Український державний університет залізничного транспорту

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ. ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання окремих задач з дисципліни
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «ДИНАМІКА»

Харків 2015

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 29 січня 2015 р., протокол № 11.

Укладачі:

доц. К.В. Іванченко,
старш. викл. Л.В. Астахова

Рецензент

доц. Н.А. Аксьонова

ЗМІСТ

Вступ……4

1 Методичні рекомендації ……5

2 Кінетична енергія матеріальної точки та механічної системи ...6
2.1 Приклади визначення кінетичної енергії механічних систем ……...9

3 Робота сили ……14
3.1 Випадки визначення роботи сил ……...16

4 Теорема про зміну кінетичної енергії ..……...17

5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії при вивченні руху механічної системи ..……..18
5.1 Умови завдання ……..16
5.2 Рекомендації та приклад виконання завдання ……24

Список літератури ..…….34

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на I, II і III курсах дисципліни «Теоретична механіка». При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни головна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділу «Динаміка». Під час вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять і виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР). Основою РГР є розв'язання задач, пов'язаних з тематикою розділу.

Для розв’язання багатьох задач динаміки замість безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь руху більш ефективним є користування так званими загальними теоремами динаміки, як наслідками основного закону динаміки. Значення цих теорем полягає в тому, що вони встановлюють наочні залежності між відповідними динамічними характеристиками руху матеріальних тіл і таким чином дають можливість дослідити рух механічних систем, що широко застосовуються в інженерній практиці. Крім того, застосування цих теорем позбавляє від необхідності виконувати кожен раз ті операції інтегрування, які раз і назавжди проводяться при виведенні цих теорем, тим самим спрощуючи процес розрахунків. Одною з таких теорем є теорема про зміну кінетичної енергії. Враховуючи складність і різноманітність підходів до даної теми, доцільним є використання методичних вказівок.

Сказане вище зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок з розділу «Динаміка», які дають комплексне уявлення про обсяг і структуру питань, що виникають при застосуванні теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху механічної системи, про специфіку виконання і оформлення індивідуальних самостійних завдань, знайомлять з прикладами, наводять належні рекомендації та надають варіанти для виконання РГР, а також пропонують літературу для поглибленого вивчення.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного та механічного факультетів денної форми навчання всіх спеціальностей.

1 Методичні рекомендації

Програмою дисципліни «Теоретична механіка» передбачено виконання розрахунково-графічних робіт з розділу «Динаміка».

Зміст РГР, а саме номери варіантів, уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожне завдання супроводжується рисунками і таблицею (номери схем збігаються з тим самим номером, що і умова завдання в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. Типові звіти до РГР оформлюються відповідно до встановлених вимог, а саме обов'язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання завдань повинно супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання завдань повинні бути виконані акуратно з застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх величин, що використовуються: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають всім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 Кінетична енергія матеріальної точки та механічної системи

Кінетична енергія – це здатність тіла долати перешкоди під час руху.

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина Т, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій всіх точок системи:

$$T = \sum_{n=1}^{k} \frac{m_n V_n^2}{2}.$$

Кінетична енергія:

1) характеризує і поступальний і обертальний рухи;

2) не залежить від напрямку руху точок системи і не характеризує зміну цих напрямків;

3) характеризує дію і внутрішніх і зовнішніх сил.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій складових тіл системи:

$$T = \sum_{n=1}^{k} T_n.$$

Теорема Кьоніга (про кінетичну енергію системи)

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас системи, маса якого дорівнює масі системи, і кінетичної енергії системи в її відносному русі відносно центра мас:

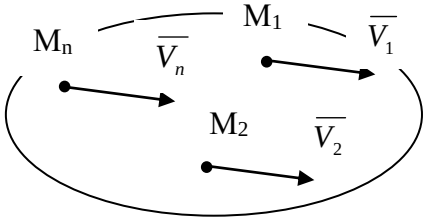
$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \sum_{n=1}^{k} \frac{m_n V_{nr}^2}{2},$$

де V_{nr} - відносна швидкість точки.

Кінетична енергія **залежить** від виду руху тіл системи.

Визначення кінетичної енергії твердого тіла при поступальному, обертальному та плоскому рухах

1 Поступальний рух



При поступальному русі тіла швидкості всіх точок у кожний момент часу геометрично рівні (рисунок 1).

Рисунок 1

Кінетична енергія поступального руху

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Мірою інертності тіла при поступальному русі є **маса**.

2 Обертальний рух

Швидкість точки М тіла при обертанні навколо нерухомої осі дорівнює

$$V_M = \omega \cdot R_M,$$

де R_M - відстань від точки М до осі обертання;

ω - кутова швидкість тіла (рисунок 2).

Кінетична енергія обертального руху тіла дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості:

$$T = \frac{J_Z \cdot \omega^2}{2}.$$

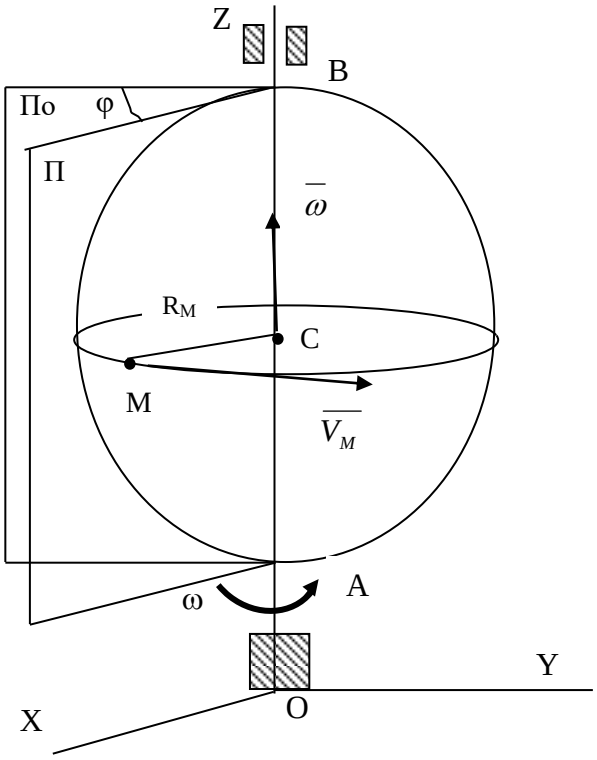


Рисунок 2

Кінетична енергія тіла від напрямку обертання тіла не залежить.

Мірою інертності тіла при обертальному русі **є момент інерції** J_z.

3 Плоскопаралельний рух

Кінетична енергія плоскопаралельного руху тіла

$$T = \frac{M \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi} \cdot \omega^2}{2},$$

де $\frac{M \cdot V_C^2}{2}$ – кінетична енергія тіла в поступальному русі разом з центром мас;

$\frac{J_{C\xi} \cdot \omega^2}{2}$ – кінетична енергія в обертанні тіла навколо рухомої осі $C\xi$, яка проходить через центр мас;

$C\xi$ – вісь, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до базової площини;

M – маса системи;

V_C – швидкість центра мас;

$J_{C\xi}$ – момент інерції тіла відносно осі $C\xi$;

ω – кутова швидкість обертання навколо осі $C\xi$ (рисунок 3).

