ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

В. І. Храбустовський, Ю. С. Шувалова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій
з дисципліни
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ»

Частина 1
ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Харків – 2019

Храбустовський В. І., Шувалова Ю. С. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Випадкові події, випадкові величини: Конспект лекцій. – Харків : УкрДУЗТ, 2019. – 70 с.

Конспект лекцій складено на основі більш ніж двадцятирічного досвіду викладання теорії ймовірностей в УкрДУЗТ. Першу частину конспекту призначено для вивчення таких розділів теорії ймовірностей, як випадкові події, випадкові величини. Розділи: випадкові вектори, випадкові процеси, математична статистика буде розглянуто в наступних частинах. Конспект лекцій містить багато прикладів, які можуть допомогти студенту при виконанні домашніх завдань з наведених розділів. Наприкінці конспекту лекцій подано список літератури для більш докладного опрацювання матеріалу.

Рекомендовано для студентів факультету ІКСТ. Конспект лекцій може також використовуватися студентами загальнотехнічних спеціальностей усіх форм навчання.

Іл. 50, бібліогр.: 12 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 30 серпня 2018 р., протокол № 1.

Рецензент

проф. В. Д. Золотарьов
(ФТІНТ НАНУ ім. Б. І. Вєркіна)

В. І. Храбустовський, Ю. С. Шувалова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій
з дисципліни
«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ»

Частина 1
ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Відповідальний за випуск Шувалова Ю. С.

Редактор Буранова Н. В.

Підписано до друку 12.10.18 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,5. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі випадкових експериментів (ВЕ), тобто таких експериментів, результат яких однозначно невизначений.

Теорія ймовірностей вивчає лише такі ВЕ, які можна повторити необмежену кількість разів за незмінних умов.

Простір елементарних подій

Простором елементарних подій називається множина результатів випадкового експерименту, які реєструються з максимальними подробицями та мають такі властивості:

несумісність – у кожному випадковому експерименті відбувається лише одна з елементарних подій;

повнота – у кожному випадковому експерименті одна з елементарних подій обов'язково відбувається.

Простір елементарних подій позначається Ω.

Приклади випадкових експериментів:

1) ВЕ: кидається монета. $\Omega = \{Г;\ Р\}$;

2) ВЕ: монета кидається двічі. $\Omega = \{(Г;\ Г),\ (Г;\ Р),\ (Р;\ Г),\ (Р;\ Р)\}$;

3) ВЕ: монета кидається до першої появи герба. $\Omega = \left\{w_1, w_2, ..., w_\infty\right\}$, де $w_n = (\underbrace{Р;Р;Р...;Р}_{n-1};Г)$, w_∞ – результат ВЕ, при якому герб ніколи не з'явиться;

4) ВЕ: стрільба у мішень. Простір Ω складається з усіх точок мішені, а також з додаткової точки θ, яка позначає невлучання у мішень;

5) ВЕ: точка ставиться навмання на область *D* на площині.

Простір Ω складається з усіх точок *D* (рисунок 1).

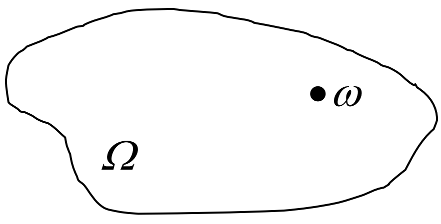


Рисунок 1

Випадкова подія

Випадковою подією називається будь-який результат випадкового експерименту, який можна зареєструвати.

Випадкова подія A є підмножиною Ω в тому розумінні, що ми ототожнюємо A з множиною тих елементарних подій, поява яких тягне за собою A. Кажуть, що такі елементарні події сприяють події A.

Приклади:

1) ВЕ: кидається гральна кістка.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де $\omega_k = \{$випало k очок$\}$.

$A = \{$випала парна кількість очок$\}$. Подія $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – складається з трьох елементарних подій;

2) ВЕ: монета кидається двічі.

$\Omega = \{$(Г; Г), (Г; Р), (Р; Г), (Р; Р)$\}$.

$A = \{$Г випав хоча б раз$\}$. Подія $A = \{$(Г; Г), (Г; Р), (Р; Г)$\}$ – складається з трьох елементарних подій;

3) ВЕ: точка ставиться навмання на область Ω.

$A = \{$точка влучила в область $A \subseteq \Omega\}$. Подія А складається з усіх точок області А (рисунок 2).

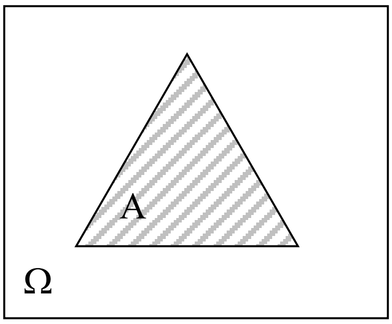


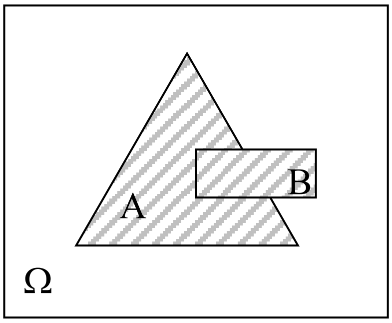
Рисунок 2

Алгебра подій

Оскільки випадкові події є множинами, то з ними можна здійснювати операції теорії множин.

Сумою (або ***об'єднанням***) подій A і B називається подія, яка відбувається, коли відбувається або A, або B, або обидві події разом (рисунок 3). Позначається $A+B$ (або $A \bigcup B$). Отже, $A+B$

складається з таких елементарних подій, які сприяють або події *A*, або події *B*, або обом подіям одночасно.



A+B

Рисунок 3

Добутком (або ***перетином***) подій *A* і *B* називається подія, яка відбувається, коли події *A* і *B* відбуваються одночасно (рисунок 4). Позначається *AB* (або $A \bigcap B$). Отже, *AB* складається з таких елементарних подій, які сприяють одночасно події *A* і події *B*.

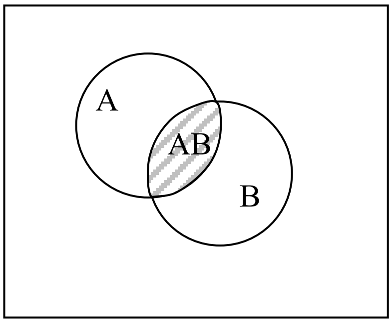


Рисунок 4

Протилежною до події *A* називається подія $\overline{A}$, яка відбувається, коли *A* не відбувається (рисунок 5). Отже, подія $\overline{A}$ складається з таких елементарних подій, які не сприяють події *A*.

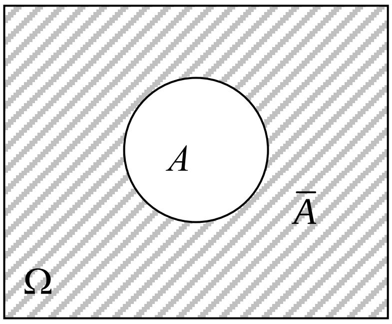


Рисунок 5

Приклад

ВЕ: кидається гральний кубик.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де $\omega_k =$ {випало k очок}.

Нехай подія $A =$ {випала парна кількість очок}, подія $B =$ {кількість очок ділиться на 3}.

Тоді, подія $A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$; подія $AB = \{\omega_6\}$; подія $\overline{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$.

Вірогідною подією називається подія, яка завжди відбувається, вона складається з усіх елементарних подій і тому позначається Ω.

Неможливою називається подія, яка не може відбутися у випадковому експерименті. Позначається $\emptyset$.

Вірогідна та неможлива події пов'язані так:

$$\boxed{\overline{\Omega} = \emptyset.}$$

Приклади:

1) $A + \overline{A} = \Omega$; 2) $A\overline{A} = \emptyset$; 3) $A + \Omega = \Omega$; 4) $A + \emptyset = A$; 5) $A\Omega = A$; 6) $A\emptyset = \emptyset$; 7) $\overline{\emptyset} = \Omega$.

З визначення випливає, що множина $\mathcal{F}$ усіх випадкових подій утворює *алгебру*, тобто:

1) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;
2) $A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_j A_j \in \mathcal{F}$.

З 1), 2) випливає, що $A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_j A_j \in \mathcal{F}$. Це наслідок формул де Моргана: $\overline{\bigcup_j A_j} = \bigcap_j \overline{A_j}$; $\overline{\bigcap_j A_j} = \bigcup_j \overline{A_j}$.

ЛЕКЦІЯ 2

Частота та ймовірність

Частота події *A* у n випадкових експериментах дорівнює:

$$\nu_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{n},$$

де $\mu_n(A)$ дорівнює кількості появ *A* в цих n експериментах.

Приклад

При 100 киданнях монети герб з'явився 56 разів.

$$\nu_{100}(\Gamma) = \frac{56}{100} = 0,56.$$

Було помічено експериментально, що $\nu_n(A)$ при великих n мало відрізняється від деякого числа.

Звідси випливає таке визначення ймовірності, яке запропонував Р. Мізес.

Визначення Р. Мізеса. ***Ймовірністю події A*** називається границя

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A). \quad (1)$$

Це визначення ймовірності незручне, тому що не дає змоги обчислити її ***до*** проведення випадкового експерименту.

У сучасній теорії ймовірності використовується визначення А. Колмогорова.

Визначення А. Колмогорова. ***Ймовірністю події А*** називається числова функція $P(A)$ від випадкової події, яка задовольняє такі умови:

1) $P(A) \geq 0$ – невід'ємність;
2) $P(\Omega) = 1$ – умова нормування;
3) якщо події A_j попарно несумісні, то $P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j)$ – адитивність.

Пояснимо, що події *А* і *В* називаються ***несумісними***, якщо вони не можуть відбутися одночасно, тобто $AB = \varnothing$.

Оскільки частота $v_n(A)$ задовольняє умови 1)–3), то ймовірність Р. Мізеса задовольняє аксіоми А. Колмогорова.

Класична ймовірність

Нехай кількість *N* елементарних подій w_i у випадковому експерименті скінченна і всі ці елементарні події рівноможливі, тобто $P(w_1) = P(w_2) = \ldots = P(w_N)$. Тоді за властивостями ймовірності 2, 3 маємо:

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{j=1}^{N} w_j) = \sum_{j=1}^{N} P(w_j) \Rightarrow P(w_j) = \frac{1}{N}, \quad \forall j.$$

$$P(A) = P(\bigcup_{w_j \in A} w_j) = \sum_{w_j \in A} P(w_j) = \frac{M}{N}.$$

Одержали класичне визначення ймовірності.

Ймовірність події А дорівнює відношенню кількості *М* елементарних подій, які сприяють події *А*, до загальної кількості *N* елементарних подій:

$$\boxed{P(A) = \frac{M}{N}.} \qquad (2)$$

Приклад

Знайти ймовірність того, що при двократному киданні монети герб з'явиться не менше ніж раз.

Тут $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\} \Rightarrow N = 4$;
подія $A = \{ГГ, ГР, РГ\} \Rightarrow M = 3$.

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{3}{4}.$$

Приклад. Парадокс де Мере.

Гравець де Мере помітив, що при киданні трьох гральних кісток 11 очок випадає частіше ніж 12. Однак, він вважав, що Р(11)=Р(12), оскільки, як йому здавалося, випадінню 11 очок та 12 очок сприяють по 6 результатів.

Результати, що сприяють «11»: 6-4-1, 6-3-2, 5-4-2, 5-5-1, 5-3-3, 4-4-3.

Результати, що сприяють «12»: 6-5-1, 6-4-2, 5-4-3, 5-5-2, 6-3-3, 4-4-4.

Але в дійсності в цьому випадковому експерименті Ω складається з трійок чисел N_1, N_2, N_3, де N_i дорівнює кількості очок, що випадає на і-й кістці. Тому
загальна кількість елементарних подій $N = 6^3 = 216$;
«11» сприяє $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 3 = 27$ результатам, отже, $P(11) = \frac{27}{216}$;
«12» сприяє $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 1 = 25$ результатам, отже, $P(12) = \frac{25}{216}$.

Отже, в дійсності $P(11) > P(12)$.

Приклад. Вибірковий контроль якості.

Партія зі 100 деталей перевіряється контролером, який навмання відбирає 10 та визначає їх якість. Якщо серед відібраних деталей немає бракованих, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію, яка містить 10 бракованих деталей, буде прийнято.

Нехай подія *А*={ серед відібраних 10 деталей немає браку}. Тоді

$$N = C_{100}^{10}; \qquad M = C_{90}^{10};$$

$$P(A) = \frac{N}{M} = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{90!}{10!80!} \cdot \frac{10!90!}{100!} =$$

$$= \frac{81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \approx 0,9^{10} = (1-0,1)^{10} \approx \frac{1}{e}.$$

Приклад

Учасник одного з варіантів «Спортлото» закреслює 6 номерів із 49. Пізніше оголошують 6 виграшних номерів. Гравець одержує виграш, якщо він вгадав хоча б 3 виграшних номери. Знайти ймовірність виграшу.

Нехай A={гравець закреслив хоча б 3 виграшних номери}. Тоді $A = \underbrace{A_3 + A_4 + A_5 + A_6}_{\textit{несумісні події}}$, де $A_i =${гравець закреслив рівно i виграшних номерів}. Тому $P(A) = P(\bigcup_{i=3}^{6} A_i) = \sum_{i=3}^{6} P(A_i)$. Знайдемо, наприклад, $P(A_3)$. Подія A_3 «складається» з трьох виграшних та трьох невиграшних номерів (рисунок 6).

