

Український державний університет залізничного транспорту

МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

СИСТЕМА СИЛ, ЩО НЕ ЛЕЖАТЬ В ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання окремих задач з дисципліни
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «СТАТИКА»

Харків 2015

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 29 січня 2015 р., протокол № 11.

Укладачі:

доценти К.В. Іванченко,
С.В. Бобрицький
старш. викл. Л.В. Астахова

Рецензент

доц. Н.А. Аксьонова

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Методичні рекомендації	5
2 Рівновага довільної просторової системи сил	5
3 Визначення реакцій опор твердого тіла, що перебуває під дією сил, що не лежать в одній площині	7
3.1 Умови завдання	7
3.2 Рекомендації та приклад виконання завдання	11
Список літератури	16

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного та будівельного факультетів на I, II, та III-му курсах дисципліни «Теоретична механіка». При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни головна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділу «Статика». У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять і виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт (РГР). Основою РГР є розв'язання задач, пов'язаних з тематикою розділу. Багато важливих питань стосовно рівноваги твердих тіл розглядається при вивченні просторових систем сил, тобто систем сил, що не лежать в одній площині. Враховуючи складність і різноманітність підходів до даної теми, доцільним є використання методичних вказівок.

Сказане вище зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичних вказівок з розділу «Статика», які дають комплексне уявлення про обсяг і структуру питань, що виникають при вивченні дії на тіло довільної просторової системи сил, про специфіку виконання і оформлення індивідуальних самостійних завдань, ознайомлюють з прикладами, містять належні рекомендації та надають варіанти для виконання РГР, а також пропонують літературу для поглибленого вивчення.

Методичні вказівки призначені для студентів будівельного та механічного факультетів денної форми навчання усіх спеціальностей.

1 Методичні рекомендації

Програмою дисципліни «Теоретична механіка» передбачено виконання розрахунково-графічних робіт з розділу «Статика».

Зміст РГР, а саме номери варіантів, уточнюються викладачем під час аудиторних занять.

Кожне завдання супроводжується рисунками і таблицею (номери схем збігаються з тим самим номером, що і умова завдання в таблиці).

РГР виконуються на форматі А4. Типові звіти до РГР здійснюються відповідно до встановлених вимог, а саме обов'язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, прізвище та ініціали студента.

Розв'язання завдань має супроводжуватись коротким текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв'язання завдань необхідно виконати акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх величин, що використовуються: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та ін.

Розрахунково-графічні роботи, що не відповідають усім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 Рівновага довільної просторової системи сил

Момент сили відносно осі

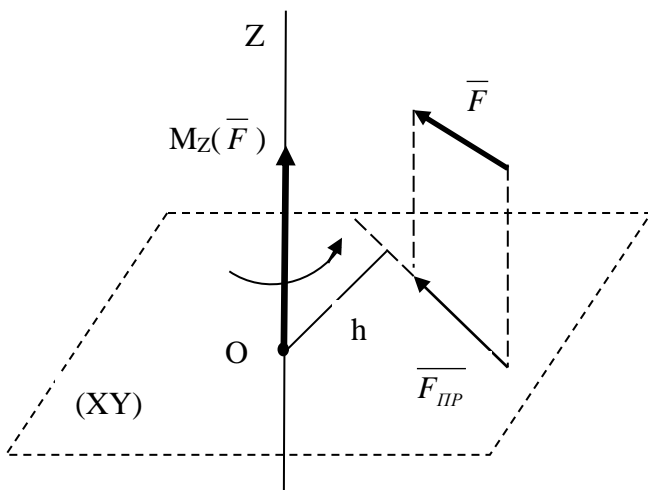


Рисунок 1

Момент сили відносно осі – це алгебраїчна величина (число), яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною (рисунок 1).

$$M_Z(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_{IP}) = \pm F_{IP} \cdot h.$$

Момент буде вважатись **додатним**, якщо з кінця осі Z поворот, який сила \overline{F}_{PP} намагається створити, можна побачити спрямованим проти стрілки годинника, і **від'ємним**, якщо за стрілкою годинника.

