



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни

«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Частина 1

Харків – 2024

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 08 січня 2024 р., протокол № 5.

Методичні вказівки складено на основі типової програми з дисциплін «Опір матеріалів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 273 «Залізничний транспорт» освітніх програм «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту» (ААСМ), «Мехатроніка у вагонобудуванні», «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ) денної та заочної (повної і прискореної) форм навчання.

Укладачі:

доценти С. Ю. Берестянська,

Л. Б. Кравців

Рецензент

доц. О. В. Лобяк

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Мета і основні завдання.....	4
Компетентності, що формуються у здобувачів.....	5
Методи вивчення і контролю.....	5
Перелік документів, які необхідно подати до захисту.....	6
Загальні положення.....	6
Тестові запитання для самоконтролю.....	14
Завдання на розрахунково-графічну роботу 1 (частина 1).....	16
Приклади розв'язання з поясненнями.....	22
<i>Задача 1.</i> Побудова епюр у консольній балці.....	22
<i>Задача 2.</i> Побудова епюр у двоопорній балці.....	27
<i>Задача 3.</i> Побудова епюри у стрижні.....	34
<i>Задача 4.</i> Побудова епюри у валу.....	37
<i>Задача 5.</i> Побудова епюр у двоопорній рамі.....	40
Список літератури.....	48
Додаток А Зразок оформлення титульного аркуша пояснювальної записки.....	49

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи здобувачів вищої освіти під час вивчення курсу «Опір матеріалів» згідно з робочими програмами спеціальності 273 «Залізничний транспорт» освітніх програм «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Автомотриси, автодрезини та спеціальні машини залізничного транспорту», «Мехатроніка у вагонобудуванні», «Вагони та транспортна інженерія» (ВТІ) денної та заочної (повної та прискореної) форм навчання.

Вони мають високий науково-педагогічний рівень, викладені систематично та послідовно, відображують новітні досягнення науки, техніки, забезпечують реалізацію основних принципів навчання: науковості, систематичності, послідовності й доступності викладення, наочності, ґрунтовності, зв'язку матеріалу з професійною діяльністю, відповідають вимогам освітніх програм, державних освітніх стандартів.

МЕТА І ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ

Під час виконання розрахунково-графічної роботи (частина 1) здобувач має отримати теоретичні знання, необхідні для побудови епюр внутрішніх зусиль. Метою завдання є набуття практичних навичок побудови епюр внутрішніх зусиль для різних розрахункових схем.

Очікувані результати навчання:

- визначати параметри об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем і елементів шляхом проведення вимірювального експерименту з оцінюванням його результатів;

- знати методи та вміти використовувати засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти, інші нормативні документи

під час технічного діагностування об'єктів залізничного транспорту, їхніх систем та елементів.

КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ У ЗДОБУВАЧІВ

Уміння вирішувати завдання опору матеріалів – це основа надбання професійних компетенцій. Набуті знання, вміння, навички дають змогу здобувачу виконувати поставлені перед ним професійні завдання. Здобувачі вищої освіти спеціальності 273 «Залізничний транспорт» першого рівня освіти (бакалавр) усіх форм навчання мають сформувати і розвинути такі компетенції:

- здатність проводити дослідження на відповідному рівні;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність розрізняти об'єкти залізничного транспорту та їхні складові, визначати вимоги до їхньої конструкції, параметрів і характеристик;
- здатність проводити вимірювальний експеримент із визначення параметрів і характеристик об'єктів залізничного транспорту, їхніх агрегатів, систем та елементів;
- здатність аналізувати технологічні процеси виробництва та ремонту об'єктів залізничного транспорту як об'єкта управління, застосовувати експертні оцінки для вироблення управлінських рішень щодо подальшого функціонування підприємства з оцінюванням якості його продукції;
- здатність застосовувати методи і засоби технічних вимірювань, технічні регламенти, стандарти тощо.

МЕТОДИ ВИВЧЕННЯ І КОНТРОЛЮ

Методичні вказівки мають теоретичну частину за темою роботи, контрольні запитання, схеми завдання, приклади їхнього розв'язання.

Теоретична частина містить увесь матеріал, який необхідно знати для виконання розрахунково-графічної роботи (частина 1). Здобувачі ознайомлюються з основними задачами дисципліни «Опір матеріалів», видами навантажень, типами опорних пристроїв і поняттям розрахункової схеми, видами внутрішніх зусиль, методом їхнього знаходження. Розглянуто метод перерізів для побудови епюр внутрішніх зусиль. Контрольні запитання дають змогу перевірити отримані теоретичні знання. Наведено схеми самих завдань для виконання розрахунково-графічної роботи (частина 1), які складаються з п'яти задач: побудова епюр у консольній балці, в двоопорній балці, стрижні, валу, двоопорній рамі. До кожної задачі наведено приклад розв'язання з поясненнями.

ПЕРЕЛІК ДОКУМЕНТІВ, ЯКІ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО ЗАХИСТУ

Розрахунково-графічна робота має містити розрахункові схеми та самі розрахунки задач з поясненнями та остаточними результатами. У додатку А подано зразок оформлення титульного аркуша. Завдання має бути оформлене відповідно до вимог студентської звітності [7].

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Опір матеріалів – це наука, яка займається розробленням методів розрахунку елементів машин і споруд на міцність, жорсткість і стійкість.

Міцність – це здатність конструкції, її частин і деталей витримувати певні навантаження без руйнувань.

Жорсткість – це здатність конструкції, її елементів сприймати дію зовнішніх навантажень без істотної зміни форми та розмірів.

Стійкість – це здатність конструкції та її елементів зберігати стійку форму пружної рівноваги, не викривляючись при дії зовнішніх навантажень.

Для того щоб підібрати міцні, жорсткі та стійкі розміри споруд і механізмів, необхідно знати:

- 1) властивості матеріалів, з яких виконано конструкцію;
- 2) навантаження та впливи на конструкцію;
- 3) внутрішні сили, що діють в елементах конструкції.

Поверхневі навантаження поділяються:

- на зосереджені сили – це сили, які діють на малій площі порівняно з розмірами деталі та умовно вважаються прикладеними в точці. Наприклад, тиск колеса рухомого складу на рейку. Позначається літерою F . Одиниці вимірювання – H , kH , kGc , tc ;

- розподілене навантаження – це навантаження, яке прикладене на ділянці конструкції (шар піску, насипаний на тротуар) і розподілене за площею. Якщо навантаження розподілене рівномірно по поверхні, його називають рівномірно розподіленим, якщо нерівномірно – нерівномірно розподіленим. Одиниці вимірювання – H/m^2 , kH/m^2 . Часто розподілене за площею навантаження зводять до погонного навантаження, одиниці вимірювання інтенсивності його – H/m , kH/m . Позначається літерою q ;

- зосереджений момент – це пара сил, тобто дві рівні за значенням і протилежно спрямовані сили, розташовані на деякій відстані. Позначається літерою M . Одиниця вимірювання – Hm .

Найчастіше в інженерній практиці застосовують такі види опорних пристроїв:

- шарнірно-рухома опора. Допускає поворот конструкції навколо центра шарніра та горизонтальне переміщення. Має два ступені свободи. У ньому діє одна реакція R_A (рисунок 1);

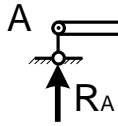


Рисунок 1 – Шарнірно-рухома опора

- шарнірно-нерухома опора. Допускає лише поворот споруди навколо центра шарніра, тому має один ступінь свободи. У такому опорному пристрої діє дві опорні реакції R_A та H_A (рисунок 2);

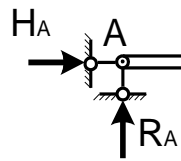


Рисунок 2 – Шарнірно-нерухома опора

- защемлення. Не допускає ніяких переміщень, тому кількість ступенів свободи дорівнює нулю. Виникає три опорні реакції R_A , H_A та M_A (рисунок 3).

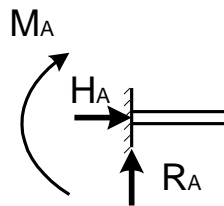


Рисунок 3 – Защемлення

Розрахунковою схемою називають ідеалізовану спрощену схему справжньої конструкції або її частини, у якій відображені лише основні її властивості.

Балки – це елементи, які працюють на згин (двоопорні, консольні, однопрогонові консольні) (рисунок 4).

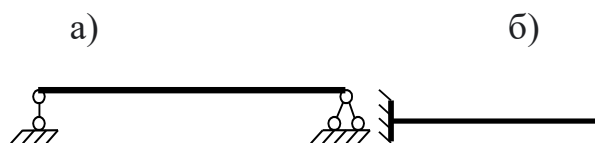


Рисунок 4 – Двоопорна (а) і консольна (б) балки

Рами – це конструкції, що містять горизонтальні та вертикальні елементи. Стрижні рами працюють на згин і осьову дію сил (рисунок 5).

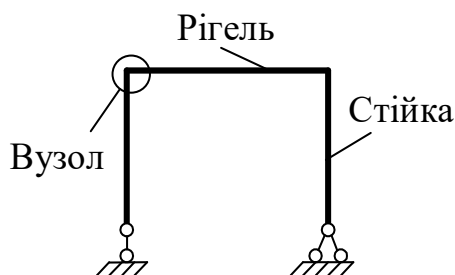


Рисунок 5 – Двоопорна рама

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між окремими частинами тіла. Для визначення цих сил існує метод перерізів. Сутність цього методу полягає в тому, що тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил. У просторовій системі може виникати шість видів внутрішніх зусиль (рисунок 6): N – поздовжня сила, Q_y , Q_z – поперечні сили, M_x – крутний момент, M_y , M_z – згинальні моменти.

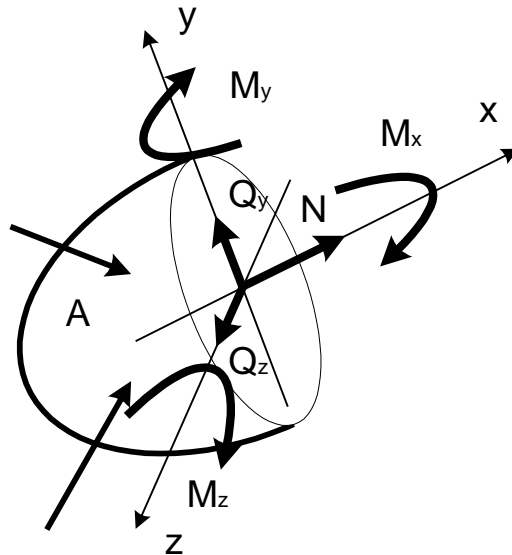


Рисунок 6 – Види внутрішніх зусиль

Поздовжньою силою N у перерізі називають суму проєкцій усіх зовнішніх сил, розташованих по один бік перерізу. Поперечною силою Q_y або Q_z у перерізі називають суму проєкцій усіх зовнішніх сил, розташованих по один бік від перерізу. Згинальним моментом M_y або M_z у перерізі називають суму моментів усіх зовнішніх сил, розташованих по один бік від перерізу. Крутним моментом M_x у перерізі називають суму моментів усіх зовнішніх сил, розташованих по один бік від перерізу.

Для просторової системи існує шість рівнянь рівноваги:

$$\sum x = 0, \sum y = 0, \sum z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0 . \quad (1)$$

Отже, маючи шість рівнянь рівноваги, можна знайти шість невідомих внутрішніх зусиль.

$$\begin{aligned} \text{З } \sum x = 0 \text{ знаходимо } N, \quad \sum y = 0 - Q_y, \quad \sum z = 0 - Q_z, \\ \sum M_x = 0 - M_x, \quad \sum M_y = 0 - M_y, \quad \sum M_z = 0 - M_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо в перерізі діє лише один вид внутрішнього зусилля, то такий вид деформації називають простим. При дії поздовжньої сили N виникає деформація розтягання чи стискання. При дії однієї з поперечних сил Q_y чи Q_z такий вид деформації називається зсувом. При дії крутного моменту M_x виникає деформація кручення. При дії одного зі згинальних моментів M_y або M_z виникає деформація чистого згину.

Епюра внутрішніх зусиль – це графік розподілу якогось зусилля вздовж осі стрижня від дії нерухомого навантаження. При побудові епюр внутрішніх зусиль слід користуватися такими правилами:

1 Намічаємо характерні точки – це лівий і правий кінці балки; опорні точки; точки прикладання зосереджених сил і моментів; початок і кінець розподіленого навантаження.

2 Розрізаємо балку між характерними точками на дві частини.

3 Одну частину відкидаємо. Як правило, відкидаємо ту частину, де більше сил.

4 Дію відкинутої частини заміняємо додатним направленням внутрішніх зусиль.

5 Розглядаємо рівновагу частини, що залишилася. Складаємо рівняння рівноваги, з яких знаходимо внутрішні зусилля.

Правила знаків внутрішніх зусиль

Поздовжня сила N додатна, якщо вона спрямована від перерізу, тобто розтягує стрижень, відповідно якщо вона спрямована до перерізу, тобто стискає, вона від'ємна (рисунок 7).

