Казанко О.В.
Асистент кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Пєнкіна О.Є.
Старший викладач кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ МОНОХРОМАТИЧНОЇ ХВИЛІ НАПІВОБМЕЖЕНОМУ ДВОШАРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Вступ. Розв'язання як окремих дифракційних задач та так і у цілому розвиток апарату кількісного опису поведінки електромагнітних хвиль у різноманітних середовищах має безпосереднє відношення до розвитку технологій управління електромагнітним випромінюванням (антени, лазери, фільтри, резонатори).

У роботі розглядається двошарове періодичне напівобмежене двовимірне середовище з паралельною періодичності прямою лінією обмеження. Таке середовище допоюється півпростором, з повною однорідністю та ізотропією. Плоска монохроматична лінійно поляризована електромагнітна хвиля падає на дану шарувату структуру під деяким кутом до прямої розмежування. Дифракційна задача, що розглядається може стати основою або підзадачею для більш складних дифракційних задач.

Під дифракцією розуміють ефект зміни форми електромагнітної хвилі при розповсюджені, тобто ефект зміни характеристик хвилі (швидкості, частоти, амплітуди тощо). Один із шляхів закласти основу у сучасній теорії дифракції полягає в уведені концепції дифракційно інертного середовища – середовища у якому хвиля при розповсюджені зберігає форму.

У невибраній системі координат (позакоординатній формі), як відомо [1, 2], із загальної оптики, векторне хвильове рівняння для монохроматичного коливання в однорідному й ізотропному середовищі має вигляд (рівняння Гельмнольца):

$$\Delta E + k^2 \boldsymbol{n}^2 E = 0 \qquad (1)$$

тут $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ – оператор Лапласа, E – напруженість електричного поля, $k = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число, c – швидкість світла у порожнечі, ω – циклічна частота монохроматичного коливання, $\boldsymbol{n}$ – коефіцієнт заломлення, Нижче будемо розглядати аналогічне скалярне хвильове рівняння (скалярне рівняння Гельмнольца):

$$\Delta u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0, \qquad (2)$$

тут $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ – скалярний оператор Лапласа, $u = u(y, z)$ – шукана скалярна функція, y , $z \in (-\infty, +\infty)$ – незалежні просторові змінні.

Для шаруватого середовища хвильове рівняння має наступний вигляд [3]:

$$\mu \Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0, \qquad (3)$$

тут $\mu \Delta_\mu = \mu \nabla \frac{1}{\mu} \nabla$ – модифікований оператор Лапласа, $u = u(x, y)$ – шукана скалярна функція, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(z)$ – коефіцієнт заломлення – кусково-стала функція, l – період шаруватого середовища, μ – магнітна проникність, ε – діелектрична проникність – кусково-сталі ($\boldsymbol{n} = \sqrt{\varepsilon\mu}$). Згідно методу розділення змінних, загальний розв'язок рівняння (2) представляється у вигляді з ряду Фур'є [4, 5]:

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{\lambda_m} e_{\lambda_m} ,$$

тут $e_{\lambda_m}(z) = e^{-i(k\alpha+\lambda_m)(z-z_0)}$ – розв'язки задачі Штурма-Ліувілля для рівняння (2), $\lambda_m = \frac{2\pi}{l} m$, $(m = 0, \ \pm 1, \dots)$, z_0 – точка міжшарової границі, $\alpha = \cos\varphi$, φ – кут падіння хвилі. Відповідно, загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}$$

тут Z_{β_n} – розв'язки задачі Штурма-Ліувілля для рівняння (3), $n = 0, \ \pm 1, \dots$ [4, 5].

Розв'язок хвильового рівняння (3) є елементом функціонального простору $\mathbf{H}_0 = \{ f \in \mathbf{W}_2 \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), f_{\frac{l}{2}}^{(0,1)} = f_{\frac{l}{2}}^{(0,1)} \}$, тому цей розв'язок, очевидно, може бути представлений як у базисі $\{e_{\lambda_m}\}_{m=0, \ \pm 1, \dots}$ так і у базисі $\{Z_{\beta_n}\}_{n=0, \ \pm 1, \dots}$. Цією обставиною скористаємось на лінії розмежування шаруватої структури та півпростору.