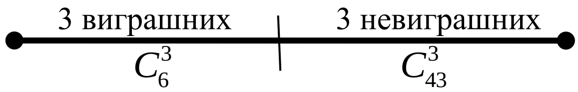


Рисунок 6

Тому $N = C_{49}^6$, $M = C_6^3 C_{43}^3$, $P(A_3) = \dfrac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6}$.

$P(A_i)$ знаходяться аналогічно.

$$\left.\begin{aligned} P(A_3) &= 0,017650 \\ P(A_4) &= 0,000969 \\ P(A_5) &= 0,000018 \\ P(A_6) &= 0,0000000715 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) = 0,018638.$$

Геометрична ймовірність

Геометрична ймовірність дає змогу обчислити ймовірність у деяких задачах, коли кількість елементарних подій нескінченна.

Нехай точку навмання поміщають в обмежену область Ω або на осі, або на площині, або у просторі. Простір елементарних подій складається з усіх точок області Ω або на осі, або на площині, або у просторі. В цьому випадку подія A – це потрапляння точки у підмножину $A \subseteq \Omega$ (рисунок 7).

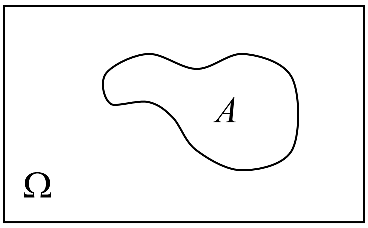


Рисунок 7

Якщо всі точки Ω – елементарні події, що є «рівноможливими», то ***геометрична ймовірність***

$$\boxed{P(A) = \frac{mes\, A}{mes\, \Omega},} \qquad (3)$$

де *mes* – це міра (або довжина, або площа, або об’єм).

Геометрична ймовірність, очевидно, задовольняє аксіоми А. Колмогорова.

Приклад

У круг радіуса R вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що точка, яку кинуто на круг, опиниться у квадраті (рисунок 8).

Маємо:

Ω – круг; $mes\, \Omega = площа \Omega = \pi R^2$,

A – квадрат; $mes\, A = площа\, A = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$,

$$P(A) = \frac{mes\, A}{mes\, \Omega} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

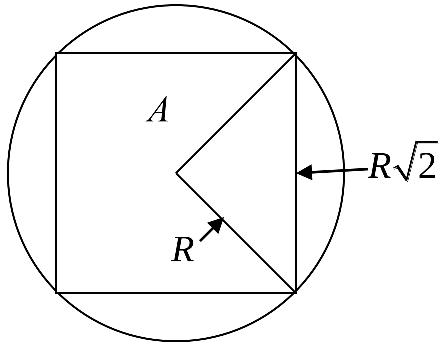


Рисунок 8

Приклад. Ймовірність перехоплення.

У випадковий момент $x \in [0;T]$ виникає сигнал тривалістю Δ. Радар вмикається у випадковий момент $y \in [0;T]$ на час t. Знайти ймовірність пеленгування сигналу. Тут $\Omega = \{x, y\}$, $x \in [0,T]$, $y \in [0,T]$ (рисунок 9).

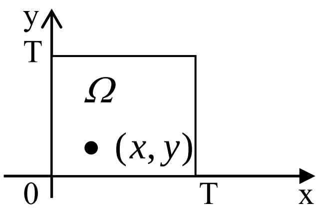


Рисунок 9

Пеленгування відбудеться, якщо відбудеться одна з двох несумісних подій.

A={ $y < x < y + t$ } (рисунки 10, 11).

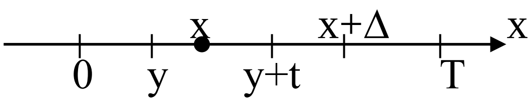


Рисунок 10

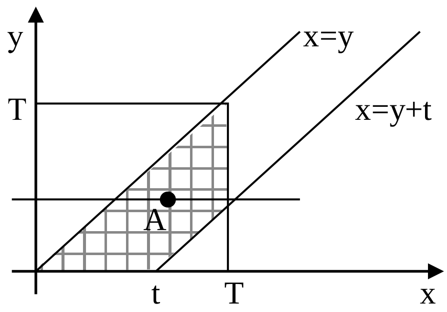


Рисунок 11

B={ $x < y < x + \Delta$ } (рисунки 12, 13).

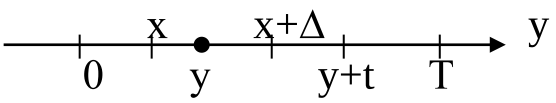


Рисунок 12

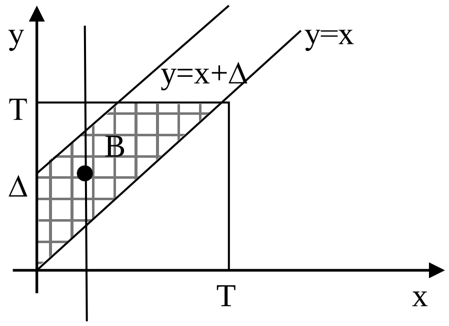


Рисунок 13

Ймовірність пеленгування $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Але $mesA = площа\ A = \frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}(T-t)^2, mesB = площа\ B = \frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}(T-\Delta)^2$, $mes\Omega = площа\ \Omega = T^2$.

Тому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{2}(T-t)^2+\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{2}(T-\Delta)^2}{T^2}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2.$$

ЛЕКЦІЯ 3

Найпростіші властивості ймовірності

Якщо співвідношення між різними подіями наочно описуються співвідношеннями між фігурами, які їх зображують, то властивості ймовірностей аналогічні до властивостей площ цих фігур.

1 Ймовірність неможливої події дорівнює 0.

$$\boxed{P(\emptyset)=0.}$$

Ця властивість випливає або з формули (1) або з формули (7). Зворотне твердження взагалі не є правильним, як показує приклад.

Приклад

Подія A={влучання у відрізок} є можливою (рисунок 14),

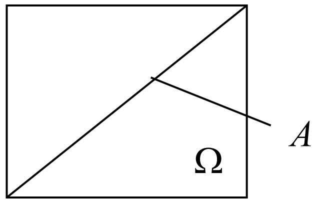
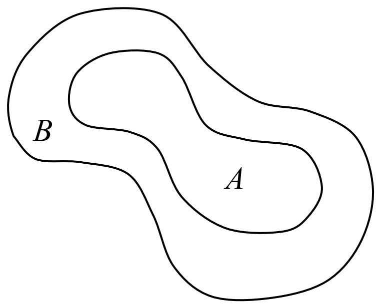


Рисунок 14

але $P(A)=\dfrac{mesA}{mes\Omega}=\dfrac{площа\ A}{площа\ \Omega}=\dfrac{0}{площа\ \Omega}=0.$

2 Щоб сформулювати наступну властивість ймовірності, введемо поняття, яке належить до алгебри подій. Говорять, що ***подія A сприяє події B***, якщо всі елементарні подій, які входять до *A*, входять також і до *B*. Тобто, якщо *A* відбувається, то відбувається і *B*. Позначається $A\subseteq B$ ($A\subseteq B$ означає, що подія *A* тягне за собою подію *B* (подія *A* сприяє події *B*)) (рисунок 15).



$A\subseteq B$

Рисунок 15

Зазначимо, що

$\forall A\in \mathrm{F}: \mathrm{A}\subset \Omega, \varnothing\subset A;$

$\forall A\in \mathrm{F}: A\subset B\Rightarrow A\bigcup B=B,\quad A\bigcap B=A.$

Маємо властивість ймовірності

$$\boxed{A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B),} \qquad (4)$$

яка є очевидною для геометричної ймовірності.

3 $\boxed{0 \le P(A) \le 1.}$

Дійсно, $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1.$

Формула додавання

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).} \qquad (5)$$

Доведення випливає з рисунка 16, оскільки ймовірність – це аналог площі.

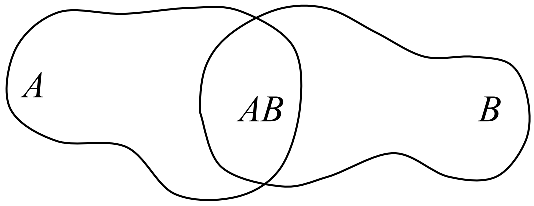


Рисунок 16

Формула додавання спрощується, якщо події A і B *несумісні*, тобто $AB = \varnothing$. Тоді $P(AB) = P(\varnothing) = 0$. Отже,

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B), \quad A \, \textit{та} \, B \, \textit{несумісні},} \qquad (6)$$

що узгоджується з аксіомою 3 Колмогорова.

Наслідок:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A).} \qquad (7)$$

Дійсно,

$$\left.\begin{array}{c} A + \bar{A} = \Omega \\ A\bar{A} = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Цією формулою користуються, коли $P(\bar{A})$ обчислити легше, ніж $P(A)$.

Приклад

Знайти ймовірність того, що при 6-кратному киданні грального кубика трійка випаде хоча б раз.

Тут Ω складається з шістки чисел. $\Omega = \{N_1, N_2, N_3, N_5, N_6\} \Rightarrow N = 6^6$.

Подія A={трійка випала хоча б раз}$\Rightarrow$ протилежна подія $\bar{A}$ ={трійка не випала жодного разу} $\Rightarrow M = 5^6$.

За формулою (7) маємо:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 < \frac{2}{3}.$$

Приклад. Ще один парадокс де Мере [7].

У 1654 р. де Мере звернувся до Паскаля з питанням щодо ситуації, де Мере вважав, що ймовірність одержати хоча б одну одиницю при киданні чотирьох гральних кісток (подія A) менша, ніж ймовірність випадіння одночасно двох одиниць хоча б раз при 24 киданнях двох кісток (подія B), і тому ставив у грі на подію В, і, як правило, програвав.

У дійсності $P(A)>P(B)$, оскільки

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177,$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914 \ .$$

ЛЕКЦІЯ 4

Умовна ймовірність

Умовна ймовірність події А за умови, що подія В відбулася, позначається $P_B(A)$ або $P(A|B)$.

Доведемо на прикладі геометричної ймовірності, що:

$$\boxed{P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ \text{якщо}\ P(B)>0.} \qquad (8)$$

Дійсно, якщо відбулася подія B, то простір елементарних подій з Ω звужується до B. І подія A відбудеться лише, якщо відбудеться AB (рисунок 17). Тобто події, які сприяють A, складаються з точок AB.

Отже,

$$P_B(A)=\frac{mesAB}{mesB}=\frac{mesAB}{mes\Omega}:\frac{mesB}{mes\Omega}=P(AB):P(A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

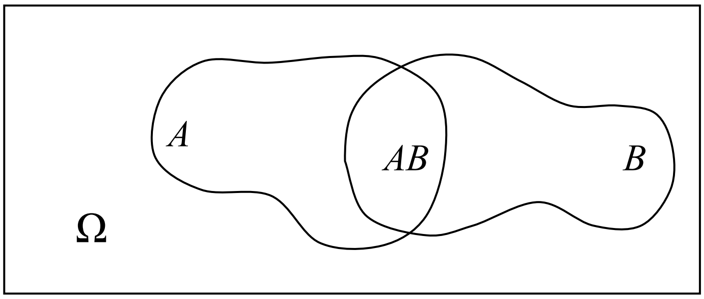


Рисунок 17

Приклад

Знайти ймовірність, що у родині, яка має двох дітей, обидві дитини хлопчики, якщо:

а) старша дитина хлопчик;

б) хоча б одна дитина хлопчик.

Тут простір $\Omega=${ХХ, ХД, ДХ, ДД}, де подія ХД={старша дитина – хлопчик, друга дитина –дівчинка} і т. д.

Вважаємо всі результати рівноможливими, тобто

$$P(\text{ХХ})=P(\text{ХД})=P(\text{ДХ})=P(\text{ДД})=\frac{1}{4}.$$

Нехай подія A={старша дитина – хлопчик}, подія B={друга дитина – хлопчик}. За формулою (8) маємо:

а) $P_A(AB) = \dfrac{P(ABA)}{P(A)} = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$;

б) $P_{A+B}(AB) = \dfrac{P(AB(A+B))}{P(A+B)} = \dfrac{P(AB)}{P(A+B)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$.

З формули для умовної ймовірності (8) випливає ***формула множення***

$$\boxed{P(AB) = P_B(A)\cdot P(B) = P_A(B)\cdot P(A),\ \text{якщо}\ P(A)>0,\ P(B)>0.} \quad (9)$$

Аналогічно до цього маємо ***формулу множення для n подій:***

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P\Big(A_n \Big| \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\Big).$$

Приклад. Задача про вибір ключа.

У людини в кишені n ключів і тільки один підходить до її дверей. Ключі виймають послідовно без повернення. Знайти ймовірність того, що потрібний ключ буде k-м.

Нехай подія $A_j =$ {потрібним є j-й ключ}. За формулою (9) маємо

$$P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{k-1}A_k\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{n}.$$

Незалежність подій

Дві події називаються ***незалежними***, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

Теорема. Нехай $P(A)>0, P(B)>0$, тоді наступні три умови еквівалентні:

1) події A і B незалежні;

2) $P_B(A)=P(A)$;

3) $P_A(B)=P(B)$.

