій $\varepsilon(t)$, що відповідають цим даним, показані на рис. 7.3.

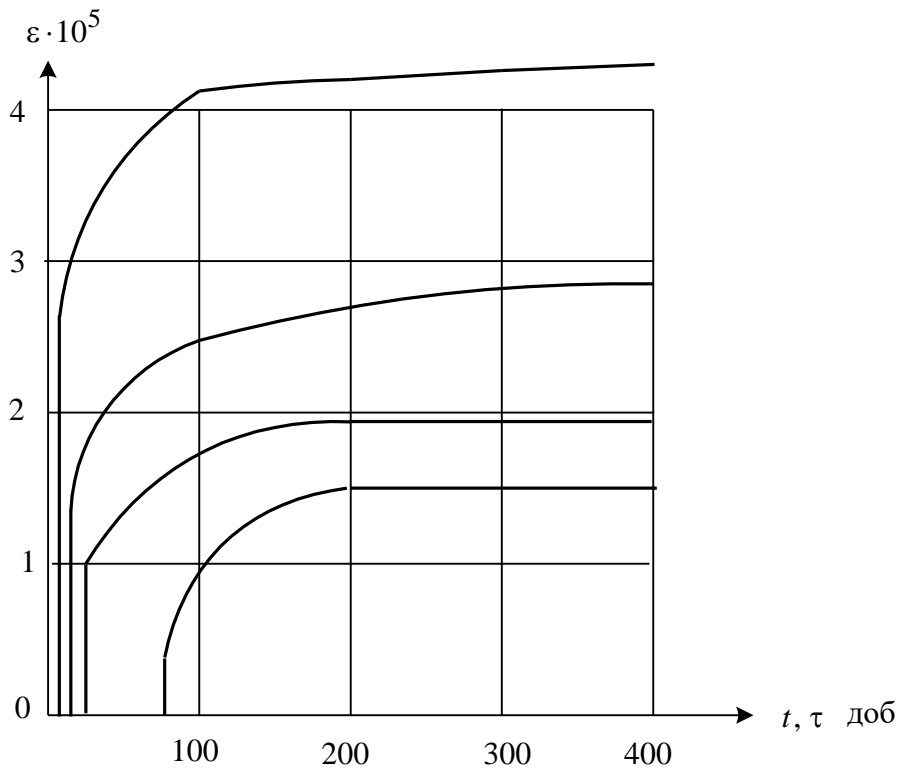


Рис. 7.3. Криві повзучості для бетону, отримані при навантаженні зразків через 7, 14, 28 і 90 діб з моменту виготовлення

Ці дані свідчать про те, що модуль пружності $E(\tau)$ зі збільшенням віку бетону швидко наближається до свого граничного значення E_0 . Через три місяці від дня виготовлення зразка різниця між дійсним і граничним модулями пружності становить усього 7 %. Найбільш інтенсивний ріст деформацій повзучості спостерігається на початку після навантаження зразка, а граничне значення деформацій істотно залежить від віку бетону до моменту прикладання навантаження. Значення ε_∞ для бетону, старінням якого можна знехтувати, визначається формулою (7.6) і дорівнює $1,4 \cdot 10^{-5}$. У загальному випадку співвідношення між напруженнями і деформаціями для «старіючих» матеріалів записується аналогічно (7.3):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Тут знову вводиться позначення

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau).$$

Теорія повзучості, в основу якої покладено вираз (7.7), називається теорією спадкоємного старіння. Надалі для скорочення будемо записувати рівняння типу (7.7) в операторній формі

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1+K)\sigma, \quad (7.8)$$

причому $\frac{1}{E}k\sigma = \int_{t_0}^t K(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau.$

7.3. Релаксація напружень

У тому випадку, коли відомий закон зміни деформації в часі $\varepsilon(t)$, напруження $\sigma(t)$ може бути знайдене шляхом розв'язання рівняння

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t K(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau.$$

