Оригінальна стаття
https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08
УДК 535.37.421

О. В. КАЗАНКО[1], асистент
e-mail: ***a_kazanko@i.ua*** ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9202-8008
О. Є. ПЄНКІНА[1], старший викладач
e-mail: ***penkina@kart.edu.ua*** ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9804-6685
[1] Український державний університет залізничного транспорту,
кафедра обчислювальної техніки та систем управління,
м. Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Україна

НОРМА ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ОДНОВИМІРНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛА

Актуальність. Останні десятиріччя (приблизно з 90-х років XX-го сторіччя) спостерігається стрімкий розвиток фотоніки. Звідси з'являється науковий інтерес до оптичного діапазону електромагнітного випромінювання. Сьогодні дифракційна задача про розсіяння електромагнітних хвиль на таких об'єктах як фотонні кристали представляться важливою задачею. Як відомо, ця задача може зводитися до розв'язання хвильового рівняння. Необхідність в обчисленні норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля, серед іншого, виникає при переході від однієї повної ортогональної системи до іншої повної ортогональної системи функцій при застосуванні методу розділення змінних, відповідно, для розв'язання зазначеного хвильового рівняння.

Мета роботи. Вказати на прямий підхід до обчислення норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала (тобто прямий підхід до обчислення норми передбачає безпосереднє інтегрування) та запропонувати методологічно інший підхід, в основі якого лежить граничний перехід у скалярному добутку, що відповідно задає дану норму.

Матеріали і методи. Граничний перехід при обчисленні норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала зустрічає труднощі, пов'язані з виникненням невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Таку невизначеність вдається дослідити за правилом Лопіталя. Своєю чергою, правило Лопіталя тягне необхідність у знаходженні похідної від розв'язку спектрального рівняння за спектральним параметром. На цьому шляху доводиться стикнутися з розв'язанням лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.

Результати. Запропонована методика обчислення норми власних функцій проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала.

Висновки. На відміну від прямого підходу, запропонована методика дає можливість розуміти характер залежності шуканої норми від самої власної функції (в отриманому кінцевому виразі явно входить сама власна функція). Подальші роботи у зазначеному напрямку можуть спрямовуватися на спрощення кінцевого виразу для норми.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: **фотонний кристал, розсіяння електромагнітних хвиль, норма функції, скалярний добуток, проблема Штурма-Ліувілля, власні функції.**

Як цитувати: Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Норма власних функцій одновимірного фотонного кристала. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:91-99. https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08

In cites: Kazanko OV, Penkina OE. Norm of iegnfunction of one-dimension photonic crystal. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series "Radio Physics and Electronics". 2021;35:91-99. (In Ukrainian). https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-08

ВСТУП

Визначення норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля, серед іншого, представляється важливою задачею у зв'язку із розв'язанням хвильових рівнянь методом розділення змінних. Також необхідність у визначені норми виникає при переході від однієї повної ортогональної системи функцій до іншої повної ортогональної системи функцій у Фур'є-розкладеннях. Крім того, апарат норми використовується в галузі таких питань, як питання оцінки швидкості росту власних функцій; деякі енергетичні характеристики фізичних систем, у тому числі, дифракційних систем, виражаються у термінах норми, у питаннях локалізації власних функцій, оцінки похтбок тощо [1-2].

У роботі розв'язується задача про визначання норми власних функцій спектральної проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала (Рис. 1). Власні функції таких дифракційних структур відомі та явно представляються в елементарних функціях [3]. Тож, обчислення норми може здійснюватися за визначенням, тобто безпосереднім взяттям відповідного інтегралу. Втім, у роботі пропонується визначити норму методологічно іншим шляхом. Річ у тому, що норма у функціональних просторах, в яких зазвичай розв'язується хвильові рівняння (у теорії дифракції), визначається через скалярний добуток: $\|u\|^2 = (u, u)$ (u, v – будь-які функції, (u, v) – скалярний добуток). Своєю чергою, скалярний добутку двох розв'язків спектрального рівняння проблеми Штурма-Ліувілля може записуватися виразом, вільним від знаку інтегралу (інтегрується з використанням 2-ої формули Гріна). Даний підхід до визначення норми базується на здійсненні граничного переходу $v \to u$: $(u, v) \to \|u\|^2$ (u, v – будь-які функції), тобто граничного переходу у перетворенні вільному від знаку інтеграла. Труднощі цей підхід, зокрема, зустрічає у зв'язку з необхідністю дослідити невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, яка, відповідно, виникає при здійсненні зазначеного граничного переходу. Для розкриття цієї невизначеності застосовується правило Лопіталя.

