№922

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до контрольної роботи з розділу дисципліни
“*ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА*”
для студентів факультету УПП всіх форм навчання

Харків – 2010

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 21 квітня 2009 року, протокол № 7.

Методичні вказівки призначені для студентів факультету УПП денної і заочної форм навчання.

Укладачі:
доц. М.Є. Резуненко,
старш. викл. А.П. Рибалко

Рецензент
доц. О.А. Осмаєв

Вступ

Методичні вказівки містять мінімальну кількість теоретичного матеріалу та завдання контрольної роботи з теорії ймовірностей. Для більш фундаментального оволодіння необхідними навичками з даного предмета рекомендується ознайомлення з літературою, список якої надається. Кожен розділ методичних вказівок супроводжується прикладами розв'язання задач та посиланнями на відповідні завдання контрольної роботи.

Класичне означення ймовірності

Випадковою називається подія, що за деяких умов може відбутися або не відбутися.

Достовірною називається подія, що обов'язково відбудеться за даних умов; *неможливою* – подія, яка напевно не відбудеться за даних умов.

Несумісними називаються події, поява однієї з яких виключає можливість появи інших. Інакше – події *сумісні*.

Події називаються *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш вірогідною за іншу.

Повною називається множина подій, одна з яких обов'язково з'явиться в результаті випробування.

Елементарними подіями називається множина наслідків експерименту, що задовольняє умови *рівноможливості*, *несумісності та повноти.*

Імовірністю випадкової події A називається

$$\underline{P(A)=\frac{m}{n}}, \quad (1)$$

де n – загальна кількість елементарних наслідків експерименту,

m – кількість елементарних наслідків, що сприяють події A.

З класичного означення ймовірності випливає, що:

- ймовірність достовірної події дорівнює 1;

- ймовірність неможливої події дорівнює 0;
- $0 \le P(A) \le 1$.

Обчислення кількостей елементарних наслідків здійснюється безпосередньо або за допомогою формул комбінаторики (таблиця 1).

Таблиця 1 – Формули комбінаторики

Назва і формула	Зміст	Приклад
Перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	Кількість комбінацій, що складаються з одних і тих же n різних елементів та відрізняються лише порядком їх розташування	Кількість варіантів, як роздати три олівці різних кольорів трьом (очевидно різним) учням дорівнює $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
Розміщення $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	Кількість комбінацій по m елементів із множини n різних елементів, що відрізняються складом та/або порядком	Кількість варіантів, як роздати три олівці різних кольорів трьом учням з п'яти дорівнює $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
Сполучення $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	Кількість комбінацій по m елементів із множини n різних елементів, що відрізняються лише складом	Кількість варіантів, як роздати три простих олівці трьом учням з п'яти дорівнює $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

Приклад 1

Завдання 1.1 Комбінаторика

Скільки існує семизначних телефонних номерів таких, що: а) номер складається з будь-яких цифр від одного до трьох; б) номер складається з цифр від одного до семи без повтору; в) номер складається з будь-яких цифр без повтору; г) номер складається з трьох одиниць та чотирьох сімок?

Розв'язання:

а) оскільки існує три варіанти для кожної із семи цифр телефонного номера, то загалом варіантів N таких номерів буде $N = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$;

б) у даному випадку кількість номерів – це кількість комбінацій з семи різних цифр, що відрізняються лише порядком. Таких номерів $N = P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$;

в) для таких номерів обираються сім різних цифр з 10 можливих та розташовуються у різних послідовностях. Таким чином,

$$N = A_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 604800;$$

г) задача полягає у виборі трьох місць із семи для одиниць (місця, що залишаться, автоматично будуть зайняті сімками). Звичайно, при цьому не важливо, у якому порядку обираються місця для одиниць у номері. Різних варіантів обрати три місця із семи без урахування порядку $N = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$. (Можна навпаки: обирати місця для сімок, тоді $N = C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = 35$).

Приклад 2

Завдання 1.2 Класичне означення ймовірності

На картках написані букви А, Е, М, Р, С, Т, Й. Знайти ймовірність того, що: а) при викладанні всіх карток навмання вийде слово «МАЙСТЕР»; б) при викладанні чотирьох карток навмання вийде слово «ТЕМА».

Розв'язання

Скористаємось класичним означенням імовірності:

а) нехай подія A = «при викладанні карток навмання вийде слово «МАЙСТЕР». Загальна кількість елементарних наслідків n дорівнює кількості варіантів розкласти сім різних карток у всіх можливих порядках дорівнює $n = P_7 = 7! = 5040$. При цьому слову «МАЙСТЕР» відповідає лише одна з цих комбінацій, тобто $m = 1$. Тоді за формулою (1) отримаємо $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002$;

б) нехай подія B = «при викладанні чотирьох карток навмання вийде слово «ТЕМА». Загальна кількість елементарних наслідків n дорівнює кількості комбінацій по чотири картки з даних семи різних карток з урахуванням порядку: $n = A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$. Слову «ТЕМА» відповідає лише одна з цих комбінацій: $m = 1$. Тоді за формулою (1) отримаємо $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{840} \approx 0{,}0011.$

Приклад 3

Завдання 1.3 Класичне означення ймовірності; гіпергеометричний розподіл

У ящику є 12 деталей, чотири з яких − браковані. Навмання беруть п’ять. Знайти ймовірність того, що тільки три з них є годними.

Розв’язання

Скористаємось класичним означенням імовірності.

Нехай подія А = «три з обраних п’яти деталей є годними, дві – браковані». Загальна кількість елементарних наслідків n дорівнює кількості варіантів обрати п’ять деталей з 12. Згідно зі змістом задачі порядок відбору неважливий, тому $n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792$. Маємо $12–4=8$ годних деталей, тому є C_8^3 варіантів обрати три годні деталі з восьми годних. На кожен з них припадає C_4^2 варіантів обрати дві браковані деталі з чотирьох бракованих. Таким чином, події A сприяють $m = C_8^3 \cdot C_4^2 = \; = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 50$ елементарних наслідків. За формулою (1) отримаємо $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{792} \approx 0{,}063$.

Основні теореми теорії ймовірностей

Сумою $A + B$ подій A та B називається подія, що полягає в появі хоча б однієї з подій A та B (тобто появі $\boldsymbol{A}$ **або** $\boldsymbol{B}$ або обох).

Добутком $A \cdot B$ подій A та B називається подія, що полягає в сумісній появі подій A та B (тобто появі $\boldsymbol{A}$ **і** $\boldsymbol{B}$ одночасно).

Події A і $\overline{A}$ називаються *протилежними*, якщо вони несумісні та утворюють повну групу.

Теорема 1 Якщо A та B – несумісні події, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема 2 Якщо A і $\overline{A}$ – протилежні події, то

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема 3 Якщо A та B – незалежні події, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад 4

Завдання 1.4 Основні теореми теорії ймовірностей

Три стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Імовірності їх влучання дорівнюють відповідно 0,4; 0,7; 0,9. Яка ймовірність того, що: а) всі влучили; б) влучив лише один; в) в мішені дві пробоїни; г) хоча б один влучив у ціль?

Розв'язання

Нехай A_1= «1-й стрілець влучив», A_2= «2-й стрілець влучив», A_3= «3-й стрілець влучив». Тоді за умовою

$$P(A_1)=0{,}4;\; P(A_2)=0{,}7;\; P(A_3)=0{,}9.$$

Імовірності протилежних подій $\overline{A_1}$= «1-й стрілець не влучив», $\overline{A_2}$= «2-й стрілець не влучив», $\overline{A_3}$= «3-й стрілець не влучив» згідно з теоремою 2 дорівнюють:

$$P(\overline{A_1})=1-0{,}4=0{,}6;\; P(\overline{A_2})=1-0{,}7=0{,}3;\; P(\overline{A_3})=1-0{,}9=0{,}1.$$

а) якщо B= «всі влучили», то $B=A_1\cdot A_2\cdot A_3$. Оскільки A_1, A_2, A_3 – незалежні події, то згідно з теоремою 3

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}252.$$

б) якщо C= «влучив лише один», то

$$C=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3.$$

Оскільки всі доданки є несумісними, а складові добутків – незалежні, то згідно з теоремами 1 і 3 маємо

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}216;$$

в) якщо D= «в мішені дві пробоїни», то

$$D=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\;,$$
$$P(D)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}514;$$

г) нехай E= «хоча б один влучив у ціль». Розглянемо два способи розв'язання. Оскільки «хоча б один влучив у ціль»= «влучив один» або «влучили двоє» або «влучили троє», то

$$E = B + C + D,$$
$$P(E) = P(B) + P(C) + P(D) = 0{,}252 + 0{,}216 + 0{,}514 = 0{,}982.$$

Але зазвичай зручніше зауважити, що протилежною подією до E= «хоча б один влучив у ціль» буде $\overline{E}$= «жоден не влучив». При цьому $\overline{E} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$,

$$P(\overline{E}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}018,$$

і як наслідок,

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0{,}018 = 0{,}982.$$

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B, обчислена за умови, що відбулася подія A.

Теорема 4 Якщо A та B – залежні події, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема 5 Якщо A та B – сумісні події, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може відбутися лише за умови появи однієї з несумісних подій-гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$, що утворюють повну групу.

Нехай відомі ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ та відповідні умовні ймовірності $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A) \ldots P_{H_n}(A)$ події A.

За таких умов імовірність події A знаходиться за *формулою повної ймовірності:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Якщо відомо, що подія A відбулася, то ймовірність гіпотези H_k знаходиться за *формулою Байєса:*

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}.$$

Приклад 5

Завдання 1.5 Формула повної ймовірності, формула Байєса

На СТО обслуговуються вантажні та легкові автомобілі у співвідношенні 2:3. У 20 % вантажних та 10 % легкових машин несправними виявляються гальмівні колодки. Знайти ймовірність, що: а) у навмання взятої машини несправні гальмівні колодки; б) що машина виявиться вантажною, якщо відомо, що у ній виявились несправними гальмівні колодки.

Розв’язання

Нехай подія A= «машина, що прибула на СТО, має несправні гальмівні колодки». Як гіпотези обираємо події H_1= «прибула вантажна машина» та H_2= «прибула легкова машина».

Оскільки $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ від усіх машин, що обслуговуються на СТО, є вантажними, а решта – легковими, маємо ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = 2/5 = 0{,}4; \qquad P(H_2) = 3/5 = 0{,}6.$$

Умовні ймовірності несправностей гальмівних колодок для вантажних та легкових машин відповідно дорівнюють

$$P_{H_1}(A) = 0{,}2; \qquad P_{H_2}(A) = 0{,}1.$$

а) ймовірність того, що у навмання взятої машини несправні гальмівні колодки, знайдемо за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}14.$$

б) ймовірність того, що машина є вантажною, за умови, що у неї несправні гальмівні колодки, знайдемо за формулою Байєса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}2}{0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}1}=\frac{0{,}8}{0{,}14}=\frac{4}{7}.$$

Повторювання випробувань. Формула Бернуллі

Нехай відбувається n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися із заданою ймовірністю p і не відбутися з імовірністю $q=1-p$.

Імовірність $P_n(k)$, що в серії n незалежних випробувань подія A відбудеться рівно k разів, знаходиться за *формулою Бернуллі:*

$$\underline{P_n(k)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}. \qquad (2)$$

Як наслідок, можна також обчислити і ймовірність $P_n(k_1;k_2)=P_n(k_1\le k\le k_2)$ появи події A від k_1 до k_2 разів.

При цьому найімовірніше число k_0 появ події A в n незалежних випробуваннях визначається нерівністю

$$np-q\le k_0\le np+p.$$

Зауваження: k_0 має два значення, коли границі інтервалу є цілими числами, інакше – одне значення.

Приклад 6

Завдання 2.1 Повторювання випробувань. Формула Бернуллі

Імовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що з п’яти пострілів влучними будуть рівно три; не більше двох? Яке найімовірніше число влучень?

Розв’язання

У даному випадку маємо: $n=5$, $p=0{,}7$ і $q=1-0{,}7=0{,}3$. За формулою Бернуллі ймовірність того, що з п’яти пострілів влучними будуть рівно три $(k=3)$ дорівнює

$$P_5(3)=C_5^3\,p^3\,q^{5-3}=\frac{5!}{3!\,2!}(0{,}7)^3(0{,}3)^2=10\cdot 0{,}343\cdot 0.09=0{,}3087.$$

Імовірність того, що з п’яти пострілів влучними будуть не більше двох:

$$P_5(k\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=C_5^0\,p^0\,q^5+C_5^1\,p^1\,q^4+C_5^2\,p^2\,q^3=$$
$$=\frac{5!}{5!\,0!}(0{,}7)^0(0{,}3)^5+\frac{5!}{4!\,1!}(0{,}7)^1(0{,}3)^4+\frac{5!}{2!\,3!}(0{,}7)^2(0{,}3)^3\approx 0{,}163.$$

Найімовірніше число k_0 влучних пострілів задовольняє нерівність

$$5\cdot 0{,}7-0{,}3\le k_0\le 5\cdot 0{,}7+0{,}7.$$

Звідси $3{,}2\le k_0\le 4{,}2$, тобто найімовірніше, що стрілець влучить чотири рази при п’яти пострілах.