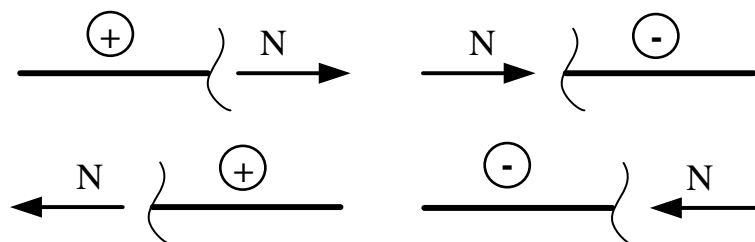


Рисунок 7 – Правило знаків поздовжньої сили

Поперечна сила Q_y або Q_z додатна, якщо вона обертає залишену частину балки навколо центра перерізу за годинниковою стрілкою, відповідно якщо вона обертає проти годинникової стрілки, то вона від'ємна (рисунок 8).

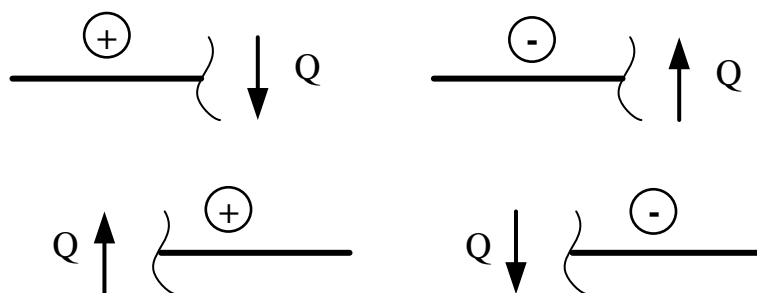


Рисунок 8 – Правило знаків поперечної сили

Згинальний момент M_y або M_z додатний, якщо він згинає балку так, що розтягнута зона знаходиться знизу, тобто опуклістю вниз, відповідно якщо розтягнута зона знаходиться зверху, тобто опуклістю вгору, то згинальний момент від'ємний (рисунок 9).

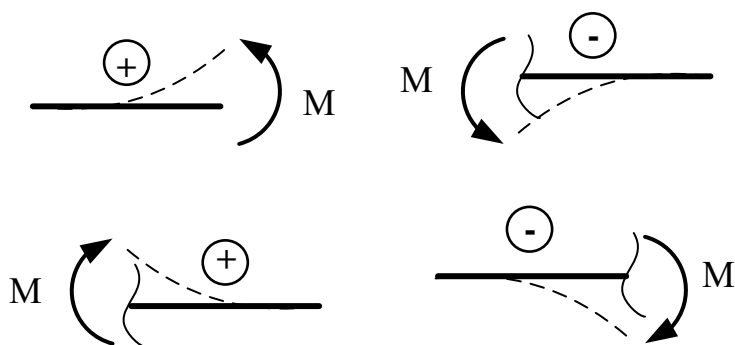


Рисунок 9 – Правило знаків згинального моменту

Крутний момент M_x додатний, якщо він обертає вал за годинниковою стрілкою, відповідно якщо він обертає вал проти годинникової стрілки, він від'ємний (рисунок 10). При цьому треба дивитися з боку перерізу.

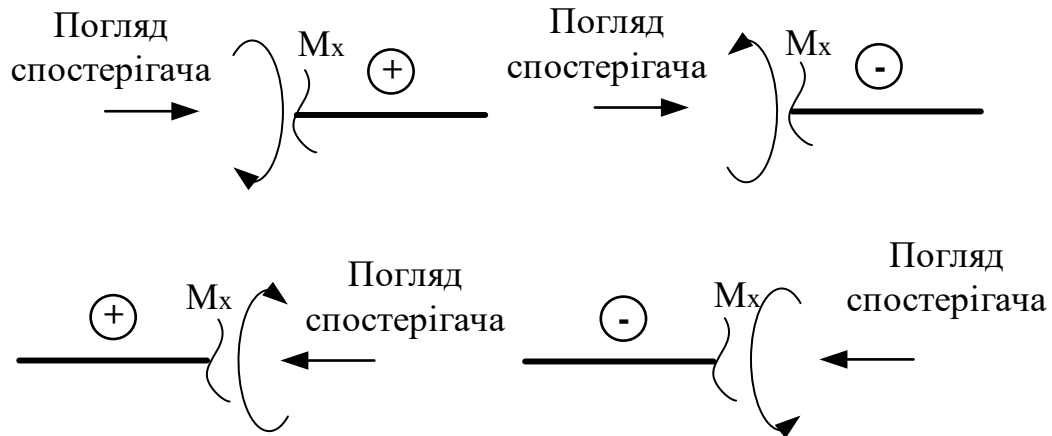


Рисунок 10 – Правило знаків крутного моменту

При згині мають місце такі диференціальні залежності:

1 Перша похідна від поперечної сили по абсцисі x дорівнює інтенсивності зовнішнього навантаження зі зворотним знаком.

$$\frac{dQ}{dx} = -q . \quad (3)$$

Перша похідна від згинального моменту по абсцисі x дорівнює поперечній силі.

$$\frac{dM}{dx} = Q . \quad (4)$$

2 Друга похідна від згинального моменту по абсцисі x дорівнює інтенсивності зовнішнього навантаження зі зворотним (протилежним) знаком.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q . \quad (5)$$

На підставі диференціальних залежностей (3)-(5) існують правила, які допомагають при побудові епюр:

1 Якщо на ділянці $Q > 0$, тобто (+), то згинальний момент зростає ($dM/dx > 0$).

2 Якщо на ділянці Q змінює знак, тобто проходить через нуль, то на епюрі M є екстремум. Якщо $Q = 0$, тобто відсутня, то $M = const$.

3 На ділянці, де розподілене навантаження відсутнє, $Q = const$ (пряма паралельна осі абсцис), а епюра M описується похилою прямою.

4 На ділянці балки, завантаженої розподіленим навантаженням, поперечна сила Q описується похилою прямою, а згинальний момент M – квадратною параболою. Опуклість параболи спрямована в бік дії розподіленого навантаження.

5 У перерізі, де діє згинальний момент M , на епюрі моментів є розрив першого роду (стрибок), величина якого дорівнює зовнішньому моменту. На епюрі поперечних сил згинальний момент не відображується.

6 У перерізі балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил має бути стрибок, що дорівнює діючій силі та спрямований у бік дії сили. На епюрі згинальних моментів у цій точці перелом.

ТЕСТОВІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1 Що називають міцністю, жорсткістю і стійкістю?
- 2 Що називають зосередженою силою, зосередженим моментом і розподіленим навантаженням, які їхні одиниці вимірювання?
- 3 Які реакції виникають у шарнірно-рухомій, шарнірно-нерухомій опорі, защемленні?

- 4 Що являють собою балки та рами?
- 5 Скільки внутрішніх зусиль виникає в перерізі у випадку просторового та плоского завантаження?
- 6 За допомогою яких рівнянь визначають внутрішні зусилля?
- 7 Що називають поздовжньою силою, поперечною силою, згинальним моментом, крутним моментом? Їхнє літерне позначення та одиниці вимірювання.
- 8 Які існують прості види деформацій, які внутрішні зусилля виникають у кожній із них?
- 9 Що таке розрахункова схема споруди?
- 10 Що таке еюра внутрішніх зусиль?
- 11 Сформулюйте правило знаків для поздовжніх і поперечних сил, згинальних і крутних моментів.
- 12 Сформулюйте алгоритм побудови еюр внутрішніх зусиль.
- 13 Як змінюється поперечна сила та згинальний момент на ділянці балки, де нема розподіленого навантаження?
- 14 Як змінюється поперечна сила та згинальний момент на ділянці балки, де є розподілене навантаження?
- 15 Як впливає зосереджена сила та зосереджений момент на вигляд еюри поперечних сил і згинальних моментів?
- 16 Якщо на ділянці, завантаженій розподіленим навантаженням, еюра поперечних сил змінює знак, то як це позначається на еюрі згинальних моментів?

ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНУ РОБОТУ 1 (ЧАСТИНА 1)

Побудова епюр внутрішніх силових факторів

Задачі 1-5. Для заданого варіанта даних (таблиця 1) і розрахункових схем балок і рам (рисунки 11-15) потрібно:

- 1) визначити опорні реакції;
- 2) скласти аналітичні залежності від внутрішніх сил на ділянках системи;
- 3) побудувати епюри внутрішніх сил.

Таблиця 1 – Дані для розрахунку

Варіант	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	q	l	h	a	b	c	d	R	α
	кН				кНм				кНм	м							град
1	6	14	24	32	8	25	112	95	5	10	6	4	2	1	0,2	2	30
2	7	12	25	38	10	38	115	87	6	9	8	6	1	2	0,1	3	45
3	5	16	22	36	14	26	106	94	8	10	9	5	3	1	0,2	4	60
4	8	18	26	40	10	22	110	98	7	8	7	4	2	2	0,1	3	45
5	10	14	28	34	12	35	108	85	9	8	6	5	1	1	0,2	2	30
6	5	16	24	38	8	40	122	90	6	7	8	3	2	2	0,1	3	60
7	6	15	22	32	10	24	110	96	7	9	7	4	3	1	0,2	4	30
8	10	18	25	36	15	38	115	92	5	10	8	5	2	2	0,1	2	45
9	7	20	28	40	12	40	118	90	9	8	8	3	3	1	0,2	4	60
10	8	12	30	34	14	35	116	95	8	9	9	4	3	2	0,1	3	45
11	14	5	36	24	15	25	110	100	5	7	6	3	1	3	0,2	2	60
12	12	8	40	25	8	35	115	88	6	9	6	5	1	3	0,1	3	45
13	16	10	34	22	12	22	112	102	8	10	9	6	2	3	0,2	4	30
14	18	5	38	26	14	25	108	97	7	8	9	3	2	1	0,1	3	60
15	14	6	32	28	15	40	112	87	9	9	10	4	1	1	0,2	2	30
16	16	10	36	24	8	26	110	92	6	8	10	5	3	3	0,1	3	45
17	15	7	40	22	12	26	116	102	7	10	10	6	1	1	0,2	4	60
18	18	8	34	25	14	40	115	89	5	7	7	6	3	2	0,1	2	45

