

МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра вагонів

Р. І. Візньак, А. В. Рибін, В. А. Гребенюк

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ**

Конспект лекцій

Частина 3

Харків – 2019

Візньак Р. І., Рибін А. В., Гребенюк В. А. Основи теорії

коливань та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2019. – Ч. 3. – 38 с.

Рекомендовано для студентів всіх форм навчання спеціальності 273 Залізничний транспорт освітніх програм «Вагони та вагонне господарство», «Вагони та транспортна інженерія», «Мехатроніка у вагонобудуванні».

Лл. 38, бібліогр.: 13 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вагонів 6 травня 2019 р., протокол № 12.

Рецензент

доц. І. Д. Борзилов

Р. І. Візняк, А. В. Рибін, В. А. Гребенюк

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ
ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Конспект лекцій

Частина 3

Відповідальний за випуск Гребенюк В. А.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 10.06.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 2,25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

1 Поперечні коливання балок.....	4
2 Стійкість руху та автоколивання механічних систем.....	9
2.1 Стійкість механічних систем.....	9
2.2 Автоколивання механічних систем.....	13
2.3 Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів.....	17
3 Перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем.....	26
Список літератури.....	37

1 ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ БАЛОК

Загальні відомості. В машинобудуванні, зокрема в турбобудуванні, використовуються вали з прямолінійною віссю, що несуть ряд дисків. Часто ці вали мають значні прогони, тоді важливо визначити критерії швидкості обертання цих валів ω , а це зводиться до ілюстрації їхніх поперечних коливань (частіш – крутильні коливання).

Як приклад розглянемо балку на двох опорах, до якої прикладено зосереджені маси (рисунок 1).

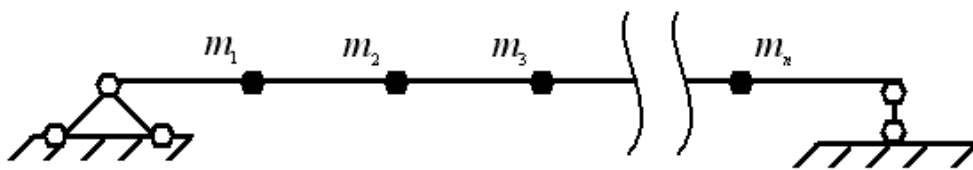


Рисунок 1 – Розрахункова схема балки на двох опорах, до якої прикладено зосереджені (точкові) маси $m_1 - m_n$

Прикладаємо сили інерції $-m_1\ddot{\omega}_1; -m_2\ddot{\omega}_2; \dots; -m_n\ddot{\omega}_n$, де $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – поперечні переміщення, прогини осі балки в місці прикладення мас m_1, m_2, \dots, m_n , $\ddot{\omega}_1, \ddot{\omega}_2, \dots, \ddot{\omega}_n$ – прискорення мас (рисунок 2).

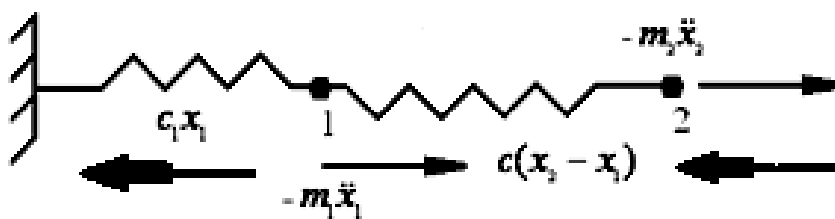


Рисунок 2 – Схема зусиль, що діють на ділянці стрижня від m_1 до m_2

В канонічному вигляді, за принципом Даламбера, маємо:

$$x - m_1 \ddot{x} = 0; \quad (1)$$

$$-c_1 x_1 + c(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0, \quad (2)$$

тобто

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c(x_2 - x_1) = 0. \quad (3)$$

На m_2 діє тільки сила напруження другої пружини

$$-c_2(x_2 - x_1), \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (4)$$

З урахуванням підстановки в систему третьої, четвертої і т. д. i -ї маси x виразиться зміщеннями x_{i-1} , x_i та x_{i+1} .

Приклади коливальних систем з рухомою масою, що визначається вертикальним переміщенням u та кутом φ , зображено на рисунках 3 та 4.

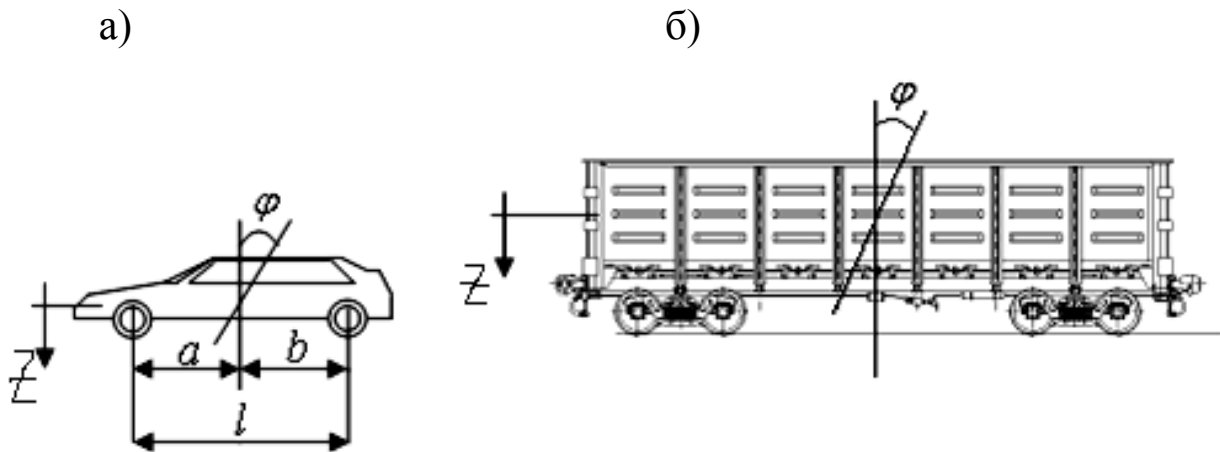


Рисунок 3 – Вертикальні та кутові переміщення легкового автомобіля (а) та вантажного вагона (б)

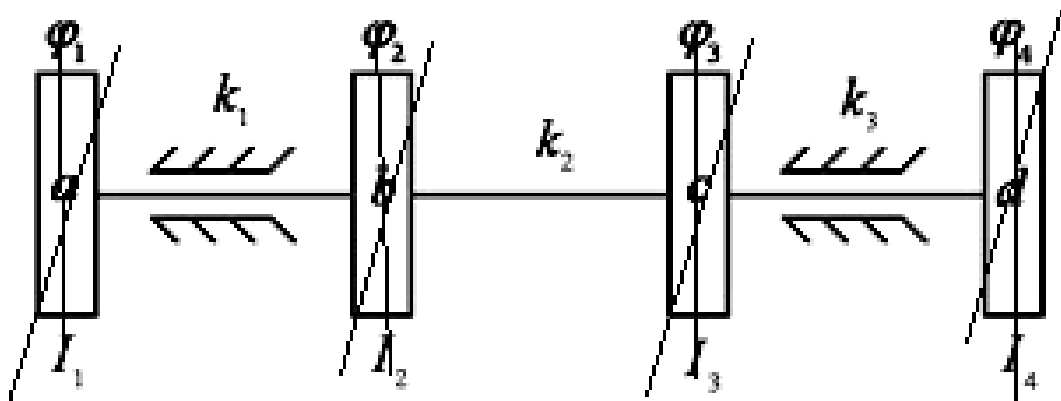


Рисунок 4 – Переміщення системи валів із дисками, закріпленими на підшипниках

При складанні диференційних рівнянь мас у просторовій системі координат додаємо до діючих зовнішніх сил уздовж осей X, Y, Z ще і сили інерції $-m\ddot{x}, -m\ddot{y}, -m\ddot{z}$, тоді рівняння руху будуть мати такий вигляд:

$$X - m\ddot{x} = 0; Y - m\ddot{y} = 0; Z - m\ddot{z} = 0. \quad (5)$$

В канонічному вигляді запишемо дані переміщення, які також називають *прогинами*:

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{n1}; \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{2n}; \\ \omega_n = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{n1} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{n2} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{nn}. \end{cases} \quad (6)$$

За формулою Крамера (матрична алгебра), δ_{ik} – переміщення у напрямку i , викликане одиничною силою, що діє в напрямку k . Відомо, що, за інтегралом Мора, $\delta_{ik} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx$, а одиничні сили, які викликають одиничний момент $M_{i(k)}$, такі:

$$P_i = -m_i \ddot{\omega}_i = 1; P_k = -m_k \ddot{\omega}_k = 1. \quad (7)$$

Також, за теоремою Максвела (взаємності переміщень), $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ – переміщення 1 та 2 одиничної сили у відношенні – рівні.

Для системи з одним ступенем, вочевидь, $\omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11}$, що приблизно пропорційна $m\ddot{\omega} + c_1 \omega = 0$, оскільки $c = \frac{1}{\delta_{11}}$.

Для системи з двома ступенями свободи на підставі (6)

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язуючи її, отримуємо

$$\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha). \quad (9)$$

Підставивши це рівняння в системи (6) або (8), маємо

$$\begin{cases} \lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0 \\ \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Визначник $\int \begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$.

Підставляючи $\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha)$ в систему (6), отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha) = & -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{11} - \\ & - m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{12} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{1n}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha) = & -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{21} - \\ & - m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{22} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{2n}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n \sin(\omega t + \alpha) = & -m_1(\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{n1} - \\ & - m_2(\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{n2} - \dots - m_n(\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{nn}. \end{aligned} \quad (13)$$

На прикладі одного з рівнянь проводимо перетворення

$$\lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0. \quad (14)$$

Такий самий спосіб працює і з іншими рівняннями:

$$\begin{cases} \lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 + \dots + \lambda_n m_n \delta_{1n} \omega^2 = 0 ; \\ \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 + \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \dots + \lambda_n(m_n\delta_{2n}\omega^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

За наявності коливань в системі амплітуда λ_i не обертається в нуль, якщо визначник, що складається з коефіцієнтів системи (9), дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_1 \delta_{12} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega^2 & m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_n \delta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \omega^2 & m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & m_1 \delta_{nn} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Записавши цей визначник в розгорненому вигляді та позначивши через a_i коефіцієнти при різних ступенях ω , отримуємо частотне рівняння n -го ступеня для квадрата частоти ω :

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots (-1)^n a_n \omega^{2n} = 0, \quad (17)$$

де, $\omega_1 = +\sqrt{\omega_1^2}; \omega_2 = +\sqrt{\omega_2^2}; \dots; \omega_n = +\sqrt{\omega_n^2}$.

Наприклад, для системи (8) з двома ступенями свободи, розриваючи визначник 2-го порядку, виходимо на б_i-квадратне частотне рівняння:

$$\omega^4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0. \quad (18)$$

Тоді остаточно, розв'язавши його, визначаємо частоти

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}; \quad (19)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}. \quad (20)$$

2 СТІЙКІСТЬ РУХУ ТА АВТОКОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

2.1 Стійкість механічних систем

Стійкість рівноваги – властивість механічної системи, яка знаходиться під дією сил рівноваги, після незначного відхилення повертатися в стан рівноваги.