Асимптотичні формули

У випадках, коли кількість випробувань n – велика, обчислення ймовірностей $P_n(k)$ та $P_n(k_1;k_2)=P_n(k_1 \le k \le k_2)$ за допомогою формули Бернуллі виявляється неможливим.

У таблиці 2 наведено асимптотичні формули у відповідності до їх використання. Значення функцій $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ та $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ знаходять за таблицями (додатки А і Б відповідно).

Таблиця 2

Випадки застосування	Формула	Зауваження
n - велике $npq \ge 9$	*Локальна* теорема *Лапласа* $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$	$\varphi(-x)=\varphi(x)$ $\varphi(\pm\infty)\approx 0$
n - велике $npq \ge 9$	*Інтегральна* теорема *Лапласа* $P_n(k_1;k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$	$\Phi(-x)=-\Phi(x)$ $\Phi(-\infty)\approx -0{,}5$ $\Phi(+\infty)\approx 0{,}5$
n - велике $npq<9$ (малоймовірні)	Формула *Пуассона* $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda=np$	

Приклад 7

Завдання 2.2 Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Влітку 25 % усіх пасажирів залізниці становлять діти. Знайти ймовірність того, що в потязі, в якому їдуть 400 пасажирів: а) 120 дітей; б) від 80 до 100 дітей.

Розв'язання

Маємо масові повторні випробування: $n=400$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$, причому $npq=75\geq 9$.

а) $k=120$ і згідно з локальною теоремою Лапласа

$$P_{400}(120)\approx\frac{1}{\sqrt{75}}\varphi\left(\frac{120-400\cdot 0{,}25}{\sqrt{75}}\right)\approx 0{,}12\cdot\varphi(2{,}31)\approx 0{,}003;$$

б) $k_1=80,\ k_2=100$ і за інтегральною теоремою Лапласа отримаємо

$$P_{400}(80;100)\approx\Phi\left(\frac{100-400\cdot 0{,}25}{\sqrt{75}}\right)-\Phi\left(\frac{80-400\cdot 0{,}25}{\sqrt{75}}\right)\approx$$
$$\approx\Phi(0)-\Phi(-2{,}31)\approx\Phi(0)+\Phi(2{,}31)\approx 0+0{,}4893=0{,}4893.$$

Приклад 8

Завдання 2.3 Формула Пуассона

Імовірність випуску непрацездатного телевізора дорівнює 0,01. За тиждень завод виготовляє 200 телевізорів. Знайти ймовірність того, що рівно три з них будуть бракованими.

Розв'язання

Маємо масові повторні випробування: $n=200$, $p=0{,}01$, $q=0{,}99$. У даному випадку $npq=1{,}98<9$, тобто випробування багатократні та малоймовірні. Скористаємось формулою Пуассона з $k=3$, $\lambda=np=200\cdot 0{,}01=2$:

$$P_{200}(3)\approx\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx 0{,}18.$$

Дискретні випадкові величини (ДВВ)

Випадковою називається величина, що внаслідок експерименту набуває значення, заздалегідь невідомо яке.

Дискретною називається випадкова величина, що набуває окремі ізольовані значення з певними ймовірностями.

Законом розподілу ДВВ (дискретної випадкової величини) називається відповідність між можливими значеннями ДВВ та їх імовірностями. Найчастіше закон розподілу ДВВ X задається у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

У першому рядку перелічені всі можливі значення $x_1, \dots, x_n$ ДВВ X, у другому – відповідні їм імовірності $p_1, \dots, p_n$ ($\sum_i p_i = p_1 + \dots + p_n \equiv 1$).

Приклад 9

Завдання 3.1 Знаходження розподілу ДВВ

Імовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює $p = 0{,}8$. Скласти розподіл числа влучень при здійсненні трьох пострілів.

Розв’язання

Нехай X – ДВВ, що дорівнює числу влучень стрільцем при здійсненні трьох пострілів. Можливі значення X: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Імовірності p_i значень x_i знаходимо за формулою Бернуллі (2). У нашому випадку $n = 3$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$. Звідси:

$$p_1 = p(x_1) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}008;$$

$$p_2 = p(x_2) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot (0{,}8) \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}096;$$

$$p_3 = p(x_3) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$$

$$p_4 = p(x_4) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot (0{,}8)^3 \cdot 1 = 0{,}512.$$

Складаємо розподіл ДВВ X у вигляді таблиці:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Перевірка: $\sum_i p_i = 0{,}008+0{,}096+0{,}384+0{,}512=1.$

Функція розподілу та числові характеристики ДВВ

Функцією розподілу ймовірностей ДВВ X називається функція

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i\,, \qquad x \in R\,.$$

Властивості $F(x)$: 1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $\lim\limits_{-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$;

3) якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

4) $\underline{P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$. (3)

Математичним сподіванням $M(X)$ *ДВВ* X називається

$$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum x_i p_i}\,. \qquad (4)$$

Властивості $M(X)$: 1) $M(C) = C, \quad C = const$;

2) $M(CX) = CM(X)$;

3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ для незалежних X, Y.

Дисперсією $D(X)$ *ДВВ* X називається

$$\underline{D(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left(X^2\right) - \left(M^2(X)\right)}. \qquad (5)$$

Властивості $D(X)$: 1) $D(X) \ge 0$;

2) $D(C) = 0, \quad C = const$;

3) $D(CX) = C^2 D(X)$;

4) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ для незалежних X, Y.

Середнім квадратичним відхиленням називається

$$\underline{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}. \tag{6}$$

Приклад 10

Завдання 3.2 Дискретна випадкова величина

ДВВ X задана законом розподілу в табличній формі. Надано значення $x_0 = 5$.

x_i	2	4	5	6,5	7
p_i	0,21	0,12	?	0,3	0,1

Потрібно:

а) знайти невідому ймовірність p_i;

б) знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік;

в) знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ ДВВ X;

г) обчислити ймовірності $P(X < x_0)$, $P(X \le x_0)$.

Розв'язання:

а) з умови $\sum\limits_i p_i \equiv 1$ знайдемо невідому ймовірність p_3:

$$p_3 = 1 - (0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}3 + 0{,}1) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27,$$

звідки остаточно розподіл має вигляд

x_i	2	4	5	6,5	7
p_i	0,21	0,12	0,27	0,3	0,1

б) за означенням $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, тому:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2; \\ 0{,}21 & при \quad 2 < x \le 4; \\ 0{,}33 & при \quad 4 < x \le 5; \\ 0{,}6 & при \quad 5 < x \le 6{,}5; \\ 0{,}9 & при \quad 6{,}5 < x \le 7; \\ 1 & при \quad x > 7. \end{cases}$$

в) за формулами (4)-(6) знаходимо числові характеристики:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}21 + 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}27 + 6{,}5 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}1 = 4{,}9;$$

$$M\left(X^2\right) = 2^2 \cdot 0{,}21 + 4^2 \cdot 0{,}12 + 5^2 \cdot 0{,}27 + (6{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + 7^2 \cdot 0{,}1 = 27{,}085;$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M^2(X)\right) = 27{,}085 - (4{,}9)^2 = 3{,}075;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}075} \approx 1{,}754;$$

г) імовірність $P(X < 5)$ можна обчислити за формулою (3):

$$P(X < 5) = P(-\infty < X < 5) = F(5) - F(-\infty) = 0{,}33 - 0 = 0{,}33$$

або безпосередньо: $P(X < 5) = p_1 + p_2 = 0{,}21 + 0{,}12 = 0{,}33$.
Аналогічно,

$$P(X \le 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}27 = 0{,}6.$$

Приклад 11

Завдання 3.3 Властивості числових характеристик ДВВ)

Задані математичні сподівання та дисперсії двох незалежних випадкових величин: $M(X) = -2$, $M(Y) = 3$,

$D(X)=1$, $D(Y)=2{,}5$ та числа $a=5,\ b=-1,\ c=4$. Знайти: $M(aX+bY+c)$, $D(aX+bY+c)$, $M(XY)$, $\sigma(X-Y)$.

Розв’язання

$$M(aX+bY+c)=aM(X)+bM(Y)+c=5\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+4=-9;$$
$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)+0=5^2\cdot 1+(-1)^2\cdot 2{,}5=27{,}5;$$
$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)=(-2)\cdot 3=-6;$$
$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=1+2{,}5=3{,}5;$$
$$\sigma(X-Y)=\sqrt{D(X-Y)}=\sqrt{3{,}5}\approx 1{,}87.$$

Неперервні випадкові величини (НВВ)

На відміну від дискретної, значення неперервної випадкової величини заповнюють деякий проміжок числової осі.

НВВ X задається своєю функцією розподілу $F(x)=P(X<x)$ або *щільністю розподілу ймовірностей НВВ* X

$$f(x)=F'(x).$$

Як наслідок,
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz. \tag{7}$$

$F(x)$ також називається *інтегральною функцією* НВВ X, $f(x)$ – *диференціальною*.

Властивості $f(x)$: 1) $f(x)\ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv 1$;

3) $P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$ (8)

Крім того, для *НВВ* X імовірності потрапляння у проміжки $(\alpha;\beta)$, $(\alpha;\beta]$, $[\alpha;\beta)$ та $[\alpha;\beta]$ є рівними та можуть бути обчислені за допомогою функції розподілу $F(x)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Математичне сподівання $M(X)$ $НВВ$ X визначається формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \,. \tag{9}$$

Дисперсія $D(X)$ $НВВ$ X обчислюється за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2 \tag{10}$$

Для середнього квадратичного відхилення формула залишається незмінною: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Приклад 12

Завдання 4.1 Неперервна випадкова величина

Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} k(2-x), & x \in (0;2] \\ 0, & x \notin (0;2] \end{cases}$. Надані значення $x_1 = 1$; $x_2 = 4$. Потрібно:

а) знайти параметр k;
б) знайти функцію розподілу $F(x)$;
в) знайти числові характеристики НВВ X;
г) обчислити ймовірність $P(x_1 \le X \le x_2)$.

Розв'язання:

а) параметр k знайдемо згідно з властивістю 2 функції $f(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} k(2-x)dx = k\left(2x - \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^2 \right) = k\left(2\cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \left(2\cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right)\right) = 2k \equiv 1$$

Звідси $k = 1/2$, тобто щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \in (0; 2] \\ 0, & x \notin (0; 2] \end{cases};$$

б) функцію розподілу $F(x)$ знайдемо за формулою (7). Маємо:

при $x \le 0$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \equiv 0$;

при $0 < x \le 2$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int\limits_{0}^{x}\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)dz = \left(z - \dfrac{z^2}{4} \right)\Bigg|_0^x = x - \dfrac{x^2}{4}$;

при $x > 2$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int\limits_{0}^{2}\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)dz = \left(z - \dfrac{z^2}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 2 - \dfrac{2^2}{4} = 1.$

Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$;

в) числові характеристики НВВ X знайдемо за формулами (9), (10) та (6).

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2} x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6} = \frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(M(X)\right)^2 = \int\limits_{0}^{2} x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right)\Bigg|_0^2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{9};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0{,}4714;$$

г) імовірність $P(1 \le X \le 4)$ можна обчислити за формулою (8)

$$P(1<X<4)=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2=\left(2-\frac{2^2}{4}\right)-\left(1-\frac{1^2}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

або через функцію розподілу:

$$P(1\le X\le 4)=F(4)-F(1)=1-\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{x=1}=1-\left(1-\frac{1^2}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл $U(a;b)$.

Рівномірний закон $U(a;b)$ має два параметри $a,b\in R$.

Щільність розподілу має вигляд $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b]\\ 0, & x\notin(a;b]\end{cases}$,

функція розподілу – $F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$.

Числові характеристики обчислюються за формулами:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\qquad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Імовірність потрапляння в $(\alpha;\beta)$ при $a\le\alpha<\beta\le b$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показниковий розподіл $E(\lambda)$.

Показниковий закон має один параметр $\lambda>0$.

Щільність розподілу має вигляд $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$, функція розподілу – $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$.

Числові характеристики обчислюються за формулами:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Імовірність потрапляння в $(\alpha;\beta)$ при $0\le\alpha<\beta$:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Нормальний розподіл $N(a;\sigma)$.

Нормальний закон $N(a;\sigma)$ має два параметри $a\in R$ та $\sigma>0$.

Щільність розподілу має вигляд $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

функція розподілу – $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz$.