Пропонуємо довести це самостійно з формули множення та визначення незалежності подій.

З теореми бачимо, що події A і B незалежні, коли поява однієї з них не змінює ймовірності іншої.

Часто незалежність подій можна побачити з «фізичного змісту».

Приклад

ВЕ: кидається дві монети.

Нехай події $A=\{Г$ на І-й монеті$\}$, $B=\{P$ на ІІ-й монеті$\}$.

Те, що відбувається з однією монетою, ніяк не впливає на те, що відбувається з іншою. Тому події A і B незалежні. Перевіримо це формально.

Тут $\Omega=\left\{ГГ, ГР, РГ, РР\right\}$.

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)P(B).$$

Коли «фізичні міркування» не працюють, незалежність подій перевіряється формально.

Приклад

ВЕ: з колоди 36 карт беремо одну.

Подія A = {витягли даму}; подія B = {витягли піку}.

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};\qquad P(B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

Подія AB = {витягли пікову даму}.

$$P(AB)=\frac{1}{36}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}=P(A)P(B)\Rightarrow A \text{ і } B \text{ незалежні.}$$

Зауважимо, що коли в колоду додати ще одну карту, події A і B стануть залежними.

Приклад

Відбувається випадковий експеримент, який пов'язано з геометричною ймовірністю.

ВЕ: точка кидається навмання на Ω={квадрат зі стороною 1}. Подія A={точка потрапила у прямокутник A}; подія B={точка потрапила у прямокутник B} (рисунок 18).

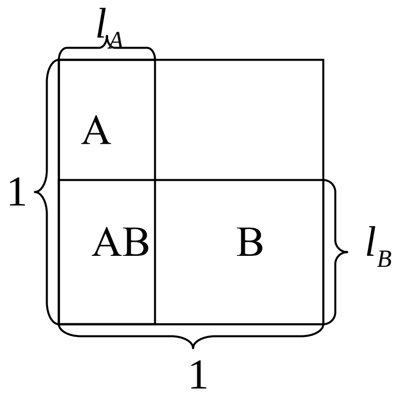


Рисунок 18

$$P(A)=\frac{mesA}{mes\Omega}=\frac{площаA}{площа\Omega}=l_A\cdot 1=l_A,$$

$$P(B)=\frac{mesB}{mes\Omega}=\frac{площаB}{площа\Omega}=l_B\cdot 1=l_B,$$

$P(AB)=\dfrac{mesAB}{mes\Omega}=\dfrac{площаAB}{площа\Omega}=l_A\cdot l_B=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow$ події A і B незалежні.

Якщо ж «довжина» хоча б одного з прямокутників A, B буде менша за одиницю, то події A і B стануть залежними.

Теорема. Якщо події A і B незалежні, то незалежні події A і $\bar{B}$.

Доведення. Як видно з рисунка 19,

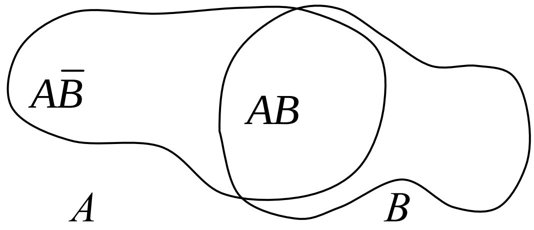


Рисунок 19

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B) = P(A)P(\overline{B}).$$

Наслідок. *Якщо події* A і B незалежні, то незалежні $\overline{A}$ і $\overline{B}$. Довести самостійно.

Незалежність у сукупності

Три події A_1, A_2, A_3 називаються незалежними у сукупності, якщо виконано:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)\ , \tag{10}$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)\ , \tag{11}$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)\ , \tag{12}$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ . \tag{13}$$

Незалежність у сукупності означає, що кожна з подій A_k незалежна від будь-якої комбінації решти подій.

З попарної незалежності не випливає незалежність у сукупності, тобто з властивостей (10)–(12) $\not\Rightarrow$ (13), як показує приклад С. Н. Берштейна.

Приклад С. Н. Берштейна.

В урні лежить чотири однакових кульки з номерами 1, 2, 3, 123.

ВЕ: з урни витягують одну кулю.

Подія A_k ={витягли кулю, в номері якої є цифра k }.

$$P(A_k) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2) \Rightarrow (10) \text{ виконується.}$$

Аналогічно до цього перевіряється виконання властивостей (11), (12), тобто події A_k попарно незалежні. Однак, якщо відбувається подія A_1A_2, то обов’язково відбувається подія A_3.

Тобто подія A_3 не є незалежною від події A_1A_2. Тому події A_1, A_2 A_3 не є незалежними у сукупності.

Перевіримо це формально

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Для n подій незалежність у сукупності визначається аналогічно.

Теорема. Ймовірність суми незалежних подій.

Нехай події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні у сукупності. Тоді:

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = 1 - \prod_{j=1}^{n} q_j \quad .$$

$$q_j = 1 - p_j,\ \ p_j = P(A_j)$$

Доведення. За формулою де Моргана

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = 1 - P(\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}) = 1 - P(\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}) = 1 - \prod_{j=1}^{n} P(\overline{A_j}).$$

Формула повної ймовірності і формула Байєса

Для того щоб сформулювати формулу повної ймовірності, введемо поняття ***повної групи подій***.

Події $H_1, H_2, \ldots H_n$ утворюють ***повну групу подій***, якщо вони:

- попарно несумісні, тобто:

$$H_j H_k = \emptyset \qquad j \neq k;$$

- у випадковому експерименті одна з них обов’язково відбувається, тобто:

$$\bigcup_j H_j = \Omega.$$

Нехай події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу і ймовірність $P(H_j) > 0$. Тоді для будь-якої випадкової події A маємо ***формулу повної ймовірності***:

$$\boxed{P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) + P_{H_2}(A)P(H_2) + \ldots + P_{H_n}(A)P(H_n).} \qquad (14)$$

Доведення. З рисунка 20 видно, що

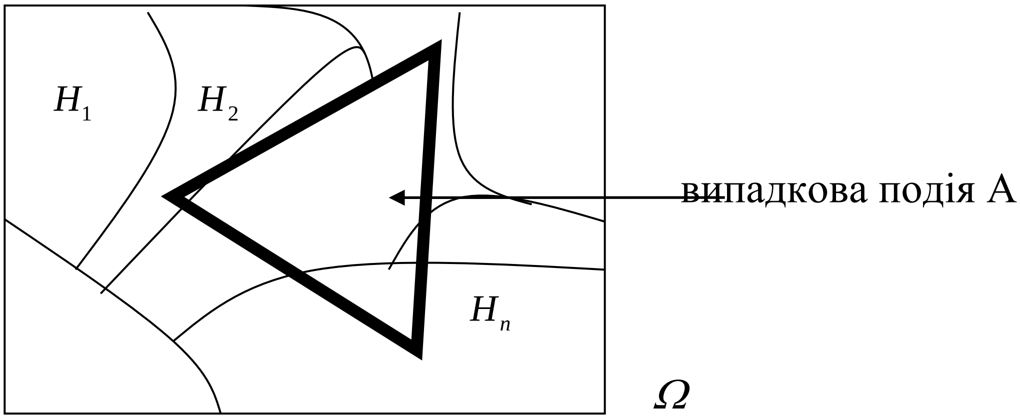


Рисунок 20

$$A = \Omega \cap A = \left(\bigcup_{j=1}^{n} H_j\right) \cap A = \bigcup_{j=1}^{n} H_j \cap A \Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j \cap A) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(H_j) P_{H_j}(A).$$

У формулі повної ймовірності (14) події H_j називаються ***гіпотезами,*** а їх ймовірності $P(H_j)$ називаються ***апріорними ймовірностями гіпотез***.

Якщо подія A відбулася, то ***апостеріорні*** ймовірності гіпотез $P_A(H_j)$ знаходяться за ***формулою Байєса***.

$$\boxed{P_A(H_j) = \frac{P(H_j)P_{H_j}(A)}{P(A)}.} \qquad (15)$$

Доведення. За формулою множення (9)

$$P(A)P_A(H_j) = P(H_jA) = P(H_j)P_{H_j}(A).$$

Приклад

У першій урні містяться біла і чорна кулі, а у другій – 3 білі і 1 чорна.

З першої урни кулю переклали у другу. Після цього з другої вийняли кулю. Потрібно:

1) знайти ймовірність того, що з другої урни вийняли чорну кулю;

2) знайти ймовірність того, що з першої урни в у другу урну переклали чорну кулю, якщо відомо, що з другої урни вийняли чорну кулю.

Нехай подія A = {з другої урни вийняли чорну кулю}.

1) $P(A) = ?$

Розглянемо гіпотези H_1, H_2, які очевидно утворюють повну групу подій:

$H_1 =$ {з першої до другої переклали чорну кулю};

$H_2 =$ {з першої до другої переклали білу кулю}.

$$P(H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

$$P_{H_1}(A) = \frac{2}{5}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{1}{5}.$$

За формулою повної ймовірності (14)

$$P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) + P_{H_2}(A)P(H_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = 0,3.$$

2) $P_A(H_1) = ?$ За формулою Байєса (15)

$$P_A(H_1) = \frac{P_{H_1}(A)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{0.3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = P(H_1),$$ як і очікувалось.

Приклад. Тестування містика Уитстона (Ch. Wheatstone)

Кожен з елементів А, В, С, Д, які працюють незалежно, є справним з ймовірністю p або зіпсованим з імовірністю $q = 1 - p$ (рисунок 21).

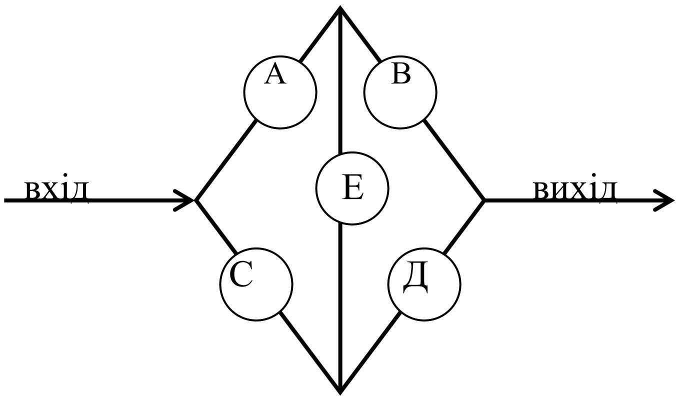


Рисунок 21

Питання:

1) яка ймовірність того, що сигнал, який подано на вхід, буде отримано на виході?

2) якщо сигнал отримано на виході, яка ймовірність, що елемент Е справний?

Нехай подія А={сигнал отримано на виході}. Розглянемо гіпотези H_1, H_2, які утворюють повну групу подій:

H_1={Е справний}$\Rightarrow$ схема на рисунку 21 еквівалентна схемі на рисунку 22.

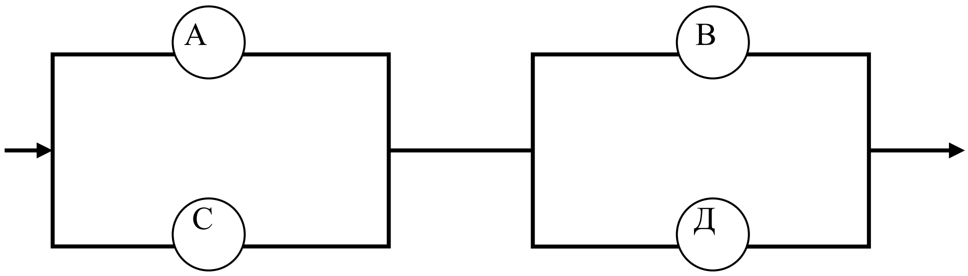


Рисунок 22

$$P(H_1) = p, \;\; P(A \mid H_1) = (1 - q^2)^2.$$

H_2={Е зіпсовано}$\Rightarrow$ схема на рисунку 21 еквівалентна схемі на рисунку 23.

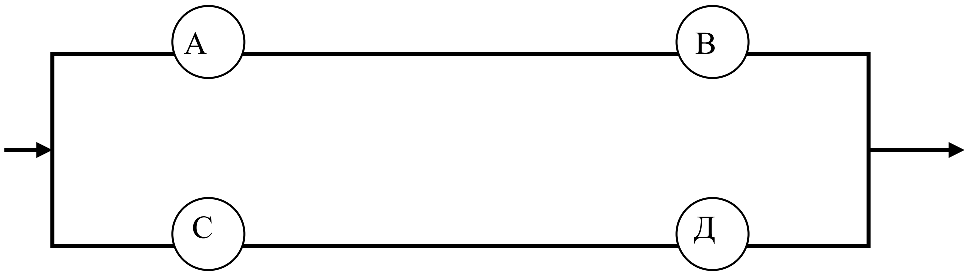


Рисунок 23

$$P(H_2)=q,\ P(A|H_2)=1-(1-p^2)^2=2p^2-p^4.$$

Отже:

1) за формулою повної ймовірності (14)

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)=p(1-q^2)^2+q(2p^2-p^4);$$

2) за формулою Байєса (15)

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{p(1-q^2)^2}{p(1-q^2)^2+q(2p^2-p^4)}=\frac{1}{1+\dfrac{q(2p-p^3)}{(1-q^2)^2}}.$$

ЛЕКЦІЯ 5

Випадкові величини (ВВ)

Випадковою величиною називається числова функція елементарної події. Позначається $\xi(\omega),\ \eta(\omega),\ldots$ або $X(\omega),\ Y(\omega),\ldots$або просто $\xi,\ \eta,\ldots X, Y,\ldots$

Функцією розподілу випадкової величини $\boldsymbol{\xi}$ називається функція

$$F_\xi(x)=P\{\xi<x\}.$$

Геометрично функція розподілу $F_\xi(x)$ дорівнює ймовірності потрапляння ξ в напівскінченний проміжок (рисунок 24).