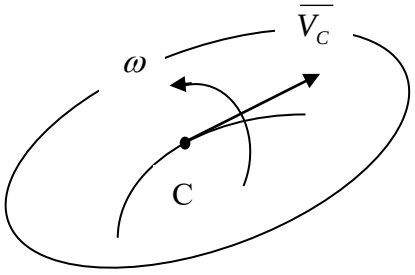


Рисунок 3

2.1 Приклади визначення кінетичної енергії механічних систем

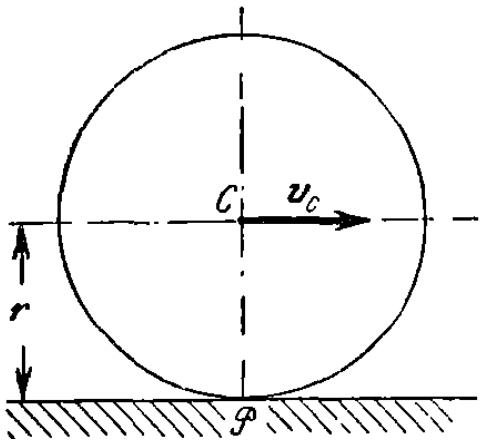


Рисунок 4

Приклад 1

Визначити кінетичну енергію колеса (рисунок 4), що котиться без ковзання вздовж прямолінійної рійки, якщо відомі вага колеса та швидкість його центра мас. Колесо вважати суцільним однорідним диском.

Розв'язання

Оскільки колесо здійснює плоскопаралельний рух, то його кінетичну енергію можна визначити за формулою

$$T = \frac{1}{2} M \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C\xi} \cdot \omega^2 .$$

Враховуючи, що маса колеса $M = \frac{P}{g}$, момент інерції диска відносно осі C, що проходить через центр мас C перпендикулярно до базової площини, дорівнює

$$J_{C\xi} = \frac{\mathrm{Pr}^2}{2g},$$

де r – це радіус колеса.

Відповідно

$$T = \frac{1}{2}\frac{P \cdot V_C^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Pr}^2 \cdot \omega^2}{2g}.$$

При коченні колеса без ковзання миттєвий центр швидкостей розташований у точці дотику колеса та рейки, і за відомою з кінематики формулою $V_C = \omega \cdot r$, формула кінетичної енергії набуває вигляду

$$T = \frac{1}{2}\frac{P \cdot V_C^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{P \cdot r^2 \cdot V_C{}^2}{2g \cdot r^2} = \frac{3}{4}\frac{P \cdot V_C^2}{g}.$$

Приклад 2

Вантаж *1* вагою *P*, що спускається вздовж нахиленої площини вниз зі швидкістю $\bar{V}$ приводить до руху барабан *2* вагою Q за допомогою мотузки, яка намотана на нього. Барабан вважати однорідним круглим циліндром. Масою мотузки знехтувати.

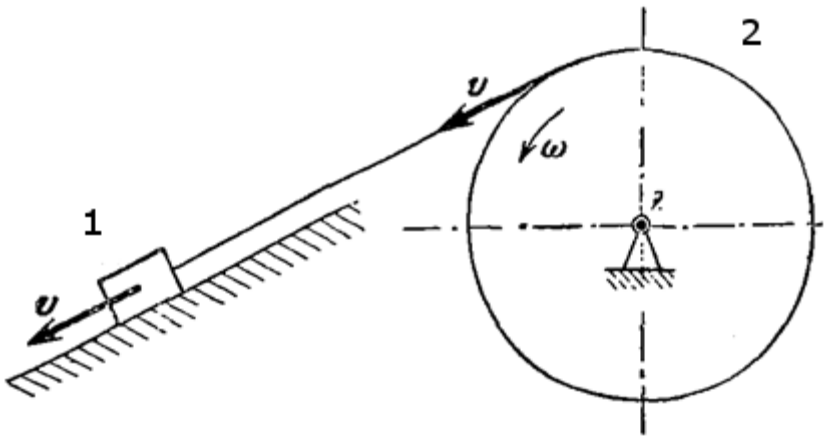


Рисунок 5

Визначити кінетичну енергію системи, виразивши її через швидкість тіла *1*.

Розв'язання

Система складається з двох тіл: вантажу *1* і барабана *2*. Відповідно кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій вантажу $T^{(1)}$ і барабана $T^{(2)}$:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}.$$

Кінетична енергія вантажу, що рухається поступально, визначається за формулою

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot V_1^2.$$

Кінетична енергія барабана, що обертається навколо нерухомої осі z, що перпендикулярна до площини рисунка, знаходиться за формулою

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} J_Z \cdot \omega_2^{\,2},$$

де J_Z – момент інерції барабану відносно осі обертання;

ω_2 – кутова швидкість обертання барабана.

Барабан вважаємо однорідним суцільним круглим циліндром, тоді

$$J_Z = \frac{1}{2} M \cdot r^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \cdot r^2,$$

де r – радіус барабану.

Враховуючи, що швидкість точки на ободі барабана дорівнює швидкості вантажу, отримаємо

$$V_1 = \omega_2 \cdot r$$

і відповідно

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{Q}{2g} \cdot r^2 \cdot \frac{V_1^{\,2}}{r^2} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} V_1^2.$$

Після підстановки значень $T^{(1)}$ і $T^{(2)}$ у формулу для визначення кінетичної енергії системи отримаємо

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot V_1^{\,2} + \frac{1}{4} \frac{Q}{g} V_1^{\,2} = \frac{2P + Q}{4g} V_1^{\,2}.$$

Приклад 3

Визначити кінетичну енергію механізму, зображеного на рисунку 6. Колесо 2 вагою P і радіуса r знаходиться у внутрішньому зачепленні з нерухомим колесом 1, радіус якого дорівнює $R=3r$. Колесо 2 приводить до руху кривошип OC вагою Q, який обертається навколо нерухомої осі O, що перпендикулярна до площини рисунка, з постійною кутовою швидкістю ω_0.

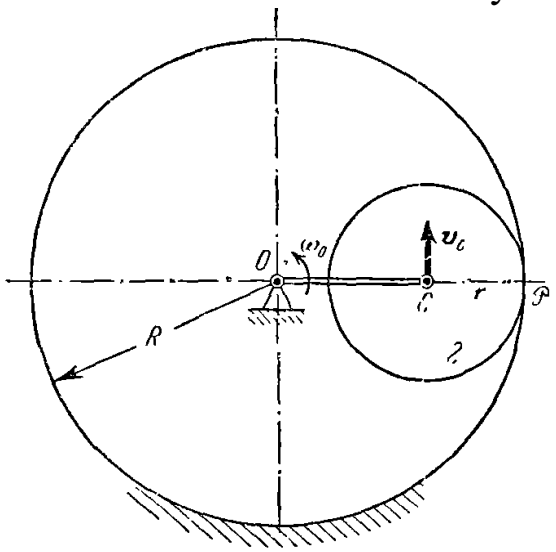


Рисунок 6

Колесо 2 вважати суцільним однорідним диском, а кривошип OC – тонким однорідним стрижнем. Кінетичну енергію виразити через кутову швидкість ω_0 кривошипа OC.