Числові характеристики обчислюються за формулами:

$$M(X)=a; \quad D(X)=\sigma^2; \quad \sigma(X)=\sigma.$$

Імовірність потрапляння в $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Імовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання не перебільшує δ, знаходиться за формулою

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приклад 13

Завдання 4.2 Основні закони розподілу НВВ

Виписати функції розподілу та щільності розподілу, знайти числові характеристики та обчислити ймовірності потрапляння в інтервал (α,β) для:

а) НВВ X, що розподілена за рівномірним законом з параметрами a та b;

б) НВВ Y, що розподілена за показниковим законом з параметром λ;

в) НВВ Z, що розподілена за нормальним законом з параметрами a та σ.

$$a=-2, b=4,\ \lambda=2,\ \sigma=3,\ \alpha=1,\ \beta=5.$$

Розв’язання:

а) НВВ X розподілена за рівномірним законом $U(a;b)=U(-2;4)$. Диференціальна та інтегральна функції НВВ X мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & x\in(-2;4]\\ 0, & x\notin(-2;4]\end{cases};\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x+2}{6}, & -2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}.$$

Числові характеристики дорівнюють:

$$M(X)=\frac{-2+4}{2}=1;\qquad D(X)=\frac{(4-(-2))^2}{12}=3;\ \sigma(X)=\sqrt{3}\approx 1{,}732.$$

Оскільки умова $a\le\alpha<\beta\le b$ не виконується, імовірність потрапляння НВВ X в інтервал $(1;5)$ знаходимо за загальною формулою для неперервних випадкових величин

$$P(1<X<5)=F(5)-F(1)=1-\left.\frac{x+2}{6}\right|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

б) НВВ Y розподілена за показниковим законом $E(\lambda)=E(2)$. Диференціальна та інтегральна функції НВВ Y мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2e^{-2x}, & x\geq 0\end{cases}; \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-2x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

Числові характеристики: $M(Y)=\dfrac{1}{2}$; $D(Y)=\dfrac{1}{4}$; $\sigma(Y)=\dfrac{1}{2}$.

Імовірність потрапляння Y в $(1;5)$: $P(1<Y<5)=e^{-2\cdot 1}-e^{-2\cdot 5}\approx 0{,}135$;

в) НВВ Z розподілена за нормальним законом $N(a;\sigma)=N(-2;3)$. Диференціальна та інтегральна функції НВВ Z мають вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}; \qquad F(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z+2)^2}{18}}dz.$$

Числові характеристики: $M(Z)=-2$; $D(Z)=9$; $\sigma(Z)=3$.

Імовірність потрапляння в інтервал $(1;5)$ знаходимо, користуючись таблицями значень функції $\Phi(x)$ (додаток Б):

$$P(1<Z<5)=\Phi\left(\frac{5+2}{3}\right)-\Phi\left(\frac{1+2}{3}\right)\approx\Phi(2{,}34)-\Phi(1)\approx 0{,}490-0{,}341=0{,}149.$$

Системи випадкових величин

Двовимірною випадковою величиною $(X;Y)$ називається величина, значення якої визначаються парою чисел $(x;y)$.

Двовимірна дискретна випадкова величина (ДДВВ) задається таблицею 3, в якій перелічені всі можливі пари чисел $(x_i;y_j)$ та відповідні ймовірності їх появи $p_{ij}=p(x_i;y_j)$ ($i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$). Звичайно, ці ймовірності задовольняють умову: $\sum\limits_{i,j}p_{ij}\equiv 1$.

Таблиця 3

Y	X			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}

Щоб знайти *закон розподілу компоненти* X ДДВВ $(X;Y)$, потрібно перелічити її значення x_i ($i=\overline{1,n}$), а ймовірності $p_i = p(x_i)$ цих значень знайти, сумуючи ймовірності в стовпцях:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	$p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1m}$	$p_{21}+p_{22}+\ldots+p_{2m}$	…	$p_{n1}+p_{n2}+\ldots+p_{nm}$

Аналогічно, щоб *знайти розподіл компоненти* Y, потрібно перелічити значення y_j ($j=\overline{1,m}$), а їх імовірності $p_j = p(y_j)$ знайти як суму в рядках:

Y	y_1	y_2	…	y_m
P	$p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{n1}$	$p_{12}+p_{22}+\ldots+p_{n2}$	…	$p_{1m}+p_{2m}+\ldots+p_{nm}$

Можна також побудувати *умовні закони розподілу компонент.* Нехай $p(x_i \mid y_j)$ – імовірність того, що $X=x_i$ за умови, що $Y=y_j$. *Умовним розподілом* X *при* $Y=y_j$ називається розподіл

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X \mid y_j)$	$p(x_1 \mid y_j)$	$p(x_2 \mid y_j)$	…	$p(x_n \mid y_j)$

Нехай $p(y_j \mid x_i)$ – імовірність того, що $Y=y_j$ за умови, що $X=x_i$. *Умовним розподілом* Y *при* $X=x_i$ називається розподіл

Y	y_1	y_2	…	y_m
$P(Y \mid x_i)$	$p(y_1 \mid x_i)$	$p(y_2 \mid x_i)$	…	$p(y_m \mid x_i)$

Умовні ймовірності знаходять за формулами:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i; y_j)}{p(y_j)}; \qquad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i; y_j)}{p(x_i)},$$

де $p_{ij} = p(x_i; y_j)$ – імовірності появи пари $(x_i; y_j)$, $p_i = p(x_i)$ – імовірність появи значення x_i, $p_j = p(y_j)$ – імовірності появи y_j.

Числові характеристики компонент X і Y знаходять як звичайно для дискретних випадкових величин, виходячи з безумовних законів розподілу X і Y. Зв’язок між компонентами двовимірної ВВ характеризують кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. *Кореляційний момент (коваріацію)* K_{xy} знаходять за формулою

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y), \tag{11}$$

коефіцієнт кореляції – $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (-1 \le r_{xy} \le 1).$ (12)

Якщо X та Y – незалежні, то $K_{xy} = r_{xy} = 0$.

Приклад 14

Завдання 5 Двовимірні випадкові величини

Надано закон розподілу дискретного випадкового вектора $(X; Y)$. Знайти:

а) закони розподілу його компонент, їх числові характеристики;

б) кореляційний момент і коефіцієнт кореляції складових X та Y;

в) умовний закон розподілу компоненти X при $Y = y_1$;

г) умовний закон розподілу компоненти Y при $X = x_3$.

Y \ X	-1	2	3
0	**0,3**	**0,1**	0,2
1	?	0,2	0,15

Розв'язання

Спочатку знайдемо невідому ймовірність $p(-1;2)$ у законі розподілу $(X;Y)$: $p(-1;2) = 1 - (0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}15) = 0{,}05$.

Y \ X	-1	2	3
0	**0,3**	**0,1**	0,2
1	0,05	0,2	0,15

а) закон розподілу компоненти X:

X	-1	2	3
P	0,35	0,3	0,35

Закон розподілу компоненти Y:

Y	0	1
P	0,6	0,4

Знаходимо математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне відхилення X та Y за формулами (4) – (6):

$$M(X) = (-1)\cdot 0{,}35 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}35 = 1{,}3;$$

$$D(X) = (-1)^2\cdot 0{,}35 + 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}35 - (1{,}3)^2 = 4{,}7 - 1{,}69 = 3{,}01;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3{,}01} \approx 1{,}76;$$

$$M(Y) = 0\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4;$$

$$D(Y) = 0^2\cdot 0{,}6 + 1^2\cdot 0{,}4 - (0{,}4)^2 = 0{,}24;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49;$$

б) кореляційний момент і коефіцієнт кореляції складових X та Y знаходимо за формулами (11) та (12):

$$M(XY) = 0 \cdot (-1) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 3 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}15 = 0{,}8$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = 0{,}8 - 1{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}28;$$

$$r_{xy} = \frac{0{,}28}{1{,}76 \cdot 0{,}49} \approx 0{,}325;$$

в) обчислимо умовні ймовірності X при $Y = y_1 = 0$:

$$p(x = -1 \mid y = 0) = \frac{p(-1;0)}{p(0)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2};$$

$$p(x = 2 \mid y = 0) = \frac{p(2;0)}{p(0)} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6};$$

$$p(x = 3 \mid y = 0) = \frac{p(3;0)}{p(0)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}.$$

Умовний закон розподілу компоненти X при $Y = 0$ має вигляд

X	-1	2	3
$P(X \mid Y = 0)$	$1/2$	$1/6$	$1/3$

Перевірка: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \equiv 1$.

г) обчислимо умовні ймовірності Y при $X = x_3 = 3$:

$$p(y = 0 \mid x = 3) = \frac{p(3;0)}{p(3)} = \frac{0{,}2}{0{,}35} = \frac{4}{7};$$

$$p(y = 1 \mid x = 3) = \frac{p(3;1)}{p(3)} = \frac{0{,}15}{0{,}35} = \frac{3}{7}.$$

Умовний закон розподілу компоненти Y при $X = 3$ має вигляд

Y	0	1
$P(Y \mid X = 3)$	$4/7$	$3/7$

Перевірка: $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\equiv 1$.

Завдання контрольної роботи

Завдання 1 Випадкові події

Комбінаторика. Класичне означення ймовірності. Основні теореми теорії ймовірностей. Формула повної ймовірності, формула Байєса

Варіант 1

1 Для проведення вступних іспитів утворюється комісія з трьох викладачів. Скільки різних комісій можна скласти з десяти викладачів кафедри?

2 На п'яти картках розрізної азбуки написані букви Т, М, Р, О, Ш. Дитина, що не вміє читати, викладає картки в ряд. Знайти ймовірність того, що в неї вийде слово „ШТОРМ".

3 У ящику 15 деталей, шість з яких − браковані. Навмання обирають сім. Знайти ймовірність, що тільки три з них будуть годні.

4 В урні чотири білих і три чорних кульки. З урни дістають кульку, відмічають її колір та повертають назад. Цю операцію повторюють тричі. Яка ймовірність того, що: а) всі кульки − білі; б) тільки одна з них біла; в) хоча б одна з кульок біла?

5 Статистика стверджує, що 5 % чоловіків та 0,25 % жінок страждають на дальтонізм. Перед отриманням водійських прав огляд офтальмолога проходить група курсантів, що складається з трьох жінок і дев'яти чоловіків. Навмання обраний курсант страждає на дальтонізм. Яка ймовірність того, що це чоловік?

Варіант 2

1 Код замка складається з трьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть бути використані шість цифр без повтору?

2 На прийомі індивідуальних завдань навколо викладача навмання розсаджуються дев'ять студентів. Знайти ймовірність того, що студенти А і В сядуть через одного студента.

3 У групі з 20 студентів шість навчаються за контрактом. Навмання відбирають п'ять. Знайти ймовірність, що серед них двоє навчаються за контрактом.

4 Імовірності влучання в ціль двома стрільцями дорівнюють 0,8 і 0,6 відповідно. Кожен з них робить по два постріли. Знайти ймовірність, що: а) буде тільки одне влучання в ціль; б) у ціль буде влучено.

5 У продаж надійшли телевізори трьох заводів у співвідношенні 1:2:4. Продукція першого заводу містить 10 % виробів з прихованим дефектом, другого − 7 %, третього − 4 %. Перевірений перед продажем телевізор виявився несправним. Яка ймовірність того, що він випущений на першому заводі?

Варіант 3

1 На залік з плавання прийшли три студентки та шість студентів. Скільки існує способів скласти з них чергу на доріжку, якщо поставлено умову студенток пропустити першими?

2 Абонент забув дві останні цифри семизначного телефонного номера, пам'ятав тільки, що вони різні. Яка ймовірність того, що він набрав потрібний номер?

3 На склад надійшла партія з 50 виробів, вісім з яких − з дефектом. Контролер навмання перевіряє 10 виробів. Знайти ймовірність, що половина з них годні.

4 У першій урні п'ять синіх і шість чорних кульок, у другій − чотири синіх і сім чорних, у третій – дев'ять синіх і дві чорних. З кожної урни навмання достають по одній.

Знайти ймовірність, що: а) усі вони чорного кольору; б) тільки одна з них синя; в) хоча б одна з них синя.

5 В офісі працюють два секретарі. Імовірність того, що перший з них зробить помилку, складаючи документ, дорівнює 0,05; а другий помилиться з імовірністю 0,1. Перший секретар складає дві третини всіх документів. Навмання перевірений документ виявився бездоганним. Знайти ймовірність того, що він був складений першим секретарем.

Варіант 4

1 У групі дев’ять студенток та 14 студентів. Скільки існує способів розбити їх на підгрупи по сім, вісім і вісім студентів для проведення лабораторних робіт?

2 Кинуто три монети. Знайти ймовірність того, що випало два герби.

3 На базу надійшло 25 однакових з виду верстатів. п’ятнадцять з них вироблені на заводі А, інші − на заводі В. Навмання відібрали п’ять верстатів. Знайти ймовірність того, що три з них вироблені на заводі А.

4 Пристрій складається з трьох вузлів. Імовірності їх відмови протягом доби дорівнюють 0,1; 0,2 і 0,3 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом доби: а) жоден з вузлів не відмовить; б) відмовить тільки один вузол; в) хоча б один з вузлів не відмовить.