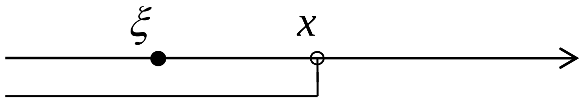


Рисунок 24

Приклад

ВЕ: монета кидається двічі. ВВ ξ – кількість появ герба.

Тут $\Omega = \{ ГГ, ГР, РГ, РР \} = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$. ВВ ξ набуває таких значень:

$$\xi(\omega_1) = 2,\ \xi(\omega_2) = 1,\ \xi(\omega_3) = 1,\ \xi(\omega_4) = 0.$$

Це приклад так званої ***дискретної ВВ***.

Знайдемо функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Нанесемо на вісь значення ВВ ξ (рисунок 25).

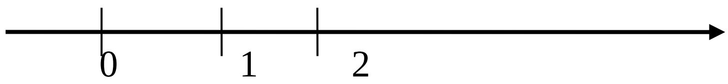


Рисунок 25

1-й випадок: $x \le 0$ (рисунок 26).

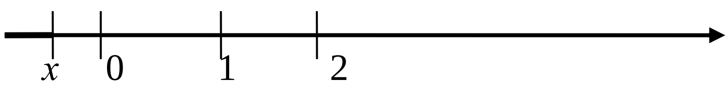


Рисунок 26

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0.$$

2-й випадок: $0 < x \le 1$ (рисунок 27).

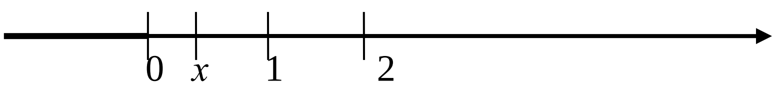


Рисунок 27

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \frac{1}{4}.$$

3-й випадок: $1 < x \le 2$ (рисунок 28).

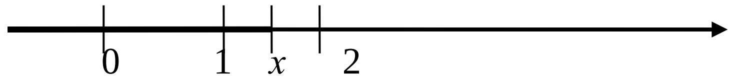


Рисунок 28

$$F_{\xi}\left(x\right) = P\left\{\xi < x\right\} = \frac{3}{4}.$$

4-й випадок: $x > 2$ (рисунок 29).

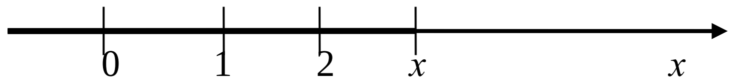


Рисунок 29

$$F_{\xi}\left(x\right) = P\left\{\xi < x\right\} = 1.$$

Побудуємо одержану функцію розподілу $F_{\xi}\left(x\right)$ (рисунок 30).

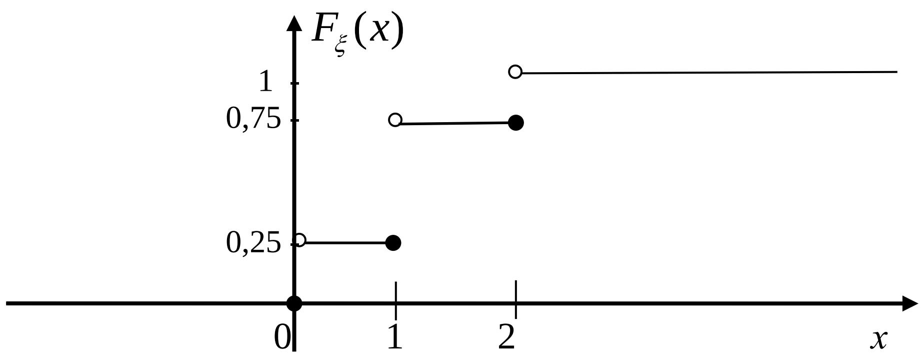


Рисунок 30

Приклад

ВЕ: ведеться стрільба по мішені. ВВ ξ – відстань від пробоїни до центра мішені. На відміну від попереднього прикладу, можливі значення ВВ заповнюють проміжок $\left[0, R\right]$(рисунок 31).

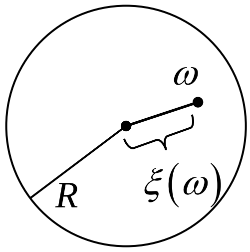


Рисунок 31

Такого типу ВВ називаються ***неперервними***.

Знайдемо функцію розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ за допомогою геометричної ймовірності (рисунок 32).

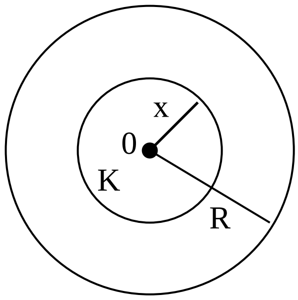


Рисунок 32

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, \ \ x < 0; \\ \dfrac{\pi x^2}{\pi R^2} = \left(\dfrac{x}{R}\right)^2, \ 0 \le x \le R; \\ 1, \ \ x > R. \end{cases}$$

Побудуємо одержану функцію розподілу $F_\xi(x)$ (рисунок 33).

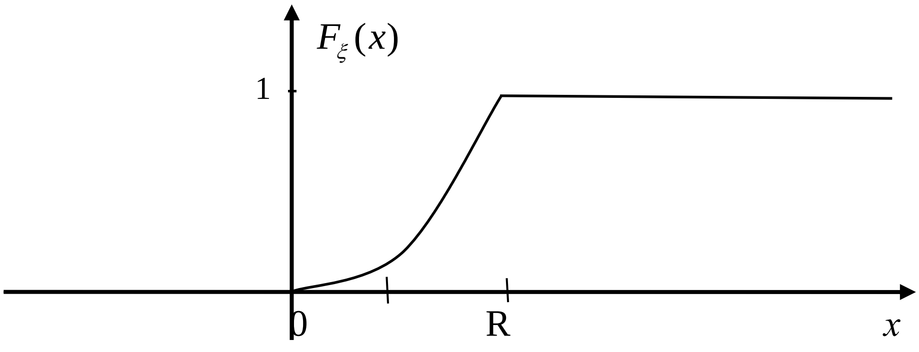


Рисунок 33

В л а с т и в о с т і   ф у н к ц і ї   р о з п о д і л у

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$;

2) $F_\xi(-\infty) = 0, F_\xi(+\infty) = 1$.

Властивості 1), 2) довести самостійно;

3) функція $F_\xi(x)$ є неспадною, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow F_\xi(x_2) \ge F_\xi(x_1)$.

Доведення. Подія $\{\xi < x_1\}$ тягне за собою подію $\{\xi < x_2\}$ (рисунок 34).

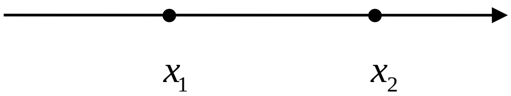


Рисунок 34

Тому за властивістю ймовірності (4) $P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\} \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$;

4) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Доведення. З рисунка 35 подія $\{\xi < b\} = \{\xi < a\} + \{a \le \xi < b\}$, де доданки несумісні.

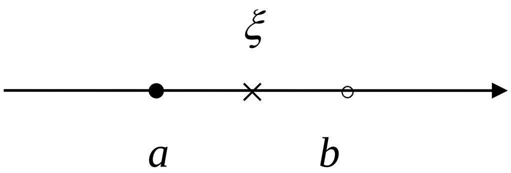


Рисунок 35

$$F_\xi(b) = P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \le \xi < b) = F_\xi(a) + P(a \le \xi < b).$$

Дискретна випадкова величина (ДВВ)

Випадкова величина називається ***дискретною***, якщо множина її можливих значень скінчена, або ця множина нескінченна, але можливі значення ВВ можна пронумерувати.

Законом розподілу ДВВ називається перелік її можливих значень і їх ймовірностей:

$$p_k = P\{\xi = x_k\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Закон розподілу зручно записувати у вигляді таблиці:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	$x_k \dots$	$\longleftarrow$ можливість значення ξ
p	p_1	p_2	$\dots$	$p_k \dots$	$\longleftarrow$ їх ймовірності

$$p_k > 0, \qquad \sum_k p_k = 1.$$

Графік функції розподілу ДВВ нагадує східці. Сходинки розташовані в точках x_k і їх висоти $= p_k$ (доводиться, як у передпопередньому прикладі (рисунки 25–30)).

Приклад

Задано закон розподілу ДВВ.

ξ	-2	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Побудувати графік функції розподілу. Згідно з поданим правилом будуємо функцію розподілу (рисунок 36).

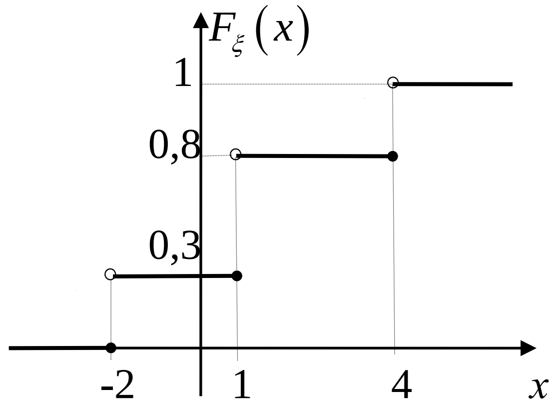


Рисунок 36

Важливі розподіли ДВВ

Найважливіші ДВВ пов’язані із ***випробуваннями Бернуллі*** (повторними випробуваннями). Так називають випадкові експерименти, які проводяться послідовно і в кожному з яких подія *A* може відбутися з ймовірністю $p = P(A)$, яка не залежить від результатів інших експериментів. Ймовірність протилежної події позначають $q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - p$.

Якщо подія *A* відбулася, кажуть, що був успіх («*У*»), в протилежному разі кажуть, що була невдача («*Н*»).

Приклади

1) ВЕ: Послідовне кидання монети. Подія *A* = {поява *Г*}.

$$p = P\left(A\right) = \frac{1}{2},\ q = 1 - p = \frac{1}{2}.$$

2) ВЕ: послідовне кидання гральної кістки. Подія *A* = {поява 3 очок}.

$$p = P\left(A\right) = \frac{1}{6},\ q = 1 - p = \frac{5}{6}.$$

➢ Геометричний розподіл

Проводяться випробування Бернуллі. ВВ τ – кількості випробувань до першого успіху.

Можливі значення $\tau = 0, 1, 2, \ldots$

p_k – це ймовірність того, що випадкова величина τ набуде значення, що дорівнює k.

$$p_k = P(\tau = k) = P\{\underbrace{H \ldots H}_{k} У\} = q^k p; \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ \ldots.$$

Закон розподілу

$$\boxed{P\left\{\tau = k\right\} = q^k p; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.}$$

називається ***геометричним***.

➢ Характеристична властивість геометричного розподілу

Геометричний розподіл має властивість, яка називається ***відсутністю післядії*** (***відсутністю пам'яті***). Це означає, що якщо при n киданнях «*У*» не було, то ймовірність того, що «*У*» не буде ще при m киданнях така сама, як коли б попередніх n невдалих кидань не було.

Доведення.

$$P\left\{\tau \geq n+m \middle| \tau \geq n\right\} = P\left\{\tau \geq m\right\}.$$

Оскільки $P\left\{\tau \geq n\right\} = \sum_{k=n}^{\infty} P\left\{\tau = k\right\} = \sum_{k=n}^{\infty} q^n p = \dfrac{q^n p}{1-q} = q^n$, то

$$P\left\{\tau \geq n+m \middle| \tau \geq n\right\} = \frac{P\left\{(\tau \geq n+m) \bigcap (\tau \geq n)\right\}}{P\left\{\tau \geq n\right\}} = \frac{P\left\{(\tau \geq n+m)\right\}}{P\left\{\tau \geq n\right\}} =$$

$$= \frac{q^{n+m}}{q^n} = q^m = P\left\{\tau \geq m\right\}.$$

Серед усіх дискретних розподілів властивість відсутності післядії має лише геометричний розподіл.

➢ Б і н о м і а л ь н и й   р о з п о д і л

ВВ μ_n – кількості успіхів у n випробуваннях Бернуллі. Її можливі значення: 0,1,2….n. Знайдемо закон розподілу μ_n, тобто ймовірності $P_n\left(k\right) = P\left\{\mu_n = k\right\}$.

Число результатів у n випробуваннях Бернуллі, в яких буде рівно k успіхів, дорівнює числу способів розставити k літер «*У*» на n місцях, тобто C_n^k. Ймовірність кожного з них дорівнює $p^k q^{n-k}$.

Отже, ВВ μ_n має такий закон розподілу:

$$\boxed{P_n\left(k\right) = P\left\{\mu_n = k\right\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \left(k = 0,1,2,\ldots,n\right).} \qquad (16)$$

Формула (16) називається ***формулою Бернуллі***.