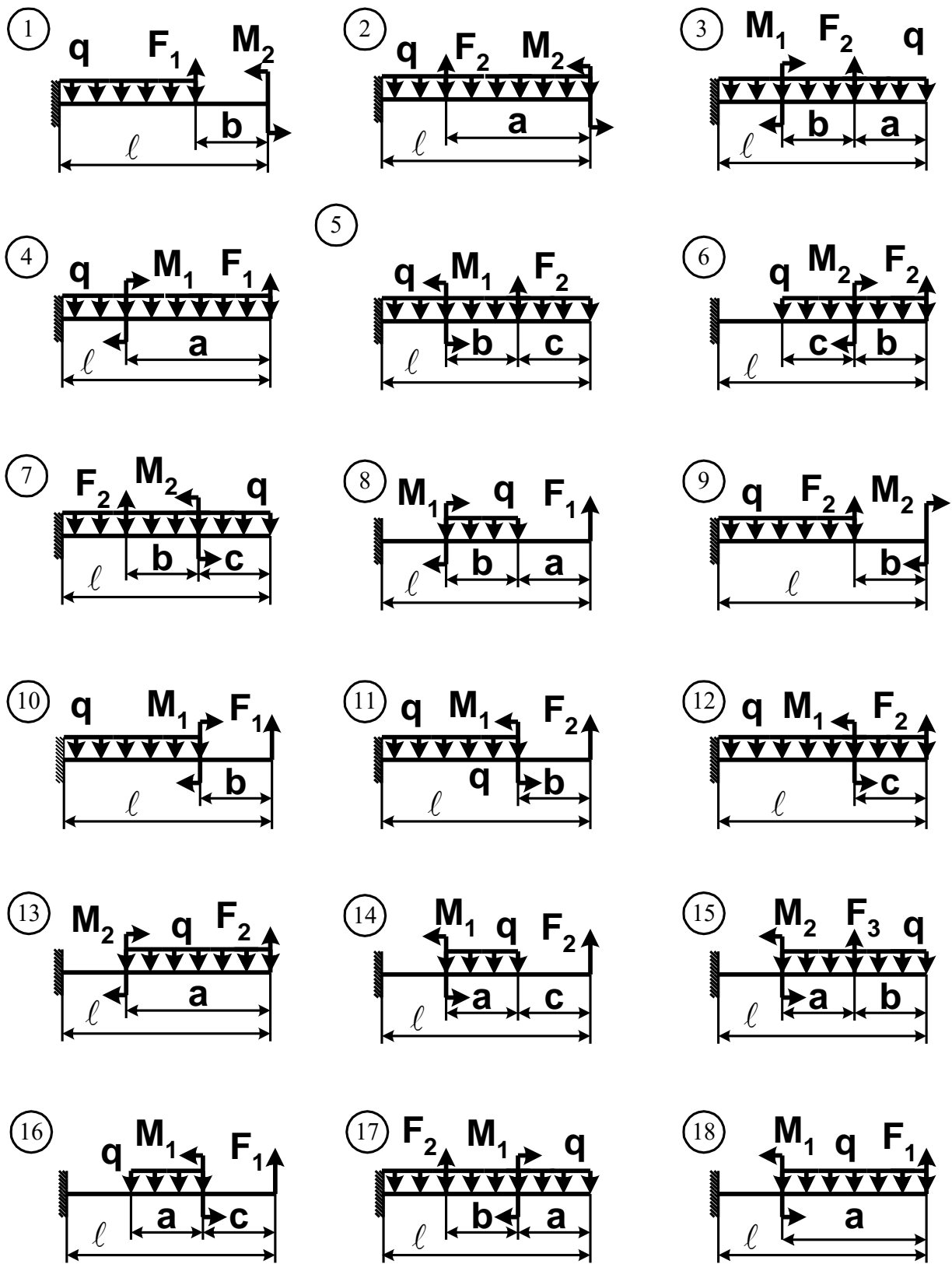


Рисунок 11 – Схеми консольних балок

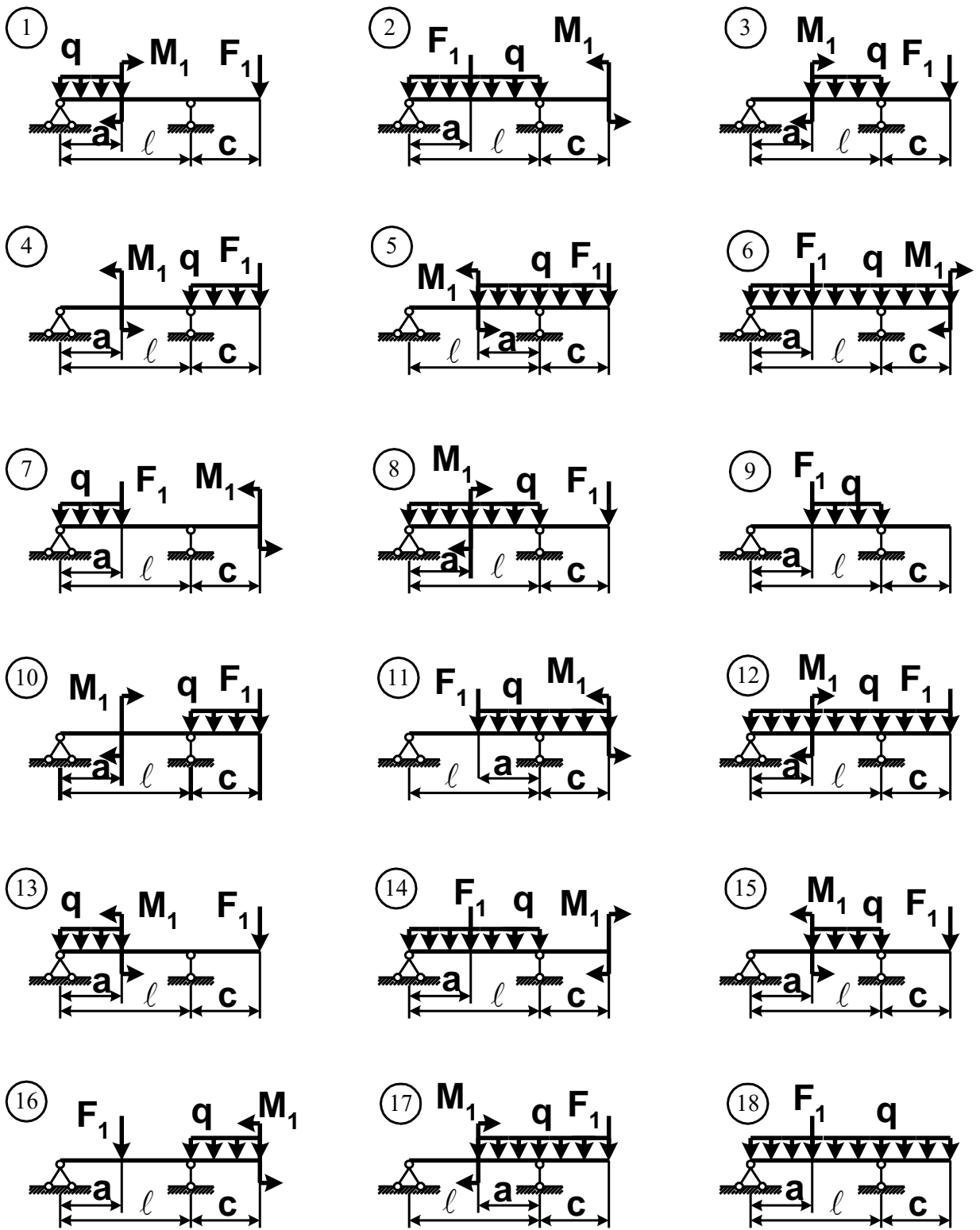


Рисунок 12 – Схеми балок на двох опорах

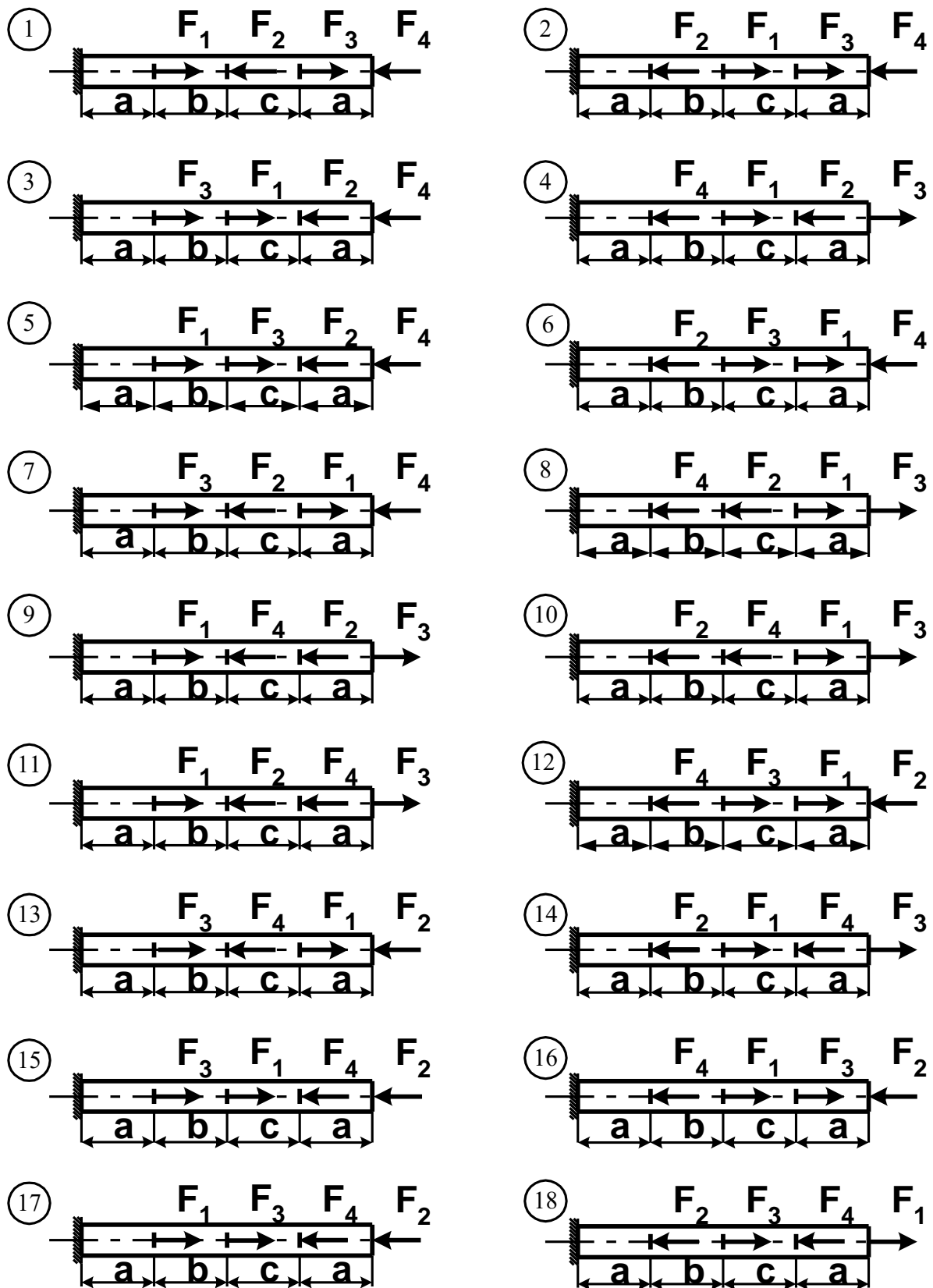


Рисунок 13 – Схеми стрижнів

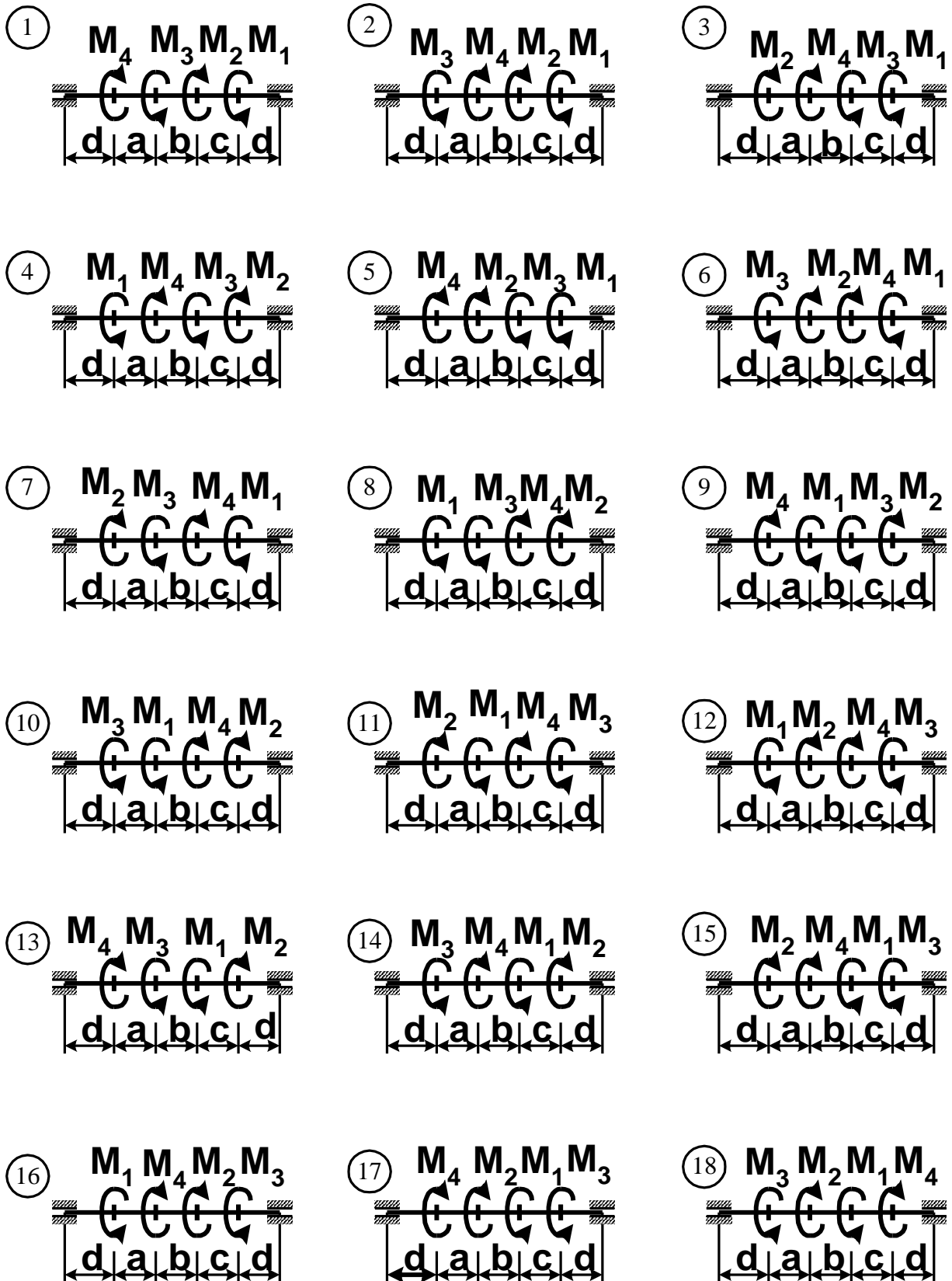


Рисунок 14 – Схеми валів

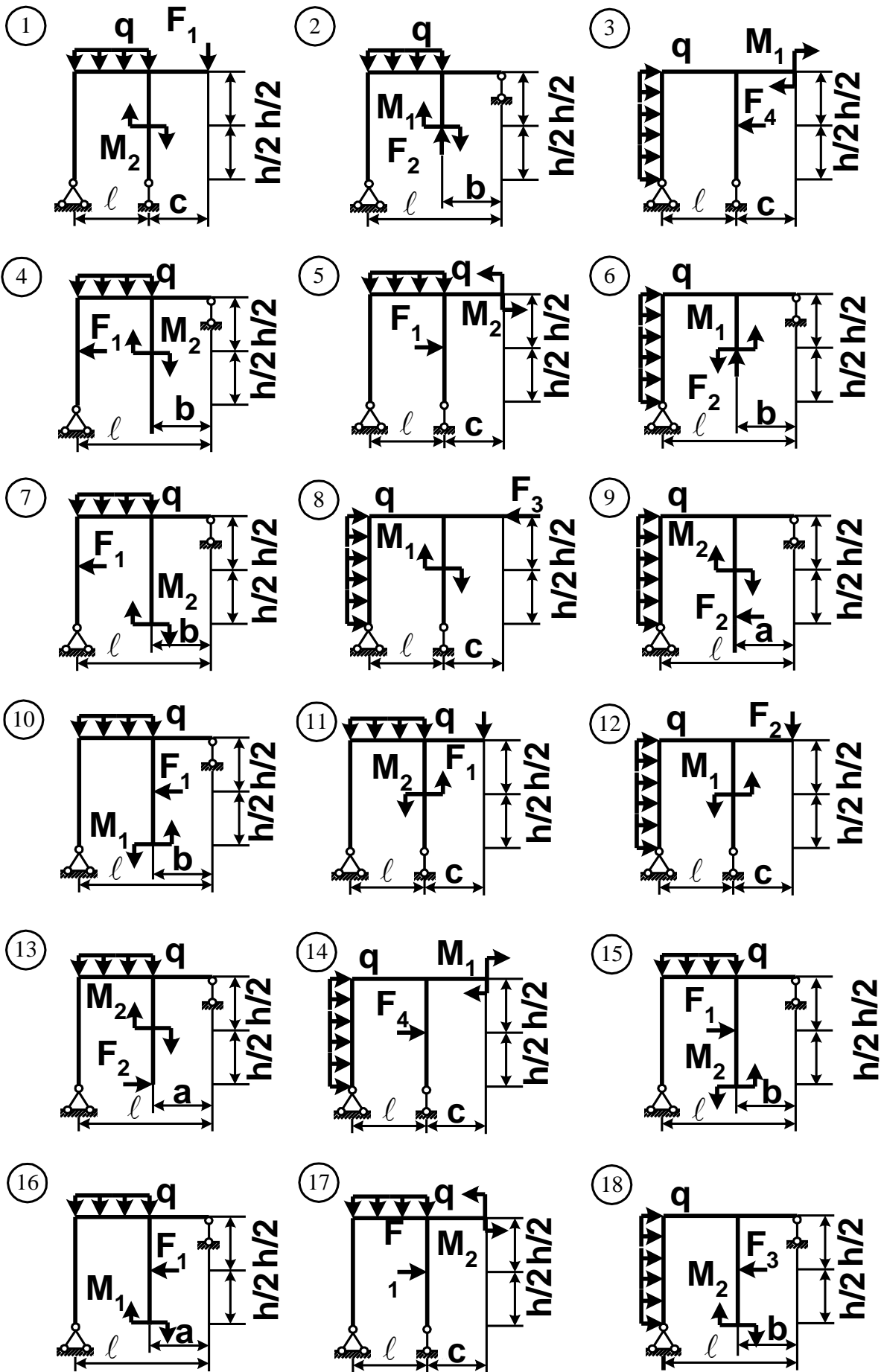


Рисунок 15 – Схемы плоских рам

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ З ПОЯСНЕННЯМИ

Задача 1. Побудова епюр у консольній балці

На схемі (рисунок 16) зображено консольну балку, до якої потрібно побудувати епюри внутрішніх зусиль. На балку діють сили поперек осі балки та згинальний момент. Тому треба побудувати епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_z . Ця балка є консольною, тому можна не визначати реакції в защемленні, але при цьому слід розглядати лише консольну її частину.

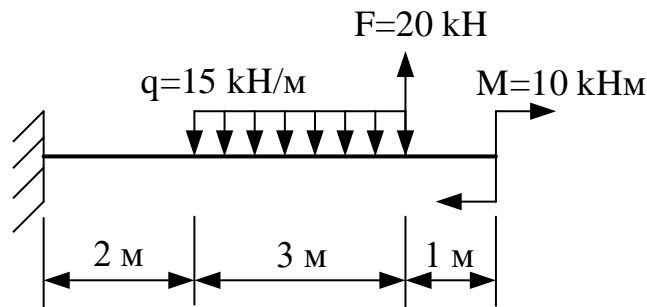
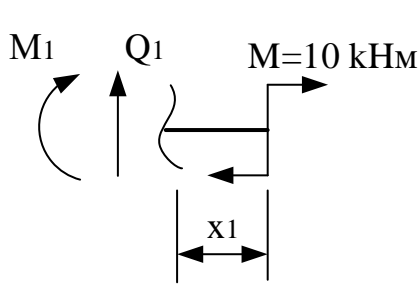


Рисунок 16 – Розрахункова схема консольної балки

Намічаємо характерні точки, якими будуть опора, що збігається з початком балки (точка 1); початок розподіленого навантаження (точка 2); кінець розподіленого навантаження, який збігається з точкою прикладання зосередженої сили (точка 3); кінець балки, який збігається з точкою прикладання зосередженого моменту (точка 4) (рисунок 17, а).

Проводимо переріз між точками 3 і 4, тому x_1 змінюється від нуля (у точці 4) до 1 м (у точці 3). Відкидаємо ліву частину балки, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунки 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



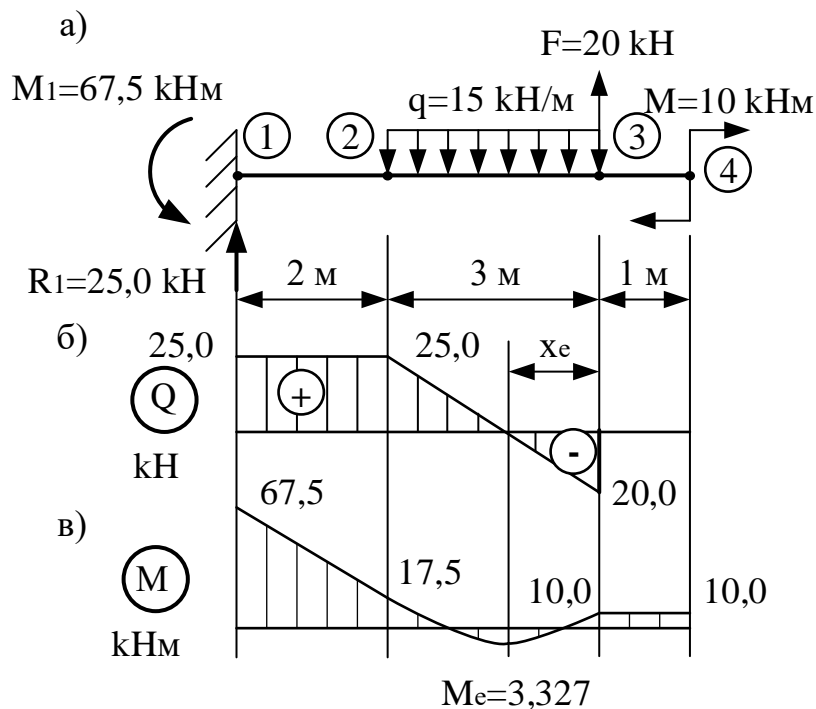
$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0; Q_1 = 0;$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_1 = -M = -10,0 \text{ кНм.}$$

Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 3 і 4 (рисунок 17, б, в).



а) визначення характерних точок;

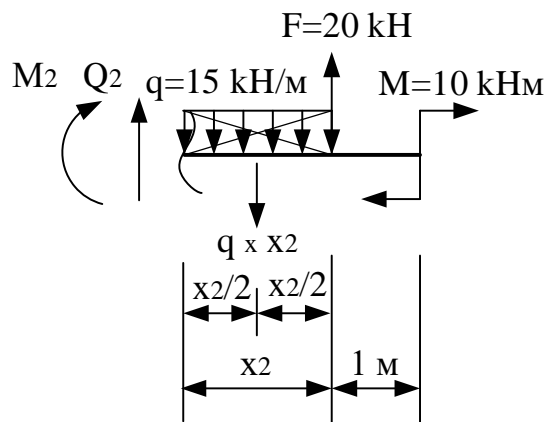
б) епюра поперечних сил; в) епюра згинальних моментів

Рисунок 17 – Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Епюра моментів відкладається в бік розтягнутих волокон. Тобто від'ємний момент відкладаємо зверху і він є сталою величиною.

Наступний переріз проводимо між точками 2 і 3, тому x_2 змінюється від нуля (у точці 3) до 3 м (у точці 2). Відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. До залишеної частини прикладаємо

додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунки 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



$$0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0; Q_2 - q \cdot x_2 + F = 0;$$

$$Q_2 = q \cdot x_2 - F.$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_2 = -q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} + F \cdot x_2 - M;$$

При $x_2 = 0$ (точка 3)

$$Q_2 = -F = -20,0 \text{ кН};$$

$$M_2 = -M = -10,0 \text{ кНм.}$$

При $x_2 = 3$ м (точка 2)

$$Q_2 = 15 \cdot 3 - 20 = 25,0 \text{ кН};$$