5 Три стрільці зробили по одному пострілу у мішень. У мішені виявилось дві пробоїни. Яка ймовірність того, що перший стрілець не влучив, якщо ймовірність влучання для стрільців дорівнює 0,6; 0,7 і 0,9 відповідно?

Варіант 5

1 Скільки існує способів розкласти в ряд чотири білих, п’ять синіх і дві червоні кульки?

2 З п’яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д навмання беруть три та розкладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „ДВА”.

3 У бригаді вісім чоловіків і сім жінок. За табельними номерами відібрано п'ять людей. Знайти ймовірність того, що серед них три жінки.

4 Імовірності складання кваліфікаційного нормативу для трьох спортсменів дорівнюють відповідно 0,9; 0,6 і 0,5. Знайти ймовірність того, що: а) жоден зі спортсменів не складе норматив; б) тільки один складе; в) хоча б один складе норматив.

5 У залізничному потязі 15 вагонів, серед яких 10 пасажирських і п'ять багажних. Імовірність того, що у багажному вагоні треба міняти гальмівні колодки дорівнює 0,2, а у пасажирському − 0,1. Навмання обраний вагон потребує заміни колодок. Знайти ймовірність того, що він багажний.

Варіант 6

1 Скільки можна скласти різних буквосполучень по шість букв, використовуючи будь-які букви алфавіту?

2 Кинуто два гральні кубики. Яка ймовірність того, що в сумі вийде шість очок?

3 На полиці в бібліотеці стоїть 14 книжок, три з яких неправильно зброшуровані. Навмання беруть чотири книги. Знайти ймовірність того, що половина з них неправильно зброшурована.

4 Імовірності складання заліку трьома студентами дорівнюють 0,2; 0,5 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що: а) всі студенти складуть залік; б) тільки один студент складе залік; в) хоча б один складе залік.

5 Кількість вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, де розташована бензоколонка, відноситься до легкових як 2:1. Імовірність того, що вантажна автомашина потребує заправки дорівнює 0,2; імовірність заправлення легкової автомашини дорівнює 0,3. На заправку під'їхала автомашина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

Варіант 7

1 Скільки існує семизначних телефонних номерів, що починаються з чотирьох двійок?

2 На прийомі індивідуальних завдань навколо викладача навмання розсаджуються вісім студентів. Знайти ймовірність того, що студенти А і В сядуть поруч.

3 В урні 11 чорних і дев'ять білих кульок. Навмання беруть сім. Знайти ймовірність того, що рівно дві з них − білі.

4 Імовірності влучання у ціль трьома стрільцями дорівнюють 0,5; 0,7 і 0,9 відповідно. Кожен з них робить по одому пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) всі влучили; б) влучив лише один; в) хоча б один влучив у ціль.

5 30 % всіх виробів у цеху виготовляє перший верстат, 20 % − другий, решту − третій верстат. Імовірність браку в роботі верстатів дорівнює 0,1; 0,05 і 0,2 відповідно. Навмання перевірений виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що він виготовлений першим верстатом.

Варіант 8

1 Множина містить вісім букв алфавіту. Скільки існує способів скласти буквосполучення по п'ять букв з цієї множини, якщо допускається їх повторення?

2 Яка ймовірність того, що студенти А і В будуть стояти поруч у черзі за стипендією, якщо в групі 10 студентів?

3 З колоди в 32 карти навмання беруть шість. Знайти ймовірність, що чотири з них пікової масті.

4 У друкарні є три друкарських машини. Імовірності безперебійної роботи протягом кварталу дорівнюють 0,6, 0,8 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом кварталу: а) усі машини будуть працювати безперебійно; б) хоча б одна з них буде працювати безперебійно.

5 У першій урні п'ять білих кульок та чотири чорних, у другій − три білих і дві чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, три кульки. Потім із другої

урни навмання дістають кульку. Яка ймовірність, що вона чорна?

Варіант 9

1 Для участі у конференції обирається делегація з трьох студентів групи. Скільки різних делегацій можна скласти, якщо в групі навчаються 10 студентів та 12 студенток?

2 З колоди в 52 карти дістали три. Яка ймовірність того, що всі вони бубнової масті?

3 У коробці 12 виробів, сім з яких − фарбовані. Навмання достають шість. Знайти ймовірність того, що третина з них − фарбовані.

4 У лотереї А серед 1000 білетів є 10 виграшних, в лотереї В − 15 виграшних білетів з 500. Людина купує по одному білету з кожної лотереї. Знайти ймовірність отримати виграш: а) в обох лотереях; б) тільки в одній; в) хоча б в одній.

5 Три стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Імовірності їх влучання дорівнюють відповідно 0,3; 0,5; 0,9. Яка ймовірність того, що третій стрілець промахнувся, якщо в мішені виявились дві пробоїни?

Варіант 10

1 Код замка складається з чотирьох цифр. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть бути використані п’ять цифр без повтору?

2 На картках написані букви С, Т, А, Т, И, С, Т, И, К, А. Навмання беруть чотири з них та викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „ТИСК”.

3 Студент знає 30 з 40 екзаменаційних питань. Кожен білет містить п’ять питань. Знайти ймовірність того, що студент відповість правильно тільки на три з них.

4 Імовірність безпомилкового набору програми першим оператором дорівнює 0,7, другим − 0,9. Кожен з операторів набирає по дві програми. Знайти ймовірність,

що: а) усі програми набрані правильно; б) тільки одна містить помилку; В) хоча б одна з програм безпомилкова.

5 Пристрій, що складається з двох вузлів, проходить випробування. Імовірності безвідмовної роботи вузлів протягом часу Т дорівнюють 0,5 і 0,8 відповідно. Через час Т виявилось, що пристрій несправний. Знайти ймовірність того, що відмовили обидва вузли.

Варіант 11

1 У касу утворюється черга студентів групи, де вчиться вісім студентів і дві студентки. Скільки існує способів скласти з них чергу, якщо поставлено умову студенток пропустити першими?

2 Кинуто три гральні кубики. Яка ймовірність того, що в сумі випало чотири очки?

3 У ящику 20 деталей, вісім з яких − браковані. Навмання обирають дев’ять. Знайти ймовірність того, що тільки три з них будуть годні.

4 В урні вісім білих і сім чорних кульок. З урни дістають кульку, відмічають її колір та повертають назад. Цю операцію повторюють тричі. Яка ймовірність того, що: а) всі кульки − чорні; б) тільки одна з них біла; в) хоча б одна з кульок чорна?

5 Статистика стверджує, що 5 % чоловіків та 0,25 % жінок страждають на дальтонізм. Перед отриманням водійських прав огляд офтальмолога проходить група курсантів, що складається з шести жінок і 14 чоловіків. Навмання обраний курсант страждає на дальтонізм. Яка ймовірність того, що це чоловік?

Варіант 12

1 У групі навчаються 10 студенток та 12 студентів. Скільки існує способів розбити їх на підгрупи по сім, сім і вісім студентів для проведення лабораторної роботи?

2 З чотирьох карток з буквами І, К, Л, Р навмання беруть три та розкладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „РІК”.

3 На склад надійшла партія з 30 виробів, шість з яких − з дефектом. Контролер навмання перевіряє п’ять виробів. Знайти ймовірність, що три з них годні.

4 Імовірності влучання в ціль двома стрільцями дорівнюють 0,7 і 0,9 відповідно. Кожен з них робить по два постріли. Знайти ймовірність того, що: а) буде рівно два влучання в ціль; б) хоча б одне влучання.

5 У продаж надійшли телевізори трьох заводів у співвідношенні 3:1:4. Продукція першого заводу містить 3 % виробів з прихованим дефектом, другого − 8 %, третього − 5 %. Перевірений перед продажем телевізор виявився справним. Яка ймовірність того, що він випущений на третьому заводі?

Варіант 13

1 Скільки існує способів розкласти в ряд три жовтих, чотири синіх, п’ять білих і одну чорну кульки?

2 Яка ймовірність того, що студенти А і В будуть стояти через одного в черзі за стипендією, якщо в групі 12 студентів?

3 На базу надійшло 20 однакових з виду верстатів. Дванадцять з них вироблені на заводі А, інші − на заводі В. Навмання відібрали шість верстатів. Знайти ймовірність того, що два з них вироблені на заводі А.

4 У першій урні дві синіх і 10 червоних кульок, у другій − шість синіх і три червоних, у третій – п’ять синіх і п’ять червоних. З кожної урни навмання достають по одній кульці. Знайти ймовірність, що: а) всі вони червоного кольору; б) тільки одна з них синя; в) хоча б одна з них червона.

5 В офісі працюють два секретарі. Імовірність того, що перший з них зробить помилку, складаючи документ, дорівнює 0,2; другий – з імовірністю 0,1. Перший секретар складає 40 % усіх документів. Навмання перевірений

документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що він був складений першим секретарем.

Варіант 14

1 Скільки можна скласти різних буквосполучень по п'ять букв, використовуючи 15 букв алфавіту без повторення?

2 З колоди в 52 карти дістали три. Яка ймовірність того, що це трійка, сімка і туз?

3 У групі з 25 студентів 10 навчаються за контрактом. Навмання відбирають сім. Знайти ймовірність того, що серед них троє навчаються за контрактом.

4 Пристрій складається з трьох вузлів. Імовірності їх відмови протягом доби дорівнюють 0,05; 0,1, 0,15 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом доби: а) всі вузли відмовлять; б) відмовить тільки один вузол; в) хоча б один з вузлів не відмовить.

5 Три стрільці зробили по одному пострілу у мішень. У мішені виявилась тільки одна пробоїна. Яка ймовірність того, що тільки другий стрілець влучив, якщо ймовірність влучання для стрільців дорівнює 0,7; 0,9 і 0,5 відповідно?

Варіант 15

1 Скільки існує шестизначних телефонних номерів, що починаються з трьох трійок?

2 На складання індивідуальних завдань до викладача навмання утворюється черга з восьми студентів. Знайти ймовірність того, що студенти А, В і С стоять поруч у черзі?

3 На полиці в бібліотеці стоїть 19 книжок, чотири з яких неправильно зброшуровані. Навмання беруть п'ять книг. Знайти ймовірність того, що дві з них неправильно зброшуровані.

4 Імовірності складання кваліфікаційного нормативу для трьох спортсменів дорівнюють відповідно 0,8; 0,7 і 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) усі спортсмени складуть

норматив; б) тільки двоє; в) хоча б один спортсмен складе норматив.

5 У залізничному потязі 20 вагонів, серед яких 16 пасажирських і чотири багажних. Імовірність того, що у багажному вагоні треба міняти гальмівні колодки, дорівнює 0,1, а у пасажирському − 0,05. Навмання обраний вагон потребує заміни колодок. Знайти ймовірність того, що він багажний.

Варіант 16

1 Множина містить 10 букв алфавіту. Скільки існує способів скласти буквосполучення по чотири букви з цієї множини, якщо допускається їх повторення?

2 Кинуто два гральні кубики. Яка ймовірність того, що добуток очок дорівнює шести?

3 У бригаді 13 чоловіків і п’ять жінок. За табельними номерами відібрано сім людей. Знайти ймовірність того, що серед них чотири жінки.

4 Імовірності складання заліку трьома студентами дорівнюють 0,8; 0,6 і 0,7 відповідно. Знайти ймовірність того, що: а) жоден студент не складе залік; б) двоє студентів складуть залік; в) хоча б один студент складе залік.

5 Кількість вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, де розташована бензоколонка, відноситься до легкових як 3:2. Імовірність того, що вантажна автомашина потребує заправлення, дорівнює 0,1; імовірність заправлення легкової автомашини дорівнює 0,2. На заправку під’їхала автомашина. Знайти ймовірність того, що це легкова машина.

Варіант 17

1 Для проведення вступних іспитів утворюється комісія з чотирьох викладачів. Скільки різних комісій можна скласти з дванадцяти викладачів кафедри?

2 У першій урні знаходяться кульки з номерами 1, 2, 3, 4, 5, а в другій – з номерами 6, 7, 8, 9, 10. З кожної урни беруть по одній кульці. Яка ймовірність того, що сума номерів дорівнює 11?

3 У коробці сім темних і 14 світлих краваток. Навмання беруть п'ять. Знайти ймовірність того, що рівно три з них − світлі.

4 Імовірності влучання у ціль трьома стрільцями дорівнюють 0,6; 0,8 і 0,9 відповідно. Кожен з них робить по одому пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) жоден не влучив; б) влучили двоє; в) хоча б один влучив у ціль.

5 40 % всіх виробів у цеху виготовляє перший верстат, 10 % − другий, решту − третій верстат. Імовірність браку в роботі верстатів дорівнює 0,2; 0,15 і 0,05 відповідно. Навмання перевірений виріб виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що він виготовлений другим верстатом.

Варіант 18

1 Код замка складається з двох цифр та двох букв. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть бути використані будь-які цифри та п'ять букв без повтору?

2 На прийомі індивідуальних завдань навколо викладача навмання розсаджуються сім студентів. Знайти ймовірність того, що між студентами А і В сядуть два інших студенти.