Довести самостійно, що $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

Приклад

Що є більш ймовірним: випадіння 4 *Г* при восьми киданнях монети, або 3 *Г* при п'яти киданнях монети?

$$P_8(4) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5\cdot 7}{2^7}.$$

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{2^4} = \frac{5\cdot 8}{2^7}.$$

Отже, $P_5(3) > P_8(4)$.

Коли $n \gg 1$, формула Бернуллі для розрахунків не придатна. У цьому випадку використовують наближені ***формули Пуассона*** або ***Муавр –Лапласа***.

Формула Пуассона дає наближене значення $P_n(k)$, коли $n >> 1,\, p << 1,\, np = \lambda$:

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.} \tag{17}$$

Доведення. Знайдемо $\lim P_n(k)$, коли $n \to \infty,\ p \to 0,\ np = \lambda$.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1) \left(\frac{1}{n}\right)^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} 1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot \ldots \cdot(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-k} =$$

$$= \left[(1-\frac{\lambda}{n})^n \to e^{-\lambda} \right] \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Замінимо $P_n(k)$ її границею, тоді отримаємо формулу Пуассона (17).

Наступний приклад показує, наскільки важлива швидкострільність при враженні цілі.

Приклад

Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,001. Для враження цілі потрібно не менше двох влучень. Знайти ймовірність враження цілі при 5000 та 500 пострілах.

$$P\{\mu_{5000} \geq 2\} = 1 - P\{\mu_{5000} < 2\} = 1 - P\{\mu_{5000} = 0\} - P\{\mu_{5000} = 1\} \approx$$

$$\approx \left| \begin{array}{l} n = 5000 >> 1 \\ p = 0,001 << 1 \\ \lambda = np = 5 \end{array} \right| \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0,9596.$$

$$P\{\mu_{500} \geq 2\} \approx \left| \begin{array}{l} n = 500 >> 1 \\ p = 0,001 << 1 \\ \lambda = np = 0,5 \end{array} \right| \approx 1 - e^{-0,5} - 0,5e^{-0,5} \approx 0,09.$$

➢ Р о з п о д і л   П у а с с о н а

ВВ ξ має ***розподіл Пуассона*** з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень 0, 1, 2, … та

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np, \ k = 0, 1, 2....$$

Перевірити самостійно, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = 1.$

Розподіл Пуассона, як випливає з доведення формули Пуассона, одержуємо граничним переходом з біноміального розподілу, коли $n \to \infty, p \to 0, np = \lambda$.

Локальна теорема Муавра–Лапласа дає наближене значення для $P_n(k)$, коли $n \gg 1$, а p, q не дуже близькі до 0:

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \ \text{де} \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.} \qquad (18)$$

Значення функції $\varphi(x)$ затабульовано при x>0. При x<0 використовують її парність $\varphi(-x)=\varphi(x)$. При x>5 вважають, що $\varphi(x)\approx 0$ (рисунок 37).

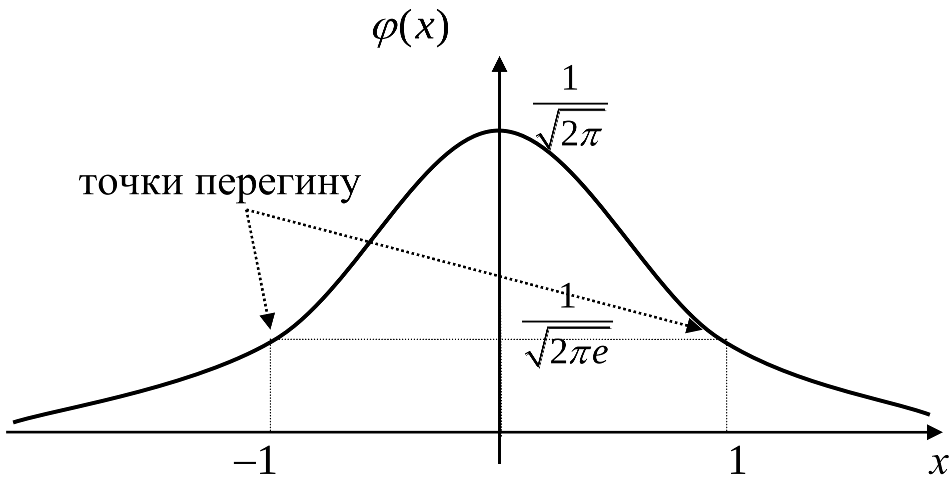


Рисунок 37

Доведення локальної теореми Муавра–Лапласа буде наведено в останній лекції.

Приклад

У камері схову зберігається багаж, 80 % якого – валізи. За добу видано 50 місць. Знайти ймовірність, що серед них 38 валіз.

Тут $n=50\gg 1,\quad p=0{,}8;\ q=1-0{,}8=0{,}2,\ npq=8.$ За формулою (18) маємо:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{38-50\cdot 0{,}8}{\sqrt{8}}=-0{,}5,$$

$$P_{50}(38)\approx\frac{1}{\sqrt{8}}\varphi(-0{,}5)=\frac{1}{\sqrt{8}}\varphi(0{,}5)\approx 0{,}11.$$

Інтегральна теорема Муавра–Лапласа дає наближене значення ймовірності $P_n(k_1,k_2)$ того, що в n випробуваннях Бернуллі число успіхів буде не менше за k_1 і не більше за k_2.

$$P_n(k_1,k_2)=P_n(k_1\le n\le k_2)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$
$$\text{де } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ – } \textbf{\textit{функція Лапласа,}} \qquad (19)$$
$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція Лапласа затабульована для $x>0$. Для знаходження її значень при $x<0$ використовують її непарність $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. При $x>5$ вважають, що $\Phi(x)\approx 0,5$ (рисунок 38).

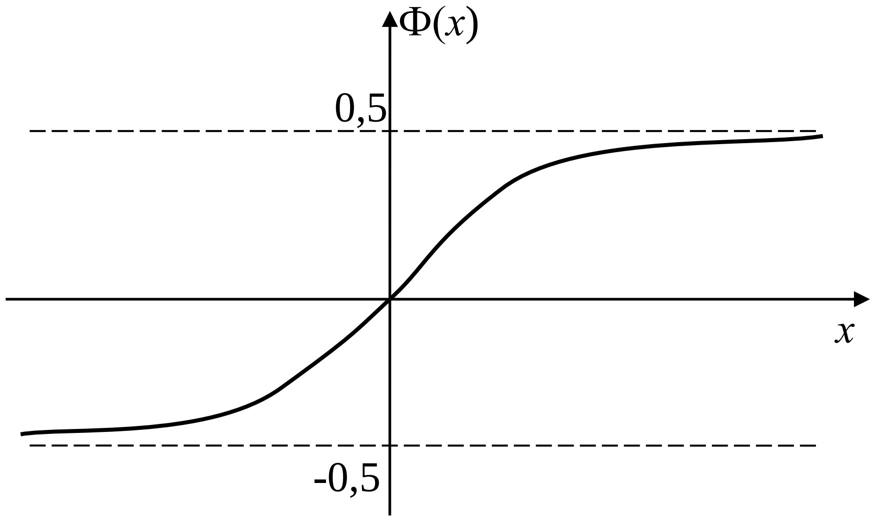


Рисунок 38

Доведення локальної та інтегральної теорем Муавра–Лапласа буде наведено в останній лекції.

Наступний приклад ілюструє практичне застосування формули (19).

Приклад. Задача про конкуруючі залізничні компанії.

Дві конкуруючі залізничні компанії мають по одному потягу, який курсує між містами A і B. Ці потяги відправляються та прибувають одночасно і мають приблизно однаковий рівень комфорту. Нехай n пасажирів незалежно і навмання обирають собі потяг, так що кількість пасажирів у кожному потязі визначається результатом n випробувань Бернуллі з ймовірністю $p=\frac{1}{2}$. Якщо в потягу є $k<n$ місць, то існує додатна ймовірність

$P_n(k+1;n)$ того, що з'явиться більше k пасажирів, і місць не вистачить. Для обчислення $P_n(\underset{k_1}{k+1};\underset{k_2}{n})$ скористаємося формулою (19):

$$x_1 = \frac{(k+1) - n\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{2k+2-n}{\sqrt{n}},\ x_2 = \frac{n - n\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{n};$$

$$P_n(k+1;n) \approx \Phi\left(\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{2k+2-n}{\sqrt{n}}\right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{2k+2-n}{\sqrt{n}}\right).$$

Якщо k настільки велике, що $P_n(k+1;n) < 0,01$, то кількість місць буде достатньою у 99 із 100 випадків. Взагалі компанія може встановити довільний рівень ризику α та визначити k так, щоб $P_n(k+1;n) < \alpha$.

Для цього достатньо прийняти $k \ge \frac{1}{2}(n + t_\alpha\sqrt{n} - 2)$, де t_α корінь рівняння $\alpha = 0,5 - \Phi\left(t_\alpha\right)$, який можна знайти за таблицями.

Наприклад, якщо $n = 1000$ та $\alpha = 0,01$, тоді достатньо $k = 537$ місць. Отже, якщо обидві компанії приймуть рівень ризику $\alpha = 0,01$, то два потяги будуть мати 1074 місця, 74 з яких будуть не зайняті. Аналогічно 514 місць було б достатньо у 80 % усіх випадків, а 549 місць – у 999 з 1000 випадків.

Відхилення частоти від імовірності

Нехай p – ймовірність появи події А у випадковому експерименті. $v_n\left(A\right) = \frac{\mu_n\left(A\right)}{n}$ – частота появ події A у n випадкових експериментах (див. лекцію 1).

Знайдемо ймовірність того, що

$$\left|v_n\left(A\right) - p\right| \le \varepsilon.$$

Ця нерівність еквівалента

$$\underbrace{np - n\varepsilon}_{k_1} \le \mu_n\left(A\right) \le \underbrace{np + n\varepsilon}_{k_2}.$$

За інтегральною теоремою Муавра–Лапласа (19)

$$P\left\{\left|\nu_n\left(A\right) - p\right| \le \varepsilon\right\} = P_n\left(k_1 \le \mu_n(A) \le k_2\right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \\ x_2 &= \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \end{aligned}\right] = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Маємо

$$\boxed{P\left\{\left|\nu_n\left(A\right) - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).}$$

Оскільки при $n \to \infty$ $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to \infty$ і $\Phi(\infty) \approx 0{,}5$, то $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \to 1$. Ми довели теорему Бернуллі.

Теорема Бернуллі

$$\boxed{\forall\varepsilon \;\; P\left\{\left|\nu_n\left(A\right) - p\right| \le \varepsilon\right\} \to 1 \text{ при } n \to \infty.} \qquad (20)$$

Теорема Бернуллі є теоретичним підтвердженням експериментального факту $p = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(A)$.

ЛЕКЦІЯ 6

Неперервні випадкові величини (НВВ)

Випадкова величина називається ***неперервною***, якщо неперервною є її функція розподілу.

Для НВВ ймовірність «влучити в точку» дорівнює 0, тобто:

$$P\{\xi = x_0\} = 0.$$

Дійсно (рисунок 39),

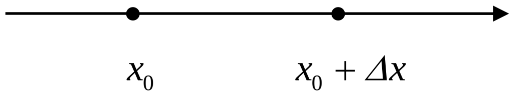


Рисунок 39

$$P\{\xi = x_0\} \le P\{x_0 \le \xi < x_0 + \Delta x\} = F_\xi(x_0 + \Delta x) - F_\xi(x_0) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0,$$

оскільки $F_\xi(x)$ неперервна.

Завдяки цій властивості для НВВ ξ $P(a \le \xi < b) = P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi \le b) = P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Далі розглядаємо так звані ***абсолютно неперервні*** ВВ. Так називаються неперервні ВВ, які мають щільність розподілу.

Невід'ємна функція $p_\xi(x) \ge 0$ називається ***щільністю розподілу ВВ*** ξ, якщо ймовірність потрапляння цієї ВВ до будь-якого проміжку дорівнює інтегралу від щільності по цьому проміжку (рисунок 40).

$$P\{a \le \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\,dx.$$

Тобто ймовірність того, що $\xi \in [a;b]$ дорівнює закресленій площі.

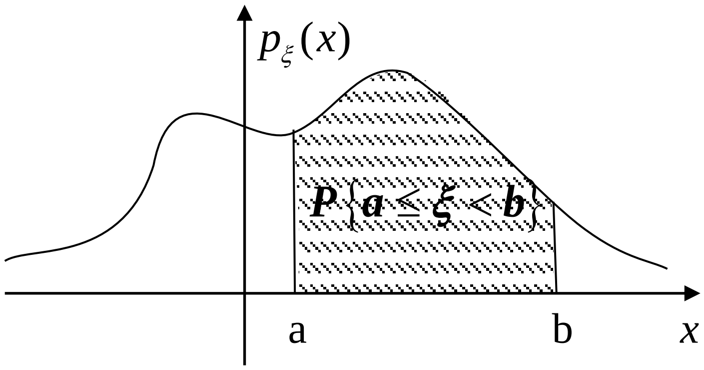


Рисунок 40

В л а с т и в о с т і щ і л ь н о с т і р о з п о д і л у

1) $F'(x) = p_\xi(x)$, якщо x – точка неперервності $p_\xi(x)$.