Необхідно здійснити перехід від однієї повної ортогональної систем до іншої, тобто представити розв'язки в єдиній системі ортогональних функцій, при $y = 0$ [6, 7]. Складемо матрицю переходу від базису $\{Z_{\beta_n}\}_n$ до базису $\{e_{\lambda_m}\}_m$. Отже, для коефіцієнтів Фур'є Y_{β_n} відносно базису $\{Z_{\beta_n}\}_n$, (тобто $u = \sum_n^\infty Y_{\beta_n} Z_{\beta_n}$), отримаємо $(\mathrm{L}_{mn})(Y_{\beta_n})$ – коефіцієнти Фур'є у базисі $\{e_{\lambda_m}\}_m$, (L_{nm}) – матриця переходу (матриця переходу складається зі скалярних добутків виду $\mathrm{L}_{mn} = (Z_{\beta_n}, \ e_{\lambda_m})$) [8, 9]. Цікавим, на думу авторів, є то факт, шо у матриці переходу (L_{nm}) зворотна матриця дорівнює спряженої (транспонованої):

$$(L_{nm})^{-1} = L_{mn} .$$

Далі вважатимемо $\mu = 1$. Запишемо розв'язки рівнянь (2) і (3) на границі, при $y = 0$:

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{\beta_n} L_{nm} = \delta_{0m} + A_{\lambda_m} \ \Leftrightarrow \frac{1}{l}\left(Y_{\beta_n}\right) = \left(L_{nm}\right)^{-1}\left(\delta_{0m} + A_{\lambda_m}\right) .$$

Також маємо 2-ге рівняння на прямій розмежування середовищ (при $y = 0$) :

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_{\beta_n} L_{nm} = ik_y\delta_{0m} + i\gamma_m A_{\lambda_m} \ \ \Leftrightarrow \frac{1}{l}\left(\dot{Y}_{\beta_n}\right)\left(L_{nm}\right) = \left(ik_y\delta_{0m} + i\gamma_m A_{\lambda_m}\right),$$

тут δ_{pm} – символ Кронекера ($\mu = 1$). Порівнюючи останні рівняння приходимо до тотожності. Це означає, що сумісні рівняння виконуються для будь-яких коефіцієнтів Фур'є.

Висновки. У роботі розв'язується дифракційна задача методом часткових областей. На прямій розподілу середовищ застосовується прийом в основі якого процедура переведення до спільного базису, шляхом побудови матриці переходу. Звертається увагу, що така матриця переходу має зворотну, яка у свою чергу, дорівнює транспонованої: $(\mathrm{L}_{nm})^{-1} = \mathrm{L}_{mn}$. Ця обставина використовується при сумісному розв'язані рівнянь. Стає зрозумілим, що при $\mu = 1$ рівняння, отримані на прямій розмежування обертаються в тотожність, тобто виконуються для будь-яких коефіцієнтів Фур'є. Це, мабуть, означає, що для будь-якої плоскої хвили, що падає на шарувате середовище дана дифракційна задача має розв'язок.

Розглянута задача може бути застосована для більш складних дифракційних задач.

Список використаних джерел:

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Москва: Наука. Оптика, Т. 4, 1980. 752 с
2. Казанко, О.В. & Пєнкіна, О.Є. Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного періодичного шаруватого середовища. Wiadomości o postępie naukowym i rzeczywistych badaniach naukowych współczesności: kolekcja prac naukowych «ΛΌΓΟΣ» z materiałami międzynar. nauk.-prakt. konf. (Tom. 4, ss. 36-42). 17 czerwca 2019, Krakow: OP «Europejska platforma naukowa».
3. Казанко, О., & Пєнкіна, О. (2020). Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по подовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. Збірник наукових праць ΛΌΓΟΣ, 126-130. DOI: https://doi.org/10.36074/05.06.2020.v3.49.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: уч. пос., 6-е изд., перераб. и доп. Москва: МГУ, 1999. 742 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики, 4-е изд., – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981 – 512 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: учебник для студентов, том 2, Москва "Высшая школа", 1981 – 584 с.
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах, 2-е издание: книга для специалистов, аспирантов математических специальностей – Москва, Наука, 1966 – 544 с.
8. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках: монографія. Харьков: ХГУ, 1973. 288 с. 5.
9. G. V. Morozov, D. & W. L. Sprung. (2011) Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal.» A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96,: 54005:p1-p5.