$$M_2 = -15 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 20 \cdot 3 - 10 = \\ = -17,5 \text{ кНм.}$$

На цій ділянці поперечна сила змінює знак, тому на епюрі моментів є екстремум. Знайдемо його. Екстремальний момент знаходиться в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Тому прирівняємо рівняння поперечних сил на цій ділянці до нуля і знайдемо x_e .

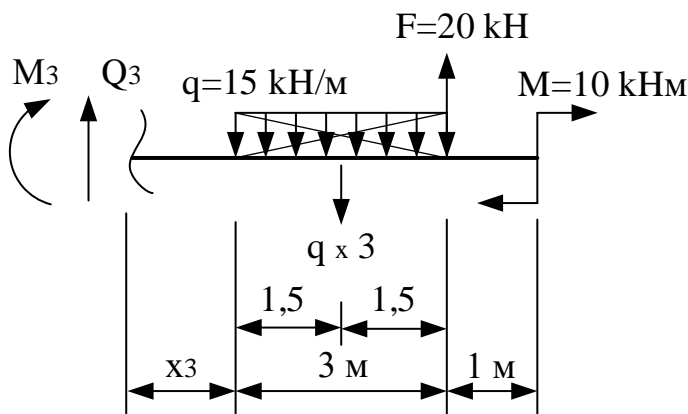
$$Q_2 = q \cdot x_e - F = 0; x_e = \frac{F}{q} = \frac{20}{15} = 1,333 \text{ м.}$$

Підставляємо це значення в рівняння моментів на цій ділянці:

$$M_e = -15 \cdot 1,333 \cdot \frac{1,333}{2} + 20 \cdot 1,333 - 10 = 3,327 \text{ кНм.}$$

Відкладаємо значення поперечних сил і згинальних моментів на цій ділянці від нульової лінії, між точками 2 і 3, пам'ятаючи, що додатний згинальний момент відповідно до правила знаків відкладається знизу. Рівняння поперечних сил має x_2 першого степеня, тому на епюрі поперечних сил точки необхідно з'єднати прямою лінією. А рівняння згинальних моментів має x_2 другого степеня, тому на епюрі згинальних моментів точки необхідно з'єднати квадратною параболою, причому опуклість параболи має бути спрямована в бік дії розподіленого навантаження, тобто вниз (рисунок 17, б, в).

Останній переріз проводимо між точками 1 і 2, тому x_3 змінюється від нуля (у точці 2) до 2 м (у точці 1). Відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунок 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0;$$

$$Q_3 - q \cdot 3 + F = 0;$$

$$Q_3 = q \cdot 3 - F = 15 \cdot 3 - 20 = 25,0 \text{ kHм};$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_3 = -q \cdot 3 \cdot (x_3 + 1,5) + F \cdot (x_3 + 3) - M.$$

При $x_3 = 0$ (точка 2)

$$M_3 = -15 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 3 - 10 = -17,5 \text{ kHм};$$

При $x_3 = 2$ м (точка 1)

$$M_3 = -15 \cdot 3 \cdot (2 + 1,5) + 20 \cdot (2 + 3) - 10 = -67,5 \text{ kHм.}$$

Відкладаємо значення поперечних сил і згинальних моментів на цій ділянці від нульової лінії, між точками 1 і 2, пам'ятаючи, що додатний згинальний момент відповідно до правила знаків відкладається знизу. Рівняння поперечних сил на цій ділянці не залежить від x_3 , тому епюра поперечних сил є сталою. Рівняння згинальних моментів має x_3 першого степеня, тому точки необхідно з'єднати прямою лінією (рисунок 17, б, в).

Виконуємо перевірку побудованих епюр. У точці прикладання зосередженої сили на епюрі поперечних сил є стрибок на величину сили, який спрямовано в бік дії сили, на епюрі моментів у цій точці злам. У точці прикладання зосередженого моменту на епюрі моментів є стрибок на величину моменту, який спрямовано в бік дії моменту. На ділянці, де діє розподілене навантаження, епюра поперечних сил має вигляд похилої прямої лінії, епюра моментів має вигляд квадратної параболи. На цій ділянці епюра поперечних сил змінює знак, тому на епюрі моментів є екстремум. На ділянці, де нема розподіленого навантаження, епюра поперечних сил стала, епюра моментів – пряма похила лінія.