Розв'язання

До системи, що розглядається, входить три тіла: колесо 1, колесо 2 та кривошип OC. Тому кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)},$$

де $T^{(1)}$ - кінетична енергія колеса 1;

$T^{(2)}$ - кінетична енергія колеса 2;

$T^{(3)}$ - кінетична енергія кривошипа OC.

Колесо 1 нерухоме, відповідно

$$T^{(1)} = 0.$$

Колесо 2 здійснює плоскопаралельний рух. Його кінетична енергія буде

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C\xi} \cdot \omega_2{}^2 .$$

Довжина кривошипа дорівнює $OC = OP - CP = R - r = 3r - r = 2r$. Відповідно

$$V_C = \omega_0 \cdot OC = 2 \cdot \omega_0 \cdot r .$$

Кутову швидкість колеса 2 визначимо, врахувавши, що точка P є миттєвим центром швидкостей (оскільки відбувається кочення без ковзання), тоді $V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega_2 \cdot r$, звідки

$$\omega_2 = \frac{V_C}{r} = 2 \cdot \omega_0 .$$

Оскільки колесо 2 є однорідним суцільним круглим диском, то його момент інерції відносно осі $C\xi$ дорівнює

$$J_{C\xi} = \frac{P \cdot r^2}{2g} .$$

Остаточно отримаємо кінетичну енергію колеса 2:

$$T^{(2)} = 3\frac{P}{g} r^2 \cdot \omega_0{}^2 .$$

Кривошип OC обертається навколо нерухомої осі O, яка перпендикулярна до площини рисунка. Тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega_0{}^2 .$$

Оскільки кривошип OC є однорідним тонким стрижнем, то

$$J_0 = \frac{Q}{3g} \cdot \left(OC\right)^2 = \frac{4Q}{3g} \cdot r^2$$

і відповідно

$$T^{(3)} = \frac{2}{3} \frac{Q}{g} r^2 \cdot \omega_0{}^2 .$$

Після підстановки знайдемо кінетичну енергію механізму:

$$T = \frac{9P + 2Q}{3g} r^2 \cdot \omega_0^2 .$$

3 Робота сили

Робота сили характеризує дію сили на тіло при деякому переміщенні та визначає *зміну модуля швидкості* рухомої точки.

Елементарна робота сили

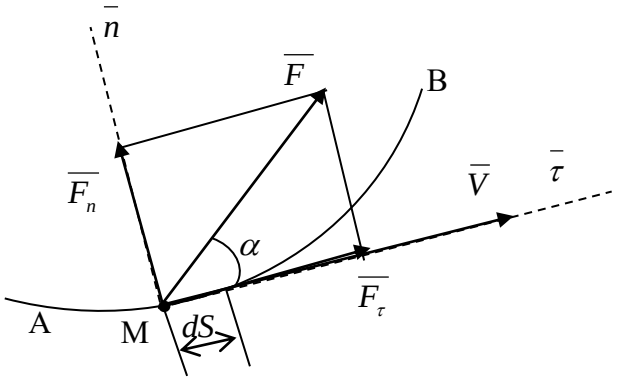


Рисунок 7

Матеріальна точка М маси m рухається вздовж траєкторії під дією сили $\bar{F}$. Швидкість точки $\bar{V}$ (рисунок 7).

Елементарне переміщення точки під дією даної сили - ds (нескінченно мале $ds \to 0$).

Елементарна робота сили визначається як скалярна величина dA, яка дорівнює добутку проекції сили F_τ на дотичну до траєкторії, спрямовану в напрямку руху точки, на нескінченно мале переміщення ds точки, спрямоване вздовж цієї дотичної.

$$dA = F_\tau \cdot ds .$$

$F_\tau = F \cdot \cos\alpha$ - проекція сили $\bar{F}$ на вектор переміщення та швидкості. Надає точці дотичне прискорення та відповідає за зміну модуля швидкості.

$F_n = F \cdot \sin\alpha$ - проекція сили $\bar{F}$ на вектор внутрішньої нормалі до траєкторії. Надає точці нормальне прискорення та відповідає за зміну напрямку вектора швидкості або при невільному русі змінює тиск на зв'язок.

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos\alpha .$$

Якщо кут α гострий, роботи сили - додатна ($\alpha = 0^\circ$, $dA = F \cdot ds$).

Якщо кут α тупий, роботи сили - від'ємна ($\alpha = 180^\circ$, $dA = -F \cdot ds$).

При $\alpha = 90^\circ$, тобто $\overline{F} \perp ds$, робота дорівнює нулю $dA = 0$.

Аналітичний вираз елементарної роботи:

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz,$$

де F_X, F_Y, F_Z - проекції сили на осі координат;

dx, dy, dz - елементарні переміщення відносно координатних осей.

Робота сили на кінцевому переміщенні M_1M_0 дорівнює інтегралу вздовж цього переміщення від елементарної роботи.(рисунок 8)

$$A_{(M_1M_0)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds = \int_{M_0}^{M_1} F \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

або

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_X dx + F_Y dy + F_Z dz).$$

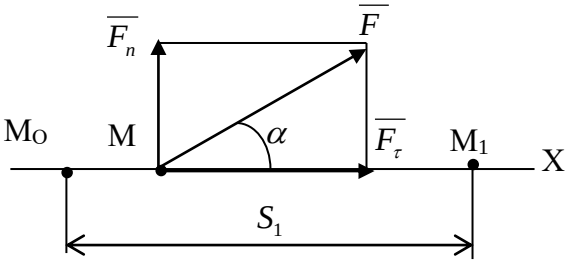


Рисунок 8

Якщо сила $\overline{F} = const$, а точка, до якої сила прикладена, рухається прямолінійно, тоді

$$F_\tau = F \cdot \cos\alpha = const$$

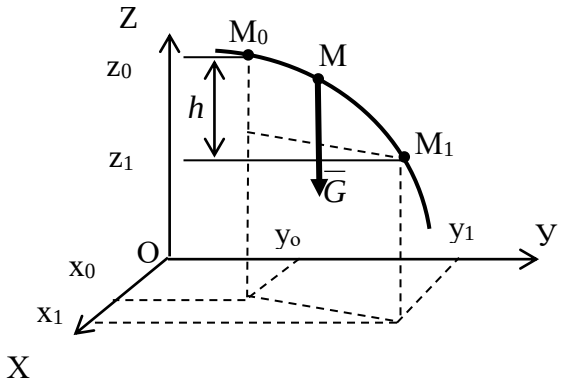
і робота сили дорівнює

$$A_{(M_1M_0)} = F \cdot s_1 \cdot \cos\alpha.$$

Одиницею вимірювання роботи сили і кінетичної енергії є 1 Дж.