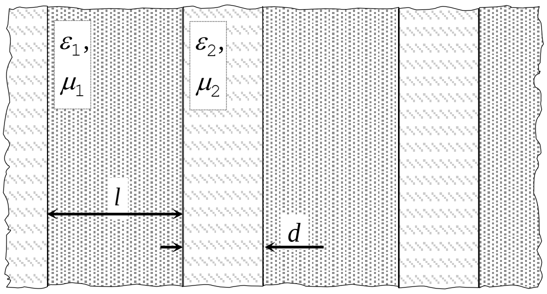

Рис. 1. Модель одновимірного фотонного кристалу
Fig. 1. Model of one-dimension photonic crystal

У роботі також знаходиться похідна від розв'язку спектрального рівняння проблеми Штурма-Ліувілля за спектральним параметром.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Будемо розглядати дифракційну задачу для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала (Рис. 1) з періодом l. Нехай ε_j μ_j – діелектрична та магнітна проникності відповідно першого й другого шару ($j = 1, 2$), d – розмір першого шару, $l - d$ – другого шару. Уведемо прямокутну декартову систему координат ZOY таким чином, щоб періодичність структури була направлена вздовж вісі OZ. Скалярне хвильове рівняння плоских монохроматичних E-поляризованих коливань для двовимірного середовища, заповненого даним кристалом, має наступний вигляд:

$$\Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0\,, \tag{1}$$

де $\Delta_\mu u = \mu(z)\nabla \frac{1}{\mu(z)}(\nabla u)$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(z, y)$ – E-компонента еклектичного поля, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, ω – циклічна частота плоского монохроматичного коливання, c – швидкість світла у порожнечі, $\boldsymbol{n}(z) = \begin{cases} n_1, & (\frac{d}{2} - l + ml, -\frac{d}{2} + ml] \\ n_2, & (-\frac{d}{2} + ml, \frac{d}{2} + ml] \end{cases}$, $\mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & (\frac{d}{2} - l + ml, -\frac{d}{2} + ml] \\ \mu_2, & (-\frac{d}{2} + ml, \frac{d}{2} + ml] \end{cases}$, $\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & (\frac{d}{2} - l + ml, -\frac{d}{2} + ml] \\ \varepsilon_2, & (-\frac{d}{2} + ml, \frac{d}{2} + ml] \end{cases}$ – періодичні кусково-сталі функції, m – ціле, $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ – коефіцієнт заломлення j-го шару ($j = 1, 2$), $z \in (-\infty, +\infty)$ [4].

Хвильове рівняння (1) є лінійним диференційним рівнянням у часткових похідних 2-го порядку. Для розв'язання цього рівняння застосуємо метод розділення змінних [5]. Згідно з цим методом загальний розв'язок рівняння (1) відшукується у вигляді ряду Фур'є

$$u(z, y) = \sum_{n}^{\infty} Y_{\beta_n}(y) Z_{\beta_n}(z)\,, \tag{2}$$

де Z_{β_n} – повна ортогональна система функцій (n – індекс додавання). У прямокутних декартових координатах функції Z_{β_n}, Y_{β_n} є розв’язками, рівнянь

$$\frac{d^2}{dy^2}Y-\beta_n^2 Y=0,\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}Z\right)+\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu(z)}Z=0,\tag{3}$$