Стійкість руху – властивість механічної системи, яка рухається під дією прикладених сил, майже не відхилятися від цього руху при будь-яких незначних, випадкових діях (слабкі пориви вітру та інше). Рух, який не має цієї властивості, – *нестійкий*.

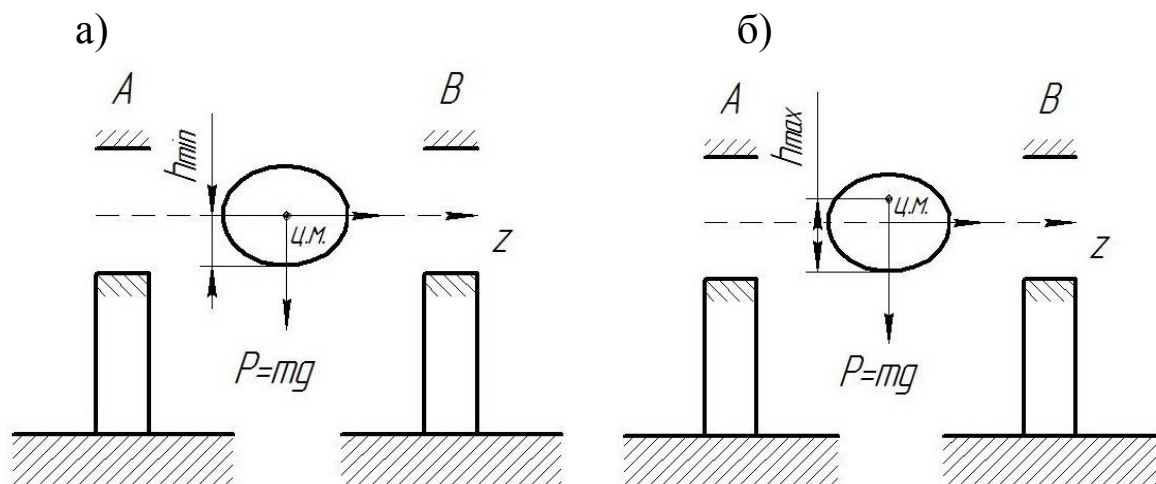
Умова стійкості механічної системи при русі – критерій стійкості. Всі рухомі об'єкти, які використовуються в техніці, повинні мати цю властивість: залізничний рухомий склад, автомобіль, літак, судно, снаряд, техніка, ракета, супутник Землі та ін.

Розрізняють *встановлену* та *невстановлену* рівновагу механічних систем. Завдання криється у вивченні особливого руху механічних систем, виведення із стану рівноваги після малих початкових збурень. Внаслідок коливань зі зростаючими розмахами говорять про нестійкий рух. При гармонійних коливаннях система, фактично, повертається до стану рівноваги (монотонні наближення або затухання коливань) – *стійкий рух*.

При вирішенні багатьох відповідальних технічних проблем необхідно приділяти особливу увагу перевірці стійкості рівноваги станів і стаціонарних режимів та аналізу впливу параметрів механічних систем на стійкість.

Для консервативних механічних систем з кінцевим числом ступенів свободи справедлива теорія Лагранжа-Дирехле: якщо у стані рівноваги потенційна енергія системи має мінімум, то цей стан стійкий.

Розглянемо, наприклад, тіло, закріплене на горизонтальній осі (рисунок 5). За знайденою умовою тіло буде знаходитися в рівновазі під дією сили ваги $p = mg$. Коли $\sum m_z(p) = 0$, центр ваги C тіла займає найнижче або найвище положення.



а – стійка рівновага тіла; б – нестійка рівновага тіла

Рисунок 5 – Розрахункова схема системи

У випадку (а) (рисунок 5) невелике відхилення моменту сили P прагне повернути тіло в стан рівноваги.

У випадку б) (рисунок 5) при скільки завгодно малому відхиленні момент сил P буде це відхилення збільшувати.

Якщо центр мас тіла знаходиться на осі обертання, то рівновага тіла астатична, тобто можлива втрата стійкості у кожний момент часу.

Рівновага тіла буде стійкою, коли його центр мас займе найнижчий стан, а нестійкою – коли найвищий.

Умова рівноваги тіла, яке має нерухому вісь обертання, полягає в тому, що сума моментів всіх сил, які діють відносно цієї осі повинна дорівнювати нулю.

$$\sum m_z(F_k) = 0. \quad (21)$$

Стосовно консервативних систем з однією мірою свободи ознакою мінімальної потенційної енергії Π є додатний коефіцієнт жорсткості c . Якщо n ступенів свободи більше одиниці, то значенню Π_{min} відповідає система нерівностей (критерій Сильвестра):

$$C_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{14} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{24} \\ \dots & \dots \\ C_{41} & C_{42} \dots C_{44} \end{vmatrix} > 0 \quad (22)$$

Це саме враховується при оцінюванні стійкості колісної пари проти сходу з рейок колії. Під час руху вагона по рейковій колії колісна пара у візку, особливо при звивистому русі, може займати положення під деяким кутом до рейки, що називається кутом набігання. При цьому між гребенем колеса і головкою рейки виникає поперечна горизонтальна сила. У точці контакту колеса з рейкою на колесо діють вертикальне навантаження P_B , горизонтальна сила, яка дорівнює по величині бічному тиску колеса на рейку P_b , реакція рейки N і сила тертя між гребенем колеса і рейкою μN , де μ – коефіцієнт тертя.

Укочування колеса на рейку не відбуватиметься, якщо проекція сили на площину ковзання буде більше проекції інших сил на цю площину, тобто

$$P_B \sin \beta > P_B \cos \beta + \mu N, \quad (23)$$

де β – кут нахилу гантелі гребеня до горизонталі.

Нормальна реакція рейки

$$N = P_B \sin \beta + P_B \cos \beta. \quad (24)$$

При цьому гребінь колеса подібно клину буде проковзувати вниз по відношенню до профілю рейки і процес укочування колеса на рейку не відбуватиметься.

Після нескладних перетворень одержимо умову стійкості колісної пари в рейковій колії у вигляді

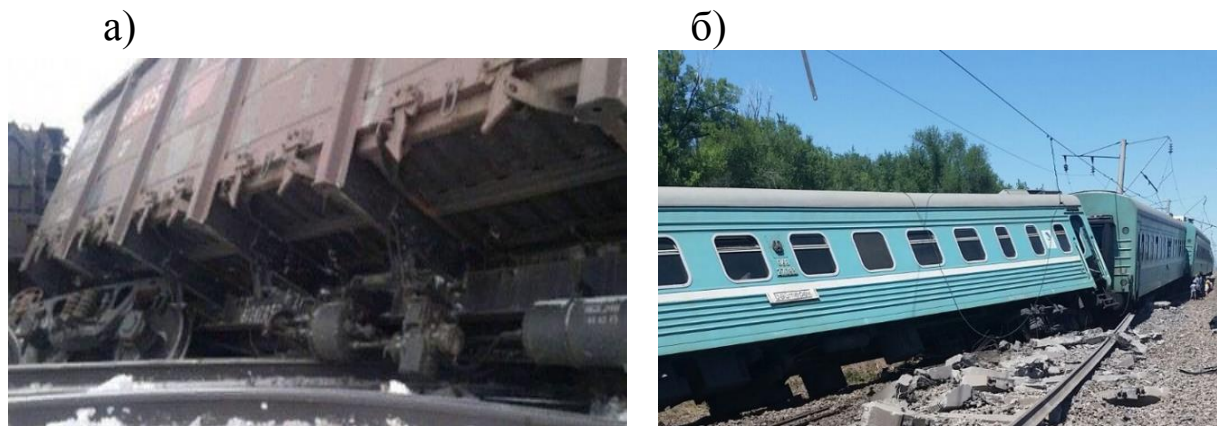
$$\frac{P_B}{P_B} < \frac{tg\beta - \mu}{1 + \mu tg\beta}. \quad (25)$$

Тоді коефіцієнт запасу стійкості колеса проти сходу з рейок матиме такий вигляд

$$k_{zc} = \frac{tg\beta - \mu}{1 + \mu tg\beta} \cdot \frac{P_B}{P_B} > 1. \quad (26)$$

Ця умова справедлива при малих кутах набігання колеса на рейку. Зі збільшенням кута набігання стійкість погіршується. Бокові обертальні та лінійні коливання, відповідно у вертикальній і горизонтальній площинах, збільшують бічний тиск, погіршують умови стійкості і підвищують імовірність сходу з рейок у прямих ділянках колії.

На рисунку 6 наведено перекинуте положення універсального напіввагона (а) та пасажирського вагона відкритого типу (б) при втраті поперечної стійкості, коли спочатку втратила горизонтальну стійкість колісна пара першої по ходу руху екіпажної частини відносно рейкової колії, а потім і виникла перевага за величиною перекидного моменту над моментом, що повертає кузов вагона із вантажем та пасажирями у початкове експлуатаційне положення.



а – перекидання вантажного вагона; б – перекидання пасажирського вагона

Рисунок 6 – Ілюстрація часткової втрати поперечної стійкості вагонів у складі вантажного та пасажирського поїздів

2.2 Автоколивання механічних систем

Автоколивання (грец. *autos* – сам) – коливання, що не затухають та можуть існувати при відсутності в коливальній системі зовнішніх збурювальних дій (на відміну від вимушених коливань). Автоколивання виникають за рахунок активного елемента, який заповнює неминучі в реальній системі втрати енергії, визначається властивостями самої системи та не залежить від кінцевої зміни початкових умов.

Прикладами автоколивань є коливання маятника годинників, скрипкова струна при русі смичка та ін.

У багатьох випадках збільшення коливань поступово сповільнюється і рух прагне до деякого стійкого режиму зі сталими амплітудами A та періодами T – режимами встановлених коливань.

Природа цього явища зрозуміла, якщо розглядаються коливання системи з тертям, коли характер тертя описується нелінійною функцією швидкості

$$R = -b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3, \quad (27)$$

де b_1, b_3 – довільні постійні.

Тоді диференціальне рівняння з урахуванням дії сил інерції $a\ddot{q}$ та пружних складових cq має такий вигляд:

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0. \quad (28)$$

Лінійні системи визначають тоді, коли властивості системи (пружність, маса, коефіцієнт тертя) зберігаються при зміненому стані системи, тобто не залежать від змін (y, x) швидкостей. Коливальні процеси описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Тобто *лінійні системи* – такі системи, в яких протікають коливальні процеси, що описуються лінійними рівняннями. Властивості і характеристики нелінійних систем залежать від їхнього стану. Приклад лінійної функції зображено на рисунку 7.