3.1 Випадки визначення роботи сил

1 Робота сили ваги



Робота сили $\overline{G} = \overline{mg}$ на вертикальному переміщенні h (рисунок 9)

$$A = \pm mgh.$$

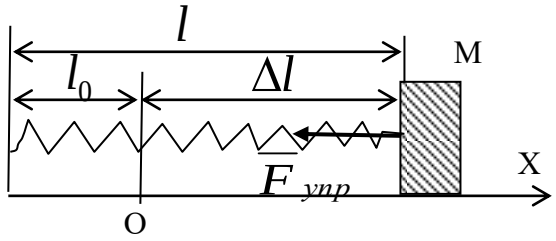
Знак (+) застосовується, якщо тіло спускається, а (-) – якщо тіло піднімається.

Рисунок 9

2 Робота сили пружності

Робота сили пружності на переміщенні, яке залежить від положення (довжини) пружини (рисунок 10),

$$A = \frac{c}{2}(\Delta l_n^2 - \Delta l_к^2).$$



l - довжина недеформованої пружини,

l_O - довжина деформованої пружини,

с – коефіцієнт пружності.

Рисунок 10

3 Робота сили тертя

Якщо величина тертя постійна, то робота сили тертя (рисунок 11)

$$A = -F_{тр} \cdot s,$$

де S - переміщення, що дорівнює довжині дуги M_0M_1.

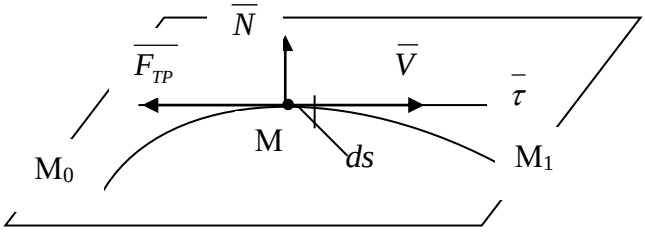


Рисунок 11

Сила тертя $\overline{F_{mp}} = f \cdot \overline{N}$,

де f – коефіцієнт тертя;

$\overline{N}$ – сила нормальної реакції поверхні.

4 Робота сил, прикладених до тіла, що обертається

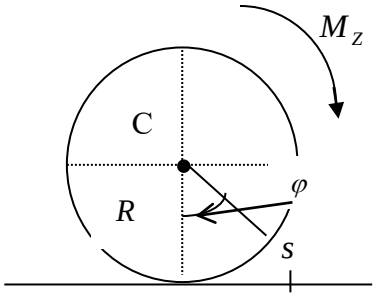


Рисунок 12

$$A = -M_Z \cdot \varphi,$$

де M_Z – момент обертання (момент опору) тіла навколо осі OZ, яка проходить через центр мас, $M_Z = N \cdot \delta$;

δ – коефіцієнт тертя кочення;

$\varphi = \dfrac{s}{R}$ - кутове переміщення тіла,

де s – лінійне переміщення.

4 Теорема про зміну кінетичної енергії

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх діючих на точку сил на тому самому переміщенні:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_OM_1)}.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт внутрішніх і зовнішніх сил, діючих на матеріальні точки системи на тому самому переміщенні:

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e + \sum_{n=1}^{k} A_n^i .$$

Теорема про зміну кінетичної енергії незмінної механічної системи

Зміна кінетичної енергії незмінної системи на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх сил, діючих на точки системи на тому самому переміщенні:

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e .$$

5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії при вивченні руху механічної системи

5.1 Умови завдання

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатись із стану спокою. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) та опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29) (рисунки 13-15), нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у той момент, коли пройдений ними шлях стане рівним s.

У завданні прийнято такі позначення:

m_1, m_2, m_3, m_4 - маси тіл 1, 2, 3, 4;

R_2, r_2, R_3, r_3 - радіуси великих і малих кіл (коліс);

i_{2x}, $i_{3\xi}$ - радіуси інерції тіл 2 і 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через їхні центри ваги;

α, β - кути нахилу площин до горизонту;

f - коефіцієнт тертя ковзання;

δ - коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані наведено в таблиці 1. Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не вказано, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі відрізки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