Момент сили відносно осі буде **дорівнювати нулю**, якщо сила і вісь лежать в одній площині, тобто:

- 1) сила паралельна осі, оскільки при цьому $\overline{F}_{PP}=0$;
- 2) лінія дії сили перетинає вісь, оскільки при цьому $h=0$.

Аналітичні визначення моментів сили відносно осей координат

$$\left. \begin{aligned} M_X(\overline{F}) &= \pm F_{YZ} \cdot h = y \cdot F_Z - z \cdot F_Y, \\ M_Y(\overline{F}) &= \pm F_{XZ} \cdot h = z \cdot F_X - x \cdot F_Z, \\ M_Z(\overline{F}) &= \pm F_{XY} \cdot h = x \cdot F_Y - y \cdot F_X. \end{aligned} \right\}$$

Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^k F_{nX} &= 0, & \sum_{n=1}^k F_{nY} &= 0, & \sum_{n=1}^k F_{nZ} &= 0, \\ \sum_{n=1}^k M_X(\overline{F}_n) &= 0, & \sum_{n=1}^k M_Y(\overline{F}_n) &= 0, & \sum_{n=1}^k M_Z(\overline{F}_n) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

3 Визначення реакцій опор твердого тіла, що перебуває під дією сил, що не лежать в одній площині

3.1 Умови завдання

Знайти реакції опор конструкції. Схеми конструкцій показані на рисунку 2. Необхідні для розрахунку дані наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	Сили, кН			Розміри, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	-	20	20	30	10	15	5
2	4	-	2	20	10	30	10	10
3	6	-	4	15	15	20	-	15
4	3	-	2	30	20	40	15	10
5	5	4	3	30	40	20	20	15
6	1	3	2	40	30	20	20	10
7	-	6	1	30	10	5	18	6
8	4	6	3	20	40	15	20	10
9	5	-	3	20	15	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	-	2	1	20	30	15	15	10
12	4	-	1	25	20	8	15	10
13	10	-	5	40	30	20	25	15
14	-	2	1	30	90	20	30	10
15	3	-	2	60	20	40	20	5
16	4	-	2	50	30	-	-	-
17	2	-	1	15	10	20	20	5
18	6	-	2	60	40	60	-	-
19	-	8	2	20	30	40	20	15
20	4	-	-	60	40	20	-	-
21	2	-	-	40	60	30	-	-
22	-	-	5	20	50	30	-	-
23	-	-	4	40	30	50	-	-
24	5	-	2	-	-	-	-	-
25	-	-	3	50	50	60	-	-
26	-	-	1	20	60	40	-	-
27	-	-	1	50	30	-	-	-
28	2	-	6	30	10	50	10	15
29	-	4	3	15	20	15	15	10
30	-	-	4	40	30	10	-	-