3 З колоди в 52 карти навмання беруть сім. Знайти ймовірність того, що три з них червової масті.

4 У друкарні є три друкарських машини. Імовірності безперебійної роботи протягом кварталу дорівнюють 0,5; 0,7 і 0,8 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом кварталу: а) усі машини потребують ремонту; б) одна з них буде працювати безперебійно.

5 У першій урні сім білих кульок та шість чорних, у другій – п'ять білих і вісім чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, дві кульки. Потім із другої урни навмання дістають кульку. Яка ймовірність, що вона біла?

Варіант 19

1 На залік з плавання прийшли чотири студентки та п’ять студентів. Скільки існує способів скласти з них чергу на доріжку, якщо поставлено умову студенток пропустити першими?

2 З шести карток з буквами А, Б, В, Г, Д, О навмання беруть чотири та розкладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „ВОДА”.

3 У коробці 15 виробів, вісім з яких − фарбовані. Навмання дістають сім. Знайти ймовірність того, що чотири з них − фарбовані.

4 У лотереї А серед 100 білетів є п’ять виграшних, в лотереї В − 25 виграшних білетів з 1000. Людина купує по одному білету з кожної лотереї. Знайти ймовірність отримати виграш: а) в обох лотереях; б) лише в одній; в) хоча б в одній.

5 Три стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Імовірності їх влучання дорівнюють відповідно 0,4; 0,6; 0,9. Яка ймовірність того, що перший стрілець влучив у ціль, якщо в мішені виявилась одна пробоїна?

Варіант 20

1 У групі шість студенток та 15 студентів. Скільки існує способів розбити їх на підгрупи по шість, сім і вісім студентів для проведення лабораторних робіт?

2 У кожній з двох урн знаходяться кульки з номерами 1, 2, 3, 4. З кожної урни беруть по одній кульці. Яка ймовірність того, що сума номерів дорівнює шести?

3 Студент вивчив 27 з 30 екзаменаційних питань. Кожен білет містить п’ять питань. Знайти ймовірність того, що студент відповість правильно тільки на чотири з них.

4 Імовірність безпомилкового набору програми першим оператором дорівнює 0,4, другим − 0,7. Кожен з операторів набирає по дві програми. Знайти ймовірність, що: а) усі програми набрані неправильно; б) дві містять помилки; в) хоча б одна з програм безпомилкова.

5 Пристрій, що складається з двох вузлів, проходить випробування. Імовірності безвідмовної роботи вузлів протягом часу Т дорівнюють 0,9 і 0,6 відповідно. Через час Т виявилось, що пристрій несправний. Знайти ймовірність того, що відмовив тільки перший вузол.

Варіант 21

1 Скільки існує способів розкласти в ряд сім чорних, дві білі і три зелені кульки?

2 На картках написані букви А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А. Навмання беруть шість з них та викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „АРКАДА”.

3 У ящику 25 деталей, 10 з яких − браковані. Навмання обирають п’ять. Знайти ймовірність, що тільки три з них будуть годні.

4 Імовірності складання кваліфікаційного нормативу для трьох спортсменів дорівнюють відповідно 0,8; 0,9 і 0,6. Знайти ймовірність того, що: а) усі спортсмени складуть норматив; б) тільки один; в) хоча б один.

5 Статистика стверджує, що 5 % чоловіків та 0,25 % жінок страждають на дальтонізм. Перед отриманням водійських прав огляд офтальмолога проходить група курсантів, що складається з 10 жінок і семи чоловіків. Навмання обраний курсант страждає на дальтонізм. Яка ймовірність того, що це жінка?

Варіант 22

1 На картках написані букви А, Б, В, Г, Д, Е. Скільки можна скласти з них різних буквосполучень по чотири букви?

2 З колоди в 52 карти дістали три. Яка ймовірність того, що всі вони однієї масті?

3 У групі з 30 студентів 12 навчаються за контрактом. Навмання відбирають сім. Знайти ймовірність того, що чотири з них навчаються за контрактом.

4 Імовірності влучання в ціль двома стрільцями дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Кожен з них робить по два постріли. Знайти ймовірність, що: а) буде тільки одне влучання в ціль; б) хоча б одне влучання.

5 У продаж надійшли телевізори трьох заводів у співвідношенні 4:3:2. Продукція першого заводу містить 15 % виробів з прихованим дефектом, другого − 2 %, третього − 3 %. Перевірений перед продажем телевізор виявився несправним. Яка ймовірність того, що він випущений на другому заводі?

Варіант 23

1 Скільки існує семизначних телефонних номерів, що починаються з двох сімок?

2 На прийомі індивідуальних завдань навколо викладача навмання розсаджуються шість студентів. Знайти ймовірність того, що студенти A, B і C сядуть поруч.

3 На склад надійшла партія з 60 виробів, 12 з яких − з дефектом. Контролер навмання перевіряє 10 виробів. Знайти ймовірність, що три з них годні.

4 У першій урні п’ять синіх і вісім білих кульок, у другій − сім синіх і дев’ять білих, у третій − 15 синіх і шість білих. З кожної урни навмання дістають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що: а) всі вони синього кольору; б) тільки одна з них біла; в) хоча б одна з них біла.

5 В офісі працюють два секретарі. Імовірність того, що перший з них зробить помилку, складаючи документ, дорівнює 0,3; другий – з імовірністю 0,2. Кожен із секретарів складає половину всіх документів. Навмання перевірений документ виявився без помилки. Знайти ймовірність того, що він був складений першим секретарем.

Варіант 24

1 Множина містить дев’ять букв алфавіту. Скільки існує способів скласти буквосполучення по три букви з цієї множини, якщо повторення їх не допускається?

2 Кинуто два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на них дорівнює восьми.

3 На базу надійшли 30 однакових з виду верстатів. Десять з них вироблені на заводі А, інші − на заводі В. Навмання відібрали 10 верстатів. Яка ймовірність того, що п'ять з них вироблені на заводі А.

4 Пристрій складається з трьох вузлів. Імовірності їх відмови протягом доби дорівнюють 0,07; 0,1 і 0,14 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом доби: а) жоден з вузлів не відмовить; б) відмовлять два вузли; в) хоча б один з вузлів відмовить.

5 Три стрільці зробили по одному пострілу у мішень. У мішені виявилось дві пробоїни. Яка ймовірність того, що третій стрілець не влучив, якщо ймовірність влучання для стрільців дорівнює 0,8; 0,7 і 0,4 відповідно?

Варіант 25

1 Для участі у змаганнях створюється команда з п'яти студентів групи. Скільки варіантів скласти таку команду, якщо в групі навчаються 14 студентів та сім студенток?

2 Пасажир забув останню цифру чотиризначного коду камери схову, пам'ятав тільки, що це одна з цифр поточного року. Яка ймовірність того, що йому вдасться відкрити камеру схову?

3 На полиці в бібліотеці стоїть 17 книжок, п'ять з яких неправильно зброшуровані. Навмання беруть сім книг. Знайти ймовірність того, що три з них неправильно зброшуровані.

4 В урні 12 білих і вісім чорних кульок. З урни дістають кульку, відмічають її колір та повертають назад. Цю операцію повторюють тричі. Яка ймовірність того, що: а) всі кульки − білі; б) лише одна з них чорна; в) хоча б одна з кульок біла?

5 У залізничному потязі 13 вагонів, серед яких 10 пасажирських і три багажних. Ймовірність того, що у багажному вагоні треба міняти гальмівні колодки дорівнює 0,15, а у пасажирському − 0,05. Навмання обраний вагон

потребує заміни колодок. Знайти ймовірність того, що він пасажирський.

Варіант 26

1 Код замка складається з чотирьох цифр та однієї букви. Скільки існує комбінацій коду, якщо в кодуванні можуть бути використані шість цифр та сім букв?

2 У лотереї 1000 білетів, причому на один з них випадає виграш 100 грн, на п'ять − виграш в 20 грн, на 10 − виграш в 10 грн і на 100 − по 1 грн. Яка ймовірність виграти не менше 10 грн при покупці одного білета?

3 В бригаді п'ять чоловіків і 15 жінок. За табельними номерами відібрано сім людей. Знайти ймовірність того, що серед них три жінки.

4 Імовірності складання заліку трьома студентами дорівнюють 0,3; 0,9 і 0,8 відповідно. Знайти ймовірність того, що: а) всі студенти складуть залік; б) два студенти отримають залік; в) хоча б один складе залік.

5 Кількість вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, де розташована бензоколонка, відноситься до легкових як 3:1. Імовірність того, що вантажна автомашина потребує заправлення дорівнює 0,15; імовірність заправлення легкової автомашини дорівнює 0,25. На заправку під'їхала автомашина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

Варіант 27

1 У касу утворюється черга з 15 студентів та трьох викладачів. Скільки існує способів скласти з них чергу, якщо поставлено умову викладачів пропустити першими?

2 На картках написані букви А, К, А, Д, Е, М, І, Я. Навмання беруть чотири з них та викладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „ДАМА”.

3 В урні 13 чорних і 12 білих кульок. Навмання беруть вісім. Знайти ймовірність того, що рівно три з них − чорні.

4 Імовірності влучання у ціль трьома стрільцями дорівнюють 0,9; 0,8 і 0,4 відповідно. Кожен з них робить по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) всі влучили; б) влучили двоє; в) хоча б один влучив у ціль.

5 20 % всіх виробів в цеху виготовляє перший верстат, 50 % − другий, решту − третій верстат. Імовірність браку в роботі верстатів дорівнює 0,2; 0,1 і 0,3 відповідно. Навмання перевірений виріб виявився годним. Знайти ймовірність того, що він виготовлений третім верстатом.

Варіант 28

1 На кафедрі працюють 13 викладачів. Під час вступних іспитів усі вони розподіляються по комісіях, що складаються з чотирьох, п'яти та шести викладачів. Скільки існує способів формування таких комісій?

2 Із семи карток з буквами Д, Е, Ж, З, І, К, Л навмання беруть чотири та розкладають у ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово „ЖЕЗЛ".

3 З колоди в 32 карти навмання беруть п'ять. Знайти ймовірність, що дві з них бубнової масті.

4 У друкарні є дві друкарські машини. Імовірності безперебійної роботи протягом кварталу дорівнюють 0,7 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що протягом кварталу: а) обидві машини будуть працювати безперебійно; б) хоча б одна з них буде працювати безперебійно; в) тільки одна.

5 У першій урні дві білих та шість чорних кульок, у другій – п'ять білих і три чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, три кульки. Потім із другої урни навмання дістають кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?

Варіант 29

1 Скільки існує варіантів розкласти в ряд три зелених, чотири синіх, шість чорних і одну білу кульки?

2 Яка ймовірність відкрити замок сейфа навмання, якщо код складається з п’яти довільних цифр?

3 Студент знає 20 з 25 екзаменаційних питань. Кожен білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що студент відповість правильно тільки на два з них.

4 У лотереї А серед 500 білетів є п’ять виграшних, в лотереї В − 10 виграшних білетів з 500. Людина купує по одному білету з кожної лотереї. Знайти ймовірність отримати виграш: а) в обох лотереях; б) тільки в одній; в) хоча б в одній.

5 Три стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Імовірності їх влучання дорівнюють відповідно 0,6; 0,4; 0,8. Яка ймовірність того, що другий стрілець промахнувся, якщо в мішені виявились дві пробоїни?

Варіант 30

1 На картках написано літери: М, О, Н, Т, Е, Р. Скільки можна скласти різних буквосполучень по шість букв за допомогою цих карток?

2 Код камери схову містить одну букву від А до Д і три довільні цифри. Знайти ймовірність відкрити камеру схову пасажиром, що пам’ятає тільки букву з її коду.

3 У коробці 18 виробів, п’ять з яких − фарбовані. Навмання дістають шість. Знайти ймовірність того, що половина з них − фарбовані.

4 Імовірність безпомилкового набору програми першим оператором дорівнює 0,4, другим − 0,5. Кожен з операторів набирає по дві програми. Знайти ймовірність, що: а) усі програми набрані правильно; б) три програми містять помилки; в) хоча б одна з програм безпомилкова.

5 Пристрій, що складається з двох вузлів проходить випробування. Імовірності безвідмовної роботи вузлів протягом часу Т дорівнюють 0,7 і 0,6 відповідно. Через час Т виявилось, що пристрій несправний. Знайти ймовірність того, що відмовили обидва вузли.

Завдання 2 Повторювання випробувань

Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона

Варіант 1

1 Гральний кубик кидають сім раз. Що ймовірніше: кількість очок, кратна трьом, випаде не більше двох раз чи не менше п’яти?

2 Імовірність безпомилкової передачі символу по лінії зв’язку дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 200 символів безпомилково будуть передані: а) 180; б) більше 160.

3 Лівші складають 1 %. Знайти ймовірність того, що серед 300 чоловік буде лише два лівші.

Варіант 2

1 Імовірність влучення спортсменом у ціль дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з шести пострілів влучними будуть не менше чотирьох?