Рівняння, в якому шукана функція знаходиться під знаком інтеграла, називається інтегральним. Розв'язання таких рівнянь пов'язане з математичними труднощами, і вибір методу їхнього розв'язання значною мірою залежить від виду функції $K(t, \tau)$. У п. 7.2 було показано, що якщо використати додаткову функцію

$$K(t - \tau) = \frac{\gamma k}{E} e^{-\gamma(t-\tau)},$$

то наведене вище рівняння еквівалентне диференціальному рівнянню

$$\dot{\sigma} + \gamma(1+k)\sigma = E\dot{\varepsilon} + \gamma E\varepsilon \quad (7.9)$$

з початковою умовою $\varepsilon(0) = \sigma(0)/E$.

Розглянемо задачу про зміну напружень у стержні, викликаних постійною деформацією (рис. 7.4, а, в).

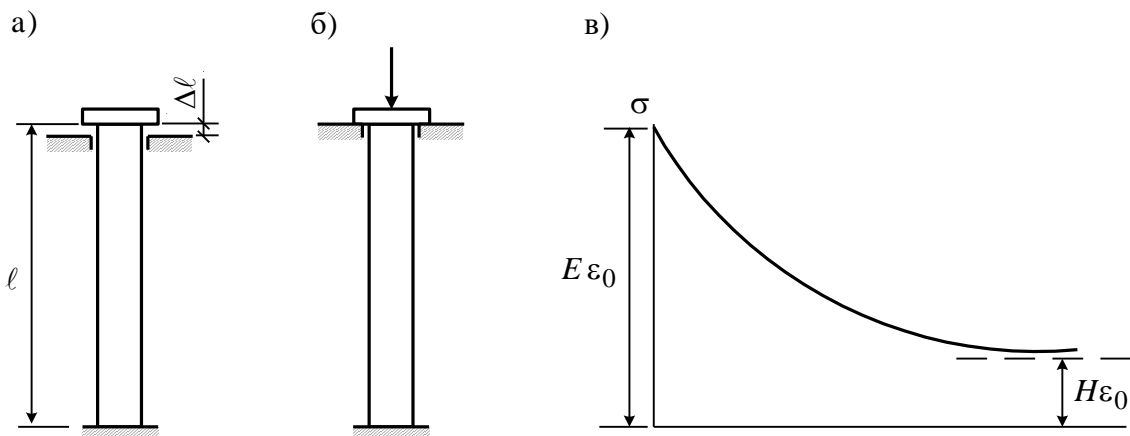


Рис. 7.4. Навантаження стержня (а, б), крива релаксації (в)

У початковий момент часу напруження дорівнює $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 = \Delta\ell/\ell$.

Напруження в довільний момент часу знайдемо з рівняння (6.9), що при заданому впливі набуває такого вигляду:

$$\dot{\sigma} + \gamma(1+k)\sigma = \gamma E \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \text{const} . \quad (7.10)$$

Загальний розв'язок (7.10) записується як сума частинного розв'язку $\sigma_{\text{част}} = \frac{E \varepsilon_0}{1+k}$ і розв'язку однорідного диференціального рівняння

$$\sigma(t) = C e^{-\gamma(1+k)t},$$

де C – довільна постійна.

У підсумку маємо

$$\sigma(t) = C e^{-\gamma(1+k)t} + \frac{E \varepsilon_0}{1+k}.$$

Постійна C знаходиться із початкової умови (при $t = 0$):

$$E \varepsilon_0 = C + \frac{E \varepsilon_0}{1+k}.$$

Звідси

$$C = \frac{k}{1+k} E \varepsilon_0.$$

Остаточно одержуємо

$$\sigma(t) = \frac{E \varepsilon_0}{1+k} \left[1 + k e^{-\gamma(1+k)t} \right]. \quad (7.11)$$