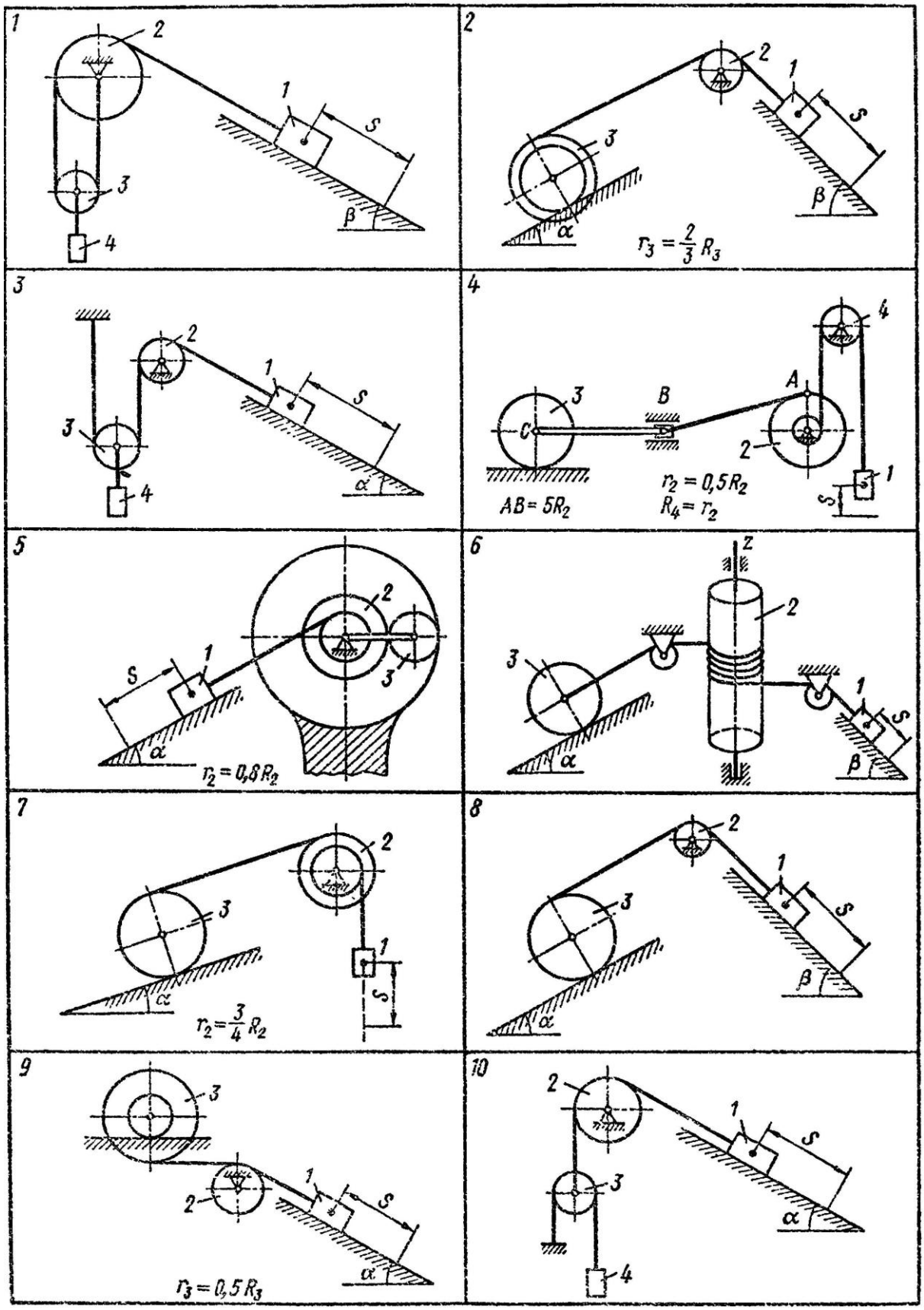

1
2
1
S
3
β
4
2
2
1
S
3
α
β
$r_3 = \frac{2}{3} R_3$
3
2
1
S
3
α
4
4
4
A
B
3
C
2
1
S
$AB = 5R_2$
$r_2 = 0{,}5R_2$
$R_4 = r_2$
5
2
1
S
3
α
$r_2 = 0{,}8R_2$
6
z
2
3
1
S
α
β
7
2
3
1
S
α
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
8
2
1
S
3
β
α
9
3
2
1
S
α
$r_3 = 0{,}5R_3$
10
2
1
S
3
α
4

Рисунок 13

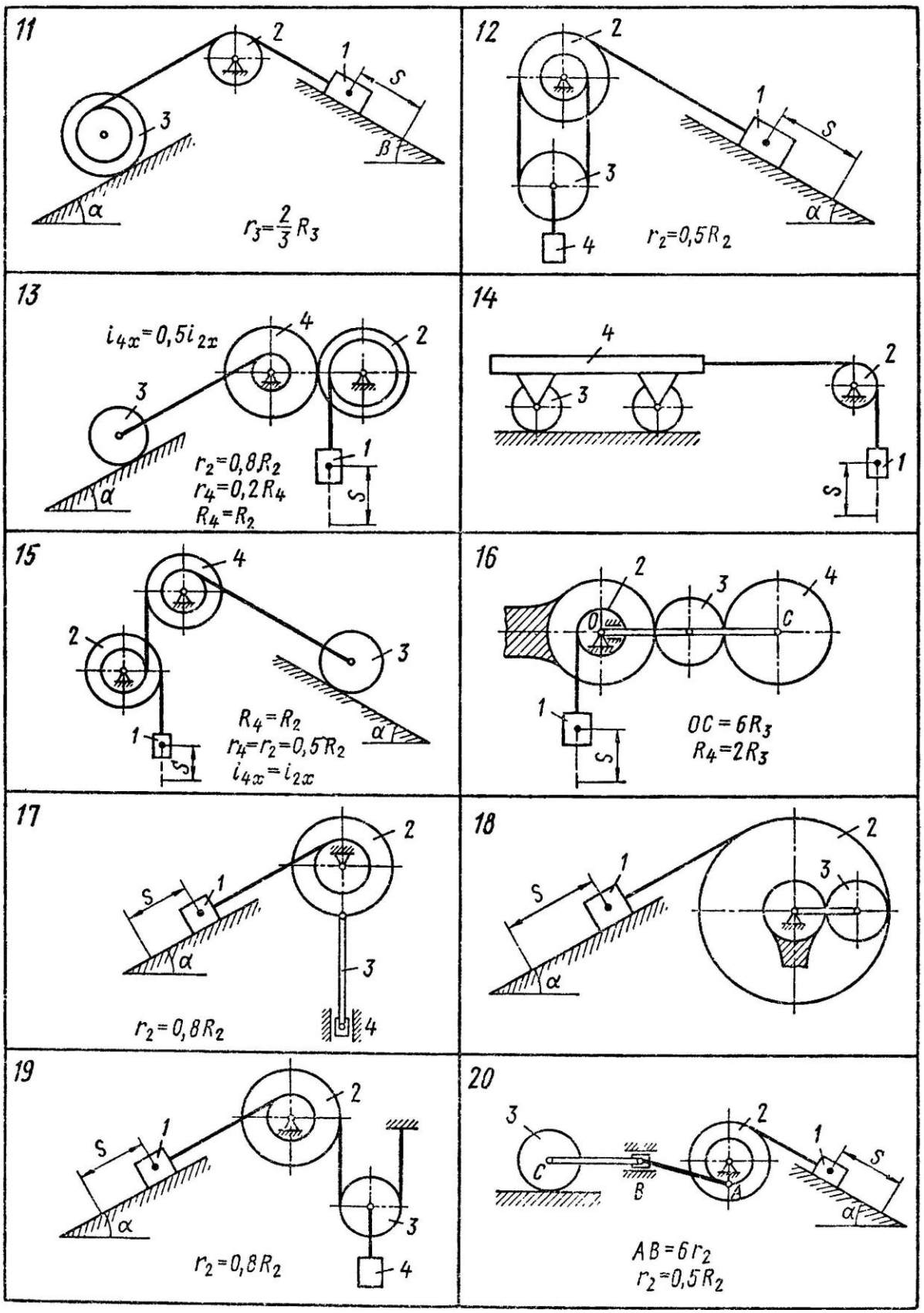

11
$r_3=\frac{2}{3}R_3$
12
$r_2=0,5R_2$
13
$i_{4x}=0,5i_{2x}$
$r_2=0,8R_2$
$r_4=0,2R_4$
$R_4=R_2$
14
15
$R_4=R_2$
$r_4=r_2=0,5R_2$
$i_{4x}=i_{2x}$
16
$OC=6R_3$
$R_4=2R_3$
17
$r_2=0,8R_2$
18
19
$r_2=0,8R_2$
20
$AB=6r_2$
$r_2=0,5R_2$