2 Влітку 20 % всіх пасажирів залізниці становлять діти. Знайти ймовірність того, що в потязі, в якому їдуть 350 пасажирів: а) 70 дітей; б) менше 100 дітей.

3 Імовірність браку в роботі верстата дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей, випущених верстатом, буде одна бракована.

Варіант 3

1 Імовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з п’яти поставлених на контроль телевізорів протягом року вийдуть з ладу не більше двох.

2 За статистикою 25 % людей мають сірі очі. Яка ймовірність того, що з 100 новонароджених: а) 20 сіроохих; б) не більше 40 сіроохих?

3 Імовірність нещасного випадку, який може статися з робітником на виробництві протягом року, дорівнює 0, 0001. У цеху працює 2000 чоловік. Яка ймовірність того, що протягом року нещасного випадку не станеться?

Варіант 4

1 Що ймовірніше: виграти у рівносильного суперника не менше трьох партій із чотирьох чи не менше п’яти партій із семи?

2 Імовірність помилки при наборі сторінки тексту оператором ЕОМ дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що в книжці, що містить 120 сторінок, помилки виявляться: а) на 10 сторінках; б) не більше ніж на 35 сторінках?

3 У партії з 8000 виробів 40 бракованих. Навмання перевіряють 50. Яка ймовірність того, що серед них буде виявлено два бракованих?

Варіант 5

1 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з восьми потягів, що прибувають на станцію протягом години, вчасно прибудуть не менше семи.

2 70 % холодильників, що виробляє завод, витримують гарантійний термін. Знайти ймовірність того, що із 100 холодильників гарантійний термін витримають: а) 80; б) від 70 до 100.

3 Імовірність помилки абонента при наборі телефонного номера дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що з 200 абонентів помиляться при наборі двоє?

Варіант 6

1 Вироби високої якості становлять 70 % всієї продукції. Для перевірки взято навмання сім виробів. Що ймовірніше виявиться: серед них чотири високоякісних чи шість високоякісних?

2 Гральний кубик кинуто 100 раз. Яка ймовірність того, що одне очко випаде: а) 15 раз; б) не більше 20 раз?

3 Імовірність спотворення символу при передачі тексту радіотелеграфною станцією дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що в тексті, що містить 500 символів, буде не більше двох помилок.

Варіант 7

1 У родині п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них: а) два хлопчики; б) хоча б один хлопчик. (Імовірність народження хлопчика вважати рівною 0,51.)

2 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 100 потягів спізняться: а) 23; б) від 20 до 26.

3 Імовірність того, що у футбольному матчі буде забито більше 10 голів, дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що в 30 матчах один раз було забито більше 10 голів?

Варіант 8

1 Монету кидають дев'ять раз. Яка ймовірність того, що герб випаде не менше трьох і не більше семи раз?

2 Імовірність наявності прихованого дефекту в новому кодовому замку дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 100 замків дефект є: а) у 23; б) не менше, ніж у 20.

3 Імовірність того, що в даний момент у банкоматі немає грошей, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що один з 30 студентів групи не зміг отримати стипендію в банкоматі через відсутність грошей у ньому.

Варіант 9

1 У цеху шість автоматичних витяжних пристроїв. Імовірність того, що пристрій увімкнений, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент у цеху працює не менше половини витяжних пристроїв.

2 Знайти ймовірність, що з 50 новонароджених: а) 25 хлопчиків; б) не менше 20 хлопчиків. (Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51.)

3 У середньому 0,1 % покупців супермаркету повертають покупку. Яка ймовірність того, що з 200 покупців покупку поверне тільки один?

Варіант 10

1 Імовірність перевитрати води протягом доби деяким районом міста дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що за тиждень перевитрата води буде зафіксована не більше двох діб.

2 Монету кидають 400 раз. Яка ймовірність того, що герб випаде: а) 250 раз; б) від 200 до 250 раз.

3 Імовірність того, що формула в підручнику є помилковою, дорівнює 0,005. У підручнику 86 формул. Яка ймовірність того, що всі вони правильні?

Варіант 11

1 Гральний кубик кидають вісім раз. Знайти ймовірність, що шість очок випаде: а) не більше одного разу; б) не менше двох раз?

2 Імовірність безпомилкової передачі символу по лінії зв'язку дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 250 символів безпомилково будуть передані: а) 220; б) від 200 до 230.

3 Лівші складають 1 %. Знайти ймовірність того, що серед 200 чоловік лівшів не виявиться.

Варіант 12

1 Імовірність влучення спортсменом у ціль дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число k_0 влучень у ціль та $P_n(k_0)$ при п'яти пострілах.

2 Улітку 25 % всіх пасажирів залізниці становлять діти. Знайти ймовірність того, що в потязі, в якому їдуть 300 пасажирів: а) 90 дітей; б) від 60 до 100 дітей.

3 Імовірність браку в роботі верстата дорівнює 0,009. Знайти ймовірність того, що серед 100 деталей, випущених верстатом, буде не більше двох бракованих.

Варіант 13

1 Імовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з шести поставлених на контроль телевізорів протягом року вийде з ладу хоча б один.

2 За статистикою 25 % людей мають сірі очі. Яка ймовірність того, що зі 150 новонароджених: а) 45 сіроокиx; б) від 20 до 40 сіроокиx?

3 Імовірність нещасного випадку, який може статися з робітником на виробництві протягом року, дорівнює 0, 0001. У цеху працює 3000 чоловік. Яка ймовірність того, що протягом року станеться не більше одного нещасного випадку?

Варіант 14

1 Що ймовірніше: виграти у рівносильного суперника в шахи не менше двох партій із трьох чи не менше п'яти партій із восьми?

2 Імовірність помилки при наборі сторінки тексту оператором ЕОМ дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що в книжці, що містить 210 сторінок, помилки виявляться: а) на 20 сторінках; б) не менше, ніж на 15, і не більше, ніж на 25 сторінках?

3 У партії з 8000 виробів 50 бракованих. Навмання перевіряють 20. Яка ймовірність того, що серед них буде виявлено не більше одного бракованого?

Варіант 15

1 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що з 10 потягів, що прибувають на станцію протягом години, спізняться не більше двох.

2 70 % ксероксів, що виробляє завод, витримують гарантійний термін. Знайти ймовірність того, що зі 150 ксероксів гарантійний термін витримають: а) 100; б) не менше 120.

3 Імовірність помилки абонента при наборі телефонного номера дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що з 300 абонентів помилиться при наборі хоча б один?

Варіант 16

1 Вироби високої якості становлять 80 % всієї продукції. Для перевірки взято навмання вісім виробів. Знайти найімовірніше число високоякісних.

2 Гральний кубик кинуто 200 раз. Яка ймовірність того, що одне очко випаде: а) 35 раз; б) від 30 до 40 раз?

3 Імовірність спотворення символу при передачі тексту радіотелеграфною станцією дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що в тексті, який містить 200 символів помилок не буде виявлено.

Варіант 17

1 У родині четверо дітей. Знайти ймовірність того, що: а) хлопчиків та дівчат порівну; б) хоча б одна − дівчинка. (За статистикою, ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,49.)

2 Імовірність наявності прихованого дефекту в новому кодовому замку дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що зі 100 замків дефект є: а) в 15; б) не менше, ніж в 10, і не більше, ніж в 17 замках.

3 Імовірність того, що у футбольному матчі буде забито більше 10 голів, дорівнює 0,01. Яка ймовірність того,

що в 20 матчах жодного разу не було забито більше 10 голів?

Варіант 18

1 Монету кидають сім раз. Знайти найімовірніше число появ герба k_0 та $P_n(k_0)$.

2 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 150 потягів спізняться: а) 30; б) не більше 40.

3 Імовірність того, що в даний момент у банкоматі немає грошей, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що всі 25 викладачів кафедри змогли отримати заробітну плату в банкоматі.

Варіант 19

1 У цеху п'ять автоматичних витяжних пристроїв. Імовірність того, що пристрій увімкнений, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в даний момент у цеху працює не більше трьох витяжних пристроїв.

2 Знайти ймовірність, що із 70 новонароджених: а) 37 дівчаток; б) від 30 до 40 дівчаток. (Імовірність народження дівчинки дорівнює 0,49.)

3 У середньому 0,1 % покупців супермаркету повертають покупку. Яка ймовірність того, що із 700 покупців покупку повернуть не більше двох?

Варіант 20

1 Імовірність перевитрати води протягом доби деяким районом міста дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за п'ять днів перевитрата води буде зафіксована хоча б один раз.

2 Монету кидають 200 раз. Яка ймовірність того, що герб випаде: а) 80 раз; б) від 100 до 120 раз.

3 Імовірність того, що формула в підручнику є помилковою, дорівнює 0,005. У підручнику 120 формул. Яка ймовірність того, що одна з них помилкова?

Варіант 21

1 Гральний кубик кидають дев’ять раз. Знайти ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, випаде не менше чотирьох та не більше семи раз?

2 Імовірність безпомилкової передачі символу по лінії зв’язку дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з 100 символів безпомилково будуть передані: а) 80; б) не більше 90.

3 Лівші складають 1 %. Знайти ймовірність того, що серед 100 чоловік буде один лівша.

Варіант 22

1 Імовірність влучення спортсменом у ціль дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що з восьми пострілів влучними будуть не менше шести?

2 Улітку 20 % всіх пасажирів залізниці становлять діти. Знайти ймовірність того, що в потязі, в якому їдуть 200 пасажирів: а) 75 дітей; б) від 60 до 80 дітей.

3 Імовірність браку в роботі верстата дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 150 деталей, випущених верстатом, бракованих не буде.

Варіант 23

1 Імовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що із семи поставлених на контроль телевізорів протягом року вийде з ладу лише один.

2 За статистикою 25 % людей мають сірі очі. Яка ймовірність того, що з 200 новонароджених: а) 60 сірооких; б) від 40 до 50 сірооких?

3 Імовірність нещасного випадку, який може статися з робітником на виробництві протягом року, дорівнює 0, 0001. У цеху працює 1500 чоловік. Яка ймовірність того, що протягом року станеться один нещасний випадок?

Варіант 24

1 Два рівносильних шахісти А і В грають сім партій. Знайти найімовірніше число k_0 перемог шахіста А та $P_n(k_0)$.

2 Імовірність помилки при наборі сторінки тексту оператором ЕОМ дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що в книжці, яка містить 150 сторінок, помилки виявляться: а) на 25 сторінках; б) не менше, ніж на 20 сторінках?

3 У партії з 5000 виробів 20 бракованих. Навмання перевіряють 40. Яка ймовірність того, що серед них бракованих виявлено не буде?

Варіант 25

1 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що із семи потягів, що прибувають на станцію протягом години, вчасно прибудуть шість.

2 70 % ксероксів витримують гарантійний термін. Знайти ймовірність того, що із 100 ксероксів гарантійний термін витримають: а) 50; б) від 40 до 70.

3 Імовірність помилки абонента при наборі телефонного номера дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що зі 100 абонентів жоден не помилиться?

Варіант 26

1 Вироби високої якості становлять 90 % всієї продукції. Для перевірки взято навмання 10 виробів. Яка ймовірність того, що серед них: а) дев’ять високоякісних; б) всі високоякісні?

2 Гральний кубик кинуто 150 раз. Яка ймовірність того, що одне очко випаде: а) 20 раз; б) від 24 до 27 раз?

3 Імовірність спотворення символу при передачі тексту радіотелеграфною станцією дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що в тексті, який містить 700 символів, буде лише одна помилка.

Варіант 27

1 У родині шестеро дітей. Знайти найімовірніше число k_0 хлопчиків та $P_n(k_0)$. (Імовірність народження хлопчика вважати рівною 0,51.)

2 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 200 потягів спізняться: а) 20; б) не менше 25.

3 Імовірність того, що у футбольному матчі буде забито більше 10 голів, дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що у 25 матчах більше 10 голів забито не більше одного разу?

Варіант 28

1 Монету кидають шість раз. Що ймовірніше: герб випаде не менше трьох чи менше п'яти раз?

2 Імовірність наявності прихованого дефекту в новому кодовому замку дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що зі 130 замків дефект є: а) в 25; б) не менше, ніж в 26, і не більше, ніж в 32 замках.

3 Імовірність того, що в даний момент у банкоматі немає грошей, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що з 32 студентів групи не більше двох не зможуть отримати стипендію в банкоматі через відсутність грошей у ньому.

Варіант 29

1 У цеху 10 автоматичних витяжних пристроїв. Імовірність того, що пристрій увімкнений, дорівнює 0,7. Знайти найімовірніше число k_0 увімкнених пристроїв у даний момент часу і $P_n(k_0)$.

2 Знайти ймовірність, що з 80 новонароджених: а) 45 хлопчиків; б) від 30 до 40 хлопчиків. (Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51.)

3 У середньому 0,1 % покупців супермаркету повертають покупку. Яка ймовірність того, що жоден з 500 покупців покупку не поверне?