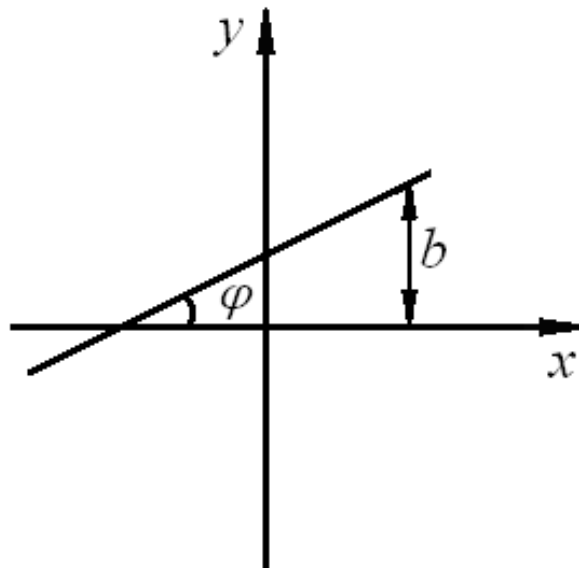
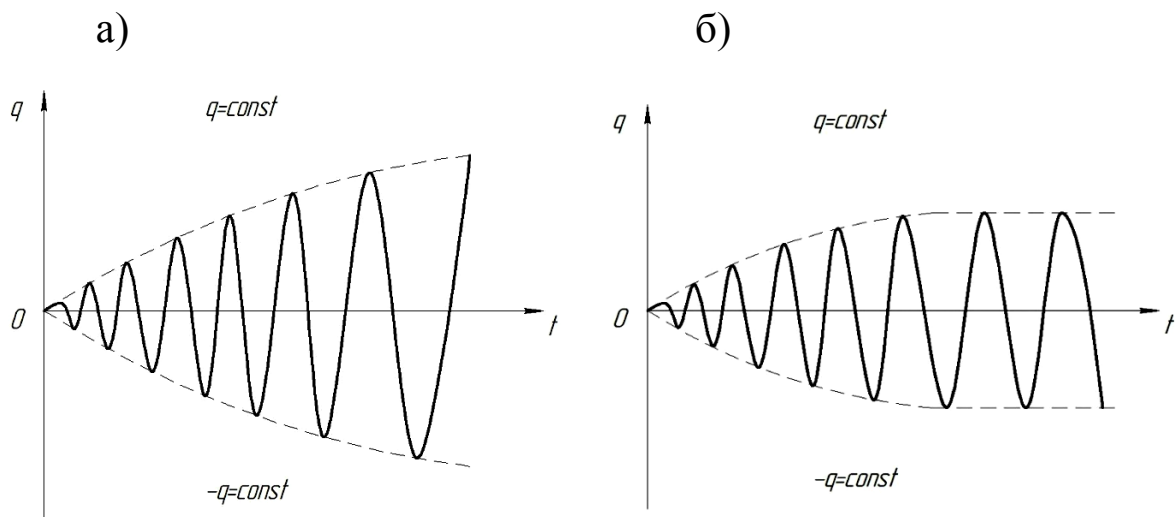


Рисунок 7 – Лінійна функція прямої $y=kx+b$

У зв'язку з тим, що відхилення від рівноваги дуже малі, то нелінійними членами нехтують з відомими припущеннями, проводячи лінеаризацію.

Внаслідок дії тертя (в багатьох випадках від'ємного) може бути виявлена нестійкість системи. При дії демпфірування вплив нелінійного члена рівняння на зростання коливань буде зменшуватися, а рух прагнучим до встановленого режиму з постійною амплітудою. Приклади ефекту від'ємного тертя, що порушує стійкість механічних систем, наведені на рисунку 8.



а – до введення необхідного тертя; б – після підвищення інтенсивності тертя

Рисунок 8 – Ефект від'ємного тертя

Сили тертя можуть бути причиною затухання коливань, але в деяких випадках – причиною їхнього розхитування.

Розглянемо систему з двох барабанів (рисунок 9), що обертаються з кутовими швидкостями ω , при цьому $\omega_1 = \omega_2$.

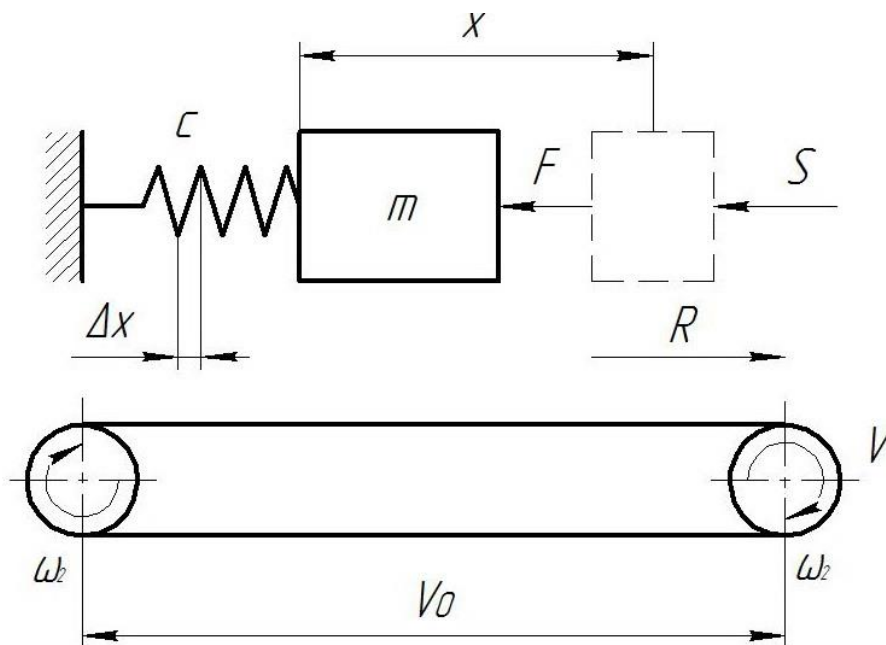


Рисунок 9 – Розрахункова схема системи з двох барабанів

На стрічці розташовано вантаж масою m , рух якого обмежується пружиною з коефіцієнтом жорсткості c . Дія сили R зміщує вантаж праворуч і викликає подовження пружини Δx . Нехай в стані рівноваги $F_{\text{пруж}} = R_0$, тоді статичне зміщення вантажу складе

$$x_0 = \frac{R_0}{c} V_0; \quad (29)$$

$$F_{\text{пруж}} = R_0 V_0, \quad (30)$$

де V_0 – відносна швидкість.

Але відомо, що $R_0 = f(V_0)$, тоді характеристика тертя може виглядати як на рисунку 10.

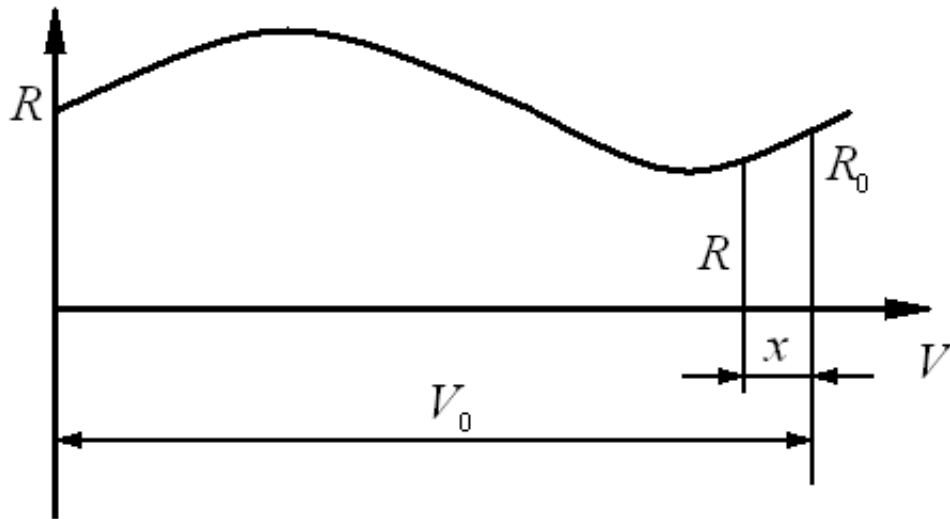


Рисунок 10 – Характеристика тертя

Припустимо, що внаслідок якого-небудь збурення $P(t)$, при цьому у початковий момент часу $t_0 = 0$, вантаж був виведений зі стану спокою.

Тоді характеристика руху може бути визначена таким чином. Нехай при $t > 0$ додаткове зміщення вантажу $y = x$, тоді $V_{abc} = x'$, а швидкість відносно стрічки дорівнюватиме

$$V_{abc} = V_0 - x'. \quad (31)$$

У процесі руху на вантаж діють сили пружності, внутрішній та зовнішній опори.

Пружна сила складе

$$F_{пруж} = -c(x+x_0). \quad (32)$$

Зовнішній опір становитиме

$$S = -kx'; \quad (33)$$

а внутрішній опір

$$R_0 = x_0c. \quad (34)$$

Диференційні рівняння вантажу мають вигляд

$$-c(x+x_0) - kx' + R = mx'' \quad (35)$$

Враховуючи, що $R \neq R_0$, $V_{відн} \neq V_0$ та $R = R_0 - R_0'x$, $R_0 = \text{tg}\varphi$, тоді, проводячи відповідні перетворення, маємо

$$-c\left(x + \frac{R_0}{c}\right) - kx' + R = mx''; \quad (36)$$

$$mx'' + (R_0 + k)x' + cx = 0; \quad (37)$$

$$-cx - R_0 - kx' + R_0 - R_0'x' = mx''. \quad (38)$$

Остаточно диференціальне рівняння руху системи виглядатиме так:

$$mx'' + cx + x'(R_0 + k) = 0. \quad (39)$$

2.3 Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів

Дані назви мають місце для пристроїв – засобів боротьби зі шкідливими динамічними явищами. В основу дії цих пристроїв покладено:

1 Амплітуди вимушених коливань достатньо малі, якщо $\omega(t)$ системи менше або дорівнює $\omega(t)$.

2 Тертя F призводить до якогось коливання енергії, а вимушені коливання виникають з меншими амплітудами, ніж при відсутності тертя (процес особливо проявляється в резонансній області).

3 Сили тертя поступово призводять до їхнього загасання (вільні коливання).

4 Цей принцип підходить для віброізоляторів. Вібрації часто виникають при русі засобів, у тому числі і вагонів при русі у складі поїзда, та можуть призвести до навантаження режимів їхньої роботи і руйнування конструкції.

Ізоляція подібних явищ притаманна принципу дії спеціальних пристроїв. *Віброізолятори* – пружні елементи, які спеціально вводяться до механічної системи для загасання коливань шляхом значного зменшення $\mathcal{G}(t)$ (в основному високочастотні спектри коливань).

На початку заходів запобігають негативному впливу на вимірювальні пристрої у вагоні шляхом встановлення в систему пружних елементів – амортизаторів, ресор, гумових і металевих прокладок, блоків.

Другий принцип підходить для поглиначів, його головною частиною є елементи тертя (рідинного, сухого, гістерезисного).

Третій принцип об'єднано (комбіновано) для віброізоляторів і поглиначів у більш складні системи конструкційних елементів (демпфірування в цих складних амортизаторах сприяють швидкому загасанню вільних коливань, які виникають після поштовхів та ударів).

Розглянемо дію віброізоляторів як найбільш відомих пристроїв, принцип яких скрізь і повсякденно використовується в залізничній техніці (транспортних засобах).

Активні віброізолятори встановлюються між джерелами вібрації та основою для захисту від вимушених сил (рисунок 11).

Пасивні віброізолятори, навпаки, встановлюються від можливих коливань основи (рисунок 12).