Рисунок 14

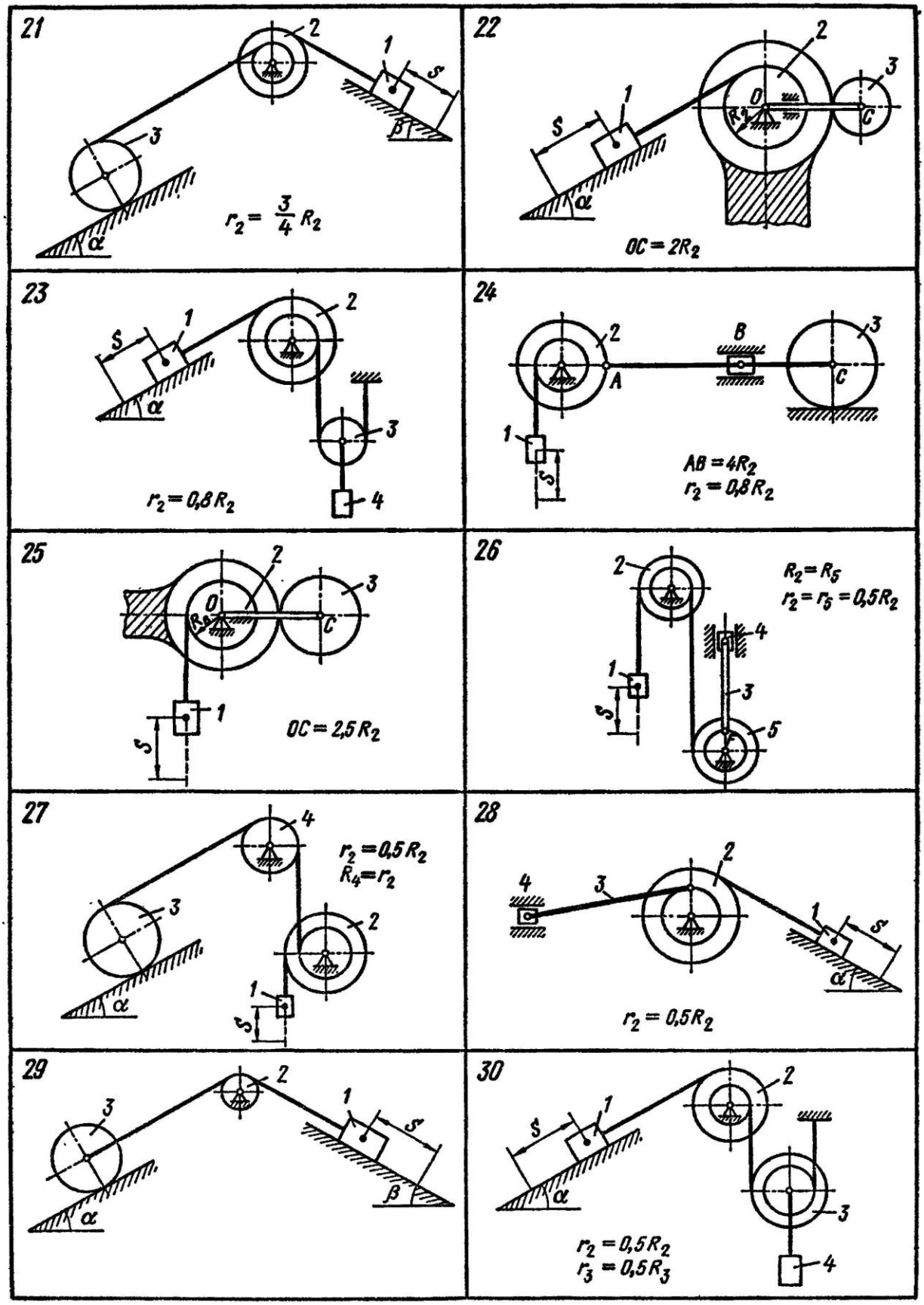

21
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
22
$OC = 2R_2$
23
$r_2 = 0{,}8 R_2$
24
$AB = 4R_2$
$r_2 = 0{,}8 R_2$
25
$OC = 2{,}5 R_2$
26
$R_2 = R_5$
$r_2 = r_5 = 0{,}5 R_2$
27
$r_2 = 0{,}5 R_2$
$R_4 = r_2$
28
$r_2 = 0{,}5 R_2$
29
30
$r_2 = 0{,}5 R_2$
$r_3 = 0{,}5 R_3$

Рисунок 15

5.2 Рекомендації та приклад виконання завдання

Механічна система під дією сил тяжіння починає рух зі стану спокою. Початкове положення системи вказано на рисунку 16.

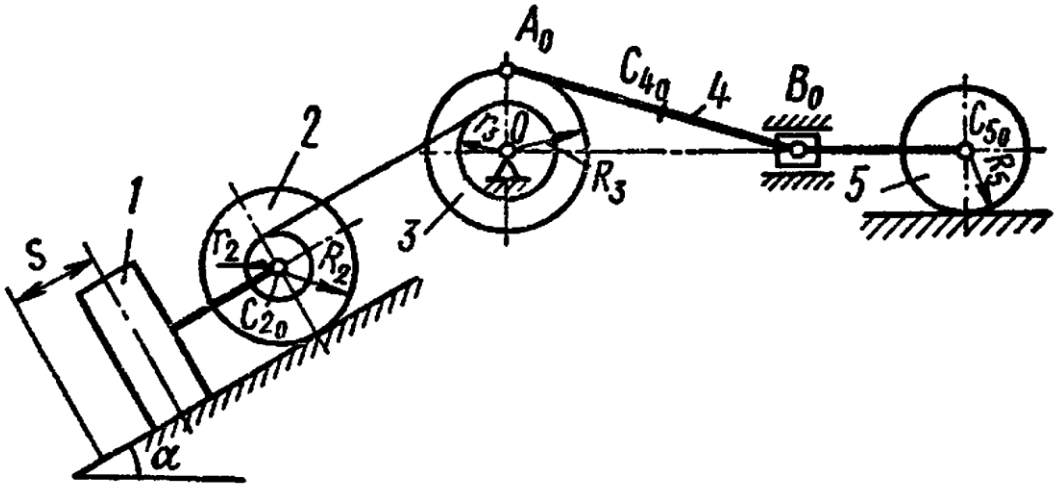


Рисунок 16

Дано: m_1 - маса вантажу *1*, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0{,}5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12\ см$, $r_2 = 0{,}5R_2$, $r_3 = 0{,}75R_3$, $R_5 = 20\ см$, $AB = l = 4R_3$, $i_{2\xi} = 8\ см$, $i_{3x} = 10\ см$, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0{,}1$, $\delta = 0{,}2\ см$, $s = 0{,}06\pi\ м$. Опір коченню тіла *2* не враховувати. Шатун *4* вважати тонким однорідним стрижнем; каток *5* – однорідний суцільний циліндр. Масами ланки BC_5 та повзуна *B* знехтувати. На рисунку 16 вказано механічну систему в початковому положенні.

Визначити: V_1 - швидкість вантажу *1* в кінцевому положенні.

Розв'язання

1 Зобразити на рисунку всі зовнішні та внутрішні сили системи (у випадку незмінної механічної системи – лише зовнішні сили).

2 Визначити суму робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил (у випадку незмінної механічної системи – суму робіт лише зовнішніх сил).

3 Визначити кінетичну енергію системи матеріальних точок у початковому та кінцевому положенні (якщо система

починає рух зі стану спокою – початкова кінетична енергія дорівнює нулю).

4 Записати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи та визначити потрібну величину.

Використаємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum_k A_k^E + \sum_k A_k^I ,$$

де T_0 та T - кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях;

$\sum_k A_k^E$ - сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи на переміщенні системи з початкового положення в кінцеве;

$\sum_k A_k^I$ - сума робіт внутрішніх сил системи на тому самому переміщенні.