Отримано закон зміни напружень у часі в поперечному перерізі стержня, підданого постійній деформації ε_0 . Графік цієї залежності зображений на рис. 7.4, в. При $t \rightarrow \infty$ напруження прямують до постійного значення

$$\sigma_\infty = \frac{E \varepsilon_0}{1+k} = H \varepsilon_0.$$

Побудуємо криву релаксації стосовно бетонної колони (табл. 7.2). Будемо вважати, що до моменту навантаження вік бетону досить великий, тому для функції $K(t - \tau)$ справедливий вираз

$$K(t - \tau) = \frac{\gamma k}{E} e^{-\gamma(t-\tau)},$$

причому $\gamma = 0,03$ (1/доб); $k = 1,8$.

Підстановка цих параметрів у вираз (6.11) дає можливість обчислити значення напруження в будь-який момент часу.

Таблиця 7.2

Значення параметрів кривої релаксації

t , доб	0	20	40	60	$t \rightarrow \infty$
$\frac{\sigma}{E \varepsilon_0}$	1	0,477	0,379	0,361	0,357

Отримані результати показують, що при заданих характеристиках матеріалу напруження значно зменшуються в часі і при $t \rightarrow \infty$ складають $0,357 \sigma_0$.

7.4. Принцип Вольтерра

Лінійне співвідношення між напруженнями і деформаціями у формі (7.8) відрізняється від аналогічного співвідношення для пружного матеріалу тільки тим, що замість величини $1/E$ в законі Гука записаний інтегральний оператор $\frac{1}{E}(1+k)$. Звідси випливає просте правило розв'язання задачі теорії лінійної повзучості (лінійної в'язко-пружності), що зветься принципом Вольтерра. Принцип полягає в наступному:

Розв'язок задачі для в'язко-пружного стержня або стержневої системи може бути отриманий так само, як розв'язок аналогічної задачі для пружного стержня, якщо в процесі розв'язання з інтегральним оператором працювати як із пружними постійними.

У результаті розв'язок подається як добуток функції від пружних постійних і від просторових координат на відому функцію часу, що описує зовнішній силовий вплив. Далі слід замінити пружні постійні інтегральними операторами та зробити необхідні операції над ними.

Зокрема, якщо напружений стан конструкції в припущенні пружності її елементів не залежить від пружних постійних, то напружений стан конструкції, матеріал якої має властивість лінійної повзучості, збігається з розв'язком пружної задачі.

Звідси видно, що у всіх статично визначних в'язко-пружних системах напружений стан збігається з напруженим станом аналогічних пружних систем. Якщо зовнішні навантаження залишаються постійними в часі, то й напруження також не змінюються в часі. Вплив повзучості позначається тільки на числових значеннях деформацій і переміщень. Останні можуть бути знайдені, як і в пружних системах, за формулою Максвелла-Мора. Обмежуючись обліком тільки згинальних моментів і нормальних сил, запишемо формулу Максвелла-Мора для в'язко-пружних систем:

$$\Delta_{\Pi F} = \int \frac{1}{E} (1 + K) \frac{M_{\Pi} M_F}{J} ds + \int \frac{1}{E} (1 + K) \frac{N_{\Pi} N_F}{A} ds. \quad (7.12)$$

У тому випадку, коли зусилля M_F , N_F незмінні в часі, вираз (7.12) набуває вигляду

$$\Delta_{\Pi F} = \delta(t, t_0) \int \frac{M_{\Pi} M_F}{J} ds + \delta(t, t_0) \int \frac{N_{\Pi} N_F}{A} ds$$

або

$$\Delta_{\Pi F} = E_0 \delta(t, t_0) \Delta_{\Pi F}^{\text{упр}}. \quad (7.13)$$

Приклад. Визначити прогин кінця консольної балки (рис. 7.5, а), у момент часу $t_0 = 0$ завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням, постійним у часі. Матеріал балки є в'язко-пружним, для якого

$$K(t - \tau) = \frac{\gamma k}{E_0} e^{-\gamma(t - \tau)},$$

причому E_0 , k , γ – задані постійні.