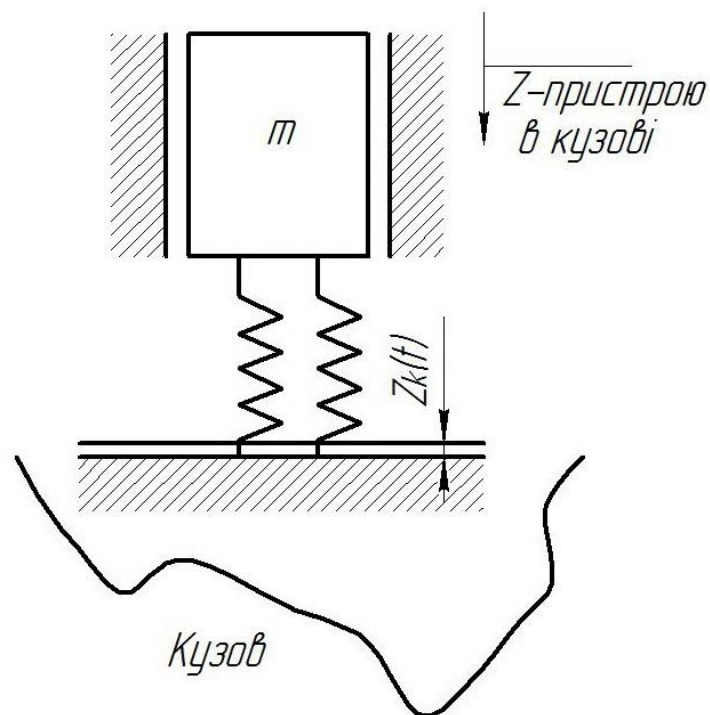


Рисунок 11 – Активні віброізолятори

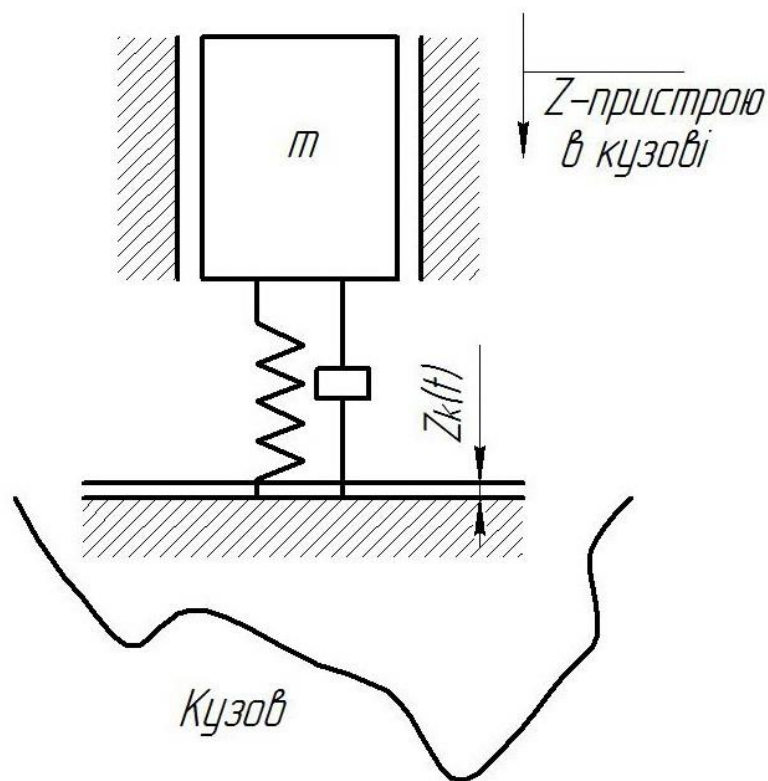
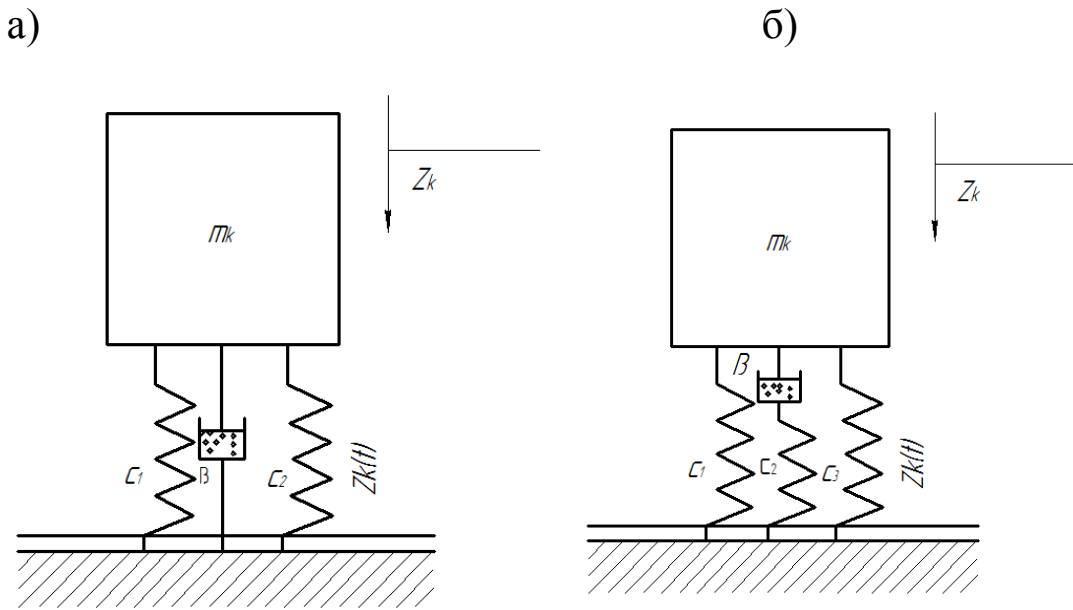


Рисунок 12 – Пасивні віброізолятори

У віброізоляторів від кінематичного збудження (рисунок 13) частоти збудження строго не організовані, а самозбудження полігармонійного характеру або є звичайним процесом, що потребує додаткового демпфірування, або спричиняє небезпеку підвищення коливань при будь-яких частотах збудження. Даний принцип часто використовується в конструюванні автомобільного підвішування, яке має одночасно властивості віброізолятора та амортизатора. В цьому полягає сутність використання гідрогасника, який значно розсіює енергію при коливаннях.

У пасажирських вагонах додаткові гнучкі елементи не потрібні тому що вони ускладнюють конструкцію гасника. Сам гасник має достатню характеристику непружного опору β .



а – з демпфером без пружного елемента; б – з демпфером з пружним елементом

Рисунок 13 – Віброізолятори від кінематичного збудження

За принципом Даламбера, процес коливань амортизованого об'єкта описується диференційним рівнянням

$$mz_1'' + c(z_1 - z_k), \quad (40)$$

де $z_k(t) = a \sin \omega t$ – коливання системи.

$$z_1 = a\chi \sin(\omega t + \theta), \quad (41)$$

де $\chi = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{v^2}} = \frac{1}{1 - n^2}$ – коефіцієнт передачі амплітуд.

Як видно, найбільш небезпечний стан, коли $\frac{\omega}{v} = 1$. Тому необхідно відповідати до та після резонансним зонам $\omega < v$, $\omega > v$.

З пружного елемента визначається припустима величина переміщення об'єкта. Так, для жорсткого елемента $c \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, а $n \rightarrow \infty$, отже, і значення $\chi \rightarrow \infty$. Коливання маси та об'єкта, який амортизується, будуть однаковими.

Позитивний ефект від пружного підвішування об'єкта лише при зниженні жорсткості c пружного елемента, який під час руху вагона з максимальною експлуатаційною швидкістю відповідає процесу коливань в зарезонансній зоні, при цьому n зростає, а $x < 1$.

При експлуатаційній швидкості, меншій за ту, яка відповідна малій c , можливі резонансні коливання амортизуючого об'єкта, тоді в систему підвішування поряд з пружними елементами одночасно вводять демпфери (непружний опір – гума, яка має пружні та в'язкі властивості). Тоді рівняння запишемо у такому вигляді:

$$mz_1'' \cdot c(z_1 - z_k) + \beta(z_1 - z_k') = 0; \quad (42)$$

$$z_1 = a\chi \sin(\omega t - \theta); \quad (43)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2 \cdot \frac{\omega^2}{\gamma^2}}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{v^2})^2 \cdot 4\gamma^2 (\frac{\omega^2}{\gamma^2})}} = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2 v^2}}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}}, \quad (44)$$

де $\gamma = \frac{\beta}{\beta_{кр}}$ та $\beta = 2\sqrt{mc}$.

Це означає, що зі збільшенням β , x та z_1 – збільшуються.

Правильно обрані параметри елементів амортизації різних приборів, які експлуатуються на вагонах сприяють підвищенню строку служби та стабільності їх роботи.

Зазвичай, для різних машин з $n = 500 \text{ об/хв}$ $\frac{\omega}{v} \geq 4$, $\beta < \frac{1}{15}$.

Якщо $\frac{\omega}{p} \geq 3$, ($\mu < \frac{1}{8}$) – це тиххідні машини, то $n \leq 500 \text{ об/хв}$.

Варіанти установки показані на рисунках 14-16.