тут $\varsigma_{\beta_n}(z)=\sqrt{k^2\boldsymbol{n}^2(z)+\beta_n^2}$ – періодична кусково-стала функція. Рівняння $\frac{d^2}{dy^2}Y-\beta^2 Y=0$ є звичайним лінійним диференційним рівнянням 2-го порядку з постійним коефіцієнтом ($y\in(-\infty,+\infty)$). Розв’язки такого рівняння мають вигляд $Y_{\beta_n}(y)=C_{\beta_n}e^{\beta_n y}+D_{\beta_n}e^{\beta_n y}$ (C_{β_n}, D_{β_n} – будь-які скаляри), $-\beta_n^2$ – числова послідовність і, як стає зрозумілим нижче, є послідовністю власних чисел, що підлягає визначенню. Для побудови повної ортогональної системи функцій $\{Z_{\beta_n}\}_n$ та знаходження власних чисел $-\beta_n^2$ перейдемо до проблеми Штурма-Ліувілля у функціональному просторі зі скалярним добутком

$$(u,v)=\int_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}}\frac{1}{\mu(z)}u\bar{v}\,dz,\tag{4}$$

де u, v – будь-які функції. Нехай $\mathrm{L}=\mu(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}+k^2\boldsymbol{n}^2(z)$ – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку. Розглянемо задачу на власні числа та власні функції (спектральну задачу) для оператору L (проблему Штурма-Ліувілля) у зазначеному функціональному просторі:

$$\mathrm{L}\,Z(z)=-\beta^2 Z(z),\tag{5}$$

$-\beta^2$ – власне число (спектральний параметр). У роботі увага відводиться одному підходу до визначення норми, що задається скалярним добутком (4), від власних функцій задачі (5): $\left\|Z_{\beta_n}\right\|^2=(Z_{\beta_n},Z_{\beta_n})$, $\beta=\beta_n$ [6].

Рівняння (5) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку з періодичними кусково-сталими коефіцієнтами (рівнянням Хіла) [1, 7]. У зв’язку із розв’язанням вихідної дифракційної задачі, інтерес являє такий розв’язок $Z_\beta(z)$ цього рівняння, що задовольняє умові теореми Флоке $\Lambda Z_\beta(z-l)=Z_\beta(z)$, $z\in(-\infty,+\infty)$ ($\Lambda=e^{\pm iKl}$ – множник Флоке, K – хвильове число Блоха) [4, 17]. Отже, система власних функцій задачі (5) неодмінно виявиться повною та ортогональною у просторі функцій зі скалярним добутком (4), та які задовольнятимуть умові $\Lambda Z_\beta(z-l)=Z_\beta(z)$, $z\in(-\infty,+\infty)$ [8]. Позначимо через H простір, у якому відшукується розв’язок проблеми Штурма-Ліувілля. Враховуючи уведені позначення, проблема Штурма-Ліувілля для двошарового нескінченного одновимірного фотонного кристала, формально, переписується наступним чином

$$\mathrm{L}\,Z(z)=-\beta^2 Z(z),\ Z\in\mathrm{H},\tag{6}$$

$-\beta^2$ – власне число (спектральний параметр). Зрозуміло, що система власних чисел $-\beta^2$ (у просторі H) має дискретну структуру і це враховується у позначенні власних функцій оператору L – Z_{β_n} (n – цілочисельний індекс). Відомо, що лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку має лише два лінійно незалежних (фундаментальних) розв’язки u_1, u_2, $z\in(-\infty,+\infty)$ [14], тобто будь-який розв’язок рівняння (5) представляється через лінійні комбінацій цих розв’язків:

$$Z_\beta=A_\beta u_1+B_\beta u_2,\ A_\beta,\ B_\beta \text{ – будь-які скаляри.}\tag{7}$$

Функції $u_1=\cos\varsigma_\beta(z)(z+\frac{d}{2})$, $u_2=\mu(z)\varsigma_\beta^*\sin\varsigma(z)(z+\frac{d}{2})$ є фундаментальними розв’язками рівняння (5) усередині інтервалу $(\frac{d}{2}-l,\frac{d}{2})$ (лінійна незалежність встановлюється за допомогою визначника Вронського, який має бути нетотожним нулем),

$$\varsigma_\beta^*(z)=\sqrt{\left(k\boldsymbol{n}^*(z)\right)^2+\beta^2},\ \boldsymbol{n}^*(z)=\begin{cases}n_2, & (\frac{d}{2}-l+ml,-\frac{d}{2}+ml]\\ n_1, & (-\frac{d}{2}+ml,\frac{d}{2}+ml]\end{cases},\ m \text{ – ціле.}$$