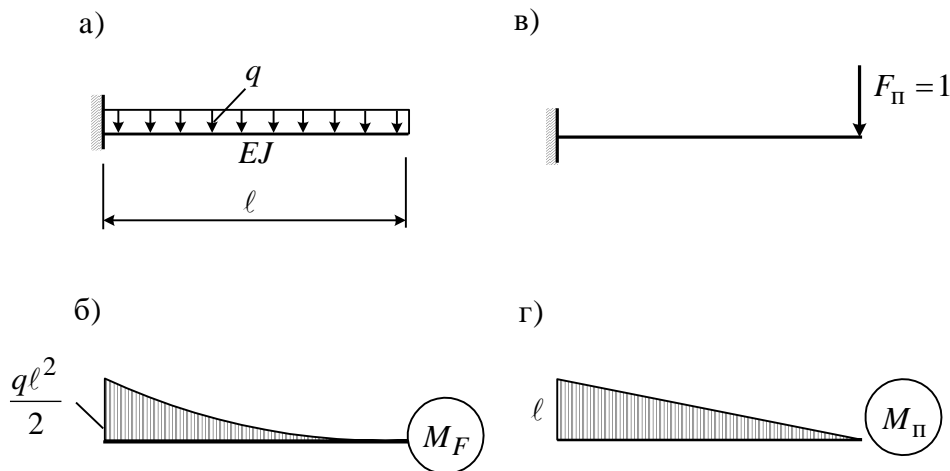


Рис. 7.5. Схема в'язко-пружної балки

Переміщення кінця пружної консолі y_0 знайдемо, побудувавши необхідні епюри M_{Π} , M_q (рис. 7.5, б-г) і обчисливши інтеграл Мору:

$$y_0 = \frac{q\ell^4}{8E_0J}.$$

На підставі принципу Вольтерра переміщення в момент часу t можна одержати з рівності (7.13), причому

$$E_0\delta(t, t_0) = 1 + \int_0^t \gamma k e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = 1 + k(1 - e^{-\gamma t}).$$

$$\text{Отже, } y(t) = \left[1 + k(1 - e^{-\gamma t})\right] \frac{q\ell^4}{8E_0J}.$$

Як видно, при постійному навантаженні прогин змінюється в часі за експонентним законом, досягаючи при $t \rightarrow \infty$ граничного значення

$$y_{\infty} = (1 + k)y_0.$$

Бібліографічний список

1. Дж. Мейз. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Изд-во «Мир», 1974. – 318с.
2. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. – М.: Изд-во «Мир», 1965. – 199 с.
3. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 247 с.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 390 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 675 с.
6. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1957. – 372 с.
7. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел. – М.: Изд. ин. лит., 1956. – 398 с.
8. Соколовский В.В. Теория пластичности. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
9. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.: ОНТИ, 1934. – 445 с.
10. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
11. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
12. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. – М.: Изд-во Ассоц. стр. вузов, 2002. – 319 с.
13. Хан Х. Теория упругости / Пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 797 с.
15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
16. Argyris J.H., Kelsey S. Energy Theorems and Structural Analysis. – London: Butterworth, 1960; Part I reprinted from Aircr. Engrg., 26, Oct-Nov 1954 and 27, April-May 1955.
17. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
18. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 550 с.
19. Чихладзе Э.Д. Сопротивление материалов. – Харьков: УкрГАЗТ, 2002. – 362 с.
20. Малинин Н.М. Прикладная теория пластичности и текучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
21. Мироненко М.І. Інтегральні перетворення в теорії пружності. – Харків: РЦНІТ, 2003. – 439 с.
22. Жакин А.И. Тензорный анализ. Механика. Гравитация. – Курск: изд-во ТАС, 1998. – 294 с.
23. Жакин А.И. Механика сплошных сред. Лекции по дополнительным главам. – Харьков: ХГУ, 1993. – 177 с.