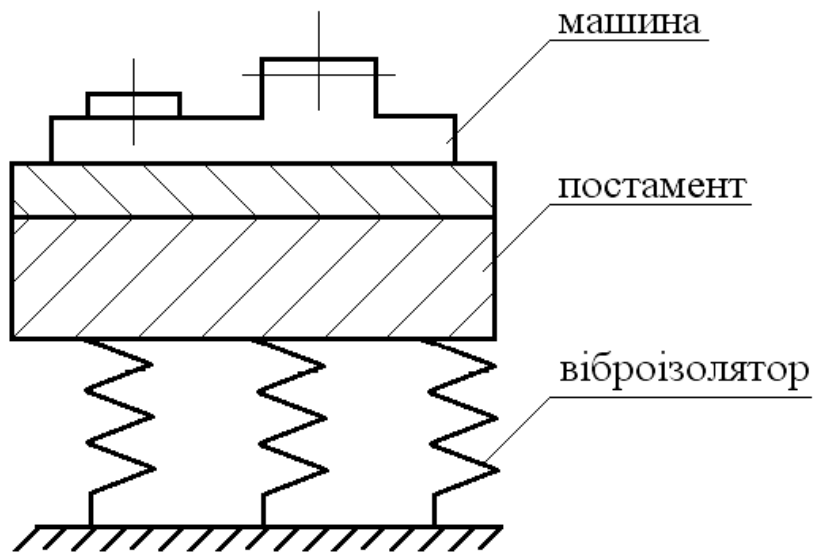


Рисунок 14 – Установка з пружними опорами

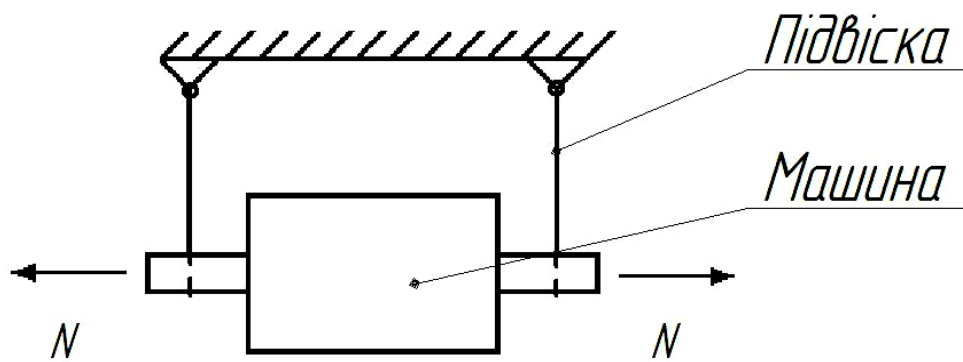
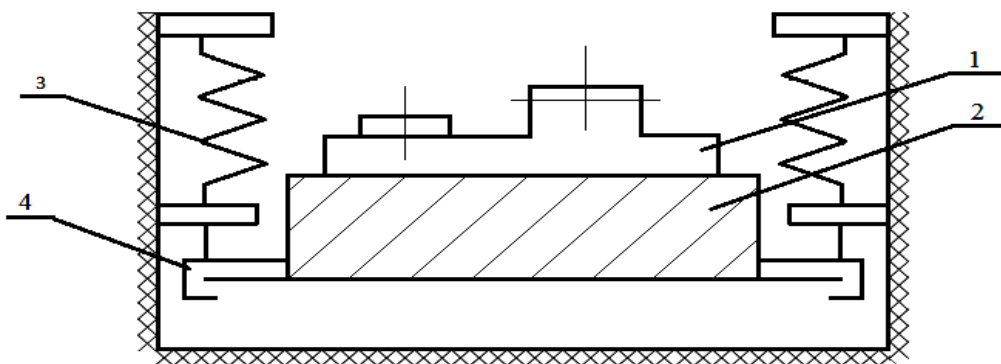


Рисунок 15 – Підвісна установка маятнікового типу



1 – машина; 2 – постамент; 3 – віброізолятор; 4 – підвісна опора

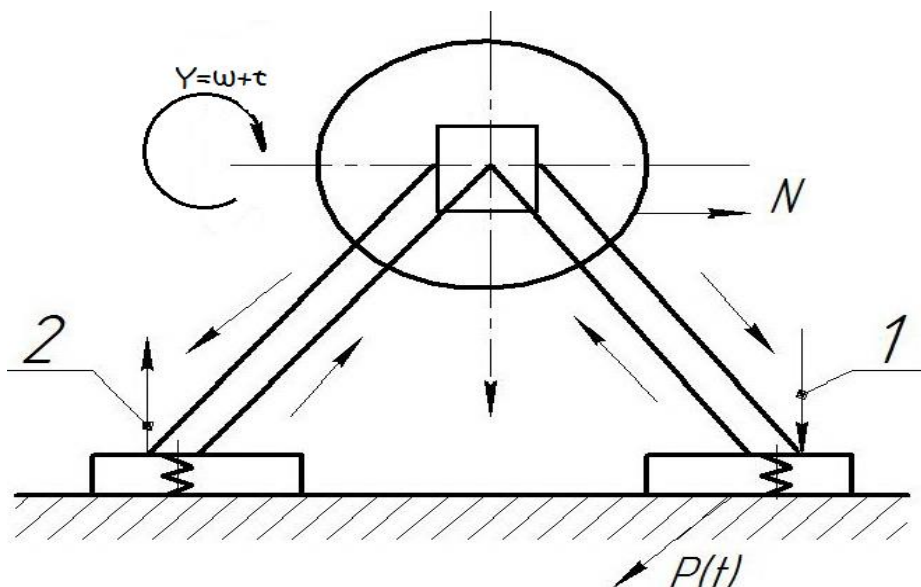
Рисунок 16 – Підвісна установка надпостаментного типу

Переважання горизонтальних вимушених сил – раціональне використання маятникового підвішування. Наприклад, у конструкції вагонів – це ударно-центрувальний пристрій серійної конструкції автозчепу СА-3 у взаємодії з ударною розеткою, центрувальною балочкою і парою маятникових підвісок; коліскове підвішування пасажирських візків моделей КВЗ-ЦНП (тип I, II) відповідно з опорним пристроєм – коліскою для трирядних пружин центрального підвішування та комплектом з двох підвісок і чотирьох серьог.

Чим більше довжина підвішування, тим менше власна частота – підвищується ефект віброізоляції.

Принцип пом'якшення підвішування полягає в його податливості в бік дії $p(t)$ або пари $p(t)$.

Однофазний двигун зображено на рисунку 17.



1 – стиснення; 2 – відновлення

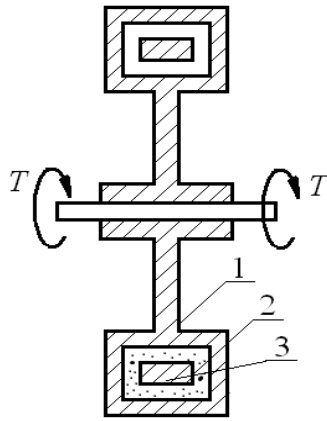
Рисунок 17 – Однофазний двигун

Поглиначі наведені на рисунках 18-20. Існують різні схеми поглинання крутильних коливань:

а) рідинне тертя (рисунок 18);

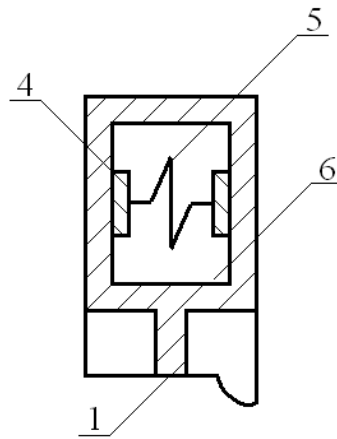
б) сухе тертя (рисунок 19). Демпфірування при сухому терті утворюється за рахунок притиснення диска до стінок корпусу;

в) гістерезисного типу (рисунок 20). Демпфірування поглиначів гістерезисного типу утворюється за рахунок інтенсивного розсіювання енергії в кільці 7.



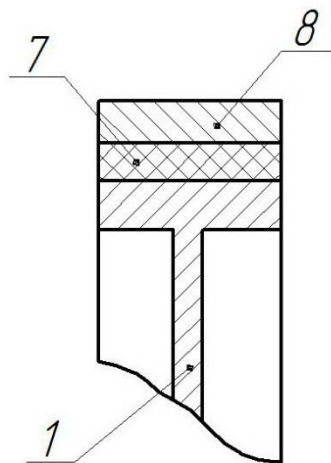
1 – диск; 2 – тороподібна; 3 – масивне кільце

Рисунок 18 – Рідинне тертя



1 – диск; 4 – опори пружини; 5 – пружина; 6 – порожнини

Рисунок 19 – Сухе тертя



7 – демпфірувальне кільце; 8 – бандаж

Рисунок 20 – Поглиначі гістерезисного типу

Існують також поглиначі ударної дії (рисунки 21-23):

а) плавальні (рисунок 21). Вони використовуються в тягах органів керування літаків, гелікоптерів, верстатів;

б) маятникові (рисунок 22) – у висотних конструкціях, баштових спорудах, димових трубах, вітряках;

в) пружинні (рисунок 23) – у резцах, розточувальних оправках, вібраційних машинах, при проходженні через резонанс.

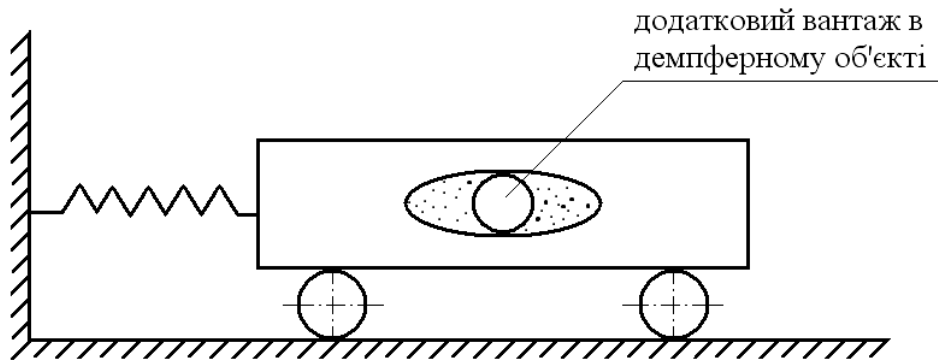


Рисунок 21 – Плавальні поглиначі

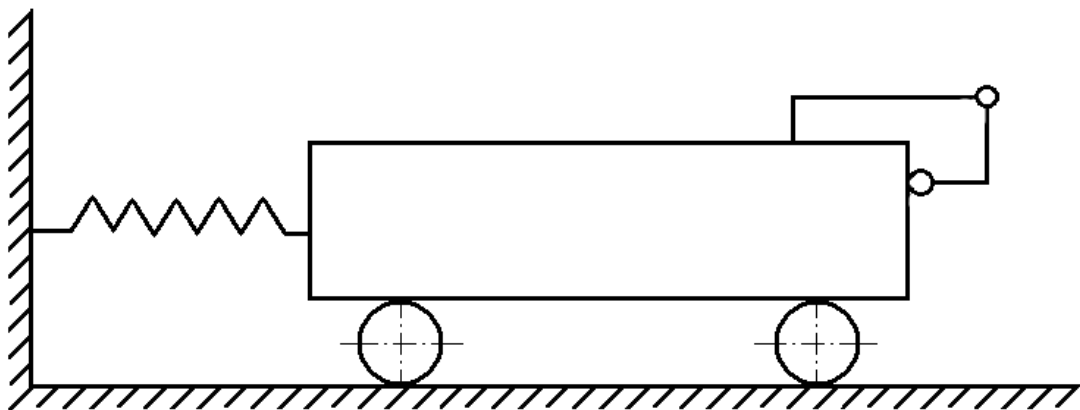


Рисунок 22 – Маятникові поглиначі

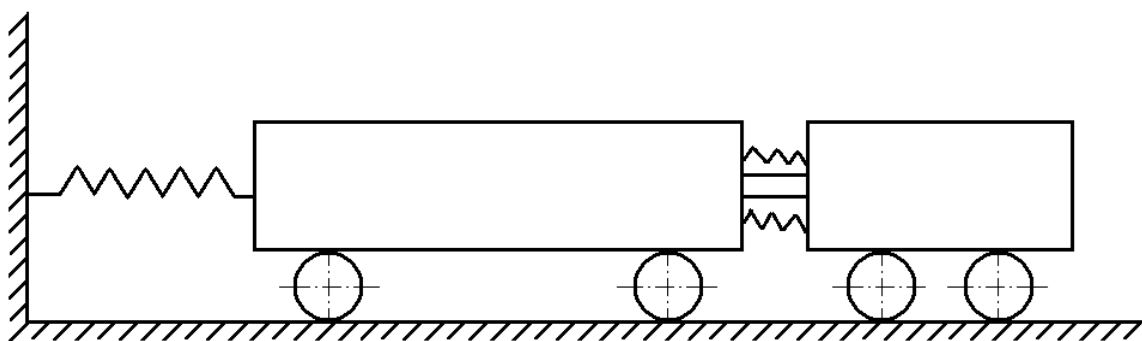


Рисунок 23 – Пружинні поглиначі

3 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ КОЛИВАНЬ НАЙПРОСТІШИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Перехідна функція, частотні характеристики і годограф коливальної системи служать для визначення властивостей коливальної системи – осцилятора (система, що здійснює вільні коливання). У загальному випадку властивості коливальної системи визначаються за її реакцією на зовнішнє вільне збурення заданого типу і досліджується реакція системи (рисунок 24). Нехай X_e – збурення (вхідна функція), а X_a – реакція на зовнішнє збурення (вихідна функція).