ЗНАХОЖЕННЯ НОРМИ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай Z_{β_n}, Z_β – довільні розв'язки рівняння (5), що відповідають двом різним значенням спектрального параметру – β_n, β відповідно. З урахуванням 2-ї формули Гріна для двох розв'язків рівняння (5) має місце рівність:

$$\int_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} d\left(\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta \overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta \overline{\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}}\right) dz = (\beta_n^2-\beta^2)\int_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\mu(z)} Z_\beta \overline{Z_{\beta_n}}\, dz = (\beta_n^2-\beta^2)(Z_\beta , Z_{\beta_n}), \quad (8)$$

тобто отримуємо

$$\left.\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\, \overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta\, \overline{\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}}\right|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = \mathrm{W}_\beta \Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = (\beta_n^2-\beta^2)(Z_\beta , Z_{\beta_n}), \quad (9)$$

де $\mathrm{W}_\beta = \frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\, \overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta\, \overline{\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}}$. Звідки маємо, що

$$\left\|Z_{\beta_n}\right\|^2 = \lim_{\beta\to\beta_n} \frac{1}{\beta_n^2-\beta^2}\left.\left(\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\, \overline{Z_{\beta_n}} - Z_\beta \overline{\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}}\right)\right|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}. \quad (10)$$

Для розрахунку норми власної функцій Z_{β_n} можна використовувати два підходи. Перший підхід полягає у переході від функції Z_{β_n} до відповідних фундаментальних розв'язків згідно (7), тобто

$$\left\|Z_{\beta_n}\right\|^2 = \left|A_{\beta_n}\right|^2 \left\|u_1\right\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(A_{\beta_n}\overline{B_{\beta_n}}(u_1, u_2)\right) + \left|B_{\beta_n}\right|^2 \left\|u_2\right\|^2. \quad (11)$$

Другий альтернативний підхід до визначення норми базується на використанні правила Лопіталя для розкриття невизначеності у (10) при $\lim \beta = \beta_n$.

З урахуванням умов $\Lambda Z_\beta(\frac{d}{2}-l) = Z_\beta(\frac{d}{2})$, $\Lambda \frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l} = \frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}\Big|_{z=\frac{d}{2}}$ (теорема Флоке) для функції Z_β та похідної $\dot{Z}_{\beta_n}$, можна показати, що

$$Z_\beta \left.\overline{\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}}\right|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = 0. \quad (12)$$

Тоді вираз для похідної $\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{W}_\beta\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}$ спрощується та дорівнює:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{W}_\beta\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\right)\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = \left(\frac{1}{\mu(z)}\frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta\right)^{\cdot}\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}. \quad (13)$$

Звідси випливає, що для знаходження похідної у лівій частині (9) необхідно визначити похідну $\frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta$ – тобто похідну від розв'язку диференційного рівняння (5) за параметром β. Візьмемо похідну від рівняння (5) за параметром β. Тоді приходимо до неоднорідного рівняння Хілла [1, 7] відносно функції $\psi = \frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}\psi\right) + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\psi = -2\beta\frac{1}{\mu(z)}Z_\beta. \quad (14)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння знаходиться через суму двох доданків: перший доданок ψ^* – загальний розв'язок однорідного рівняння, а другий доданок ψ_0 – частковий розв'язок даного неоднорідного рівняння [1, 7]:

$$\psi = \psi^* + \psi_0, \quad (15)$$

де ψ^* – загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}\psi^*\right)+\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\psi^*=0\,, \tag{16}$$

ψ_0 – частковий розв'язок неоднорідного рівняння (14). Функція ψ^* представляється через лінійно незалежні розв'язки ψ_1, ψ_2 рівняння [14], тобто:

$$\psi^*=C_\beta\psi_1+D_\beta\psi_2\,. \tag{17}$$

Функції ψ_1, ψ_2 вибираються у вигляді $\psi_1=Z_\beta$, $\psi_2=\eta Z_\beta+\chi\dot{Z}_\beta$. Це дозволяє суттєво спростити вираз чисельника у (9) при застосуванні правила Лопіталя.