Варіант 30

1 Імовірність перевитрати води протягом доби деяким районом міста дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що за тиждень перевитрата води буде зафіксована лише один раз.

2 Монету кидають 100 раз. Яка ймовірність того, що герб випаде: а) 55 раз; б) від 40 до 50 раз.

3 Імовірність того, що формула в підручнику є помилковою, дорівнює 0,005. У підручнику 220 формул. Яка ймовірність того, що серед них не більше двох містять помилки?

Завдання 3 Дискретні випадкові величини

Знаходження розподілу ДВВ X у табличній формі

1 Імовірність влучення стрільцем у ціль дорівнює $p = 0{,}6$. Скласти розподіл числа влучень при здійсненні чотирьох пострілів.

2 У ящику дев'ять деталей, сім з яких – годні. Навмання дістають три деталі. Скласти закон розподілу числа годних деталей.

3 Імовірність помилки оператора при наборі тексту дорівнює 0,2. Набрано три тексти. Знайти розподіл числа правильно набраних текстів.

4 Студент вивчив п'ять із семи тем екзамену. У білеті три питання з різних тем. Знайти закон розподілу числа невідомих питань у білеті.

5 Кинуто три гральних кубики. X – число кубиків, на яких кількість очок була непарною. Скласти закон розподілу ДВВ X.

6 В урні сім кульок, з яких чотири – сині. Навмання дістають три кульки. X – число синіх кульок. Знайти закон розподілу ДВВ X.

7 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,1. За годину прибуває п'ять потягів. Скласти закон розподілу числа потягів, що прибули вчасно протягом години.

8 У бригаді працюють вісім чоловіків та чотири жінки. Навмання обирають делегацію з трьох людей. Знайти розподіл числа жінок в делегації.

9 Імовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,8. На контроль поставлено шість телевізорів. Скласти розподіл числа телевізорів, що працювали бездоганно.

10 З десяти виробів у коробці три є бракованими. Навмання обирають чотири. Знайти розподіл годних виробів серед обраних.

11 Імовірність помилки абонента при наборі телефонного номера становить 0,1. На переговорному пункті знаходяться п'ять абонентів. Скласти розподіл числа абонентів, що помиляться при наборі.

12 У родині п'ятеро дітей, двоє з них – хлопчики. Навмання обирають трьох для прибирання у квартирі. Знайти розподіл числа хлопчиків серед обраних.

13 Гральний кубик кинуто п'ять раз. X – число кубиків, на яких кількість очок була кратна трьом. Скласти закон розподілу X.

14 Із семи пристроїв два мають приховані дефекти. Знайти закон розподілу числа пристроїв з дефектом серед трьох обраних.

15 Монету кинуто шість раз. Знайти розподіл кількості гербів.

16 Імовірність влучення спортсменом у ціль дорівнює $p = 0{,}7$. Скласти розподіл числа влучень при здійсненні п'яти пострілів.

17 У ящику вісім деталей, шість з яких – годні. Навмання дістають чотири деталі. Скласти закон розподілу числа бракованих деталей.

18 Імовірність помилки оператора при наборі тексту дорівнює 0,25. Набрано чотири тексти. Знайти розподіл числа текстів, що містять помилки.

19 Студент вивчив 8 з 10 тем екзамену. У білеті три питання з різних тем. Знайти розподіл числа відомих питань у білеті.

20 Кинуто чотири гральні кубики. X – число кубиків, на яких кількість очок була парною. Скласти закон розподілу ДВВ X.

21 В урні шість кульок, з яких чотири – червоні. Навмання дістають три кульки. X – число червоних кульок. Знайти закон розподілу ДВВ X.

22 Імовірність спізнення потяга на станцію дорівнює 0,2. За годину прибуває шість потягів. Скласти закон розподілу числа потягів, що прибули вчасно протягом години.

23 У бригаді працюють сім чоловіків та три жінки. Навмання обирають делегацію з чотирьох людей. Знайти розподіл числа жінок в делегації.

24 Імовірність безвідмовної роботи нового телевізора протягом року дорівнює 0,7. На контроль поставлено п'ять телевізорів. Скласти розподіл числа телевізорів, що працювали бездоганно.

25 З 11 виробів в коробці чотири є бракованими. Навмання обирають п'ять. Знайти закон розподілу бракованих виробів.

26 Імовірність помилки абонента при наборі телефонного номера становить 0,2. На переговорному пункті знаходяться шість абонентів. Скласти розподіл числа абонентів, що не помиляться при наборі.

27 У родині шестеро дітей, двоє з них – дівчатка. Навмання обирають трьох для прибирання в квартирі. Знайти розподіл числа хлопчиків серед обраних.

28 Гральний кубик кинуто шість раз. X – число кубиків, на яких кількість очок не була кратна трьом. Скласти закон розподілу X.

29 З шести пристроїв два мають приховані дефекти. Знайти закон розподілу числа пристроїв з дефектом серед трьох обраних.

30 Монету кинуто вісім раз. Знайти розподіл кількості гербів.

3.2 Числові характеристики ДВВ

ДВВ X задана законом розподілу в табличній формі. Надано значення $x = x_0$. Потрібно:

а) знайти невідому ймовірність p_i;

б) знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік;

в) знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ ДВВ X;

г) обчислити ймовірності $P(X < x_0)$, $P(X \le x_0)$.

1

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	?	0,1	0,1

$x_0 = 0$

2

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,15	?	0,3	0,2	0,1

$x_0 = 4$

3

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,15	?

$x_0 = 2$

4

x_i	-0,1	0	0,2	0,5	1
p_i	?	0,2	0,4	0,15	0,15

$x_0 = 0$

5

x_i	-0,2	-0,1	0,2	0,4	0,8
p_i	0,12	0,18	0,35	?	0,1

$x_0 = -0,2$

6

x_i	-0,3	-0,1	0	0,2	0,4
p_i	0,1	0,2	?	0,25	0,1

$x_0 = 0,2$

7

x_i	0,2	0,4	1	1,2	1,5
p_i	0,12	?	0,34	0,26	0,1

$x_0 = 0{,}4$

8

x_i	-2	-1	0,2	0,4	0,8
p_i	0,12	0,18	0,36	0,24	?

$x_0 = 0{,}2$

9

x_i	-2,4	-1	0	1	1,5
p_i	?	0,16	0,36	0,24	0,1

$x_0 = 1$

10

x_i	2	3	3,5	4,5	5
p_i	0,09	0,16	0,3	?	0,2

$x_0 = 3$

11

x_i	-2,2	-1	0,2	1,4	2,6
p_i	0,2	0,3	?	0,1	0,1

$x_0 = 0{,}2$

12

x_i	-3	-2,1	-1,2	0	1,8
p_i	0,15	?	0,2	0,3	0,1

$x_0 = 0$

13

x_i	-4	-3,2	-2,2	-1,4	0,2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	?

$x_0 = -3{,}2$

14

x_i	-1	-0,1	0,7	1,4	2,4
p_i	?	0,2	0,4	0,05	0,15

$x_0 = 0{,}7$

15

x_i	-2,2	-0,1	2	4	5,5
p_i	0,12	0,18	0,25	?	0,1

$x_0 = 4$

16

x_i	2	3,2	4,2	5,4	6,8
p_i	0,1	0,2	?	0,15	0,15

$x_0 = 3{,}2$

17

x_i	-2,6	-1,2	0,2	2,4	4
p_i	0,12	?	0,34	0,2	0,1

$x_0 = 0{,}2$

18

x_i	-2,2	-1	0,1	0,4	1,8
p_i	0,12	0,2	0,36	0,23	?

$x_0 = 0{,}4$

19

x_i	0,2	1	1,3	2,4	3,5
p_i	?	0,16	0,3	0,24	0,1

$x_0 = 1$

20

x_i	-2,4	-1	0,5	1,5	2
p_i	0,09	0,16	0,3	?	0,2

$x_0 = -1$

21

x_i	2	3	3,5	4	6
p_i	0,2	0,18	?	0,25	0,1

$x_0 = 3$

22

x_i	-2,2	-1	0,2	1,5	2,5
p_i	0,25	?	0,3	0,2	0,1

$x_0 = -1$

23

x_i	-3	-2,2	-1,2	0	1,7
p_i	0,1	0,1	0,4	0,15	?

$x_0 = -1{,}2$

24

x_i	-4	-3,1	-2,2	-1,4	0,4
p_i	?	0,2	0,3	0,05	0,15

$x_0 = -1{,}4$

25

x_i	-1	-0,1	0,7	1,4	2,5
p_i	0,12	0,28	0,25	?	0,1

$x_0 = -0{,}1$

26

x_i	-2,2	-0,1	2	4	5,3
p_i	0,15	0,1	?	0,25	0,1

$x_0 = 2$

27

x_i	2	3,2	4,2	5,4	6,8
p_i	0,12	?	0,3	0,26	0,1

$x_0 = 5{,}4$

28

x_i	-2,6	-1,2	0,2	2,4	4
p_i	0,12	0,2	0,34	0,2	?

$x_0 = 0{,}2$

29

x_i	-2,2	-1	0,1	0,4	1,8
p_i	?	0,16	0,34	0,2	0,1

$x_0 = -0{,}1$

30

x_i	-2,4	-0,14	1	3,6	5,2
p_i	0,25	0,05	?	0,28	0,12

$x_0 = 1$

3.3 Властивості числових характеристик ДВВ

Задані математичні сподівання та дисперсії двох незалежних випадкових величин X та Y, а також числа a, b, c.

Знайти: $M(aX + bY + c)$, $D(aX + bY + c)$, $M(XY)$, $\sigma(X - Y)$.

Варіант	$M(X)$	$M(Y)$	$D(X)$	$D(Y)$	a	b	c
1	2	-1	1	3,2	5	-2,5	4
2	5,1	0	2,5	4	-1	3	1
3	1	-3,5	3	2	1,2	-4	8
4	-6	1	1,4	3	-3	7	9
5	0	2,2	2	4	5	-3	3
6	-2	4	1	2,6	-0,5	3	6
7	3,4	-1	4	3,2	1	-2	7
8	-1,8	5	2,6	3	-6	3	9

Варіант	$M(X)$	$M(Y)$	$D(X)$	$D(Y)$	a	b	c
9	3	4,1	5	1,5	7	-1	2
10	-1	-8	2,3	6	-4	1,6	5
11	2	-3	4	2,2	3	-1,5	4
12	1,3	0	1,5	4	-2	1	2
13	5	-7,5	3	2,6	4,2	-3	5
14	-2	2	3,4	2	-1	6	9
15	0	7,2	1	4,8	6	-5	3
16	-1	5	2	3,6	-6,5	1	8
17	2,4	-2	3	4,1	5	-2	7
18	-1,8	5	3,3	2	-8	2	2
19	4	1,2	1	1,8	6	-3	9
20	-3	-2,4	3,1	2	-3	2,6	5
21	2	-3	1	3,2	6	-2,7	3
22	2,6	0	1,9	3	-1	4	2
23	4	-5	3	1	1,4	-2	7
24	-3	2	5,4	3	-2	6	8
25	0	12	2,5	4,2	1	-5	9
26	-2,5	7	3	1,9	-3,5	2	6
27	3,8	-1	4,1	3,6	3	-1	7
28	-8	5,6	2,2	3	-5	2	9
29	2	4	3,1	1,8	4	-2	2
30	-2,6	-7	2,1	5	-3	2,6	5

Завдання 4

4.1 Неперервні випадкові величини

Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Надані значення x_1, x_2. Потрібно:

а) знайти параметр k;

б) знайти функцію розподілу $F(x)$; побудувати графіки $f(x), F(x)$;

в) знайти числові характеристики НВВ X;

г) обчислити ймовірність $P(x_1 \le X \le x_2)$.