Побудовані епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_z необхідно заштрихувати лініями перпендикулярними до нульової лінії. На епюрі поперечних сил ставимо знаки. На епюрі згинальних моментів знаки не ставимо, тому що епюра будується з боку розтягнутих волокон.

У точці 1 на епюрі поперечних сил є стрибок на 25 kH , спрямований вгору. Це означає, що в цій точці прикладено силу, яка являє собою реактивну силу, тобто це реакція в защемленні, яка спрямована вгору $R_1 = 25 \text{ kH}$ (рисунок 17, б). У цій же точці на епюрі моментів є стрибок на $67,5 \text{ kHm}$, спрямований вгору. Це означає, що в цій точці прикладено зосереджений момент, який являє собою реактивний момент, тобто це реакція в опорі. Цей момент спрямовано зверху донизу (розтягнута зона зверху) $M_1 = 67,5 \text{ kH}$ (рисунок 17, в). Визначивши реакції, робимо статичну перевірку:

$$\sum y = 0; R_1 - q \cdot 3 + F = 25 - 15 \cdot 3 + 20 = 0;$$

$$\sum M_4 = 0;$$

$$R_1 \cdot 6 - M_1 - q \cdot 3 \cdot (1,5 + 1) + F \cdot 1 + M = 25 \cdot 6 - 67,5 - 15 \cdot 3 \cdot 2,5 + \\ + 20 \cdot 1 + 10 = 0.$$

Рівняння рівноваги дорівнюють нулю, тому задача розв'язана правильно.

Задача 2. Побудова епюр у двоопорній балці

На схемі (рисунок 18) зображено двоопорну балку, до якої потрібно побудувати епюри внутрішніх зусиль. На балку діють сили поперек осі балки та згинальний момент. Тому треба побудувати епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_z . Розв'язання двоопорних систем треба починати зі знаходження реакцій.

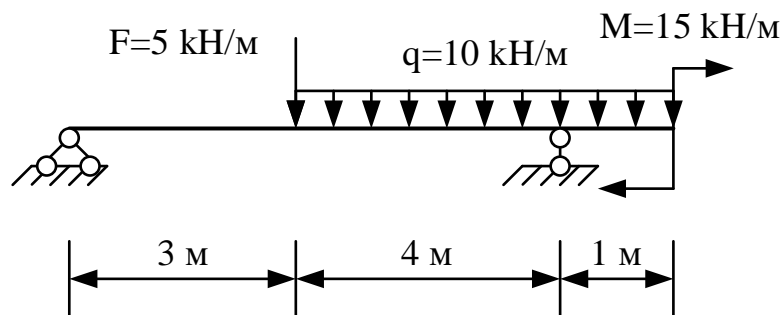


Рисунок 18 – Схема двоопорної балки

Ліворуч знаходиться шарнірно-нерухома опора, у якій виникає вертикальна та горизонтальна реакції. До балки горизонтальних сил не прикладено, тому горизонтальна реакція дорівнює нулю, і її зазвичай не показують. Праворуч знаходиться шарнірно-рухома опора, у якій виникає одна вертикальна реакція. Реакції знаходимо з рівнянь рівноваги, а саме для

двоопорних балок доцільно використовувати саме $\sum M$ відносно лівої та правої опор. Все, що обертає в один бік, береться з одним знаком, все, що обертає в інший бік, береться з протилежним знаком.

$$\sum M_1 = 0; M - R_3 \cdot 7 + q \cdot 5 \cdot (3 + 2,5) + F \cdot 3 = 0;$$

$$R_3 = \frac{M + q \cdot 5 \cdot 5,5 + F \cdot 3}{7} = \frac{15 + 10 \cdot 5 \cdot 5,5 + 5 \cdot 3}{7} = 43,571 \text{ kH};$$

$$\sum M_3 = 0; M + R_1 \cdot 7 - q \cdot 5 \cdot (2,5 - 1) - F \cdot 4 = 0;$$

$$R_1 = \frac{-M + q \cdot 5 \cdot 1,5 + 5 \cdot 4}{7} = \frac{-15 + 10 \cdot 5 \cdot 1,5 + 5 \cdot 4}{7} = 11,429 \text{ kH}.$$

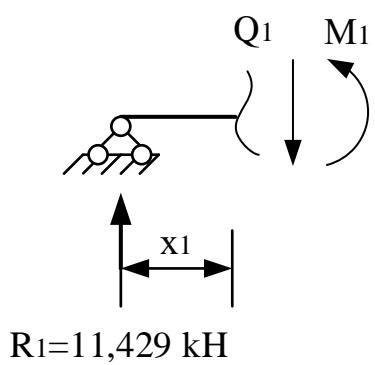
Перевіряємо правильність визначення реакцій:

$$\sum y = 0; R_1 + R_2 - F - q \cdot 5 = 11,429 + 43,571 - 5 - 10 \cdot 5 = 0.$$

Реакції визначено правильно. Показуємо їх на розрахунковій схемі.

Намічаємо характерні точки, якими будуть ліва опора, вона також збігається з початком балки (точка 1); точка прикладання зосередженої сили, вона збігається з початком розподіленого навантаження (точка 2); права опора (точка 3); кінець балки, він збігається з точкою прикладання зосередженого моменту та кінцем розподіленого навантаження (точка 4) (рисунок 19, а).

Проводимо переріз між точками 1 і 2. Розглядаємо праву частину, тому що праворуч знаходиться менша кількість навантажень. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунки 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



x_1 змінюється від нуля (точка 1) до 3 м (точка 2);

$$0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0; R_1 - Q_1 = 0; Q_1 = R_1 = 11,429 \text{ кН};$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_1 = R_1 \cdot x_1 = 11,429 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ (точка 1) $M_1 = 0 \text{ кНм}$.

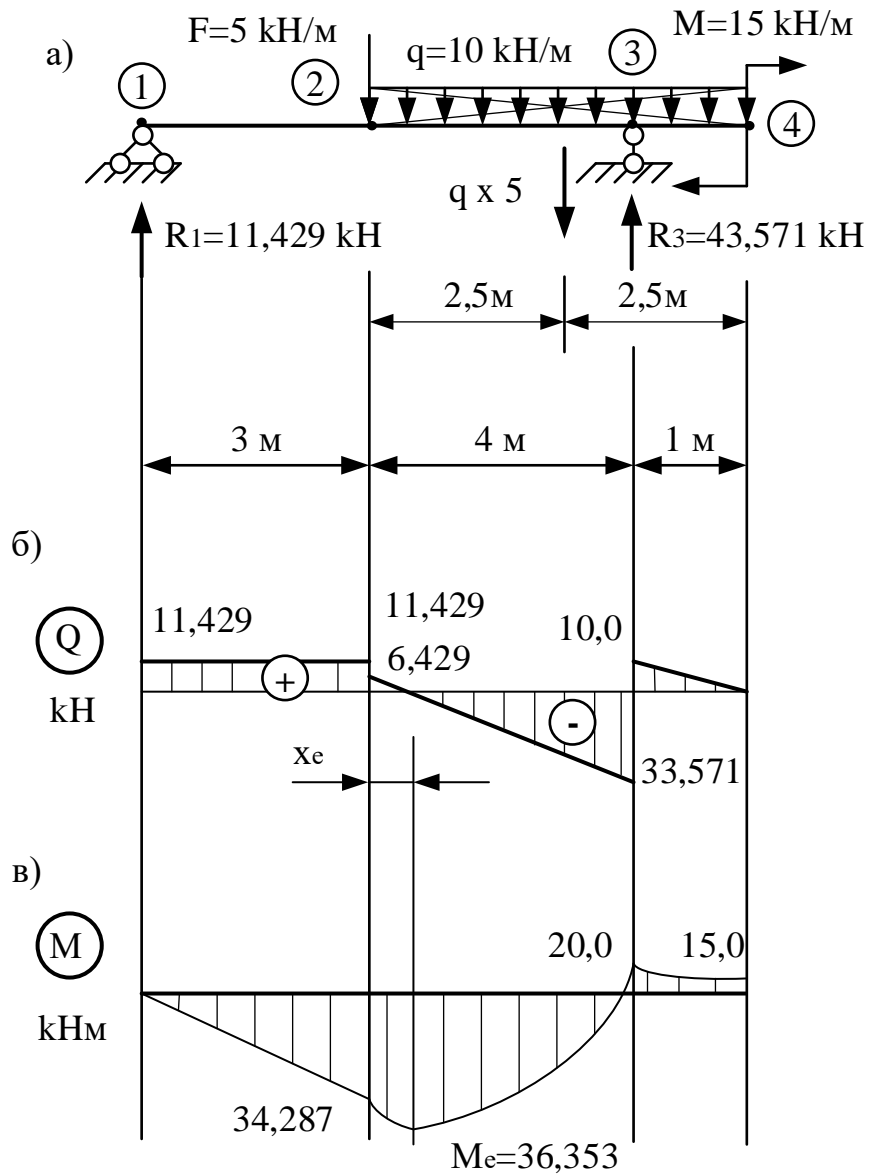
При $x_1 = 3 \text{ м}$ (точка 2)

$$M_1 = 11,429 \cdot 3 = 34,287 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 1 і 2 (рисунок 19, б, в).

Поперечна сила на цій ділянці від x_1 не залежить, тому це стала величина. У рівнянні згинальних моментів x_1 першого степеня. Тому ці точки необхідно з'єднати прямою лінією. Пам'ятаємо, що еюра моментів відкладається в бік розтягнутих волокон, тобто додатний момент відкладаємо униз.

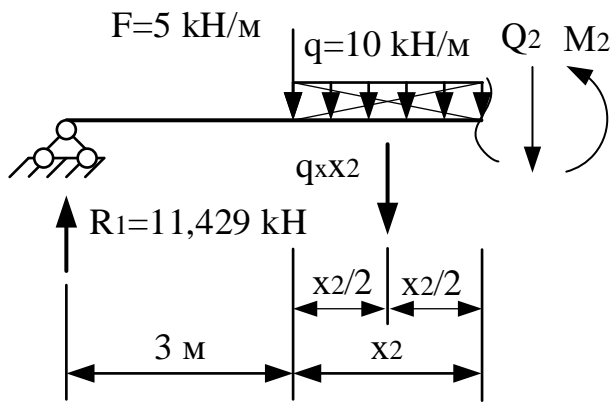
Наступний переріз проводимо між точками 2 і 3. Розглядаємо праву частину, тому що праворуч знаходиться менша кількість навантажень. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунок 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



а) визначення характерних точок;

б) еюра поперечних сил; в) еюра згинальних моментів

Рисунок 19 – Побудова еюр поперечних сил і згинальних моментів



x_2 змінюється від нуля (точка 2) до 4 м (точка 3);

$$0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0; R_1 - F - q \cdot x_2 - Q_2 = 0;$$

$$Q_2 = R_1 - F - q \cdot x_2;$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_2 = R_1 \cdot (3 + x_2) - F \cdot x_2 -$$

$$-q \cdot x_2 \frac{x_2}{2}.$$

При $x_2 = 0$ (точка 2)

$$Q_2 = 11,429 - 5 = 6,429 \text{ кН.}$$

$$M_2 = 11,429 \cdot 3 = 34,287 \text{ кНм.}$$

При $x_2 = 4$ м (точка 3)

$$Q_2 = 11,429 - 5 - 10 \cdot 4 = -33,571 \text{ кН.}$$

$$M_2 = 11,429 \cdot (3 + 4) - 5 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = -19,997 \approx -20,0 \text{ кНм.}$$

На цій ділянці поперечна сила змінює знак, тому на епюрі моментів є екстремум. Знайдемо його. Екстремальний момент знаходиться в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Тому прирівняємо рівняння поперечних сил на цій ділянці до нуля і знайдемо x_e .

$$Q_2 = R_1 - F - q \cdot x_e = 11,429 - 5 - 10x_e = 0;$$

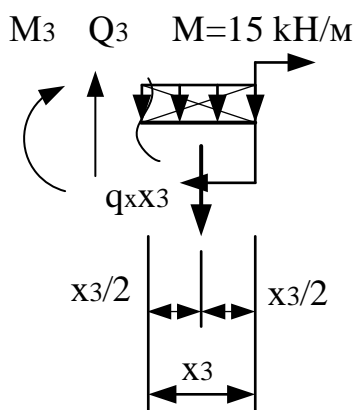
$$x_e = \frac{6,429}{10} = 0,643 \text{ м;}$$

Підставляємо це значення в рівняння моментів на цій ділянці:

$$M_e = 11,429 \cdot (3 + 0,643) - 5 \cdot 0,643 - 10 \cdot 0,643 \frac{0,643}{2} = 36,353 \text{ kNm} .$$

Відкладаємо значення поперечних сил і згинальних моментів на цій ділянці від нульової лінії, між точками 2 і 3, пам'ятаючи, що додатний згинальний момент відповідно до правила знаків відкладається знизу. Рівняння поперечних сил має x_2 першого степеня, тому на епюрі поперечних сил точки необхідно з'єднати прямою лінією. А рівняння згинальних моментів має x_2 другого степеня, тому на епюрі згинальних моментів точки необхідно з'єднати квадратною параболою, причому опуклість параболи має бути спрямована в бік дії розподіленого навантаження, тобто вниз (рисунок 19, б, в).