Далі, перейдемо до пошуку часткового розв'язку рівняння (14). Цей частковий розв'язок, як і функцію ψ_2, будемо шукати у вигляді

$$\psi_0=\eta_1 Z_\beta+\chi_1\dot{Z}_\beta\,. \tag{18}$$

З урахуванням (18) рівняння (14) зводиться до наступного рівняння відносно функції $\phi=\dot{\chi}_1$ [12] (при виводі рівняння використовувалось те, що функція Z_β є розв'язком рівняння (16)):

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}\phi+4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\phi=4\frac{1}{\mu(z)}\beta\,. \tag{19}$$

Це рівняння такого ж типу, що й рівняння (14), та може розв'язуватися методом варіації [1, 7]. Звідки знаходимо $\chi_1(z)=\int_{-\frac{d}{2}}^{z}\dot{\chi}_1(t)\,dt$, $\eta_1=-\frac{1}{2}\chi_1$ й знаходимо $\psi_0=-\frac{1}{2}\dot{\chi}_1 Z_\beta+\chi_1\dot{Z}_\beta$.

Таким чином, похідну $\frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta$ можна представити у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\beta}Z_\beta=\psi=C_\beta Z_\beta+D_\beta(\eta Z+\chi\dot{Z}_\beta)-\frac{1}{2}\dot{\chi}_1 Z_\beta+\chi_1\dot{Z}_\beta\,. \tag{20}$$

Чисельник у (9) при застосуванні правила Лопіталя знаходиться у вигляді:

$$\lim_{\beta\to\beta_n}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{W}_\beta\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}=\underbrace{C_\beta\frac{1}{\mu(z)}\dot{\psi}_1\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}}_{=0}+D_\beta\frac{1}{\mu(z)}\dot{\psi}_2\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}+\frac{1}{\mu(z)}\dot{\psi}_0\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}\,. \tag{21}$$

1-й доданок цього відношення за умов $\Lambda Z_{\beta_n}(\frac{d}{2}-l)=Z_{\beta_n}(\frac{d}{2})$, $\Lambda\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}=\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_{\beta_n}\Big|_{z=\frac{d}{2}}$ при граничному переході ($\beta\to\beta_n$) обернеться в нуль (див. (12)). Розглянемо окремо 2-й доданок

$$D_\beta\frac{1}{\mu(z)}\dot{\psi}_2\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}=D_\beta(\eta+\dot{\chi})\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}+D_\beta\left(\frac{1}{\mu(z)}\dot{\eta}-\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\chi\right)Z_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}\,. \tag{22}$$

З урахуванням теореми Флоке, член $D_\beta(\eta+\dot{\chi})\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}$ у виразі (22) переписується у вигляді:

$$D_\beta(\eta+\dot{\chi})\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}=(\eta+\dot{\chi})\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}\times\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2},\ \beta\to\beta_n}D_{\beta_n}\,. \tag{23}$$

При виконанні умов $\dot{\chi}(\frac{d}{2}-l)=\dot{\chi}(\frac{d}{2}-l)$, $\eta(\frac{d}{2}-l)=\eta(\frac{d}{2})$ цей член обернеться в нуль. Таким чином, 2-й доданок виразу (21) при граничному переході ($\beta\to\beta_n$) набуває вигляду:

$$D_\beta\frac{1}{\mu(z)}\dot{\psi}_2\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}=D_\beta\left(\frac{1}{\mu(z)}\dot{\eta}-\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu}\frac{1}{\mu(z)}\chi\right)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2\,. \tag{24}$$

Аналогічно, й для 3-го доданку правої частини виразу (21), виділимо члени, які при граничному переході ($\beta\to\beta_n$) обертаються в нуль:

$$\frac{1}{\mu}\dot{\psi}_0\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}} = -(\frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu(z)}+\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\chi_1)Z_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}} \underbrace{+\frac{1}{2}\phi\frac{1}{\mu(z)}\dot{Z}_\beta\overline{Z_{\beta_n}}\Big|_{z=\frac{d}{2}-l,\ \ \beta\to\beta_n}^{z=\frac{d}{2}}}_{=0}$$

$$= -(\frac{1}{2}\dot{\phi}\frac{1}{\mu(z)}+\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\chi_1)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2. \qquad (25)$$