Доведення.

$$\frac{F_\xi(x_0+\Delta x)-F_\xi(x_0)}{\Delta x} = \frac{P\{x_0 \le \xi < x_0+\Delta x\}}{\Delta x} = \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} p_\xi(t)dt}{\Delta x} \boxed{=}$$

за теоремою про середнє (рисунок 41).

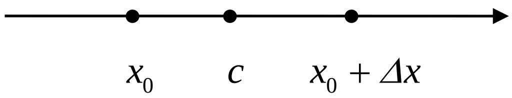


Рисунок 41

$$\boxed{=} \frac{p_\xi(c)\Delta x}{\Delta x} = p_\xi(c) \underset{\Delta x \to 0}{\rightarrow} p_\xi(x).$$

Завдяки цій властивості, щільність розподілу іноді називають диференціальною функцією розподілу;

2) $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx$.

Доведення.

У рівності $F_\xi(x) - F_\xi(a) = \int\limits_a^x p_\xi(t)dt$ перейдемо до границі, коли $a \to \infty$.

Завдяки цій властивості, функцію розподілу називають іноді інтегральною функцією розподілу. Ця властивість показує, що абсолютно неперервна випадкова величина є НВВ;

3) $\int\limits_{-\infty}^{-\infty} p_{\xi}\left(x\right)dx = 1.$

Довести самостійно.

Важливі розподіли НВВ

➢ Р і в н о м і р н и й   р о з п о д і л

Рівномірний розподіл виникає у такому випадковому експерименті з нескінченною кількістю рівноможливих результатів.

ВЕ: точка ставиться навмання на відрізок $\left[a,b\right]$. ВВ ξ дорівнює координаті цієї точки (рисунок 42).

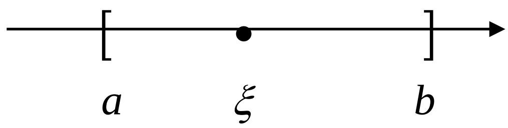


Рисунок 42

Знайдемо функцію розподілу ВВ ξ

$$F_{\xi}\left(x\right) = P\left\{\xi < x\right\} = \begin{cases} 0, \quad x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \; a \le x \le b; \\ 0, \quad x > b. \end{cases}$$

$$p_{\xi}\left(x\right) = F'_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \; x \in \left(a,b\right), \\ 0, \; x \notin \left[a,b\right]. \end{cases} \tag{21}$$

ВВ ξ має ***рівномірний розподіл*** на відрізку $\left[a,b\right]$, якщо її щільність розподілу дорівнює (21). Графік щільності рівномірного розподілу зображено на рисунку 43.

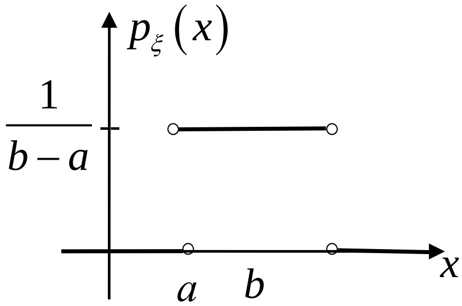


Рисунок 43

Рівномірний розподіл використовується зокрема при аналізі похибок округлення.

➢ П о к а з н и к о в и й р о з п о д і л

Показниковий розподіл є розв'язком задачі знаходження абсолютно неперервного аналога геометричного розподілу.

Задача. Якою має бути функція розподілу $F_\tau(x)$ невід'ємної абсолютно неперервної випадкової величини τ, що має властивість відсутності післядії

$$P\left\{\tau \ge t+s \mid \tau \ge t\right\} = P\left\{\tau \ge s\right\}? \qquad (22)$$

Розв'язання.
При $t<0$ $\quad F_\tau(t)=0$, оскільки $\tau \ge 0$.
При $t>0$ $\quad F_\tau(t)=?$
Нехай $Q(t)=1-F_\tau(t)=1-P\left\{\tau<t\right\}=P\left\{\tau \ge t\right\}$,
з формули (22) $\Rightarrow Q(t+s)=Q(t)Q(s) \Rightarrow Q(0)=1$.
Диференціюємо по s: $Q'(t+s)=Q(t)Q'(s)$.
При $s=0$ $Q'(t)=Q(t)\underbrace{Q'(0)}_{-\mu}$. Маємо задачу Коші:

$Q'(t)=-\mu Q(t),\ Q(0)=1$, розв'язком якої є $Q(t)=e^{-\mu t}$.
Отже, функція розподілу показникового закону:

$$F_\tau(t)=\begin{cases}0, & при\ t<0\\ 1-e^{-\mu t}, & при\, t \ge 0\end{cases};$$

$$P_\tau(t) = F_\tau'(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (23)$$

ВВ τ має ***показниковий розподіл*** з параметром $\mu > 0$, якщо її щільність розподілу дорівнює (23). Графік щільності показникового розподілу зображено на рисунку 44.

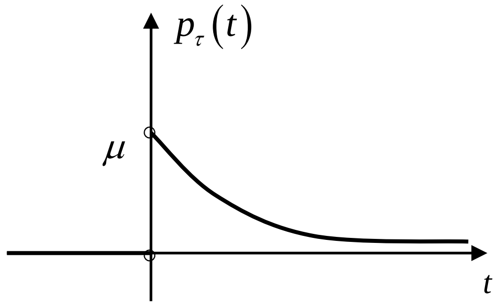


Рисунок 44

Показниковий розподіл застосовується зокрема в теорії надійності і в теорії масового обслуговування.

- Знаходження розподілу функції випадкової величини

Відома функція розподілу $F_\xi(x)$ або щільність розподілу $p_\xi(x)$ ВВ ξ. Потрібно знайти функцію розподілу $F_\eta(x)$ або щільність розподілу $p_\eta(x)$ ВВ $\eta = f(\xi)$.

Теорема про розподіл лінійної функції ВВ:

$$F_{a\xi+b}(x) = \begin{cases} F_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right), \text{ якщо } a > 0; \\ 1 - F_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right), \text{ якщо } a < 0 \text{ та } \dfrac{x-b}{a} \\ \qquad\qquad \text{точка неперервності } F_\xi(x). \end{cases}$$

Тому, якщо ξ – абсолютно неперервна, то

$$p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Доведення.

Дійсно, наприклад, при $a<0$ маємо:

$$F_{a\xi+b}(x)=P\{a\xi+b<x\}=P\left\{\xi>\frac{x-b}{a}\right\}=1-P\left\{\xi\le\frac{x-b}{a}\right\}=$$

$$=1-F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Приклад.

ВВ ξ рівномірно розподілена на $[a;b]$, $\eta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$.

$p_{\eta}(x)=?$

$$p_{\eta}(x)=\frac{1}{\frac{1}{b-a}}p_{\xi}\left(\frac{x-\left(-\frac{a}{b-a}\right)}{\frac{1}{b-a}}\right)=(b-a)p_{\xi}\left((b-a)x+a\right)=$$

$$=\begin{cases}1, & при \;\; x\in(0;1)\\ 0, & при \;\; x\notin[0;1]\end{cases}$$

оскільки коли x змінюється від 0 до 1, аргумент $(b-a)x+a$ змінюється на проміжку $(a;b)$. Тому η розподілена рівномірно на $[0;1]$.

➢Н о р м а л ь н и й   р о з п о д і л

ВВ ξ має ***стандартний нормальний*** закон розподілу, якщо її щільність

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x).$$

Графік щільності стандартного нормального закону було наведено раніше на рисунку 37.

Перевірку рівності $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ дивись, наприклад, в [11].

Функція розподілу

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}}dx+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-x^2}{2}}dx}_{\Phi(x)}=\frac{1}{2}+\Phi(x),$$

де $\Phi(x)$ – ***функція Лапласа*** (дивись формулу (19), лекція 5). Отже,

$$\boxed{F_\xi(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x).}$$

Нормальною випадковою величиною з параметрами a,σ називається лінійна функція від стандартної нормальної величини:

$$\eta=\sigma\xi+a,$$

де $\sigma>0$, ξ – стандартна нормальна ВВ.

За теоремою про розподіл лінійної функції ВВ щільність розподілу нормальної ВВ $\eta=\sigma\xi+a$ дорівнює:

$$p_\eta(x)=p_{\sigma\xi+a}(x)=\frac{1}{\sigma}P_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\boxed{p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.}$$

Графік щільності розподілу нормальної ВВ, який називається ***нормальною кривою,*** зображено на рисунку 45.

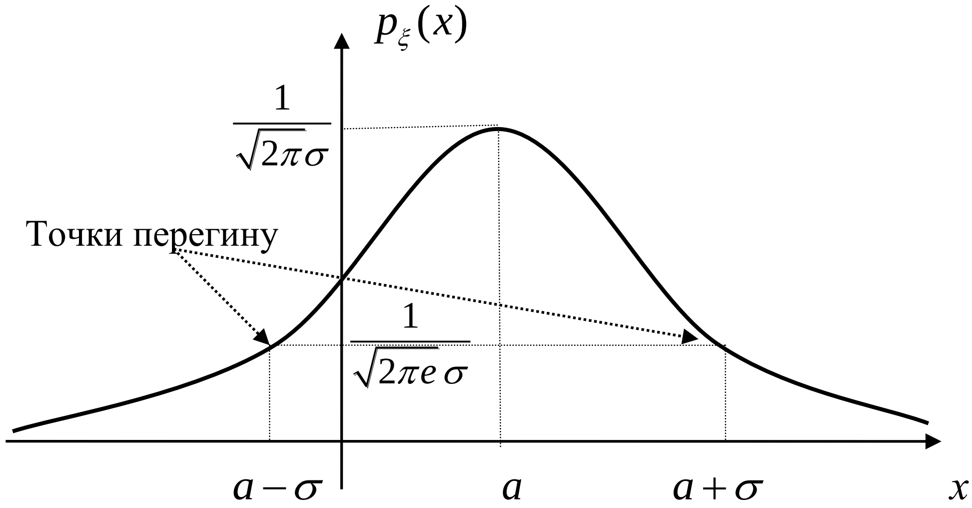


Рисунок 45

За теоремою про розподіл лінійної функції ВВ функція розподілу нормальної ВВ $\eta = \sigma\xi + a$ дорівнює:

$$F_\eta(x) = F_{\sigma\xi+a} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

$$\boxed{F_\eta(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).}$$

Відповідно ймовірність потрапляння до інтервалу для нормальної ВВ можна обчислити за формулою (24):

$$\boxed{P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).} \qquad (24)$$

Зокрема $P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973$, отже маємо правило «$3\sigma$».

Правило «3σ».

Нормальна ВВ у випадковому експерименті може відхилятися від свого середнього значення практично завжди не більше, ніж на 3σ.

Нормальний розподіл відіграє важливу роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях. Це пояснюється тим, що через

ЦГТ (дивись нижче) суми великої кількості ВВ при досить широких припущеннях мають приблизно нормальний розподіл.

➢ Р о з п о д і л   К о ш і

Кут φ повороту прожектора, який освітлює стратегічну ділянку залізниці, розподілено рівномірно на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, тобто щільність розподілу

$$p_\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\ \text{при}\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ 0\ \ \text{при}\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

ВВ $\eta=a\cdot tg\varphi$ (рисунок 46).

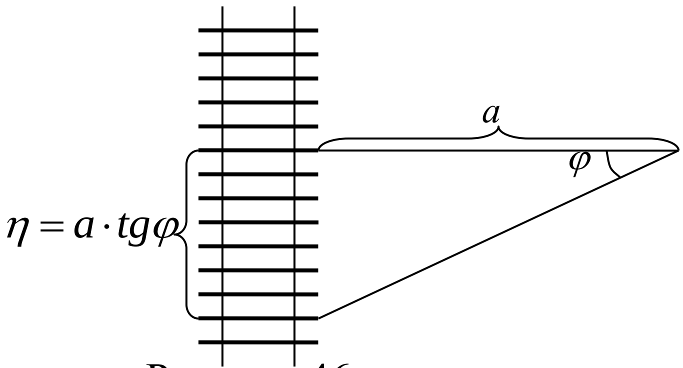


Рисунок 46

Знайдемо $p_\eta(x)$.

Розв'язання.

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(a\bullet tg\varphi<x)=P(\varphi<arctg\frac{x}{a})=F_\varphi(arctg\frac{x}{a});$$

$$P_\eta(x)=F'_\eta(x)=\underbrace{F'_\varphi(t)}_{P_\varphi(t)}\Bigg|_{t=arctg\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{x^2+a^2}.$$

Випадкова величина η має розподіл Коші, якщо її щільність $P_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{x^2 + a^2}$.

Моделювання ВВ

Моделювання ВВ називається отримання необхідної для розв'язання задач методом Монте-Карло послідовності значень випадкових величин з заданим законом розподілу.

Оскільки рівномірно розподілену на [0;1] ВВ α можна моделювати на ЕОМ, то виникає задача:

знайти таку функцію *f(x)*, щоб випадкова величина $\eta = f(\alpha)$ мала б наперед задану функцію розподілу $F(x)$, де α розподілена рівномірно на [0;1].

$$f(x) = ?\ \ \eta = f(\alpha),\ \ F_\eta(x) = F(x).$$

Її розв'язок дає перший пункт наступної теореми.

Теорема про стандартний метод моделювання випадкових величин.

1 Нехай $F(x)$ – довільна, монотонно зростаюча функція, така, що для будь-якого *x:* $0 < F(x) < 1$. Нехай $F^{-1}(y)$ – обернена до неї функція (рисунок 47).