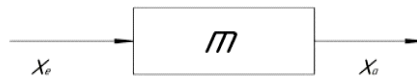


Рисунок 24 – Вхідна та вихідна функції системи

Тоді цей процес можна подати блок-схемою (рисунок 25) зв'язку функцій.

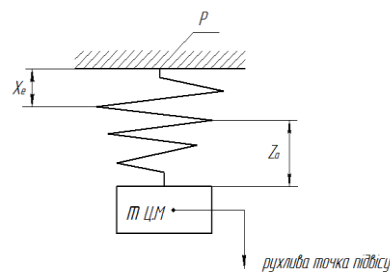


Рисунок 25 – Підвішена маса у вертикальному напрямку

Приклад. Підвішена маса (рисунок 26) переміщується горизонтально, знаходиться у виведеному з рівноваги стані і здійснює тривалі коливання. Зміщення викликано швидким переміщенням точки підвішування по вертикалі і горизонталі (P). Зміщення – вхідна функція X_e , реакція на зовнішнє зміщення – коливання маси, а вихідна функція – координата X_a маси.

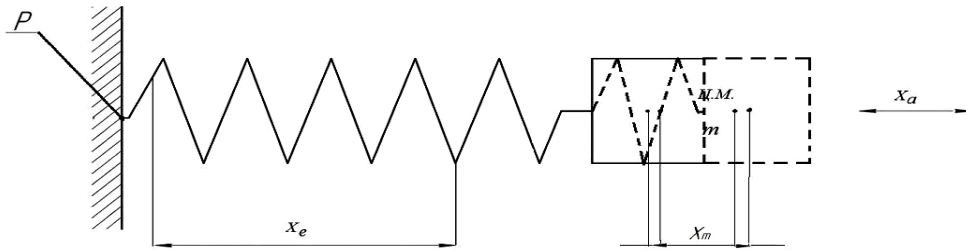


Рисунок 26 – Підвішена маса у горизонтальному напрямку

Випробувальні функції. Найбільш прийнятні для опису перехідних процесів:

1 Одична ступінчаста функція

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0 \\ 1 & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (45)$$

Помноживши її ординату на відповідне число, отримаємо ступінчасту функцію з необхідною висотою (переміщенням) - точки системи при навантаженнях (рисунок 27).

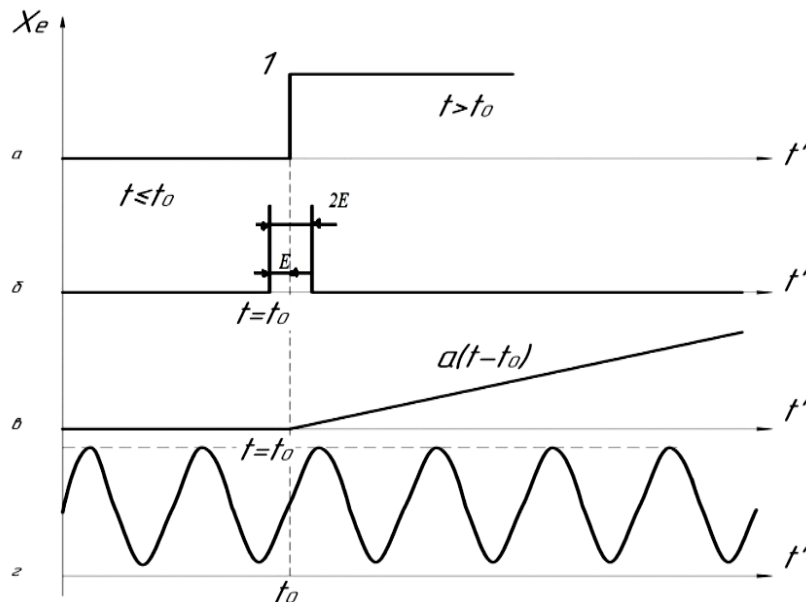


Рисунок 27 – Форми випробувальних (перехідних) функцій для дослідження коливальних систем

2 Імпульсна функція (функція Дірака). Вона відмінна від нуля у вузькій області близько моменту $t = t_0$.

У межах ширини цієї області $2 \cdot \varepsilon \rightarrow 0$ при $t < t_0 - \varepsilon$ та $t > t_0 + \varepsilon$.

3 Кусково-лінійна функція, яка збільшується

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \chi \varepsilon dt = 1 \quad (46)$$

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0 \\ 1 & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (47)$$

4 Синусоїдальна випробувальна функція

$$X_e = A \cdot \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \quad (48)$$

Комбінування на основі використання цих функцій – цінні допоміжні засоби для опису процесів в теорії коливань. Реакція системи на поодинокі ступінчасті зміщення - перехідна функція (рисунок 28).

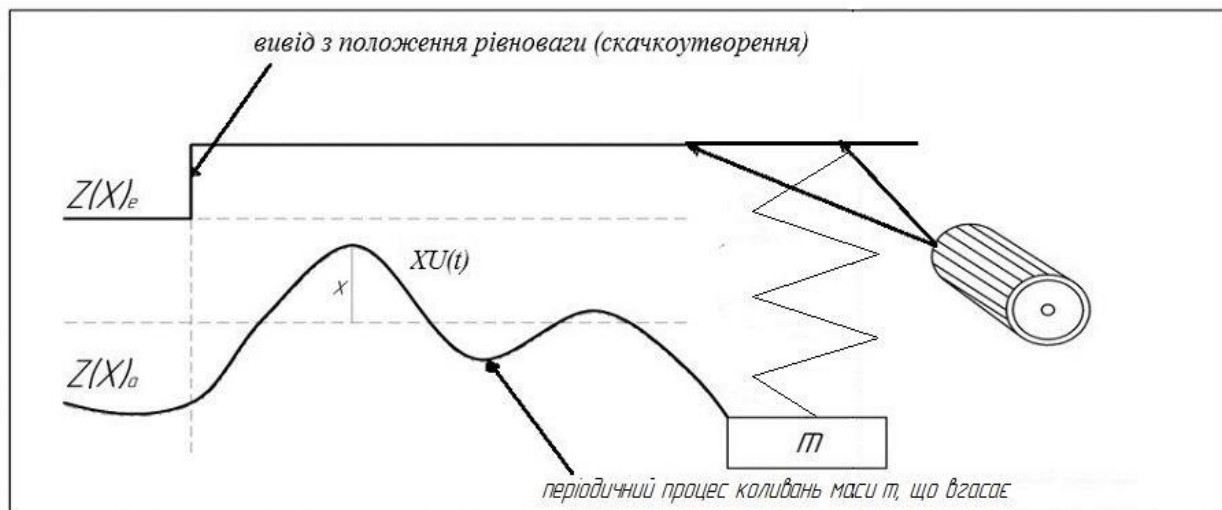


Рисунок 28 – Побудова перехідної функції

Комплексний спосіб можна відобразити у вигляді

$$X_e = e^{i \cdot \omega \cdot t}; X_a = V \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - \psi)} = V \cdot e^{-i \cdot \psi} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}, \quad (49)$$

де V – коефіцієнт посилення, який показує, у скільки разів амплітуда вихідних коливань більше або менше за амплітуду вхідних коливань;

ψ – зсув по фазі між вхідними та вихідними величинами.

$$F = \frac{X_a}{X_e} = V \cdot e^{-i \cdot \psi} \quad (50)$$

Введемо відношення вхідних і вихідних величин – комплекс коефіцієнтів підсилення коливальних систем або передавальної функції (рисунки 29-31).

Нехай A – амплітуда збурення, тоді F , а також V і $\psi = f(A)$, тобто

$$F = F(A; \omega); V = V(A; \omega); \psi = \psi(A; \omega), \quad (51)$$

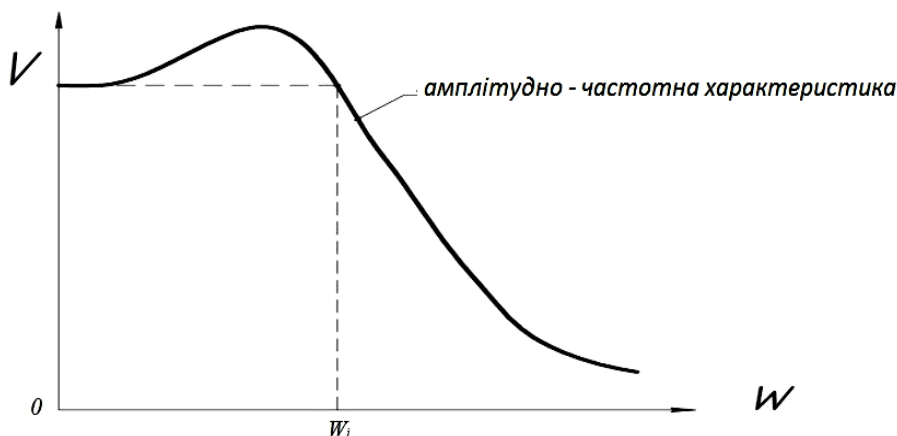


Рисунок 29 – Залежність амплітудно-частотної характеристики (АЧХ)

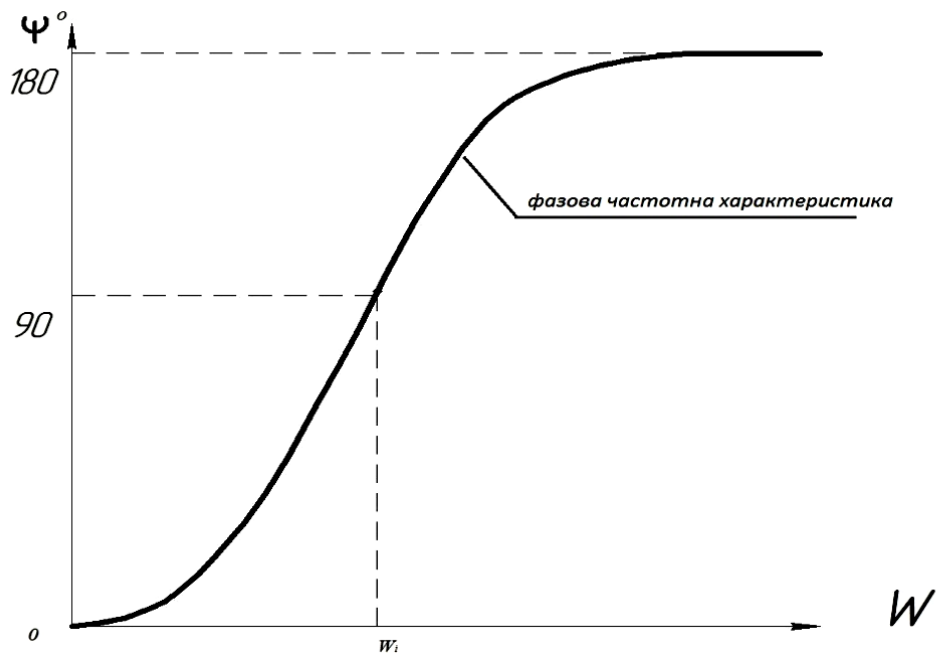


Рисунок 30 – Залежність фазово-частотної характеристики (ФЧХ)