Останній переріз проводимо між точками 3 і 4, тому x_3 змінюється від нуля (у точці 4) до 1 м (у точці 3). Розглядаємо праву частину, тому що до неї прикладено менша кількість навантажень. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної сили та згинального моменту (рисунок 8, 9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



x_3 змінюється від нуля (точка 4) до 1 м (точка 3);

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м} .$$

$$\sum y = 0; Q_3 - q \cdot x_3 = 0; Q_3 = q \cdot x_3;$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_3 = -M - q \cdot x_3 \frac{x_3}{2} .$$

$$\text{При } x_3 = 0 \text{ (точка 4)} \quad Q_3 = 0 \text{ kH} .$$

$$M_3 = -M = -15,0 \text{ kHm} .$$

$$\text{При } x_3 = 1 \text{ м (точка 3)}$$

$$Q_3 = 10 \cdot 1 = 10,0 \text{ kH} .$$

$$M_3 = -15 - 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -20,0 \text{ kHm} .$$

Відкладаємо значення поперечних сил і згинальних моментів на цій ділянці від нульової лінії, між точками 3 і 4, пам'ятаючи, що від'ємний згинальний момент відповідно до правила знаків відкладається зверху. Рівняння поперечних сил має x_3 першого степеня, тому на епюрі поперечних сил точки необхідно з'єднати прямою лінією. А рівняння згинальних моментів має x_3 другого степеня, тому на епюрі згинальних моментів точки необхідно з'єднати квадратною параболою, причому опуклість параболи має бути спрямована в бік дії розподіленого навантаження, тобто вниз. На цій ділянці поперечна сила не змінює знак, тому на епюрі згинальних моментів нема екстремуму (рисунок 19, б, в).

Виконуємо перевірку побудованих епюр. У точці прикладання зосереджених сил (у тому числі реакцій) на епюрі поперечних сил є стрибки на величини цих сил, які спрямовано в бік дії сил, на епюрі моментів у цих точках злами. У точці прикладання зосередженого моменту на епюрі моментів є стрибок на величину моменту, який спрямовано в бік дії моменту. На ділянці, де діє розподілене навантаження, епюра поперечних сил має вигляд похилої прямої лінії, епюра моментів має вигляд квадратної параболи. На ділянці з розподіленим навантаженням, де епюра поперечних сил змінює знак, у точці, де вона дорівнює нулю, на епюрі моментів є екстремум. На ділянці, де нема розподіленого навантаження, епюра поперечних сил стала, епюра моментів – пряма похила лінія.

Побудовані епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_z необхідно заштрихувати лініями, перпендикулярними до нульової лінії. На епюрі поперечних сил ставимо знаки. На епюрі згинальних моментів знак не ставимо, тому що епюра будується з боку розтягнутих волокон.

Задача 3. Побудова епюри у стрижні

На схемі (рисунок 20) зображено стрижень, на який діють сили, що збігаються з віссю стрижня. Тому стрижень зазнає деформацію розтягання-стискання, і у ньому виникає лише поздовжня сила N . Отже, у цій задачі необхідно побудувати епюру поздовжніх сил.

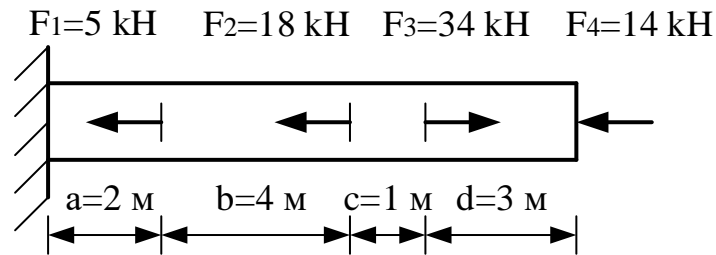
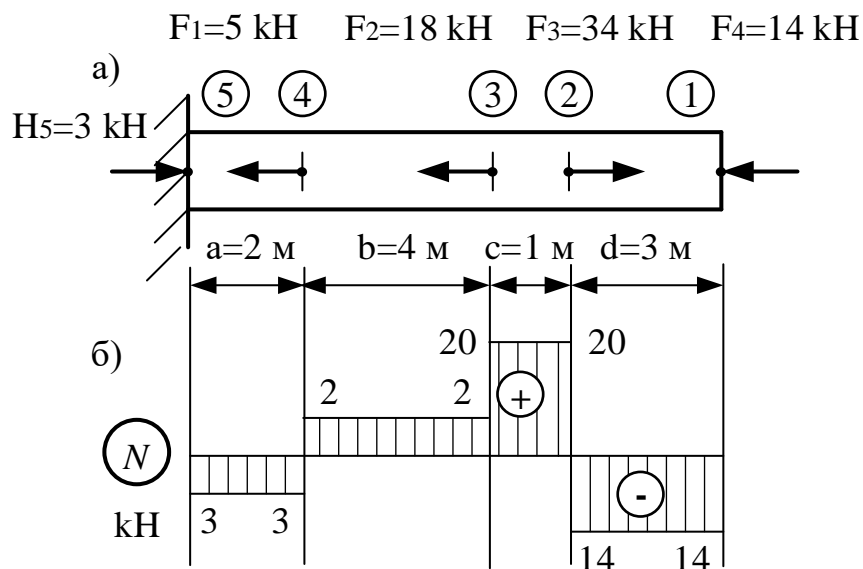


Рисунок 20 – Розрахункова схема стрижня

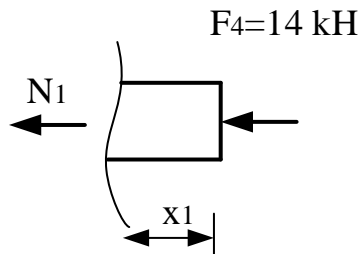
Намічаємо характерні точки (рисунок 21, а), якими будуть початок і кінець стрижня, і точки прикладення зосереджених сил.



а) визначення характерних точок; б) епюра поздовжніх сил

Рисунок 21 – Побудова епюри поздовжніх сил

Проводимо переріз між точками 1 і 2. Відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. До залишеної частини прикладаємо додатне направлення поздовжньої сили (рисунок 7). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.

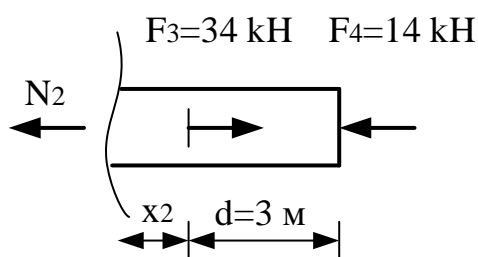


$$\sum x = 0; N_1 + F_4 = 0;$$

$$N_1 = -F_4 = -14 \text{ kH}.$$

Відкладаємо це значення від нульової лінії, між точками 1 і 2 (рисунок 21, б).

Далі проводимо переріз між точками 2 і 3. Знову відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. І до залишеної частини прикладаємо додатне направлення поздовжньої сили (рисунок 7). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.

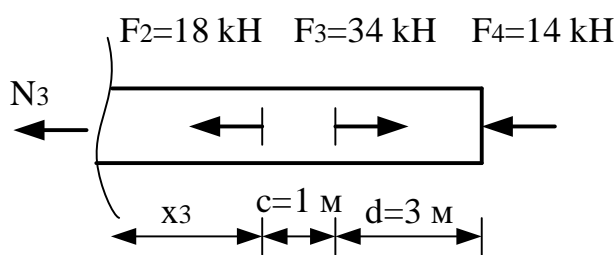


$$\sum x = 0; N_2 + F_4 - F_3 = 0;$$

$$N_2 = -F_4 + F_3 = -14 + 34 = 20 \text{ kH}.$$

Відкладаємо це значення від нульової лінії, між точками 2 і 3 (рисунок 21, б).

Наступним кроком проводимо переріз між точками 3 і 4. Знову відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. І до залишеної частини прикладаємо додатне направлення поздовжньої сили (рисунок 7). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.

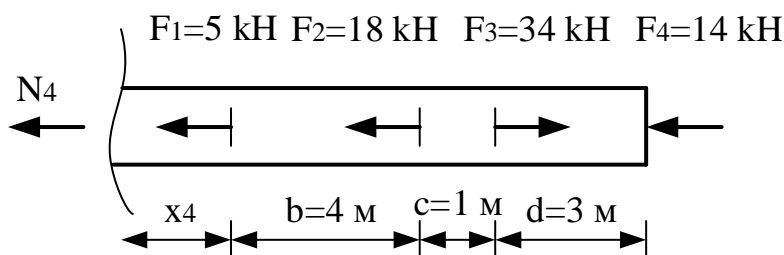


$$\sum x = 0; N_3 + F_4 - F_3 + F_2 = 0;$$

$$N_3 = -F_4 + F_3 - F_2 = -14 + 34 - 18 = 2 \text{ kH.}$$

Відкладаємо це значення від нульової лінії, між точками 3 і 4 (рисунок 21, б).

Проводимо останній переріз між точками 4 і 5. Знову відкидаємо ліву частину, тому що не знаємо величину реакції в защемленні. І до залишеної частини прикладаємо додатне направлення поздовжньої сили (рисунок 7). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



$$\sum x = 0; N_4 + F_4 - F_3 + F_2 + F_1 = 0;$$

$$N_4 = -F_4 + F_3 - F_2 - F_1 = -14 + 34 - 18 - 5 = -3 \text{ kH.}$$

Відкладаємо це значення від нульової лінії між точками 4 і 5 (рисунок 21, б).

Перевіряємо правильність побудованої епюри. У точках прикладання зосереджених сил є стрибки на величину відповідних сил, спрямовані в бік їхньої дії. У точці 5 є стрибок, який спрямовано праворуч, тобто в цій точці є сила, яка стискає стрижень. Сила, прикладена в опорі, є реактивною силою, тобто це реакція в опорі. Величина цієї сили дорівнює величині стрибка. Отже, у защемленні виникає реакція $H_5 = 3 \text{ kH}$, спрямована праворуч.

Виконуємо статичну перевірку задачі на підставі рівнянь рівноваги $\sum x = 0$: $H_5 - F_1 - F_2 + F_3 + F_4 = 3 - 5 - 18 + 34 - 14 = 0$. Задачу розв'язано правильно.

Побудовану епюру поздовжніх сил N необхідно заштрихувати лініями, перпендикулярними до нульової лінії, і поставити знаки.

Задача 4. Побудова епюри у валу

На схемі (рисунок 22) зображено вал, на який діє самоврівноважена система крутних моментів, тому вал зазнає деформацію кручення, і в ньому виникає лише крутний момент M_x . Отже, у цій задачі необхідно побудувати епюру крутних моментів.

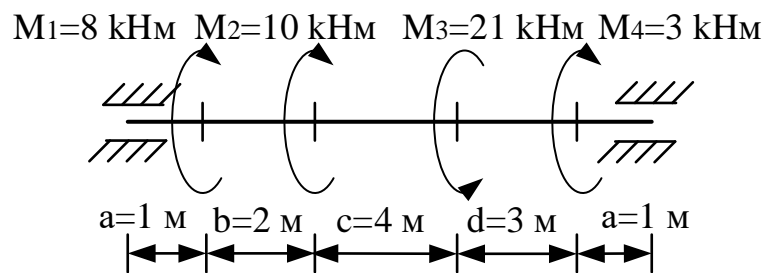
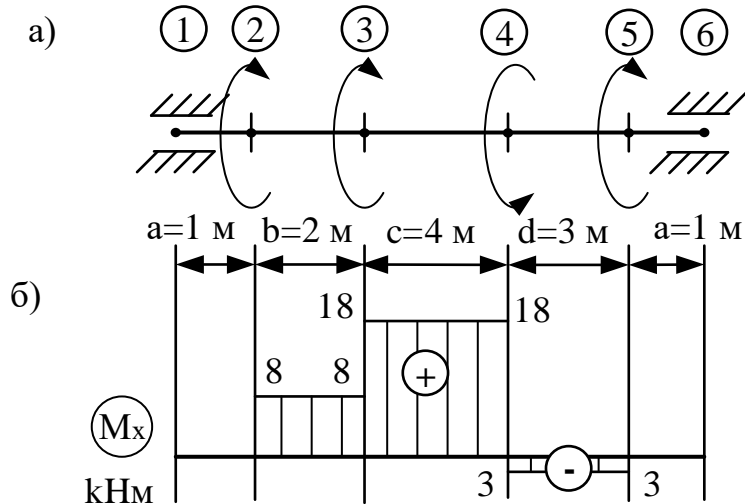


Рисунок 22 – Розрахункова схема вала

Намічаємо характерні точки. Цими точками будуть початок і кінець вала, точки прикладання зосереджених моментів (рисунок 23, а).