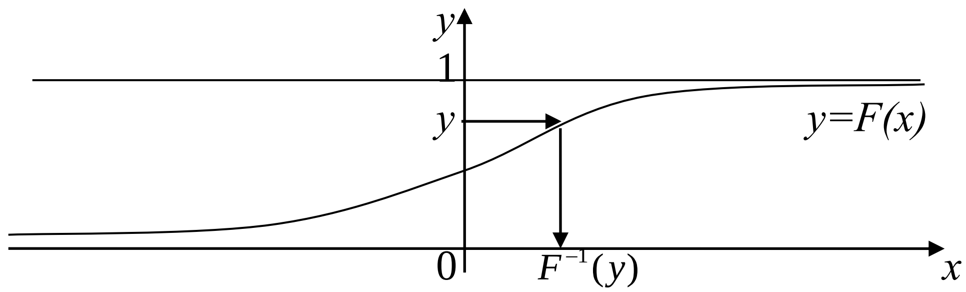


Рисунок 47

Тоді $F_\eta(x) = F(x)$, якщо $\eta = F^{-1}(\alpha)$, де α розподілена рівномірно на [0;1].

2 Навпаки, нехай η – довільна неперервна випадкова величина і $F_\eta(x) = F(x)$. Тоді ВВ $\alpha = F(\eta)$ рівномірно розподілена на [0;1].

Доведемо, наприклад, перше твердження.

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{F^{-1}(\alpha) < x\} = P\{\alpha < F(x)\} = F_\alpha(F(x)) = F(x),$$

при $0 < x < 1$, оскільки $F_\alpha(t) = t \ при \ 0 < t < 1$.

- Р о з п о д і л х и – к в а д р а т з о д н и м с т у п е н е м с в о б о д и

Так називається випадкова величина, яка дорівнює квадрату стандартної нормальної величини. Ця ВВ позначається $\chi_1^2 \overset{def}{=} \xi^2$, і її щільність $k_1(x) = p_{\chi_1^2}(x)$, де $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Знайдемо функцію розподілу:

$$F_{\chi_1^2}(x) = P\{\chi_1^2 < x\} = P\{\xi^2 < x\} = \begin{cases} P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\}, \ при \ x > 0 \\ 0 \qquad\qquad ,при \ x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), \ при \ x > 0 \\ 0 \qquad\qquad ,при \ x < 0 \end{cases}.$$

$$k_1(x) = p_{\chi_1^2}(x) = F'_{\chi_1^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(\sqrt{x}) - p_\xi(-\sqrt{x})\right), \ при \ x > 0 \\ 0 \qquad\qquad ,при \ x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \ при \ x > 0 \\ 0 \qquad ,при \ x < 0 \end{cases}$$

Інші важливі закони розподілу буде розглянуто у наступних частинах конспекту лекцій.

ЛЕКЦІЯ 7

Числові характеристики ВВ

Математичне сподівання (середнє значення) ВВ

Приклад

Дві людини грають у гру: перша платить другій 1,5 грн, а потім виймає з урни (рисунок 48) кулю і друга платить їй суму, що дорівнює вийнятій кулі. Якщо гру повторювати багато разів, кому вона вигідна?

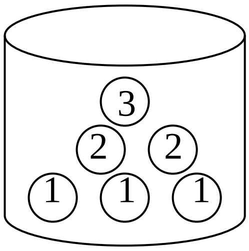


Рисунок 48

Нехай зіграно n партій. Другий гравець заплатив першому в середньому за одну гру

$$\frac{\mu_n(3)\cdot 3+\mu_n(2)\cdot 2+\mu_n(1)\cdot 1}{n}=\nu_n(3)\cdot 3+\nu_n(2)\cdot 2+\nu_n(1)\cdot 1\boxed{\rightarrow},$$

де $\mu_n(i)$ – число появ кулі з номером *i* в n партіях; $\nu_n(i)$ – частота появи кулі з номером *i* в n партіях.

Оскільки $\nu_n(3)\underset{n\to\infty}{\rightarrow} p_3=\frac{1}{6}$, $\nu_n(2)\underset{n\to\infty}{\rightarrow} p_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\nu_n(1)\underset{n\to\infty}{\rightarrow} p_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, то

$$\boxed{\rightarrow}\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}>1{,}5.$$

Отже, у середньому за одну партію, якщо кількість партій велика, другий гравець платить першому більше.

Хоча плата другого першому за партію – це величина випадкова, її середнє значення при великій кількості партій – це невипадкова величина, яка дорівнює

$$1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3.$$

Математичним сподіванням, або середнім значенням ВВ ξ, називається величина

$$\boxed{M(\xi) = \begin{cases} \sum_k x_k p_k, \text{ якщо } \xi - \textit{ДВВ}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx, \textit{ якщо } \xi - \textit{абсолютно НВВ}. \end{cases}}$$

Значення, якого набуває ВВ ξ у випадковому експерименті, передбачити неможливо. Але згідно із законом великих чисел (дивись далі, лекція 9) середнє арифметичне значення ВВ ξ у довгій серії випадкових експериментів з великою вірогідністю $\approx M(\xi)$.

Властивості математичного сподівання

1) $M(C) = C$, C – невипадкова величина (стала);

2) $M(C\xi) = MC(\xi)$;

3) $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$;

4) $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta)$, якщо ВВ ξ, η незалежні.

Пояснимо, що ВВ ξ, η називаються незалежними, якщо незалежними є події $\{\xi \in A\}$ та $\{\eta \in B\}$, де A і B довільні проміжки числової осі.

Властивості 1) і 2) є очевидними. Властивості 3) і 4) буде доведено пізніше.

Математичне сподівання важливих ВВ

➢ Г е о м е т р и ч н и й   р о з п о д і л:

$$p_k = P\{\tau = k\} = q^k p, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

За визначенням

$$M(\tau) = \sum x_k p_k = p\cdot 1 + qp\cdot 2 + q^2 p\cdot 3 + \ldots =$$

$$= p\{q + q^2 + q^3 + \ldots\}' = pq\left(\frac{a}{1-q}\right)' = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \qquad (25)$$

$$= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

$$\boxed{M(\tau) = \frac{q}{p}.}$$

➢ Б і н о м і а л ь н и й   р о з п о д і л:

$$p_k = P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \ k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Безпосередньо за визначенням $M(\mu_n) = \sum x_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}$ знайти важко. Діємо іншим чином. Нехай $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, де ВВ $\xi_i = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо у } i-\textit{ому іспиті } \ У \\ 0, \ \textit{якщо у } i-\textit{ому іспиті } \ Н \end{cases}$, $P\{\xi_i = 1\} = p, \ P\{\xi_i = 0\} = q$.

За визначенням $M(\xi_i) = 0\cdot q + 1\cdot p = p$.

$$M(\mu_n) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = np.$$

$$\boxed{M(\mu_n) = np.}$$

➢ Р о з п о д і л   П у а с с о н а:

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,1,2\ldots.$$

Закон розподілу ВВ ξ одержуємо граничним переходом із закону розподілу ВВ μ_n, коли $n \to \infty, p \to 0, np = \lambda$. Отже,

$$M(\xi) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} M(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} np = \lambda.$$

$$\boxed{M(\xi) = \lambda.}$$

➢ Р і в н о м і р н и й   р о з п о д і л:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in (a,b), \\ 0,\ x \notin [a,b]. \end{cases}$$

За визначенням

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\boxed{M(\xi) = \frac{a+b}{2}.}$$

➢П о к а з н и к о в и й   р о з п о д і л:

$$p_\tau(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

За визначенням

$$M(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} tp_{\xi}(t)\,dt=\int_{0}^{\infty} t\mu e^{-\mu t}dt=-\int_{0}^{\infty} tde^{-\mu t}=-te^{-\mu t}\Big|_0^{\infty}+$$
$$+\int_{0}^{\infty} e^{-\mu t}dt=0-\frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\Big|_0^{\infty}=0+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}. \tag{26}$$

$$\boxed{M(\tau)=\frac{1}{\mu}.}$$

➢ С т а н д а р т н и й   н о р м а л ь н и й   р о з п о д і л:

$$p_{\eta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

За визначенням $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)\,dx=0$, оскільки підінтегральна функція непарна (рисунок 49).

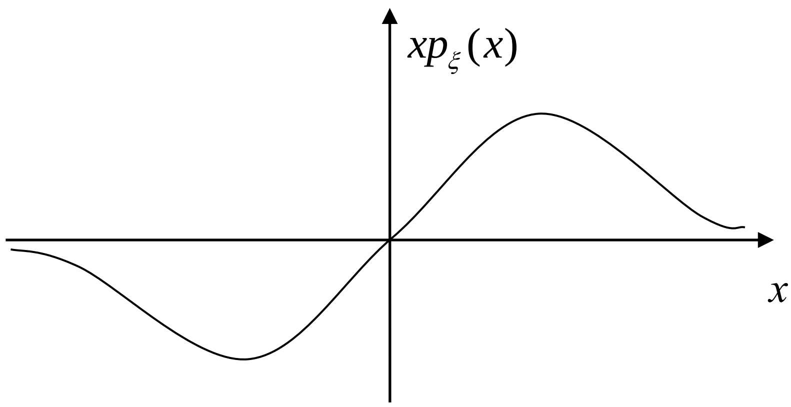


Рисунок 49

$$\boxed{M(\xi)=0.}$$

➢ Н о р м а л ь н и й   р о з п о д і л:

$$\eta=\sigma\xi+a.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання 1-3, маємо

$$M(\eta)=M(\sigma\xi+a)=M(\sigma\xi)+M(a)=\sigma M(\xi)+M(a)=a.$$

$$\boxed{M(\eta)=a.}$$

➢ Математичне сподівання існує не завжди. Дійсно, для розподілу Коші:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}.$$

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{a}{a^2+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{ax}{a^2+x^2}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{ax}{a^2+x^2}\,dx,$$

де обидва інтеграли розбігаються.

$$\boxed{M(\xi) \text{ не існує.}}$$

Математичне сподівання функції ВВ

Нехай ξ – випадкова величина. Заданий її закон розподілу $p_k=P\{\xi=x_k\}$, якщо ξ дискретна; або її щільність розподілу $p_\xi(x)$, якщо ξ абсолютно неперервна. ВВ η є функцією від ξ: $\eta=f(\xi)$. Наприклад, $\eta=\xi^2$ або $\eta=\sin\xi$. Знайти $M(\eta)$.

Виявляється, що для знаходження математичного сподівання $M(\eta)$ не потрібно знати закон розподілу ВВ η: $p_k=P(\eta=y_k)$ у дискретному випадку; або її щільність розподілу $p_\eta(y)$ у абсолютно неперервному. А саме,

$$M(\eta)=\begin{cases}\sum_k f(x_k)p_k, \text{ якщо } \xi-ДВВ;\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\xi(x)\,dx, \textit{ якщо } \xi-\textit{абсолютно}НВВ.\end{cases}$$

Приклад

Нехай $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad \eta=\min\{|\xi|;1\}$. $M(\eta)$=?

$$M(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{\xi}(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min\{|x|;1\}\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\min\{x;1\}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}\,dx+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+arctgx)\Big|_1^{\infty}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\ln 2}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

ЛЕКЦІЯ 8

Моменти ВВ

Числа $\nu_m=M(\xi^m),\ m=1,2,\ldots$ називаються ***моментами порядку*** m ВВ ξ, а числа $\mu_m=M\left[(\xi-M(\xi))^m\right]$ – її ***центральними моментами порядку*** m.

$\nu_1=M(\xi)$ – математичне сподівання ВВ ξ.

Дисперсія ВВ

Центральний момент другого порядку випадкової величини ξ називається її ***дисперсією***

$$\boxed{\mu_2=D(\xi)=M\left[\left(\xi-M(\xi)\right)^2\right].}$$

Тобто дисперсія дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її середнього значення.

Середнім квадратичним відхиленням називається

$$\boxed{\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}.}$$

$D(\xi)$ та $\sigma(\xi)$ є мірою (вельми грубою) розсіяння ВВ навколо її середнього значення. Важливість і користь поняття дисперсії виявляться далі у зв'язку із граничними теоремами.

Зауважимо, що на відміну від дисперсії середнє квадратичне відхилення має ту саму розмірність, що і її випадкова величина: $\left[\sigma(\xi)\right]=\left[(\xi)\right]$.

В л а с т и в о с т і д и с п е р с і ї

1) $D(C)=0,\ C$ – невипадкова величина (стала);

2) $D(C\xi)=C^2D(\xi)$;

3) $D(a\xi+b)=a^2D(\xi)$.

Властивості 1)-3) є очевидними.

Приклад використання властивості 3).

Нормування випадкової величини ξ – це зіставлення її випадкової величини $\xi^*=\dfrac{\xi-M(\xi)}{\sigma(\xi)}$, у якої $M(\xi^*)=0,\ \sigma(\xi^*)=1$;

4) $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$, якщо ВВ ξ,η незалежні.