1. $f(x)=\begin{cases} kx, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases}$;

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5$

2. $f(x)=\begin{cases} k\sin x, & x\in(0;\pi] \\ 0, & x\notin(0;\pi] \end{cases}$;

$x_1=\pi/2;\ x_2=3\pi/2$

3. $f(x)=\begin{cases} k(x-0{,}5), & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases}$;

$x_1=1{,}6;\ x_2=3{,}5$

4. $f(x)=\begin{cases} k(x-1), & x\in(2;4] \\ 0, & x\notin(2;4] \end{cases}$;

$x_1=2{,}1;\ x_2=5{,}2$

5. $f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases}$;

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}2$

6. $f(x)=\begin{cases} k, & x\in(2;4] \\ 0, & x\notin(2;4] \end{cases}$;

$x_1=3;\ x_2=4{,}8$

7. $f(x)=\begin{cases} k(x+1), & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases}$;

$x_1=0{,}7;\ x_2=2{,}1$

8. $f(x)=\begin{cases} kx-1, & x\in(0;2] \\ 0, & x\notin(0;2] \end{cases}$;

$x_1=1;\ x_2=3$

9. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases}$;

$x_1=1{,}5;\ x_2=2{,}5$

10. $f(x)=\begin{cases} k(3x-x^2), & x\in(0;3] \\ 0, & x\notin(0;3] \end{cases}$;

$x_1=2;\ x_2=4$

11. $f(x)=\begin{cases} ke^{-x}, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases}$;

$x_1=0{,}1;\ x_2=1{,}1$

12. $f(x)=\begin{cases} 3-kx^2, & x\in(0;2] \\ 0, & x\notin(0;2] \end{cases}$;

$x_1=1;\ x_2=4$

13. $f(x)=\begin{cases} k\sin x, & x\in(\pi/6;\pi/3] \\ 0, & x\notin(\pi/6;\pi/3] \end{cases}$;

$x_1=\pi/4;\ x_2=\pi/2$

14. $f(x)=\begin{cases} kx-2/3, & x\in(2;3] \\ 0, & x\notin(2;3] \end{cases}$;

$x_1=2{,}5;\ x_2=3{,}5$

15. $f(x)=\begin{cases} k\cos x, & x\in(0;\pi/2] \\ 0, & x\notin(0;\pi/2] \end{cases}$;

$x_1=\pi/3;\ x_2=2\pi/3$

16. $f(x)=\begin{cases} kx, & x\in(0;2] \\ 0, & x\notin(0;2] \end{cases}$;

$x_1=1{,}5;\ x_2=2{,}5$

17. $f(x)=\begin{cases} 2-kx, & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases}$;

$x_1=0{,}2;\ x_2=1{,}2$

18. $f(x)=\begin{cases} k\sin 2x, & x\in(0;\pi/2] \\ 0, & x\notin(0;\pi/2] \end{cases}$;

$x_1=\pi/4;\ x_2=3\pi/4$

$$19.\ f(x)=\begin{cases} ke^{2x}, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases};$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=2{,}5$

$$21.\ f(x)=\begin{cases} k/x^3, & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases};$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5$

$$23.\ f(x)=\begin{cases} k\cos 2x, & x\in(0;\pi/4] \\ 0, & x\notin(0;\pi/4] \end{cases};$$

$x_1=\pi/6;\ x_2=\pi/3$

$$25.\ f(x)=\begin{cases} kx^2+x, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases};$$

$x_1=-0{,}2;\ x_2=0{,}2$

$$27.\ f(x)=\begin{cases} k(2x^2+x), & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases};$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5$

$$29.\ f(x)=\begin{cases} k(1-x^2), & x\in(-1;1] \\ 0, & x\notin(-1;1] \end{cases};$$

$x_1=0;\ x_2=2$

$$20.\ f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\in(0;3] \\ 0, & x\notin(0;3] \end{cases};$$

$x_1=-1;\ x_2=1$

$$22.\ f(x)=\begin{cases} k(2-x)^2, & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases};$$

$x_1=0{,}1;\ x_2=1{,}1$

$$24.\ f(x)=\begin{cases} k(3x-x^2), & x\in(0;3] \\ 0, & x\notin(0;3] \end{cases};$$

$x_1=-1;\ x_2=1$

$$26.\ f(x)=\begin{cases} kx, & x\in(0;1] \\ 0, & x\notin(0;1] \end{cases};$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5$

$$28.\ f(x)=\begin{cases} kx-0{,}25x^3, & x\in(0;2] \\ 0, & x\notin(0;2] \end{cases};$$

$x_1=-1;\ x_2=1$

$$30.\ f(x)=\begin{cases} k(4x+x^2), & x\in(-4;-2] \\ 0, & x\notin(-4;-2] \end{cases};$$

$x_1=-5;\ x_2=-3$

4.2 Основні закони розподілу

Виписати функції розподілу та щільності розподілу, знайти числові характеристики та обчислити ймовірності потрапляння в інтервал (α,β) для:

а) НВВ X, що розподілена за рівномірним законом з параметрами a та b;

б) НВВ Y, що розподілена за показниковим законом з параметром λ;

в) НВВ Z, що розподілена за нормальним законом з параметрами a та σ.

Варіант	a	b	σ	λ	α	β
1	2	3	1	3	-1	4
2	-5	-2	2	4,3	-2	5
3	3	7	3	2	-3	4
4	-1	2	1	1,2	-1	3
5	0	4	2	2	-4	5
6	-2	0	4	1,5	-6	7
7	3	8	5	4	3,2	10
8	-8	-4	1	2,6	-2	6
9	0	6	4	5	-3,5	7
10	-1	3	3	1,3	-6	9
11	2	9	6	4	-2,1	3
12	3	5	2	0,1	-1	5
13	-4	-1	5	3	-2	4,1
14	-2	3	1	0,4	-3	8
15	1	5	2	1	-3,8	6
16	-1	8	5	2	-3,6	5
17	5	9	4	3	-2,1	5,3
18	-8	-2	5	0,3	-2	8
19	6	10	2	1	-3,8	5
20	-2	2	4	2,3	-2	3
21	5	10	3	1	-3,2	6
22	0	4	1	1,9	-3	9,2
23	-7	-1	5	3	-6	4
24	9	11	2	5,4	-3	6
25	0	10	10	2,5	-4	8
26	-5	1	7	3	-6	3
27	3	4	1	4,1	-2	3

Варіант	a	b	σ	λ	α	β
28	-8	-5	6	2,2	-3	5
29	-1	7	4	3,1	1,8	4
30	6	9	2	2,1	-5	3

Завдання 5 Двовимірні випадкові величини

Надано закон розподілу дискретного випадкового вектора $(X;Y)$. Знайти:

а) закони розподілу його компонент, їх числові характеристики;

б) кореляційний момент і коефіцієнт кореляції складових X та Y;

в) умовний закон розподілу компоненти X при $Y = y_j$ ($j = 1$ для непарних варіантів, $j = 2$ – для парних);

г) умовний закон розподілу компоненти Y при $X = x_i$ ($i = 2$ для непарних варіантів, $i = 3$ – для парних).

1

Y \ X	-1	0	3
-1	0,1	0,2	?
4	0,2	0,1	0,1

2

Y \ X	-3	-2	1
0	0,05	0,4	?
5	0,1	0,05	0,1

3

Y \ X	1	2	3
-1	0,1	0,2	?
0	0,2	0,05	0,05

4

Y \ X	-3	0	1
1	0,2	0,3	0,05
2	0,25	?	0,1

5

Y \ X	-1	0	5
0	0,1	0,3	0,04
2	0,06	0,2	?

6

Y \ X	-2	-1	0
3	0,1	0,05	0,2
5	0,3	?	0,15

7

Y \ X	-1	2	4
-1	0,1	0,2	?
1	0,2	0,1	0,1

8

Y \ X	-1	0	2
-1	0,25	0,15	0,15
4	?	0,2	0,1

9

Y \ X	1	3	7
-3	0,4	0,1	0,03
0	0,2	?	0,07

10

Y \ X	0	2	3
-2	0,2	?	0,2
1	0,05	0,1	0,05

11

Y \ X	-4	-2	1
3	?	0,05	0,25
6	0,2	0,1	0,1

12

Y \ X	-2	0	2
1	0,04	0,3	?
4	0,06	0,2	0,1

13

Y \ X	-3	-1	0
-2	0,1	0,2	0,1
-1	?	0,2	0,15

14

Y \ X	2	5	6
-4	0,05	0,15	0,2
-1	0,1	0,2	?

15

Y \ X	-4	2	3
0	0,01	0,03	?
5	0,4	0,1	0,1

16

Y \ X	-5	-1	0
-2	0,1	?	0,25
2	0,1	0,2	0,15

17

Y \ X	2	3	7
-3	?	0,1	0,05
1	0,3	0,2	0,15

18

Y \ X	-3	0	3
2	0,3	0,1	0,2
4	0,05	?	0,1

19

Y \ X	-1	4	5
-2	0,05	0,1	0,2
0	?	0,25	0,1

20

Y \ X	-4	-2	0
1	0,2	0,15	0,3
3	0,1	0,05	?

21

Y \ X	0	1	4
-3	0,1	?	0,2
-2	0,15	0,1	0,15

22

Y \ X	3	4	5
-2	0,35	0,05	?
2	0,2	0,2	0,1

23

Y \ X	-2	2	3
-1	?	0,3	0,1
1	0,25	0,1	0,15

24

Y \ X	0	2	4
-4	0,15	0,2	0,1
-3	0,1	?	0,15

25

Y \ X	-3	-2	-1
0	0,09	0,01	0,4
3	?	0,25	0,15

26

Y \ X	-4	0	2
3	0,3	0,1	0,1
6	0,05	0,25	?

27

Y \ X	0	2	6
-3	0,04	?	0,06
1	0,05	0,2	0,35

28

Y \ X	-4	-3	0
1	0,2	0,1	?
4	0,05	0,25	0,1

29

Y \ X	-1	4	5
2	?	0,05	0,3
4	0,1	0,2	0,15

30

Y \ X	4	5	7
-5	0,1	0,15	0,1
0	0,2	?	0,15

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. − М.: Высш. шк., 2003. − 479 с.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. − М.: Высш. шк., 2006. − 405 с.

3 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. − М.: Наука,1969. − 576 с.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. − М.: Высш. шк., 2002. − Ч.2. − 416 с.

5 Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика”. − Харків: УкрДАЗТ, 1999. − 76 с.

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1528
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	042	0040	0039	0038	0037	036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	00004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця значень функції Φ(x)= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	(x)	Φ(x)	(x)	Φ(x)
0,00	0,0000	0,64	0,2389	1,28	0,3997	1,93	0,4732
0,01	0,0040	0,65	0,2422	1,29	0,4015	1,94	0,4738
0,02	0,0080	0,66	0,2454	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,03	0,0,20	0,67	0,2486	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,04	0,0160	0,68	0,2517	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,05	0,0199	0,69	0,2549	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,06	0,0239	0,70	0,2580	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,07	0,0279	0,71	0,2611	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,08	0,0319	0,72	0,2642	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,09	0,0359	0,73	0,2673	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,10	0,0398	0,74	0,2703	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,11	0,0438	0,75	0,2734	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,12	0,0478	0,76	0,2764	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,13	0,0517	0,77	0,2794	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,14	0,0557	0,78	0,2823	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,15	0,0596	0,79	0,2852	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,16	0,0636	0,80	0,2881	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,17	0,0675	0,81	0,2910	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,18	0,0714	0,82	0,2939	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,19	0,0753	0,83	0,2967	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,20	0,0793	0,84	0,2995	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,21	0,0832	0,85	0,3023	1,49	0,,4319	2,28	0,48о7
0,22	0,0871	0,86	0,3051	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,23	0,0910	0,87	0,3078	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,24	0,0948	0,88	0,3106	1,52	0,4357	2,34	0,4909
0,25	0,0987	0,89	0,3133	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,26	0,1026	0,90	0,3159	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,27	0,1064	0,91	0,3186	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,28	0,1103	0,92	0,3212	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,29	0,1141	0,93	0,3238	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,30	0,1179	0,94	0,3264	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,31	0,1217	0,95	0,3289	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,32	0,1255	0,96	0,3315	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,33	0,1293	0,97	0,3340	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,34	0,1331	0,98	0,3365	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,35	0,1368	0,99	0,3389	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,36	0,1406	1,00	0,3413	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,37	0,1443	1,01	0,3438	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,38	0,1480	1,02	0,3461	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,39	0,1517	1,03	0,3485	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,40	0,1554	1,04	0,3508	1,68	0,4535	2,66	0,,4961
0,41	0,1591	1,05	0,3531	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,42	0,1628	1,06	0,3554	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,43	0,1664	1,07	0,3577	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,44	0,1700	1,08	0,3599	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,45	0,1736	1,09	0,3621	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,46	0,1772	1,10	0,3643	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,47	0,1808	1,11	0,3665	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,48	0,1844	1,12	0,3686	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,49	0,1879	1,13	0,3708	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,50	0,1915	1,14	0,3729	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,51	0,1950	1,15	0,3749	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,52	0,1985	1,16	0,3770	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,53	0,2019	1,17	0,3790	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,54	0,2054	1,18	0,3810	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,55	0,2088	1,19	0,3830	1,83	0,4664	2,96	0,4985

Продовження таблиці

x	Ф(x)	x	Ф(x)	(x)	Ф(x)	(x)	Ф(x)
0,56	0,2123	1,20	0,3849	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,57	0,2157	1,21	0,3869	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,58	0,2190	1,22	0,3883	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,59	0,2224	1,23	0,3907	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,60	0,2257	1,24	0,3925	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,61	0,2291	1,25	0,3944	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,62	0,2324	1,26	0,3962	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,63	0,2357	1,27	0,3980	1,91	0,4719	4,50	0,499997
				1,92	0,4726	5,00	0,499997

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до контрольної роботи з розділу дисципліни
"*ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА*"
для студентів факультету УПП всіх форм навчання

Відповідальний за випуск Резуненко М.Є.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 17.06.09 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 3,75. Обл.-вид.арк. 4,0.
Замовлення № Тираж 300. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майд. Фейєрбаха, 7