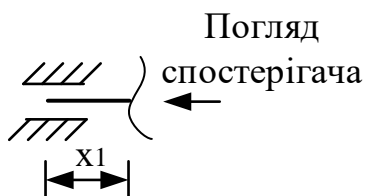
$$M_1=8 \text{ кНм} \quad M_2=10 \text{ кНм} \quad M_3=21 \text{ кНм} \quad M_4=3 \text{ кНм}$$



а) визначення характерних точок; б) епюра крутних моментів

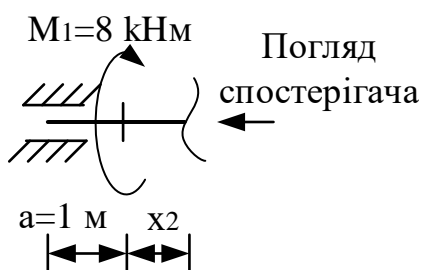
Рисунок 23 – Побудова епюри крутних моментів

Проводимо переріз між точками 1 і 2. За умовою задачі, ця система врівноважена. Це означає, що реактивні моменти в защемленнях дорівнюють нулю. Отже, ми можемо розглядати будь-яку частину вала. Залишимо для подальшого розглядання ліву частину.



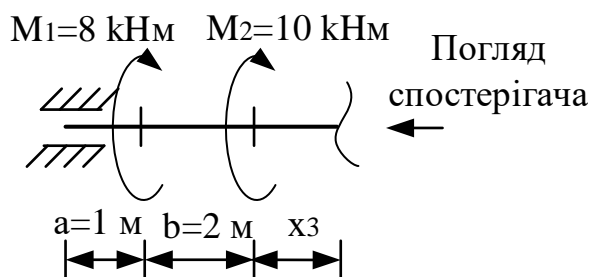
На цю ділянку не діють ніякі сили. Тому крутний момент між точками 1 і 2 дорівнює нулю. Відкладемо це на епюрі (рисунок 23, б).

Тепер проводимо переріз між точками 2 і 3. Залишимо для подальшого розглядання ліву частину, тому що ліворуч прикладено меншу кількість моментів, ніж праворуч.



Дивлячись на ділянку, бачимо, що крутний момент обертає за годинниковою стрілкою. За правилом знаків, цей момент є додатним (рисунок 10). Отже, між точками 2 і 3 діє крутний момент $M_x = M_1 = 8 \text{ кНм}$. Відкладаємо його на епюрі (рисунок 23, б).

Далі проводимо переріз між точками 3 і 4. На цій ділянці праворуч і ліворуч діють по два моменти. Тому неважливо, яку частину розглядати. Залишимо для подальшого розглядання ліву частину.

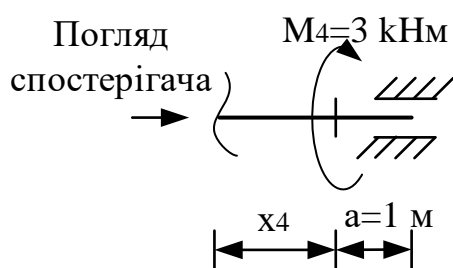


Дивлячись на ділянку, бачимо, що на ділянку діють два моменти, і обидва за годинниковою стрілкою.

$$M_x = M_1 + M_2 = 8 + 10 = 18 \text{ kNm.}$$

Отже, між точками 2 і 3 діє крутний момент $M_x = 18 \text{ kNm}$. Відкладаємо його на епюрі (рисунок 23, б).

Наступний переріз проводимо між точками 4 і 5. Залишимо для подальшого розглядання праву частину, тому що праворуч прикладено меншу кількість моментів, ніж ліворуч.

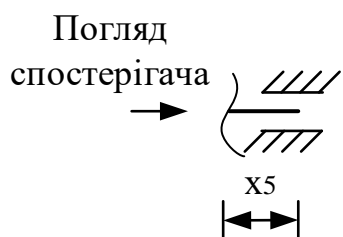


Дивлячись на цю ділянку, бачимо, що на ділянку діє момент, який обертає проти годинникової стрілки. За правилом знаків, цей момент від'ємний (рисунок 10).

$$M_x = -M_4 = -3 \text{ kNm.}$$

Отже, між точками 3 і 4 діє крутний момент $M_x = -3 \text{ kNm}$. Відкладаємо його на епюрі (рисунок 23, б).

Останній переріз проводимо між точками 5 і 6. Залишимо для подальшого розглядання праву частину, тому що праворуч прикладено меншу кількість моментів, ніж ліворуч.



На цю ділянку не діють ніякі сили. Тому крутний момент між точками 5 і 6 дорівнює нулю. Відкладаємо це на епюрі (рисунок 23, б).

Перевіряємо правильність побудованої епюри. У точках прикладання зосереджених моментів є стрибки на величину відповідних моментів, спрямовані в бік їхньої дії.

Побудовану епюру крутних моментів M_x необхідно заштрихувати лініями, перпендикулярними до нульової лінії, і поставити знаки.

Задача 5. Побудова епюр у двоопорній рамі

На схемі (рисунок 24) зображено двоопорну раму. Елементи рами працюють на розтягання-стискання та поперечний згин, тому в елементах рами виникає поздовжня сила N , поперечна сила Q_y , згинальний момент M_z . Розв'язання двоопорних систем треба починати зі знаходження реакцій.

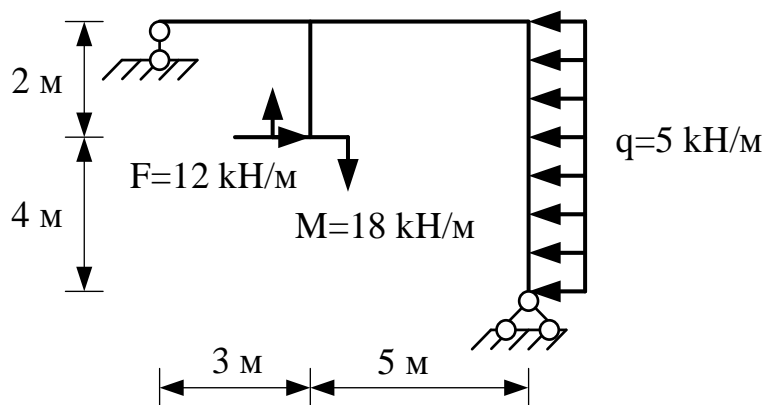


Рисунок 24 – Розрахункова схема двоопорної рами

Праворуч знаходиться шарнірно-нерухома опора, у якій виникає вертикальна та горизонтальна реакції. Ліворуч знаходиться шарнірно-рухома опора, у якій виникає одна вертикальна реакція. Реакції знаходимо з рівнянь рівноваги. Усе, що обертає в один бік, береться з одним знаком, усе, що обертає в інший бік, береться з протилежним знаком.

$$\sum x = 0; H_4 - q \cdot 6 = 0; H_4 = q \cdot 6 - F = 5 \cdot 6 - 12 = 18,0 \text{ kN}.$$

$$\sum M_4 = 0; R_1 \cdot 8 + M + F \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0;$$

$$R_1 = \frac{-M - F \cdot 4 + q \cdot 6 \cdot 3}{8} = \frac{-18 - 12 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 3}{8} = 3,0 \text{ kH};$$

$$\sum M_1 = 0; M - F \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - H_4 \cdot 6 - R_4 \cdot 8 = 0;$$

$$R_4 = \frac{M - F \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 - H_4 \cdot 6}{8} = \frac{18 - 12 \cdot 2 + 5 \cdot 6 \cdot 3 - 18 \cdot 6}{8} = -3,0 \text{ kH}.$$

На початку розрахунків реакція R_4 була спрямована вгору. Результати розрахунків показали, що вона від'ємна. Це означає, що дійсний напрямок реакції R_4 униз. Тобто вниз діє додатний напрямок реакції R_4 .

Перевіряємо правильність визначення реакцій:

$$\sum y = 0; R_1 - R_4 = 3 - 3 = 0.$$

Реакції визначено правильно. Показуємо їх на розрахунковій схемі рами (рисунок 25).

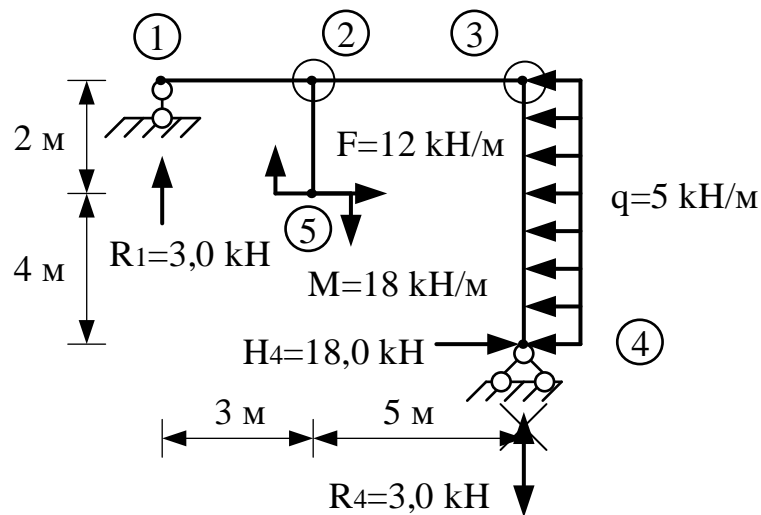
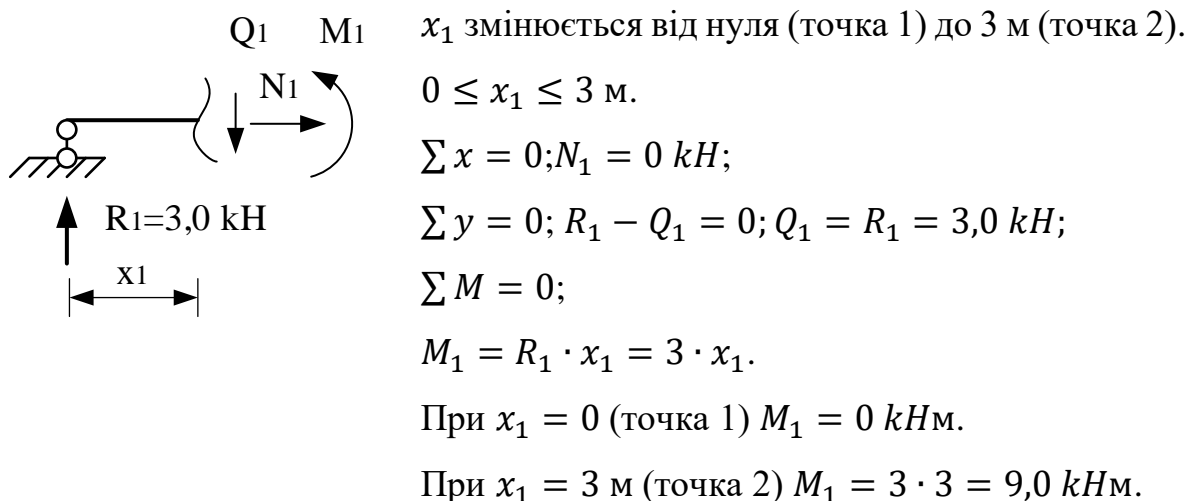


Рисунок 25 – Визначення опорних реакцій і характерних точок у двоопорній рамі

Намічаємо характерні точки, якими будуть опори (точки 1 і 4); вузол (точка 2); наступний вузол, який збігається з початком розподіленого навантаження (точка 3); точка прикладання зосередженої сили та зосередженого моменту (точка 5) (рисунок 25).

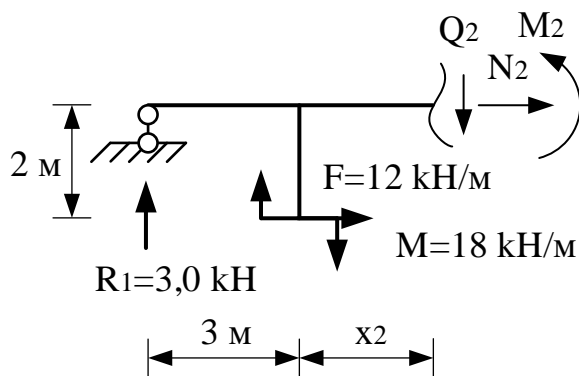
Проводимо переріз між точками 1 і 2. Розглядаємо ліву частину, тому що ліворуч знаходиться менша кількість навантажень. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної та поздовжньої сил і згинального моменту (рисунки 7-9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 1 і 2 (рисунок 26, а-в).

Поперечна сила на цій ділянці від x_1 не залежить, тому це стала величина. У рівнянні згинальних моментів x_1 першого степеня. Тому ці точки необхідно з'єднати прямою лінією. Пам'ятаємо, що еюра моментів відкладеться в бік розтягнутих волокон, тобто додатний момент відкладаємо вниз.