Для систем, що розглядаються, які складаються з абсолютно твердих тіл, що з'єднані між собою нерозтяжними нитками і стрижнями, $\sum_k A_k^I = 0$.

Оскільки в початковому положенні система знаходиться у стані спокою, відповідно $T_0 = 0$.

Тоді рівняння має вигляд

$$T = \sum_k A_k^E ,$$

Для визначення кінетичної енергії та суми робіт зовнішніх сил необхідно зобразити систему в кінцевому положенні (рисунок 17).

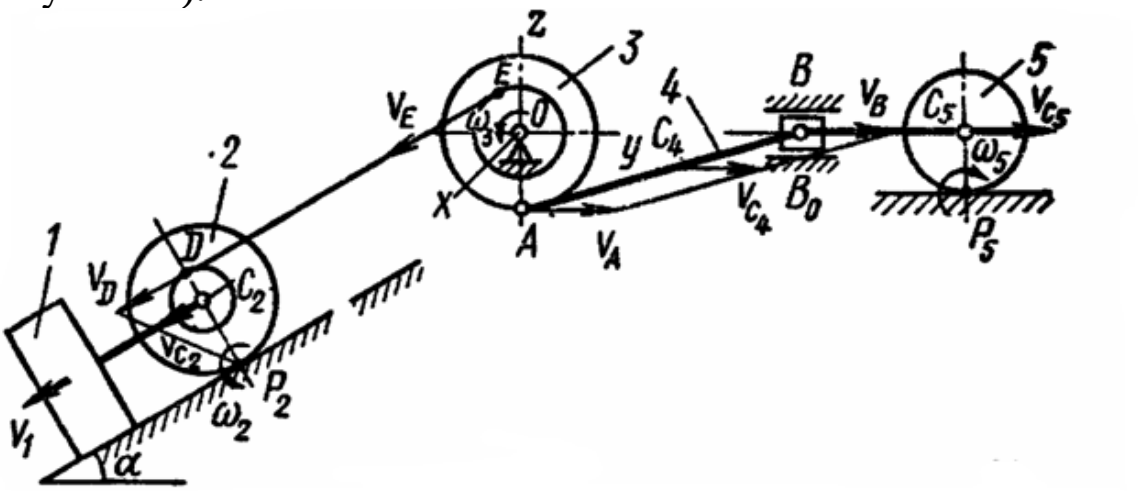


Рисунок 17

Запишемо кінематичні відношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, тобто рівняння зв’язків, при цьому швидкості та переміщення виразимо відповідно через швидкість і переміщення вантажу 1.

Швидкість центра мас *C* котка *2* дорівнює швидкості вантажу *1*:

$$V_{C2} = V_1 .$$

Кутова швидкість котка *2*, миттєвий центр швидкостей якого знаходиться в точці P_2 (точці дотику котка та нерухомої поверхні),

$$\omega_2 = \frac{V_{C2}}{C_2 P_2} .$$

Отримаємо

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} .$$

Швидкість точки *D* котка *2*

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 ,$$

тобто

$$V_D = \frac{V_1}{R_2} \cdot (R_2 + r_2) .$$

Швидкість точки *E* блока *3* дорівнює швидкості точки *D* котка *2*:

$$V_E = V_D .$$

Але $V_E = \omega_3 r_3$.

Відповідно,

$$\omega_3 r_3 = \frac{V_1}{R_2} \cdot (R_2 + r_2) .$$

Оскільки

$$R_2 = 2r_2,$$

то $\omega_3 r_3 = \frac{3}{2} \cdot V_1$, звідки

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_1}{r_3}.$$

Замінивши

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, V_1 = \frac{ds}{dt},$$

отримаємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \cdot \frac{ds}{dt}$$

або $d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} \cdot ds$.

Після інтегрування (при нульових початкових умовах)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} \cdot s.$$

Коли вантаж *1* пройде шлях $s = 0,06\pi$, блок *3* повернеться на кут φ_3:

$$\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} \cdot s = \frac{3}{2} \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При цьому повороті блока *3* на 180° його точка A_0 перейде в кінцеве положення *A*, а шатун *4* з початкового положення A_0B_0 перейде в кінцеве положення AB.

Каток *5* переміститься вліво при повороті блока *3* на кут $\frac{\pi}{2}$ та вправо при повороті блока ще на $\frac{\pi}{2}$; відповідно кінцеве положення котка співпадає з його початковим положенням.

Таким чином, визначено кінцеве положення усієї системи (рисунок 17).

Визначимо кінетичну енергію системи в кінцевому положення як суму кінетичних енергій тіл *1, 2, 3, 4, 5*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 .$$

Кінетична енергія вантажу *1*, що рухається поступально,

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} .$$

Кінетична енергія котка *2*, який здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi}\omega_2^2}{2},$$

де $J_{2\xi}$ - момент інерції котка *2* відносно його повздовжньої осі $C_{2\xi}$,

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2 .$$

Тоді отримаємо

$$T_2 = \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} V_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) V_1^2 .$$

Кінетична енергія тіла *3*, що обертається навколо осі *Ox*,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x}\omega_3^2 ,$$

де J_{3x} - момент інерції блоку *3* відносно осі Ox,

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2 .$$

Отримаємо

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 i_{3x}^2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{V_1}{r_3}\right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} V_1^2 .$$

Кінетична енергія шатуна *4*, який здійснює плоский рух,

$$T_4 = \frac{m_4 V_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi}\omega_4^2}{2},$$

де V_{C4} - швидкість центра мас C_4 шатуна *4*;

ω_4 - кутова швидкість шатуна *4*;

$J_{4\xi}$ - момент інерції шатуна *4* відносно центральної осі $C_{4\xi}$.

Для визначення V_{C4} та ω_4 знайдемо положення миттєвого центра швидкостей шатуна *4*. Оскільки швидкості точок *A* і *B* в цей момент часу є паралельними, то миттєвий центр швидкостей шатуна *4* знаходиться в нескінченності; відповідно кутова швидкість шатуна в даний момент часу $\omega_4 = 0$, а швидкості усіх його точок паралельні та дорівнюють одна одній. Таким чином, кінетична енергія шатуна *4*

$$T_4 = \frac{m_4 V_{C4}^2}{2},$$

де $V_{C4} = V_A$.

Обертальна швидкість точки *A* тіла 3

$$V_A = \omega_3 R_3,$$

або з урахуванням попередніх розрахунків

$$V_A = \frac{3R_3 V_1}{2r_3}.$$

Оскільки $r_3 = \frac{3}{4}R_3$, отримаємо

$$V_A = 2V_1.$$

Тоді

$$V_{C4} = V_A,\ V_{C4} = 2V_1.$$

Після підстановки вираз для визначення кінетичної енергії шатуна *4* має вигляд

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \left(2V_1\right)^2 = 2m_4 V_1^2.$$

Кінетична енергія котка 5, що здійснює плоский рух,

$$T_5 = \frac{m_5 V_{C5}^2}{2} + \frac{J_{5\xi}\omega_5^2}{2},$$

де V_{C5} - швидкість центра мас C_5 котка 5;

ω_5 - кутова швидкість котка 5;

$J_{5\xi}$ - момент інерції котка 5 (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної повздовжньої осі $C_{5\xi}$, $J_{5\xi} = \frac{m_5 R_5^2}{2}$.