Доведення.

$$D(\xi+\eta)=M\left[\left((\xi+\eta)-M(\xi+\eta)\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\left(\xi-M(\xi)\right)+\left(\eta-M(\eta)\right)\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\xi-M(\xi)\right)^2+2\left(\xi-M(\xi)\right)\left(\eta-M(\eta)\right)+\left(\eta-M(\eta)\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\xi-M(\xi)\right)^2\right]+M\left[2\left(\xi-M(\xi)\right)\left(\eta-M(\eta)\right)\right]+M\left[\left(\eta-M(\eta)\right)^2\right]=$$

$$=D(\xi)+2\underbrace{M\left[\left(\xi-M(\xi)\right)\right]}_{\substack{\parallel\\0}}\underbrace{M\left[\left(\eta-M(\eta)\right)\right]}_{\substack{\parallel\\0}}+D(\eta)=D(\xi)+D(\eta).$$

5) формула для обчислення дисперсії:

$$\boxed{D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-\left[M\left(\xi\right)\right]^2.} \qquad (27)$$

Доведення.

$$D(\xi)=M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)^2\right]=M\left[\xi^2-2\xi M\left(\xi\right)+\left(M\left(\xi\right)\right)^2\right]=$$

$$=M(\xi^2)-2M\left[\xi M\left(\xi\right)\right]+M\left[\left(M\left(\xi\right)\right)^2\right]=M(\xi^2)-2M\left(\xi\right)M\left(\xi\right)+$$

$$+\left(M\left(\xi\right)\right)^2=M(\xi^2)-\left(M\left(\xi\right)\right)^2.$$

6) мінімальна властивість дисперсії

$$\boxed{\forall c\;\; M\left((\xi-c)^2\right)\geq D(\xi),}$$

рівність досягається при $c=M\left(\xi\right)$.

Доведення.

$$M\left[(\xi-c)^2\right]=M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)+M\left(\xi\right)-c\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)^2+2\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)\left(M\left(\xi\right)-c\right)+\left(M\left(\xi\right)-c\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)^2\right]+2M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)\left(M\left(\xi\right)-c\right)\right]+$$

$$+M\left[\left(M\left(\xi\right)-c\right)^2\right]=M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)^2\right]+$$

$$+2\left(M\left(\xi\right)-c\right)\underbrace{M\left[\left(\xi-M\left(\xi\right)\right)\right]}_{\substack{\parallel\\0}}+\underbrace{M\left[\left(M\left(\xi\right)-c\right)^2\right]}_{\substack{\vee\\0}}\geq D(\xi).$$

Дисперсії важливих ВВ

➢ Геометричний розподіл. $D(\tau)$ знаходиться за формулою (27) аналогічно до знаходження $M(\tau)$ (25).

$$\boxed{D(\tau)=\frac{q}{p^2}.}$$

➢ Біноміальний розподіл:

$\mu_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, де $P\{\xi_i=1\}=p,$ $P\{\xi_i=0\}=q$ (дивись лекцію 5). За формулою (27) маємо $M(\xi_i^2)=0^2\cdot q+1^2\cdot p=p$,

$$D(\xi_i)=M(\xi_i^2)-\left(M(\xi_i)\right)^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

$$D(\mu_n)=D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)=npq.$$

$$\boxed{D(\mu_n)=npq.}$$

➢ Розподіл Пуассона:

$$p_k=P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2\dots.$$

$$D(\xi)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ np=\lambda}}D(\mu_n)=\lim_{n\to\infty}npq=\lim_{n\to\infty}\lambda\underbrace{(1-p)}_{\downarrow\, 1}=\lambda.$$

$$\boxed{D(\xi)=\lambda.}$$

➢ Рівномірний розподіл

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ x\in(a,b),\\ 0,\ x\notin[a,b].\end{cases}$$

За формулою (27) маємо

$$M\left(\xi^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 p_\xi\left(x\right)dx=\int\limits_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

$$D\left(\xi\right)=M\left(\xi^2\right)-\left[M\left(\xi\right)\right]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=$$

$$=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}.$$

$$\boxed{D\left(\xi\right)=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}.}$$

➢ П о к а з н и к о в и й р о з п о д і л. $D(\tau)$ знаходиться за формулою (27) аналогічно до знаходження $M(\tau)$ (26).

$$\boxed{D\left(\tau\right)=\frac{1}{\mu^2}.}$$

➢ С т а н д а р т н и й н о р м а л ь н и й р о з п о д і л:

$$p_\eta\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

За визначенням

$$D\left(\xi\right)=M\left[\left(\xi-\underset{0}{\underset{\|}{M\left(\xi\right)}}\right)^2\right]=M\left(\xi^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 p_\xi\left(x\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xde^{\frac{-x^2}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{\frac{-x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1$$

$$\boxed{D(\xi)=1.}$$

➢ Н о р м а л ь н и й   р о з п о д і л:

$$\eta=\sigma\xi+a.$$

Використовуючи властивості дисперсії 1)-3), маємо:

$$D(\eta)=D(\sigma\xi+a)=\sigma^2 \underbrace{D(\xi)}_{1}.$$

$$\boxed{D(\eta)=\sigma^2.}$$

Поняття про такі числові характеристики ВВ, як мода, медіана, асиметрія, ексцес та інші можна знайти, наприклад, у [9].

ЛЕКЦІЯ 9

Граничні теореми теорії ймовірностей

Закон великих чисел (ЗВЧ)

Щоб сформувати закон великих чисел, треба ввести поняття ***збіжності за ймовірністю***.

Послідовність ВВ η_n ***збігається за ймовірністю*** до сталої a, якщо $\forall\varepsilon>0: P\{|\eta_n-a|>\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Позначається $\eta_n\xrightarrow[n\to\infty]{ймов.}a$.

Закон великих чисел у формулюванні Хинчина:

Нехай ξ_n послідовність незалежних однаковорозподілених випадкових величин, у яких існує середнє значення $M(\xi_n)=a$, тоді $\dfrac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{ймов.}a$.

Доведення для випадку, коли $D(\xi_k)<\infty$.

У цьому випадку можна застосувати ***нерівність Чебишева:***

$P\left\{\left|\xi - M(\xi) > \varepsilon\right|\right\} \le \dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$, яка в абсолютно неперервному випадку доводиться так: нехай $D_\varepsilon = \left\{x : \left|x - M(\xi)\right| > \varepsilon\right\}$, тоді

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(\xi)\right)^2 p_\xi(x)dx \ge \int_{D_\varepsilon} \left(x - M(\xi)\right)^2 p_\xi(x)dx \ge$$

$$\ge \varepsilon^2 \int_{D_\varepsilon} p_\xi(x)dx = \varepsilon^2 P\left\{\xi \in D_\varepsilon\right\} = \varepsilon^2 P\left\{\left|\xi - M(\xi)\right| > \varepsilon\right\}.$$

Повернемося до ЗВЧ.

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{D\left(\dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{nD(\xi)}{n^2\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = \frac{1}{n}\underbrace{(a + a + \ldots a)}_{n} = a.$$

Отже, $P\left\{\left|\dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Закон великих чисел дає теоретичне обґрунтування змісту математичного сподівання, як було вказано вище.

Застосування ЗВЧ

1 Обґрунтуванням визначення Мізеса ймовірності як границі частоти є теорема Бернуллі (20), яку було виведено вище з інтегральної теореми Муавра–Лапласа (дивись лекцію 5). Виведемо її ще раз із ЗВЧ.

Розглянемо біноміальний розподіл: $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, де $P\left\{\xi_i = 1\right\} = p,\quad P\left\{\xi_i = 0\right\} = q$ (дивись лекцію 5). Зважаючи на ЗВЧ,

$$\nu_n = \frac{\mu_n}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ймов.}} M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

2 Правило середнього арифметичного при обробці результатів вимірювань.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – результати незалежних вимірювань сталої *a*. Оскільки вимірювання проводяться з випадковими похибками, то $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні однаково розподілені ВВ, у яких $M\left(\xi_k\right) = a$. Останнє означає відсутність систематичних похибок.

Зважаючи на ЗВЧ,

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ймов.}} a.$$

Отже, якщо кількість вимірювань є великою, то середнє арифметичне їх значень близьке до значення сталої вимірюваня.

3 Обчислення інтегралів методом Монте-Карло.

Обчислити:

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx > ?$$

Нехай ξ_n – послідовність незалежних випадкових величин, які рівномірно розподілені на [0;1].

$$p_{\xi_k}\left(x\right) = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ x \in \left(0;1\right) \\ 0 \ \text{при} \ x \in \left[0;1\right] \end{cases}.$$

$$M\left[f\left(\xi_n\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) p_{\xi_n}\left(x\right)dx = \int_0^1 f\left(x\right)dx.$$

За ЗВЧ $\dfrac{f\left(\xi_1\right) + f\left(\xi_2\right) + \ldots + f\left(\xi_n\right)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ймов.}} \int_0^1 f\left(x\right)dx.$

Висновок: щоб обчислити $\int_0^1 f\left(x\right)dx$, необхідно:

по-перше, за допомогою ЕОМ або таблиць отримати значення рівномірно розподілених на $\left[0;1\right]$ незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, $n >> 1$;

по-друге, $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx \approx \dfrac{f\left(\xi_1\right) + f\left(\xi_2\right) + ... + f\left(\xi_n\right)}{n}$.

Центральна гранична теорема (ЦГТ)

ЦГТ є теоретичним обґрунтуванням застосування нормального закону в науці і техніці.

У науці і техніці часто трапляються ВВ, які дорівнюють великій кількості незалежних малих доданків. Як правило такі величини мають приблизно нормальний закон розподілу.

Теоретичним поясненням цього факту є ЦГТ.

Теорема Леві–Ліндеберга.

Нехай ξ_n – послідовність незалежних однаковорозподілених випадкових величин, які мають дисперсію. Позначимо $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$.

Тоді функція розподілу $F_{S_n^*}(x)$ нормованої суми $S_n^* = \dfrac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$ при будь-якому x прямує при $n \to \infty$ до функції розподілу стандартної нормальної величини:

$$\boxed{F_{S_n^*}(x) = P\left\{S_n^* < x\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x).}$$

Згідно з ЦГТ можна записати таку рівність:

$$P\{A \le S_n < B\} = P\left\{\frac{A - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \le S_n < \frac{B - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right\} =$$

$$F_{S_n^*}\left(\frac{B - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right) - F_{S_n^*}\left(\frac{A - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right) \approx \tag{28}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{B - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{A - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right).$$

Тобто, якщо $M(\xi_k) = a, D(\xi_k) = \sigma^2$, то

$$\boxed{P\{A \le S_n < B\} \approx \Phi\left(\frac{B - na}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A - na}{\sqrt{n}\sigma}\right), \quad n >> 1.}$$

Нарешті, наведемо зазначені раніше доведення локальної (18) та інтегральної (19) теорем Муавра–Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра–Лапласа (19) є наслідком рівності (28) при $S_n = \mu_n$, $M(S_n) = M(\mu_n) = np$, $D(S_n) = D(\mu_n) = npq$ (дивись лекції 5, 7, 8), $A = k_1$, $B = k_2 + 1$ і того, що $\mathit{\Phi}\left(\frac{k_2 + 1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \mathit{\Phi}\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ при $n >> 1$.

Локальна теорема Муавра–Лапласа (18) випливає з інтегральної. Дійсно,

$$P(\mu_n = k) = P(k \le \mu_n < k+1) \approx \mathit{\Phi}\left(\frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \mathit{\Phi}\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \left[x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \ \frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}} = x + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right] = \int_x^{x + \frac{1}{\sqrt{npq}}} \varphi(t)dt \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

оскільки при $n >> 1$ площа криволінійної трапеції наближено дорівнює площі прямокутника (рисунок 50).

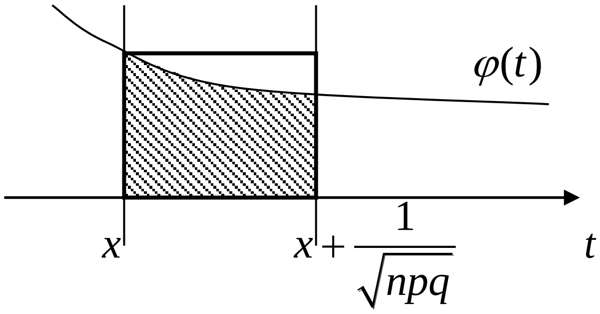


Рисунок 50

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Агапов, Г. И. Задачник по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. И. Агапов. – М. : Высшая школа, 1994.– 112 с.

2 Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики в управлінні процесами перевезень [Текст] : навч. посібник / Т. В. Бутько, Р. В. Вовк, Н. Г. Панченко, А. П. Рибалко. – Харків : УкрДАЗТ, 2011. – 308 с.

3 Гихман, И. И. Теория вроятностей и математическая статистика [Текст] / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1988. – 439 с.

4 Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. школа, 2000. – 480 с.

5 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической стаистике [Текст] / В. Е. Гмурман. – М. : Наука, 2000. – 400 с.

6 Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1987. – 400 с.

7 Козлов, М. В. Введение в матемкатическую статистику / М. В. Козлов, А. В. Прохоров. – М. : МГУ, 1987. – 264 с.

8 Могульский, Е. З. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : навч. посібник / Е. З. Могульский, Г. П. Бородай, В. І. Храбустовський. – Харків : УкрДАЗТ, 2015. – 291 с.

9 Сборник задач по математике для ВТУЗов: в четырех частях. Ч. 3 : Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / под общ. ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука. Физматлит, 1990. – 432 с.

10 Тутубалин, В. Н. Теория вероятностей [Текст] / В. Н. Тутубалин. – М. : МГУ, 1975. – 527с.

11 Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 527 с.

12 Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей [Текст] / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1987. – 240 с.