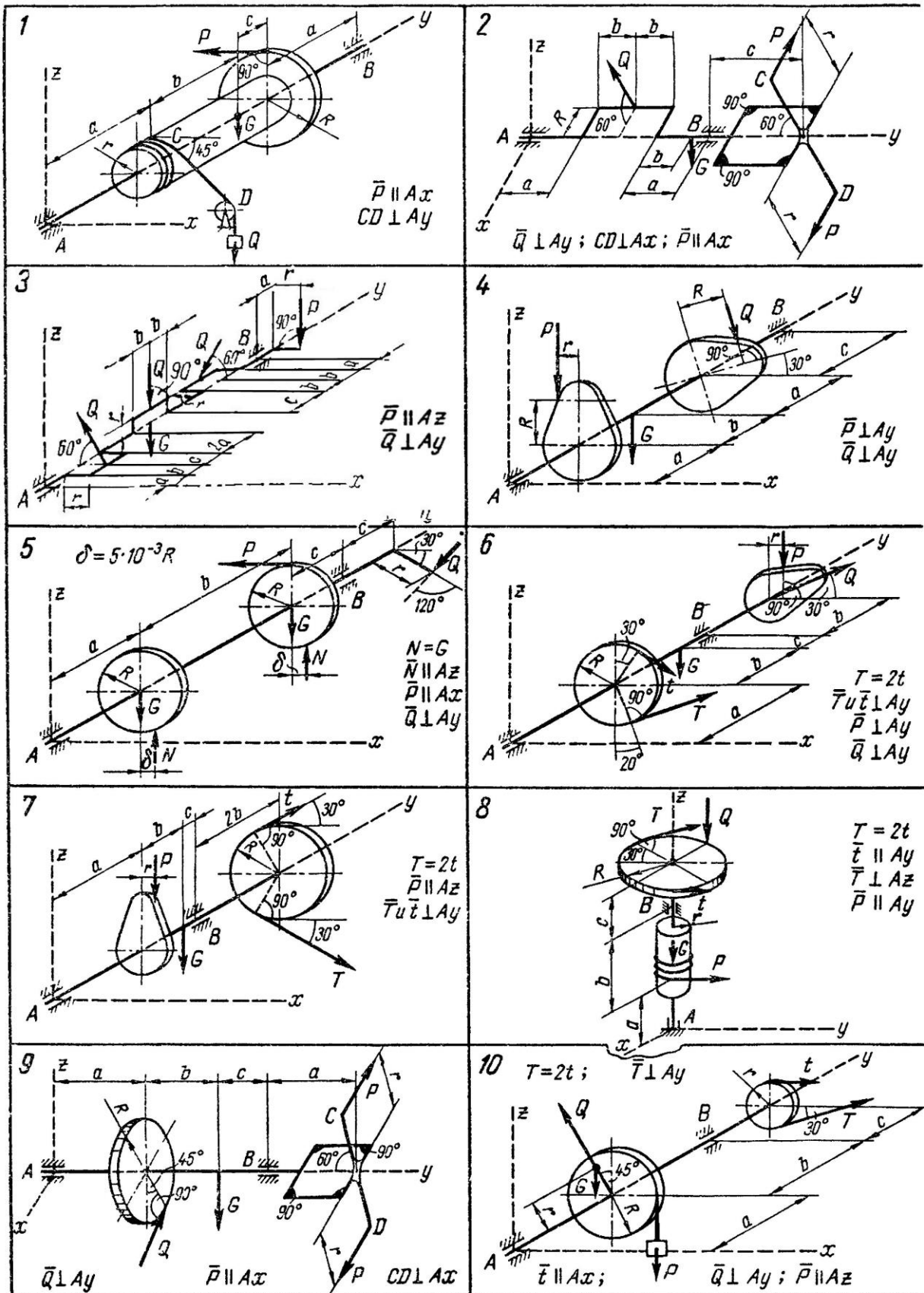


Рисунок 2

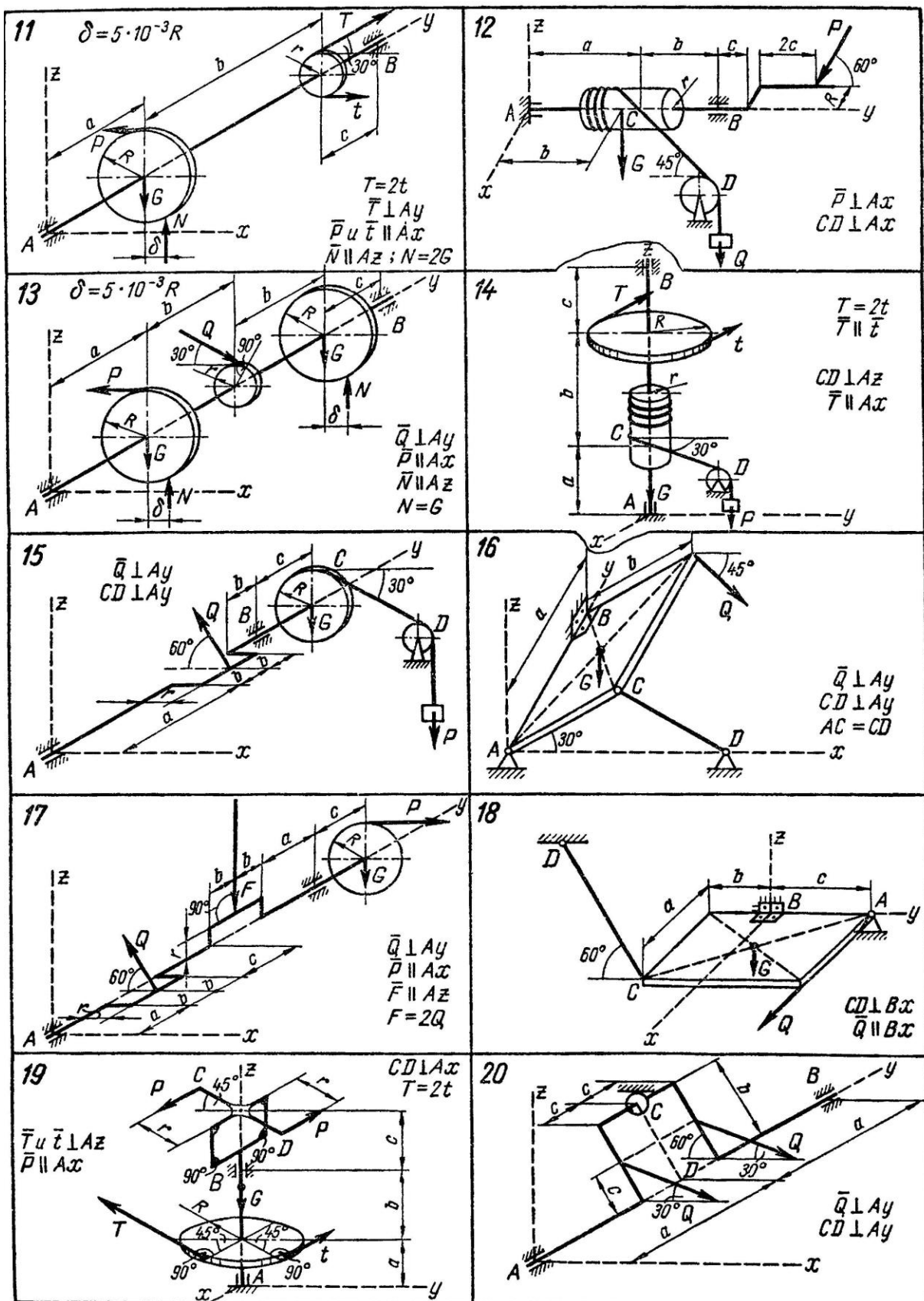


Рисунок 2, аркуш 2

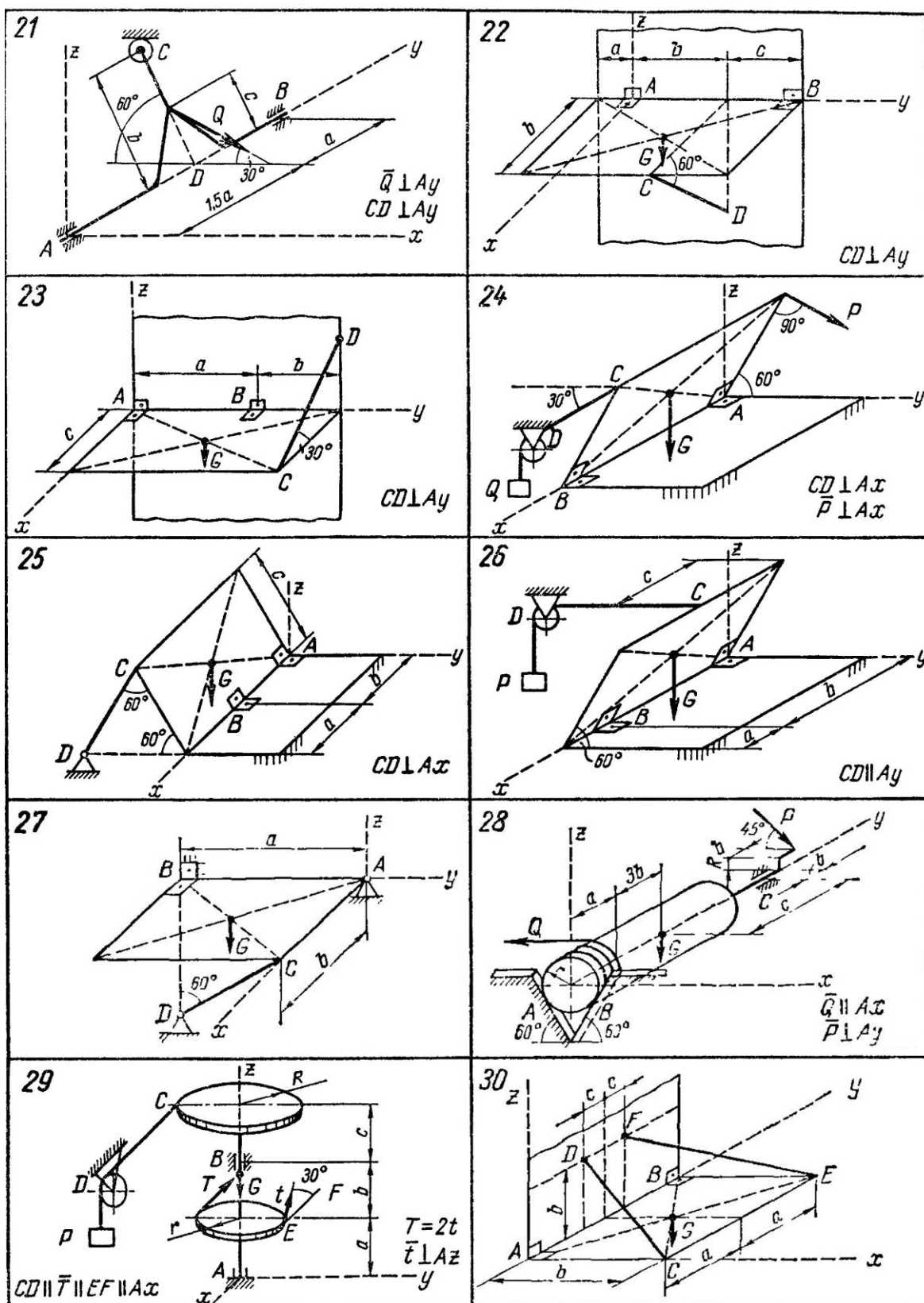


Рисунок 2, аркуш 3

Примітки

1 Вважати, що у варіантах 16, 18, 22-27, 30 петлі не заважають переміщенню рами вздовж АВ.