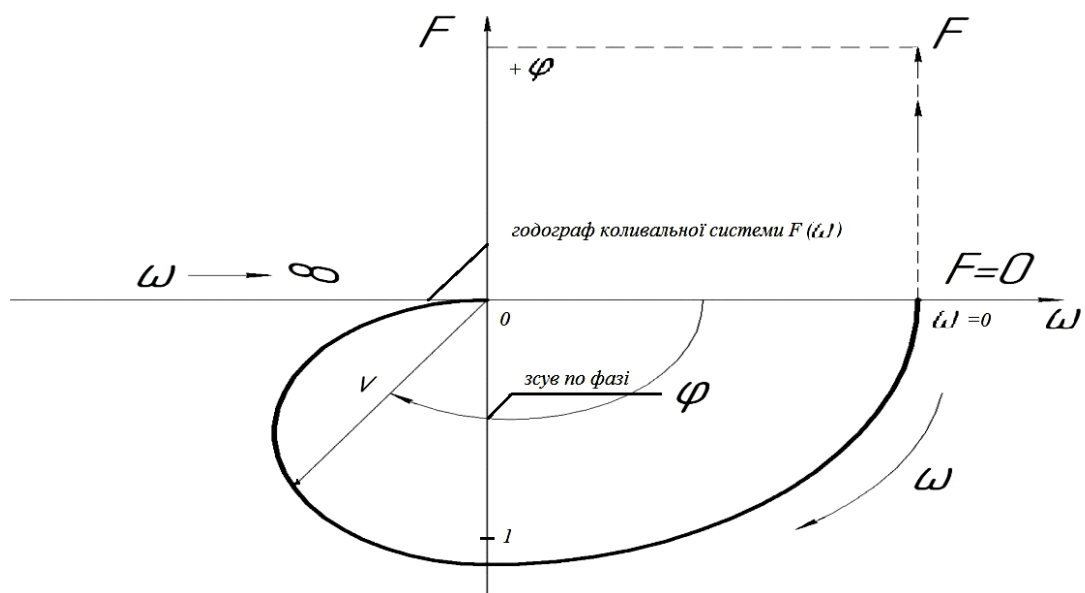


Рисунок 31 – Годограф $F(j\omega)$ амплітудно – фазової (комплексної) характеристики чи годограф коливальної системи

Перехідні процеси виникають при зміні режимів колювання. Наприклад, при русі транспортних засобів (при входженні вагона у криву, русі автомобіля по нерівностях) виникають власні поступові загасальні і періодичні вимушені колювання – це типовий перехід системи з одного режиму до іншого.

Він виникає лише в початковий момент входження транспортного засобу на ділянку з періодичною нерівністю. Якщо на коливальну систему діє періодичне зовнішнє збурення з частотою ω , то слід припустити, що вимушений рух відбуватиметься з тією самою частотою, а переміщення запишуться формулою

$$z(x) = x_0(z_0) * V * \cos(\eta * \tau - \psi), \quad (52)$$

де $\eta \sim \omega$, а $\tau \sim t$.

Комплексна функція може бути зображена у вигляді

$$e^i * (\varphi * t - \psi) = \cos(\eta * t - \psi). \quad (53)$$

Залежно від частоти зміщення, власної частоти і виду початкових умов можлива надзвичайно велика кількість типів коливань, наприклад:

1 Накладення вільних і вимушених коливань (рисунок 32) у разі $\omega \leq 1$. Початкові умови: $t=0$; $z = z' = 0$. Коли $V \approx \omega$, тоді виникають коливання биття, тобто періодичні зміни амплітуди коливань, що з'являються при складанні двох гармонійних коливань з близькими частотами.

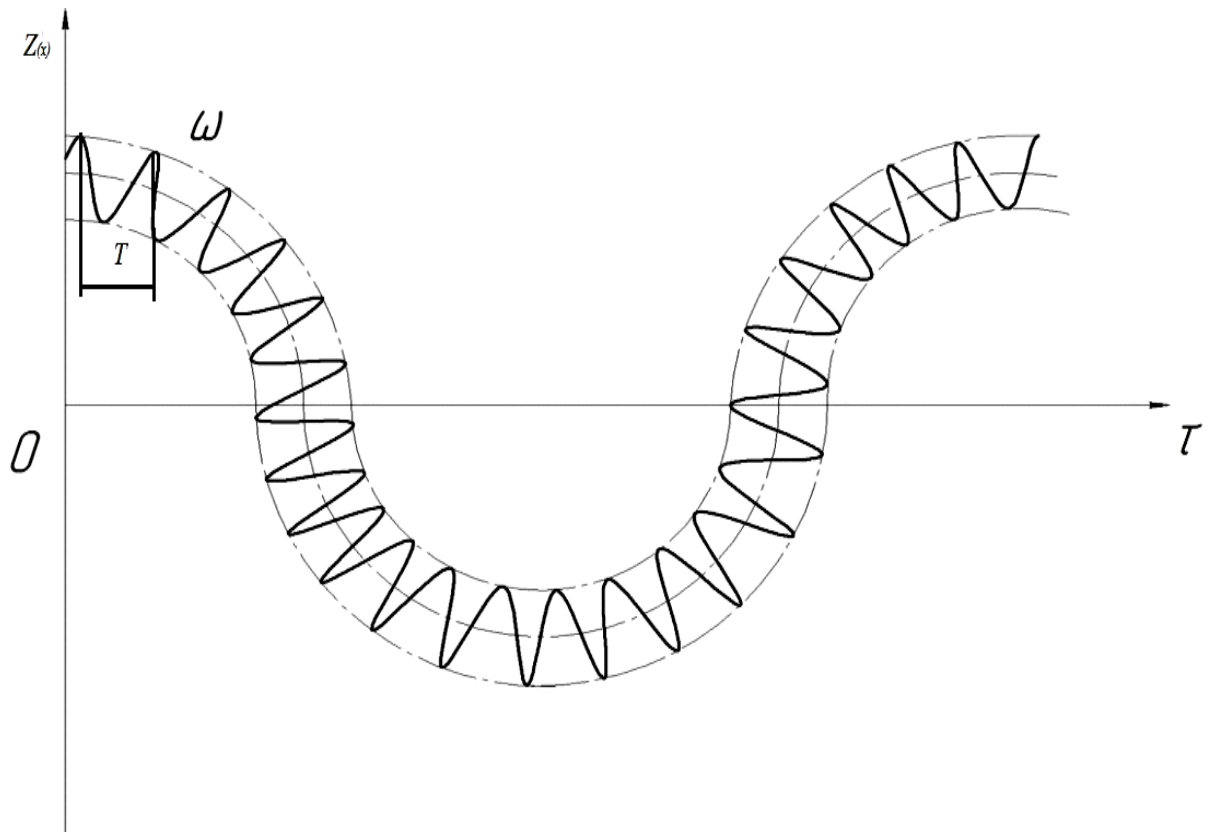


Рисунок 32 – Результуюча функція у разі $\omega \leq 1$

2 Накладення вільних і вимушених коливань (рисунок 33) у разі $\omega \geq 1$.

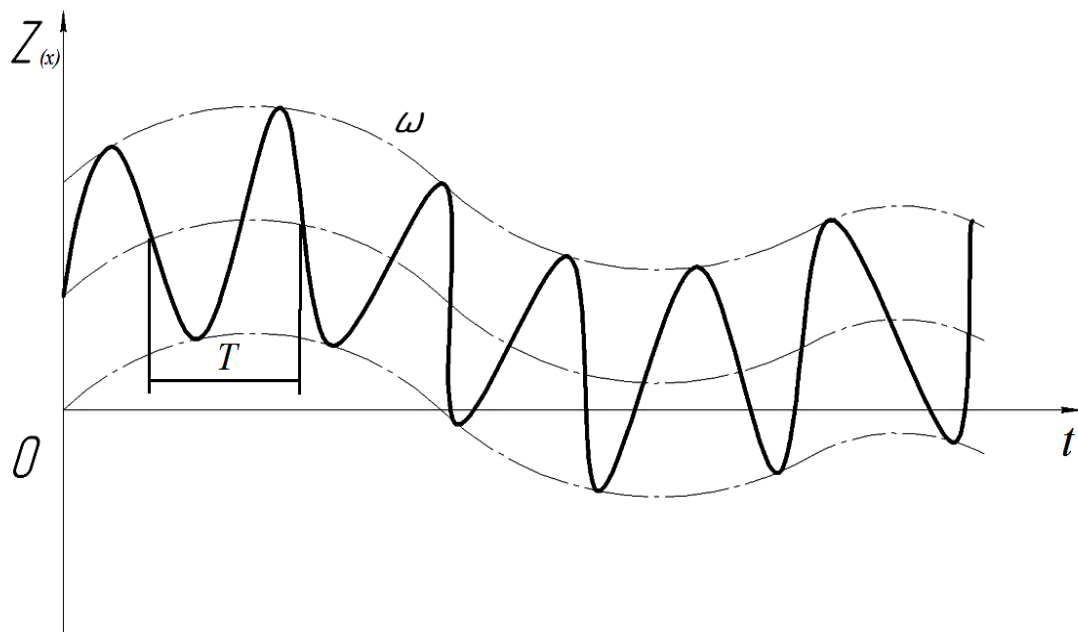


Рисунок 33 – Результуюча функція у разі $\omega \geq 1$

3 Накладення вільних коливань (рисунок 34) у разі $V \approx \omega$ (коливання типу биття).

$$\begin{cases} x_1 = A \cdot \cos(\omega t) ; \\ x_2 = A \cdot \cos(\omega + \Delta\omega) t \end{cases} \quad (54)$$

при $\Delta\omega \ll \omega$, тобто початкові фази = 0.

Результуюче переміщення при коливаннях має вигляд

$$X = (2A \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cdot \cos(\omega t) \quad \text{при} \quad \frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega. \quad (55)$$

Амплітуда биття буде така:

$$A_\delta = \left| 2A \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t \right| \quad (56)$$

період биття

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}; \quad \int \omega_\delta = \omega - V. \quad (57)$$

Характер коливань биття показано на рисунку 34.