Оскільки каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P_5. Тому

$$\omega_5 = \frac{V_{C5}}{R_5}.$$

Відповідно

$$T_5 = \frac{m_5 V_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2}{2}\frac{\omega_5^2}{2} = \frac{3}{4} m_5 V_{C5}^2.$$

Оскільки ланка BC_5 здійснює поступальний рух, то $V_{C5} = V_B$, $V_B = V_{C4} = 2V_1$. Тоді, $V_{C5} = 2V_1$.

Відповідно, кінетична енергія котка 5

$$T_5 = \frac{3}{4} m_5 \left(2V_1\right)^2 = 3m_5 V_1^2.$$

Кінематична енергія всієї механічної системи

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) V_1^2 + \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} V_1^2 + 2m_4 V_1^2 + 3m_5 V_1^2.$$

Після підстановки заданих значень мас отримаємо

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2}\left[1 + 2\left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) + \frac{9}{4}\frac{i_{3x}^2}{r_3^2} + 2 + 120\right],$$

або

$$T = \frac{129 m_1 V_1^2}{2}.$$

Знайдемо суму робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на заданому її переміщенні. Покажемо зовнішні сили, прикладені до системи (рисунок 18).

Робота сили тяжіння $\bar{G}_1$

$$A_{G1} = G_1 h_1 = m_1 g s \sin\alpha .$$

Робота сили тертя ковзання $\bar{F}_{mp}$

$$A_{F_{mp}} = -\bar{F}_{mp} s .$$

Оскільки

$$F_{mp} = f \cdot N_1 = f G_1 \cos\alpha ,$$

то

$$A_{F_{mp}} = - f m_1 g s \cos\alpha .$$

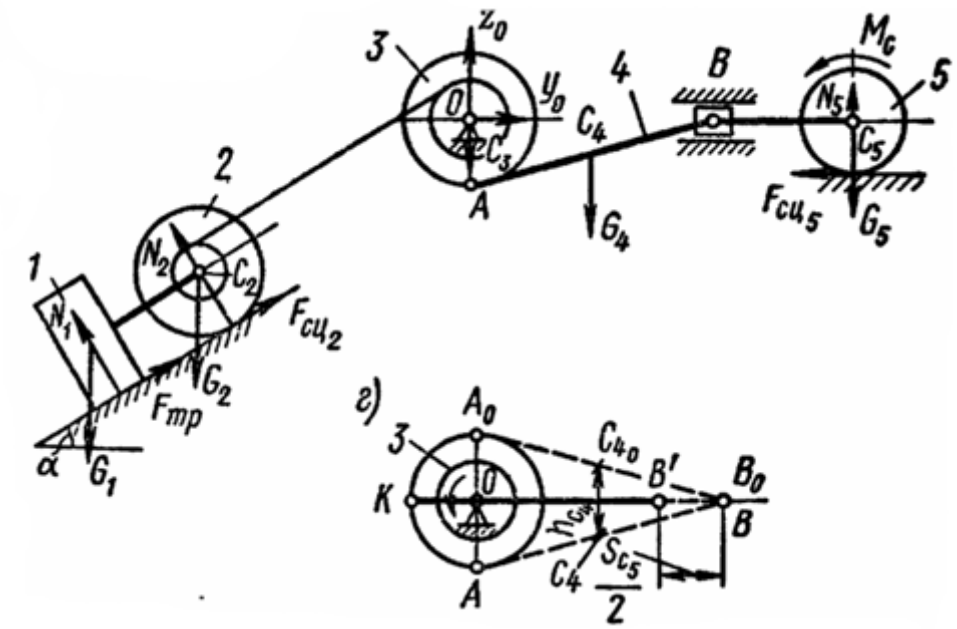


Рисунок 18

Робота сили тяжіння $\bar{G}_2$

$$A_{G2} = G_2 h_{C2} = m_2 g s \sin\alpha .$$

Робота сили зчеплення $\bar{F}_{зч2}$, $\bar{F}_{зч5}$ котків *2* та *5* дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей цих котків.

Робота сили тяжіння $\bar{G}_4$

$$A_{G4} = G_4 h_{C4},$$

де h_{C4} - вертикальне переміщення центра тяжіння C_4 шатуна *4* з початкового положення в його кінцеве положення (рисунок 18), $h_{C4} = R_3$;

$$A_{G4} = m_4 g R_3.$$

Робота пари сил опору коченню котка *5*

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5,$$

де $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ - момент пари сил опору коченню котка *5*;

φ_5 - кут повороту котка *5*.

Оскільки коток *5* котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_5 = \frac{s_{C5}}{R_5},$$

де s_{C5} - переміщення центра тяжіння C_5 котка *5*.

У даному прикладі роботу пари сил опору визначимо як суму робіт цієї пари при коченні котка *5* вліво при обертанні тіла *3* на кут $\frac{\pi}{2}$ та коченні вправо, коли тіло *3* повернеться ще на кут $\frac{\pi}{2}$.

Переміщення центра тяжіння C_5 котка *5* дорівнює переміщенню повзуна *B* вліво та вправо:

$$s_{C5} = 2(B_0 B').$$

Визначимо переміщення $B_0 B'$ при обертанні тіла *3* на кут $\frac{\pi}{2}$. За початок відліку координати точки *B* оберемо нерухому точку

K площини (рисунок 18). При цьому повороті тіла *3* шатун з положення A_0B_0 перейде в положення KB'. Тоді

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

де $KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3{}^2}$,

$$KB' = l = 4R_3.$$

Відповідно

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3{}^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3{}^2} - 4R_3 = 0{,}88R_3.$$

Таким чином, знайдемо повний кут повороту котка *5*:

$$\varphi_5 = \frac{1{,}76R_3}{R_5}.$$

Робота пари сил опору коченню

$$A_{M_C} = -\delta m_5 g \cdot 1{,}76\frac{R_3}{R_5}.$$

Тоді сума робіт зовнішніх сил:

$$\sum_k A_k^E = m_1 gs\sin\alpha - fm_1 gs\cos\alpha + m_2 gs\sin\alpha + m_4 gR_3 - \delta m_5 g \cdot 1{,}76\frac{R_3}{R_5}.$$

Підставивши в отриманий вираз задані значення мас, отримаємо

$$\sum_k A_k^E = m_1 gs\left(\sin\alpha - f\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1{,}76R_3}{sR_5}\right),$$

або

$$\sum_k A_k^E = 1{,}51m_1 gs.$$

Прирівняємо отримані значення T та $\sum_k A_k^E$:

$$\frac{129 m_1 V_1^2}{2} = 1{,}51 m_1 g s,$$

звідки

$$V_1 = 0{,}21 \text{ м/с}.$$

Список літератури

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1984. – Ч.1.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985.

4 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». – Харків: УкрДАЗТ, 2005.