2 У варіантах 20, 21 та 28 поверхні, що стикаються, є абсолютно гладкими.

3.2 Рекомендації та приклад виконання завдання

Приклад 1

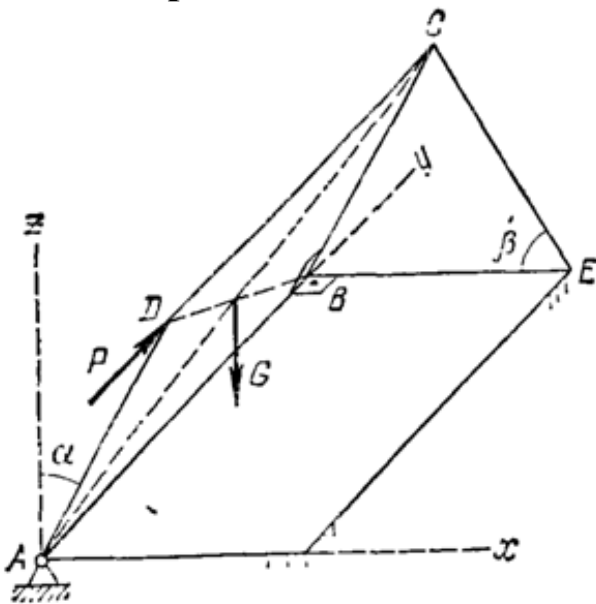


Рисунок 3

Дано:

Рама ABCD вагою $G = 1 \text{ кН}$,
 $P = 2 \text{ кН}$, $\bar{P} \parallel Ay$, $AD = CD = 100 \text{ см}$,
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рисунок 3).

Визначити:

\bar{R}_A та \bar{R}_B (A – шаровий шарнір,
 B – петля).

Розв'язання

Розглянемо рівновагу сил, які прикладені до рами: сили ваги \bar{G} , сили \bar{P} , реакції \bar{S} стержня CE та складових реакцій опор A і B: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Z}_B (рисунок 4).