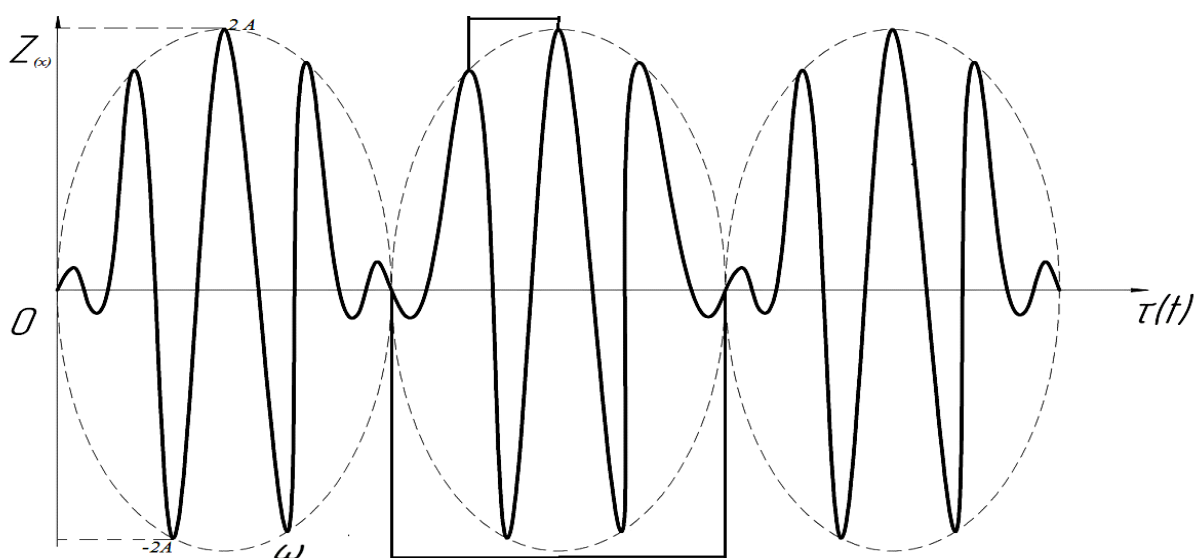


Рисунок 34 – Характер коливань биття

4 Особливий випадок переходу при резонансі (рисунок 35). Якщо є такі умови: $\eta = 1$, $w = v$, $\tau \rightarrow \infty$, $\tau = \frac{2\pi}{\omega - v}$, тоді переміщення запишуться вгору.

$z = \frac{z_0}{2} \tau \cdot \sin t$, отже $r = \frac{2\pi}{0}$, тобто необмежено зростає, що остаточно призведе до резонансного режиму і руйнування конструкції.

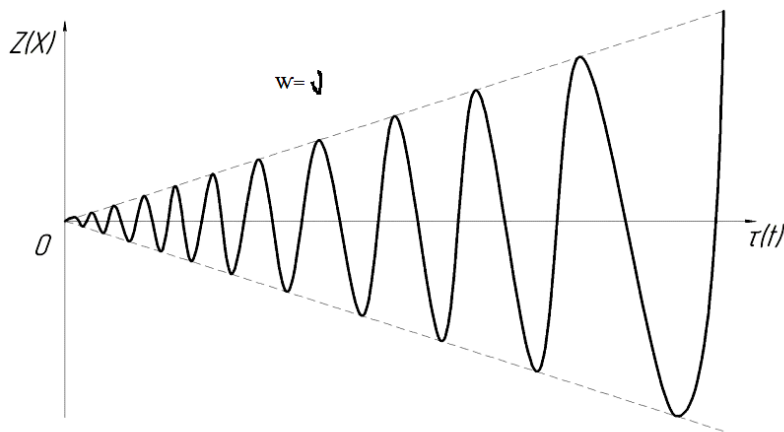


Рисунок 35 – Зростання амплітуди коливань при резонансі

Порівняємо рівняння (57) з $x'' + 2nx' + p^2x = 0$ л – рівнянням вільного коливання системи при лінійному опорі; $mx'' = -cx - k_1x'$ і припустимо, що $R_0 + k = k_1x'$ – ефективний коефіцієнт в'язкого тертя (рисунок 36).

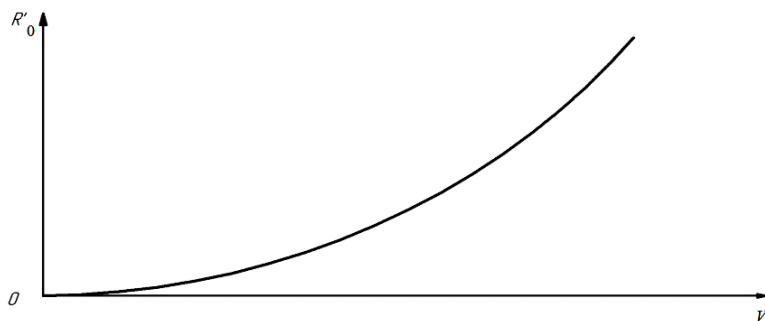


Рисунок 36 – Залежність R_0' від V

Якщо $R_0' + k > 0$, то $A \downarrow$ і коливання поступово загасають; якщо $R_0' + k < 0$, то $A \uparrow$ і коливання будуть зростати; якщо $R_0' + k = 0$, загасання зникає і зміщення руху являтимуть собою гармонійні коливання (рисунок 37).

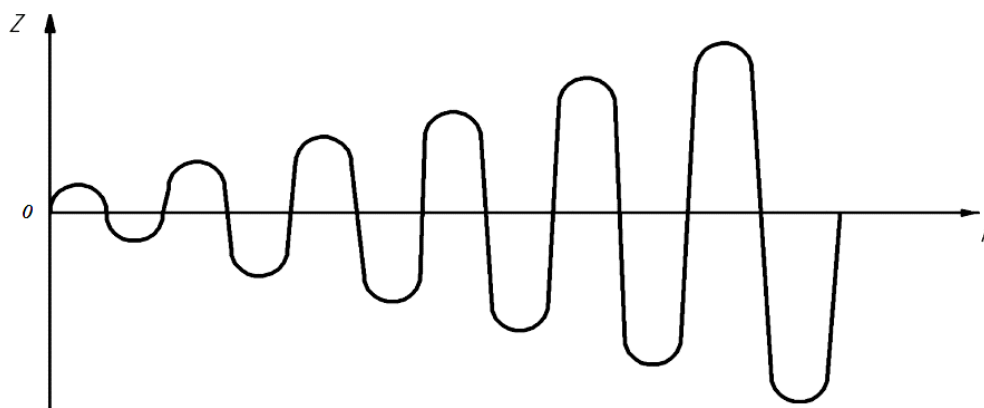


Рисунок 37 – Гармонійні коливання

Явище негативних загасань при негативному терті зрозуміти нескладно. Коли вантаж рухається вправо, тобто в бік руху стрічки, відносна швидкість $V_{\text{відн}} \downarrow, F_{\text{тр}} \uparrow$, а $\Delta F_{\text{тр}}$ буде спрямована вправо – у бік руху. В іншому інтервалі часу t , коли під дією жорсткості c , з пружини вантаж повертається вліво, $\Delta F_{\text{тр}}$ направлено так само вліво, тобто знову в сторону руху. Це і спричинить за собою зростання амплітуд коливань.

Енергія системи змінюється внаслідок роботи, яка здійснюється різними складовими сил тертя R . Лінійна – здійснює позитивну роботу (вносить енергію в систему), а нелінійна – становить досконалу негативну роботу (зменшує енергію системи).

При стаціонарних автоколиваннях приплив енергії компенсує її витрати (в середньому за один коливальний цикл) і система нібито консервативна (без розсіювання енергії). Амплітуда коливань виражається повністю власними властивостями системи і не залежить від початкових умов на відміну від амплітуди вільних коливань консервативної системи.

Залежно від характеру частот ν вони бувають слабо нелінійні, релаксаційні або розривні. Для виявлення параметрів частоти й амплітуди сталих автоколивань необхідний аналіз

відповідності нелінійної задачі. Хоча автоколивання відбуваються тільки при наявності зовнішнього збурення $P(t)$, але саме джерело вже не має коливальних властивостей. Тоді коливальний характер відбору енергії від джерела керує самим рухом системи (рисунок 38).

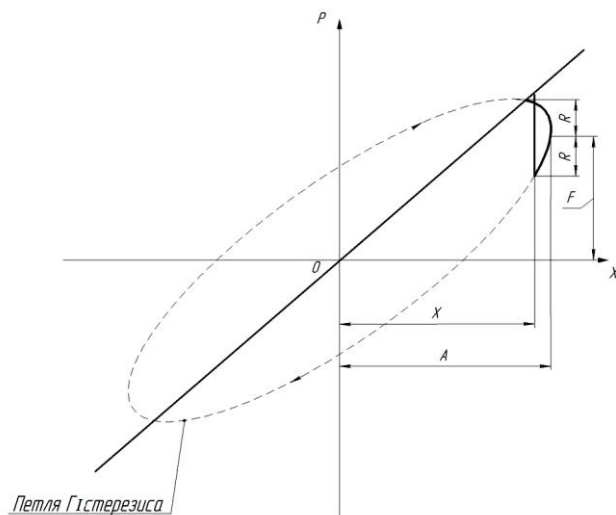


Рисунок 38 – Відображення гістерезисного явища

Повна сила опору P складається з лінійних складових F , що відповідають закону Гука і непружній складовій R , знак якої залежить від напрямку деформації («+» – при навантаженні «-» – при розвантаженні).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Дьомін Ю. В., Черняк Г. Ю. Основи динаміки вагонів. Київ : КУЕТТ, 2003. 270 с.
- 2 Лукин В. В., Анисимов П. С., Евдакимов Ю. П. Вагоны : учеб. для вузов ж.-д. трансп. Москва : Маршрут, 2004. 424 с.
- 3 Корнійчук М. П. Липовець Н. В. Шамрай Д. О. Технологія галузі і технічні засоби залізничного транспорту. Київ : Дельта, 2006. Ч. 1. 500 с.
- 4 Корнійчук М. П. Липовець Н. В. Шамрай Д. О. Технологія галузі і технічні засоби залізничного транспорту. Київ : Дельта, 2006. Ч. 2. 423 с.
- 5 Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху : підручник. Київ : Вища школа, 2004. 525 с.
- 6 Дьомін Ю. В. Залізнична техніка міжнародних транспортних систем (вантажні перевезення). Київ : Юніком-Прес, 2001. 342 с.
- 7 Вершинский С. В., Данилов В. Н., Хусидов В. Д. Динамика вагона : учеб. для вузов ж.-д. трансп. / под ред. С. В. Вершинского. Изд. 3-е, перераб. и доп. Москва : Транспорт, 1991. 360 с.
- 8 Циган Б. Г., Циган А. Б. Вагонобудівні конструкції (виготовлення, модернізація, ремонт) : підруч. Кременчук : Кременчук, 2005. Ч 1. 752 с.
- 9 Лукин В. В., Шадур Л. А., Котуранов В. Н. и др. Конструирование и расчет вагонов / под ред. В. В. Лукина. Москва : УМК МПС России, 2000. 731 с.
- 10 Візняк Р. І., Рибін А. В., Куденко І. А. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу : консп. лекцій. Харків : УкрДАЗТ, 2012. Ч. 1. 26 с.
- 11 Візняк Р. І., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу : метод. вказівки до виконання практичних занять та к/р для всіх форм навчання. Харків : УкрДУЗТ, 2017. 50 с.
- 12 Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу : консп. лекцій. Харків : УкрДУЗТ, 2014. Ч. 3. 42 с.

13 Візняк Р. І., Скуріхін Д. І. Журнал для лабораторних робіт з дисципліни «Динаміка вагонів» для студ. денної форми навчання. Харків : УкрДУЗТ, 2017. 35 с.