Таким чином, при переході до границі ($\beta\to\beta_n$) у чисельнику (10) отримуємо

$$\lim_{\beta\to\beta_n}\frac{\partial}{\partial\beta}W_\beta\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} = \left\{D_{\beta_n}(\frac{1}{\mu}\dot{\eta}-\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu}\chi)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} - (\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\dot{\phi}+\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu}\chi_1)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}\right\}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2.$$

Далі, за правилом Лопіталя, остаточно обчисляємо норму власної функції проблеми Штурма-Ліувілля (6-7):

$$\left\|Z_{\beta_n}\right\|^2 = -\frac{1}{2\beta_n}\lim_{\beta\to\beta_n}\frac{\partial}{\partial\beta}W_\beta\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\beta_n}\left\{D_{\beta_n}(\frac{1}{\mu(z)}\dot{\eta}-\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu(z)}\chi)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}} - (\frac{1}{2}\frac{1}{\mu(z)}\dot{\phi}+\frac{\varsigma_{\beta_n}^2}{\mu(z)}\chi_1)\Big|_{z=\frac{d}{2}-l}^{z=\frac{d}{2}}\right\}\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2, \qquad (26)$$

де функції $\eta=\eta(z)$, $\chi=\chi(z)$, $\chi_1=\chi_1(z)$, $\phi=\phi(z)$ відомі. Скаляр D_{β_n} може бути знайдено, приміром, виходячи з граничних умов $\Lambda\psi(\frac{d}{2}-l)=\psi(\frac{d}{2})$ (Λ – множник Флоке).

ВИСНОВКИ

У роботі було отримано аналітичний вираз для норми власних функцій проблеми Штурма-Ліувілля для двошарового одновірного фотонного кристала. Ця норма виражається через квадрат модуля власної функції при $z=\frac{d}{2}$ – $\left|Z_{\beta_n,\frac{d}{2}}\right|^2$ та через додаткову функцію ϑ, яка є розв'язком однорідного рівняння $\frac{d}{dz}\frac{1}{\mu(z)}\frac{d}{dz}\vartheta+4\frac{\varsigma_\beta^2}{\mu(z)}\vartheta=0$.

КОНФЛІКТ ИНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press; 1975.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals. Journal of Modern Optics. 2007;41(2):173-194. https://doi.org/10.1080/09500349414550261
3. Shmat'ko AA, Kazanko AB, Mizernik VN, Odarenko EN, Yampol'skii VA, Rokhmanova TN, et al. Extraordinary reflection from photonic crystal with metamaterials. 2016 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). 2016 Sep; p. 160-162. http://dx.doi.org/10.1109/UWBUSIS.2016.7724177
4. Morozov GV, Sprung DWL. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. EPL (Europhysics Letters). 2011 Nov 22;96(5):54005. https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/54005
5. Gaughan Richard. Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal. Photonics Spectra. 2000;34(1).
6. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. Phys. Rev. Lett. 1987;58(20):2059-2062.
7. Winkler S, Magnus W, Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons; 1996.
8. Ахиезер НИ, Глазман ИМ. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах, 2-е издание: книга для специалистов, аспирантов математических специальностей. Москва: Наука; 1966. 544 с.
9. Домкин КИ. Фотонные кристаллы и устройства. тр. междунар. симп.: в 2 т. / под ред. Н. К. Юркова, Т. 2; Пенза: Пензенский государственный университет. 2012, 252-255 с.