Складемо рівняння моментів сил відносно осі, що проходить через точки A і B:

$$\sum_k M_y(F_k) = 0,$$

$$G(BC/2)\sin 30^\circ - S \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

Рисунок 4

звідки $S = (G \sin 30^\circ) / (2 \cdot \sin 60^\circ) = (1 \cdot 0,5) / (2 \cdot 0,866) = 0,289 \text{ кН}$.

Далі складемо рівняння моментів сил відносно координатних осей Ax та Az :

$$\sum_k M_x(F_k) = 0, \quad -P \cdot AD \cdot \cos 30^\circ - G \cdot AB / 2 + S \cdot \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{P \cdot AD \cos 30^\circ + G \cdot AB / 2 - S \cos 30^\circ \cdot AB}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,866 + 1 \cdot 50 - 0,289 \cdot 0,866 \cdot 100}{100} = 1,29 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum_k M_z(F_k) = 0, \quad P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + S \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + X_B \cdot AB = 0,$$

$$X_B = \frac{P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,5 + 0,289 \cdot 0,5 \cdot 100}{100} = 0,744 \text{ кН}.$$

Наостанку, складемо рівняння проекцій сил на осі координат:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - S \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$X_A = -X_B + S \cdot \cos 60^\circ = -0,744 + 0,289 \cdot 0,5 = -0,6 \text{ кН},$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \quad Y_A + P = 0, \quad Y_A = -P = -2 \text{ кН},$$

$$\sum_k F_{kz} = 0, \quad Z_A - G + Z_B + S \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$Z_A = G - Z_B - S \cdot \cos 30^\circ = 1 - 1,29 - 0,289 \cdot 0,866 = -0,54 \text{ кН}.$$

Приклад 2

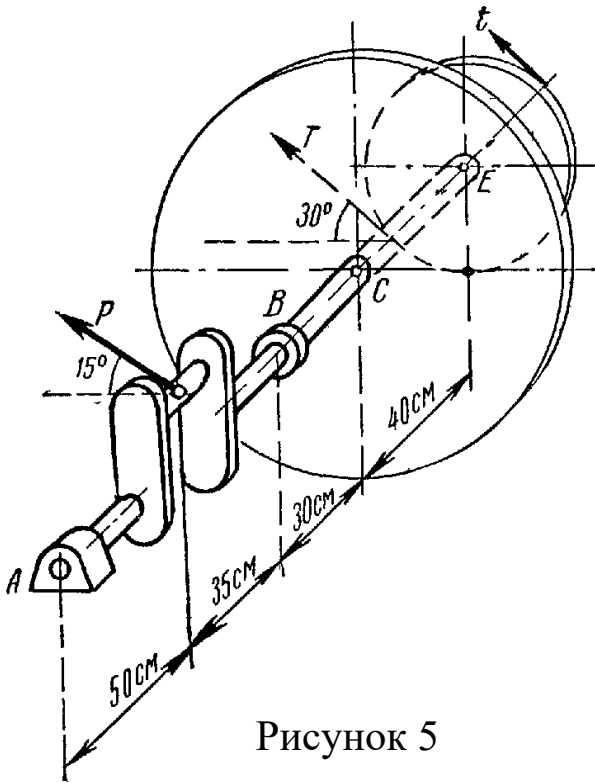


Рисунок 5

Дано:

Колінчастий вал двигуна.
 $\bar{P} = 12 \text{ кН}$, вага маховика
 $\bar{G} = 12 \text{ кН}$, діаметр шківa
 $D = 80 \text{ см}$, $\frac{T}{t} = 2$, $r = 15 \text{ см}$
 (рисунок 5). Вагою вала та шківa знехтувати.

Визначити:

Реакції опор в точках А та В і силу натягіння гілок ременя.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до колінчастого вала: сили ваги маховика \bar{G} , сили \bar{P} , реакцій гілок ременя \bar{T} та \bar{t} , що спрямовані по дотичній до обода шківa та складових реакцій опор А і В: $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$ (рисунок 6).