Далі переріз проводимо між точками 2 і 3. Розглядаємо ліву частину. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної та поздовжньої сил і згинального моменту (рисунки 7-9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



x_2 змінюється від нуля (точка 2) до 5 м (точка 3).

$$0 \leq x_2 \leq 5 \text{ м.}$$

$$\sum x = 0; N_2 + F = 0 \text{ кН};$$

$$N_2 = -F = -12 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; R_1 - Q_2 = 0;$$

$$Q_2 = R_1 = 3,0 \text{ кН};$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_2 = R_1 \cdot (3 + x_2) + M - F \cdot 2.$$

При $x_2 = 0$ (точка 2)

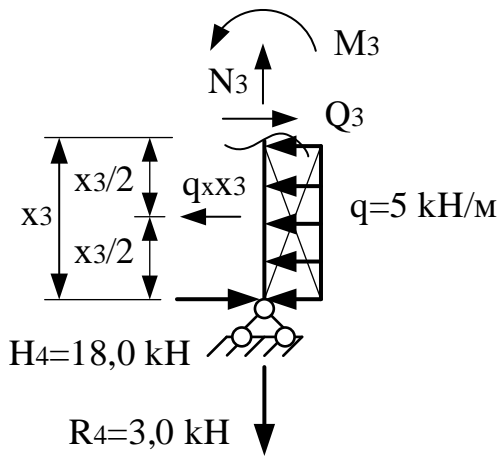
$$M_2 = 3 \cdot 3 + 18 - 12 \cdot 2 = 3,0 \text{ кНм.}$$

При $x_2 = 3$ м (точка 2)

$$M_1 = 3 \cdot 8 + 18 - 12 \cdot 2 = 18,0 \text{ кНм.}$$

Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 2 і 3 (рисунок 26, а-в). Поздовжня та поперечна сили на цій ділянці від x_2 не залежать, тому це сталі величини. У рівнянні згинальних моментів x_2 першого степеня. Тому ці точки необхідно з'єднати прямою лінією. Пам'ятаємо, що еюра моментів відкладається в бік розтягнутих волокон, тобто додатний момент відкладаємо вниз.

Наступний переріз проводимо між точками 3 і 4. Розглядаємо нижню частину. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної та поздовжньої сил і згинального моменту (рисунки 7-9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



x_3 змінюється від нуля (точка 3) до 6 м (точка 4).

$$0 \leq x_3 \leq 6 \text{ м.}$$

Зазвичай за вісь x приймають вісь стрижня, тому

$$\sum x = 0; N_3 - R_4 = 0 \text{ кН};$$

$$N_3 = R_4 = 3,0 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; H_4 - q \cdot x_3 + Q_3 = 0;$$

$$Q_3 = -H_4 + q \cdot x_3;$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_3 = -H_4 \cdot x_3 + q \cdot x_3 \frac{x_3}{2}.$$

При $x_3 = 0$ (точка 4)

$$Q_3 = -18 \text{ кН}; M_3 = 0 \text{ кНм};$$

При $x_3 = 6$ м (точка 3)

$$Q_3 = -18 + 5 \cdot 6 = 12 \text{ кН};$$

$$M_3 = -18 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 = -18 \text{ кНм}.$$

На цій ділянці поперечна сила змінює знак, тому на епюрі моментів є екстремум. Знайдемо його. Екстремальний момент знаходиться в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Тому прирівняємо рівняння поперечних сил на цій ділянці до нуля і знайдемо x_e .

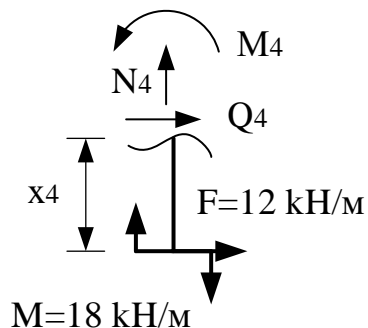
$$Q_3 = -H_4 + q \cdot x_3 = 0; x_e = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ м};$$

Підставляємо це значення в рівняння моментів на цій ділянці:

$$M_e = -18 \cdot 3,6 + 5 \cdot 3,6 \frac{3,6}{2} = -32,4 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 3 і 4 (рисунок 26, а-в). Поздовжня сила на цій ділянці від x_3 не залежить, тому це стала. Рівняння поперечних сил має x_3 першого степеня, тому на епюрі поперечних сил точки необхідно з'єднати прямою лінією. А рівняння згинальних моментів має x_3 другого степеня, тому на епюрі згинальних моментів точки необхідно з'єднати квадратною параболою, причому опуклість параболи має бути спрямована в бік дії розподіленого навантаження, тобто ліворуч, пам'ятаючи, що епюра моментів відкладається в бік розтягнутих волокон, тобто від'ємний момент відкладаємо ліворуч (рисунок 26, а-в).

Останній переріз проводимо між точками 2 і 5. Розглядаємо нижню частину. До залишеної частини прикладаємо додатні напрямлення поперечної та поздовжньої сил і згинального моменту (рисунок 7-9). На підставі формули (2) складаємо рівняння рівноваги.



x_4 змінюється від нуля (точка 2) до 2 м (точка 5).

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м.}$$

$$\sum x = 0; N_4 = 0 \text{ kH};$$

$$\sum y = 0; F + Q_4 = 0; Q_4 = -F = -12 \text{ kH};$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_4 = -F \cdot x_4 + M.$$

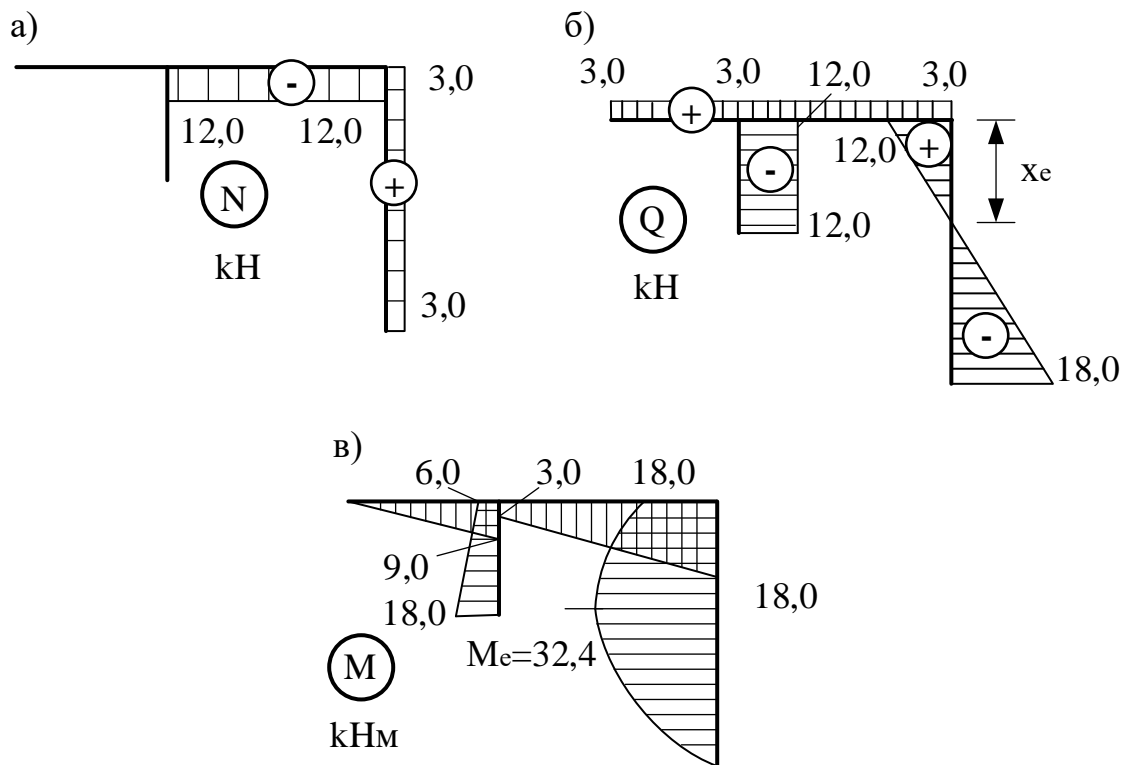
$$\text{При } x_4 = 0 \text{ (точка 5)} \quad M_4 = M = 18 \text{ kHм.}$$

$$\text{При } x_4 = 2 \text{ м (точка 2)}$$

$$M_4 = -12 \cdot 2 + 18 = -6 \text{ kHм.}$$

Відкладаємо ці значення від нульової лінії, між точками 2 і 5 (рисунок 26, а-в). Поперечна сила на цій ділянці від x_4 не залежить, тому це стала. У рівнянні згинальних моментів x_4 першого степеня. Тому ці точки необхідно з'єднати прямою лінією. Пам'ятаємо, що епюра моментів

відкладається в бік розтягнутих волокон, тобто від'ємний момент відкладаємо ліворуч.

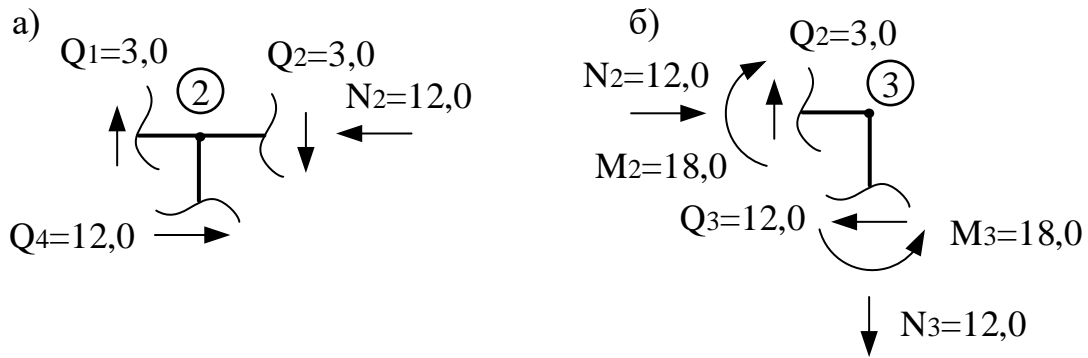


а) епюра поздовжніх сил; б) епюра поперечних сил;

в) епюра згинальних моментів

Рисунок 26 – Епюри внутрішніх зусиль у двоопорній рамі

Виконуємо перевірку побудованої епюри за допомогою перевірки рівноваги у вузлах. Для цього вирізаємо вузли навколо точок 2 і 3 (рисунок 25). Вирізати вузол означає вирізати нескінченно малу область навколо точки. Прикладаємо до вирізаних вузлів внутрішні зусилля з побудованих епюр відповідно до правила знаків (рисунок 7-9, 27).



а) вузол 2; б) вузол 3

Рисунок 27 – Перевірка рівноваги у вузлах рами

Перевіряємо рівновагу у вузлах за допомогою рівнянь статки.

Вузол 2: $\sum x = -Q_4 + N_2 = -12 + 12 = 0$; $\sum y = -Q_1 + Q_2 = 0$; $\sum M = 0$.

Вузол 3: $\sum x = N_2 - Q_3 = 12 - 12 = 0$; $\sum y = Q_2 - N_3 = 0$;

$\sum M = M_2 - M_3 = 18 - 18 = 0$.

Вузли знаходяться в рівновазі.

Виконуємо перевірку побудованих епюр. У точці прикладання зосереджених сил (у тому числі реакцій) на епюрах сил є стрибки на величини цих сил, які спрямовано в бік дії сил, на епюрі моментів у цих точках злами. У точці прикладання зосередженого моменту на епюрі моментів є стрибок на величину моменту, який спрямовано в бік дії моменту. На ділянці, де діє розподілене навантаження, епюра поперечних сил має вигляд похилої прямої лінії, епюра моментів має вигляд квадратної параболи. На ділянці з розподіленим навантаженням, де епюра поперечних сил змінює знак, у точці, де вона дорівнює нулю, на епюрі моментів є екстремум. На ділянці, де нема розподіленого навантаження, епюра поперечних сил стала, епюра моментів – пряма похила лінія.

Побудовані епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_z необхідно заштрихувати лініями, перпендикулярними до нульової лінії. На епюрах сил ставимо знаки. На епюрі згинальних моментів знак не ставимо, тому що епюра будується з боку розтягнутих волокон.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 362 с.
- 2 Опір матеріалів: навч. посіб. / С. Ю. Берестянська, О. В. Лобяк, О. В. Опанасенко та ін. Харків: УкрДУЗТ, 2020. Ч. 1. 151 с.
- 3 Чихладзе Е. Д., Кітов Ю. П. Вибрані задачі з опору матеріалів з розв'язаннями. Харків: УкрДАЗТ, 2002. 194 с.
- 4 Кітов Ю. П., Чихладзе Е. Д. Побудова епюр внутрішніх сил в рамках з використанням ПЕОМ. Харків: ХарДАЗТ, 1998. 130 с.
- 5 Веревічева М. А., Петренко Д. Г. Приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів». Харків: УкрДАЗТ, 2015. 128 с.
- 6 Кітов Ю. П., Веревічева М. А., Чуменко С. М. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів. Харків: ХарДАЗТ, 2002. 62 с.
- 7 Студентська навчальна звітність. Текстова частина (пояснювальна записка). Загальні вимоги до побудови, викладення оформлення: методичний посібник з державних вимог нормоконтролю у студентській звітності. Харків: УкрДАЗТ, 2014. 54 с.

ДОДАТОК А

Зразок оформлення титульного аркуша пояснювальної записки

Міністерство освіти та науки України

Український державний університет залізничного транспорту

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

Розрахунково-графічна робота №__

Схема №__
Варіант №__

Виконав здобувач групи _____

Перевірив _____

Харків 20__

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни
«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Частина 1

Відповідальний за випуск Берестянська С. Ю.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 01.03.2024 р.
Умовн. друк. арк. 3,0. Тираж . Замовлення № .
Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного
транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018