10. Казанко АВ, Шматько АА, Одаренко ЕН, Мизерник ВН. Дисперсионные характеристики слоистых структур в задаче дифракции волн на решетке с метаматериала. сб. научн. трудов ХНУРЭ, радиотехника; 2015. 77-83 с.
11. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по повздовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць ΛΌГОΣ; 2020. 126-130 с.
12. Казанко ОВ, Пєнкіна ОЄ. Експерементальні та теоритичні дослідження у сучасних науках.: Збірник наукових праць "Логос" з матеріалами наук.-практ. конференції.» Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженного двовимірного шаруватого середовища. Краків, Польша: Європейська наукова платформа; 2019. 36-42 с.
13. Котляр ВВ. Нанофотоника – манипулирование светом с помощью наноструктур. Компьютерная оптика. Самарский гос. универ. им. ак-ка С. П. Королева. 2008;32(2):119-135.
14. Виленкин НЯ, Доброхотова МА, Сафонов АН. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов физ-мат. фак., [стр. 111, теорема 1, следствие и далее по тексту]. Москва: Просвещение; 1984. 176 с.
15. Слепов Н. Фотонные кристаллы. Будущее вычислительной техники и связи. Новые технологии. Москва: Электроника: Наука, Технология, Бизнес 2; 2000. 32-35 с.
16. Ханин СД, Соловьёв ВГ. Физические свойства регулярных матричных и слоистых нанокомпозитов. Экспереметальная физика; 177-191 с.
17. Ярив А, Юх П. Оптические волны в кристаллах. пер. с англ. М.: Мир, 1987. 616 с.
18. Guida G. Introduction to photonic band gap materials. Progress In Electromagnetics Research, PIER. 2003;41:1–20.
19. Pandey GN, Thapa KB, Srivastava SK, Ojha SP. Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials. Progress In Electromagnetics Research M. 2008;2:15–36. https://doi.org/10.2528/PIERM08021501
20. Владимиров ВС. Уравнения математической физики, 4-е изд. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы; 1981. 512 с.
21. Свєшніков АГ, Боголюбов АН, Кравцов ВВ. Лекції з математичної фізики: Учеб. посібник. М.: Изд-во МГУ; 1993. 352 с.

REFERENCES

1. Eastham MSP. The spectral theory of periodic differential equations. Edinburg: Scottish Academic Press; 1975.
2. Yablonovitch E. Photonic Crystals. Journal of Modern Optics. 2007;41(2):173-194. https://doi.org/10.1080/09500349414550261
3. Shmat'ko AA, Kazanko AB, Mizernik VN, Odarenko EN, Yampol'skii VA, Rokhmanova TN, et al. Extraordinary reflection from photonic crystal with metamaterials. 2016 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). 2016 Sep; p. 160-162. http://dx.doi.org/10.1109/UWBUSIS.2016.7724177
4. Morozov GV, Sprung DWL. Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystals. EPL (Europhysics Letters). 2011 Nov 22;96(5):54005. https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/54005
5. Gaughan Richard. Researchers Create Tunable Photonic Bandgap Crystal. Photonics Spectra. 2000;34(1).
6. Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. Phys. Rev. Lett. 1987;58(20):2059-2062.
7. Winkler S, Magnus W, Hill's Equation. New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons; 1996.
8. Ahiyezer NI, Glazman IM. The theory of linear operators in a Hilbert space, 2nd edition: book for students, graduate students, specialists of mathematic. Moscow: Nauka; 1966. 544 p. (In Russian).
9. Domkin KI. Photonic crystals and devices. International symposium treatises: in two volumes edited by N. K. Yurkova vol. 2. Pensa: Pensa State university; 2012. 252-255 p. (In Russian).
10. Kazanko OV, Shmat'ko AA, Odarenko EN. Dispersions characteristics of band structures in diffraction problem of waves on grating with metamaterials. Collection of scientific papers KNURE, radiotechnic; 2015. 77-83 p. (In Russian).
11. Kazanko OV, Penkina OY. To differentiating shear solutions of wave equations by longitudinal wave number in a diffraction problem for unlimited band media with metamaterials. Collection of scientific papers ΛΌГОΣ; 2020. 126-130 p. (In Ukrainian).
12. Kazanko OV, Penkina OE. Experimental and theoretical research in modern sciences .: Collection of scientific works "Logos" with materials of scientific practice. conference. " Differentiation of the dispersion equation in the diffraction problem for an unbounded two-dimensional layered medium. Krakow, Poland: European Science Platform; 2019. 36-42 p. (In Ukrainian).
13. Kotlar VV. Nanophotonic – manipulation of light by the help of nanostructures. Computer optics. Samara State University by academic S. P. Korolov. 2008;32(2):119-135 p. (In Russian).