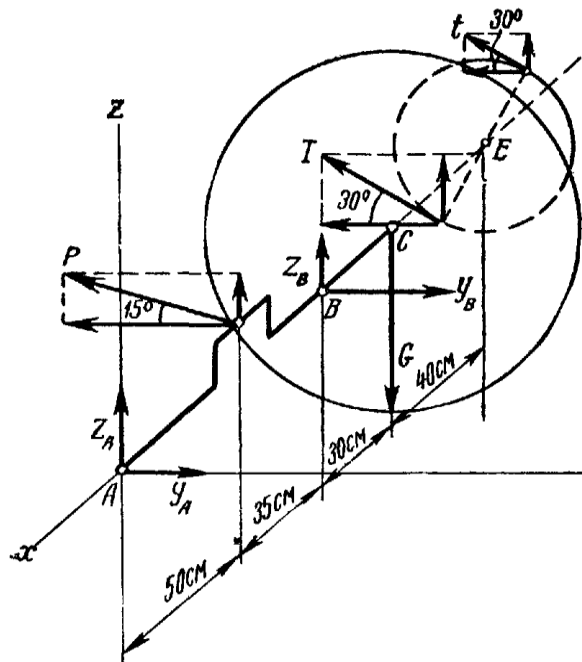


Рисунок 6

По-перше, складемо рівняння моментів сил відносно осі, що проходить через точки А і В:

$$\sum_k M_x(F_k) = 0 \quad t \cdot \frac{D}{2} - T \cdot \frac{D}{2} + P \cos 15^\circ \cdot r = 0.$$

Оскільки $T = 2t$, отримаємо

$$t \cdot \frac{D}{2} - 2t \cdot \frac{D}{2} + P \cos 15^\circ \cdot r = 0, \text{ звідки}$$

$$t = \frac{2P \cdot r \cos 15^\circ}{D} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 0,966}{80} = 4,347 \text{ кН}.$$

Далі складемо рівняння моментів сил відносно координатних осей A_y та A_z :

$$\sum_k M_y(F_k) = 0, \quad P \sin 15^\circ \cdot 50 + Z_B \cdot 85 - G \cdot 115 + T \sin 30^\circ \cdot 155 + t \sin 30^\circ \cdot 155 = 0,$$

звідки знайдемо Z_B :

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{-P \sin 15^\circ \cdot 50 + G \cdot 115 - (T + t) \sin 30^\circ \cdot 155}{85} = \\ &= \frac{-12 \cdot 0,259 \cdot 50 + 12 \cdot 115 - 13,04 \cdot 0,5 \cdot 155}{85} = 2,52 \text{ êÍ} . \end{aligned}$$

$$\sum_k M_z(F_k) = 0, \quad P \cos 15^\circ \cdot 50 + T \cos 30^\circ \cdot 155 + t \cos 30^\circ \cdot 155 - Y_B \cdot 85 = 0,$$

звідки

$$Y_B = \frac{P \cos 15^\circ \cdot 50 + (T + t) \cos 30^\circ \cdot 155}{85} = \frac{12 \cdot 0,966 \cdot 50 + 13,04 \cdot 0,866 \cdot 155}{85} = 27,41 \text{ êÍ} .$$

Після цього складемо рівняння проекцій сил на осі координат. Оскільки всі сили перпендикулярні осі A_x , рівняння

$$\sum_k F_{kx} = 0 \text{ перетворюється в нуль.}$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \quad Y_A - P \cos 15^\circ - Y_B - T \cos 30^\circ - t \cos 30^\circ = 0,$$

$$Y_A = P \cos 15^\circ + Y_B + (T + t) \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,966 + 27,41 + 13,04 \cdot 0,866 = -4,53 \hat{e}_I .$$

$$\sum_k F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - G + P \sin 15^\circ + T \sin 30^\circ + t \sin 30^\circ = 0,$$

$$\begin{aligned} Z_A &= -Z_B + G - P \sin 15^\circ - (T + t) \sin 30^\circ = \\ &= -2,52 + 12 - 12 \cdot 0,259 - 13,04 \cdot 0,5 = -0,15 \hat{e}_I . \end{aligned}$$

Список літератури

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1984. – Ч.1.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985.

4 Аксьонова Н.А. Робочий конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». – Харків: УкрДАЗТ, 2005.