14. Vilenkin NY, Dobrohotova MA, Safonov AN. The differential equations: Manual studies for students of physical and mathematical fac. [page #111, th.1, consequence and further on in the text]. Moscow: Prosveshenie; 1984. 176 p. (In Russian).
15. Slepov N. Photonic crystal. Future of calculating technic and communications. New technologies Moscow: Electronics: Nauka, Nechnologiya, Biznes 2; 2000. 32-35 p. (In Russian).
16. Hanin SD, Solovyov VG. Physic properties of regular matrix band nanocomposites. Experimental physics; 177-191 p. (In Russian).
17. Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals. A Wiley inteprieses Publicatuon, New York: Jon Wiley & Sons; 1987. 616 p. (In Russian).
18. Guida G. Introduction to photonic band gap materials. Progress In Electromagnetics Research, PIER. 2003;41:1–20.
19. Pandey GN, Thapa KB, Srivastava SK, Ojha SP. Band structures and abnormal behavior of one dimensional photonic crystal containing negative index materials. Progress In Electromagnetics Research M. 2008;2:15–36. https://doi.org/10.2528/PIERM08021501
20. Vladimirov VS. The equations of mathematical phisicsc 4th Edition, Moscow: Nauka, Main editorial office of physical and mathematical literature; 1981. 512 p. (In Russian).
21. Sveshnicov AG, Bogolubov AN, Kravtcov VV. Lecture on of mathematical phisics. Manual studies, Moscow: editorial MSU; 1993. 352 p. (In Ukrainian).

Стаття надійшла до редакції: 18 жовтня 2021 р.
Рекомендовано до друку: 26 листопада 2021 р.

NORM OF IEGNFUNCTION OF ONE-DIMENSION PHOTONIC CRYSTAL

[1]O. V. Kazanko, [1]O. E. Penkina,
Ukrainian State University of Railway Transport, Department of Computer Engineering and Control Systems, Feuerbach Square 7, 61050, Kharkiv

Relevance. In recent decades (about the 90-s XX century) there has been rapid development of photonic. Thus, to arise scientific interest to optic range of electromagnetic radiation. Currently, the diffraction problem about scattering electromagnetic waves on such object as photonic crystal is impotent problem. As well known, this problem can be reduced to a solution of wave equation. The need to calculate the norm iegnfunction spectral iegnfunction Sturm-Liouville problem, however, to arise in the transition from one complete orthogonal system to another complete orthogonal system of functions by separating variables method, correspondingly, for a wave equation solving.
The purpose of the work. We indicate a direct approach to calculating of the norm of iegnfunction of spectral Sturm-Liouville problem for the tow-layer infinite one-dimension photonic crystal (a direct approach to calculating of the norm that is presuppose a direct integration); and propose a methodologically different approach, which is based on the marginal transition in the scalar product, which accordingly sets this norm.
Materials and methods. Taking the limit in calculation the norm of the iegnfunction of spectral Sturm-Liouville problem for the tow-layer infinite one-dimension photonic crystal encounters difficulties, associated with the emergence of species uncertainty $\left[\frac{0}{0}\right]$. Such infinitive investigates by the Lopital's rule. In turn, Lopital's rule entails the need to find a derivative of solution of spectral equation by a spectral param. In this way we have to face the solution a linear inhomogeneous differential equation 2-nd order.
Results. We propose a methodic of calculating of norm of iegnfunction of spectral Sturm-Liouville problem for the tow-layer infinite one-dimension photonic crystal.
Conclusion. Unlike the direct approach, proposed methodic to make it possible to understand the character of dependencies the required norm of iegnfunction itself (ending expression containing the iegnfunction itself). Further work in this direction of development of this approach may be aimed at simplifying the final expression for the norm.

KEYWORDS: **photonic crystal, scattering of electromagnetic radiation, norm of functions, scalar product, spectral Sturm-Liouville problem, iegnfunctions.**

The article was received by the editors: October 18 2021.
The article is recommended for printing: November 26 2021.