

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ДЛЯ ВНЕЦЕНТРЕННО-СЖАТЫХ КОЛОН

Галагурия Е.И., к.т.н. доцент,

Ковалёв М.А., к.т.н. доцент,

Кравцов Л.Б., к.т.н. доцент,

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта

galagurya@rambler.ru

Аннотация. В статье приведены решения, которые разрешают определить критическую нагрузку следующих расчетных схем: колонна, нагруженная по торцам продольными силами с равными и в одну сторону направленными эксцентриситетами; колонна, жестко защемленная внизу, шарнирно закрепленная вверху, нагруженная эксцентрично приложенной продольной силой на верхнем торце; колонна, жестко защемленная внизу, нагруженная на свободном конце эксцентрично приложенной силой; колонна, шарнирно закрепленная, нагруженная на верхнем торце эксцентрично приложенной продольной силой.

Ключевые слова: колонна, внецентренное сжатие, критическая нагрузка.

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ КРИТИЧНОЇ СИЛИ ДЛЯ ПОЗАЦЕНТРОВО-СТИСНУТИХ КОЛОН

Галагурия Є.І., к.т.н. доцент,

Ковальов М.О., к.т.н. доцент,

Кравців Л.Б., к.т.н. доцент,

Український державний університет залізничного транспорту

galagurya@rambler.ru

Анотація. В статті наведені рішення, що дозволяють визначити критичне навантаження наступних розрахункових схем: колона, навантажена по торцях позовжніми силами з рівними та в одну сторону спрямованими эксцентриситетами; колона, жорстко затиснена внизу, шарнірно закріплена вгорі, навантажена эксцентрично прикладеною позовжньою силою на верхньому торці; колона, жорстко затиснена внизу, навантажена на вільному кінці эксцентрично прикладеною силою; колона, шарнірно-обіперта, навантажена на верхньому торці эксцентрично прикладеною позовжньою силою.

Ключові слова: колона, позацентровий стиск, критичне навантаження.

FEATURES FOR THE CALCULATION OF CRITICAL POWER ECCNTRICALLY-CONTRCTION COLON

Galagurya E.I., PhD., Assistant Professor,

Kovalev M.A., PhD., Assistant Professor,

Kravtsiv L.B., PhD., Assistant Professor,

Ukrainian State University of Railway Transport

galagurya@rambler.ru

Abstract. The article shows the dependences connecting the deflection, a critical force and the location of the dangerous section. The following design schemes are being considered: a column,

loaded at the ends of the longitudinal force equal to one side and pointing eccentricities; a column which is rigidly clamped bottom and hinged top, eccentrically loaded longitudinal force applied on the upper end; columns, rigid clamping from below, at the free end loaded eccentrically applied force; a column, hinged, loaded on the upper end of the eccentrically attached to the longitudinal force. As in some of the equations the function is not defined, then we will not be able to determine the value of critical force analytically, but knowing the geometric characteristics of the column and the allowable deflection, we can calculate the value of the critical force.

Key words: column, eccentrical compression, critical load, dangerous section, deflection.

Введение. Определению значений критической нагрузки внецентренно сжатых колонн посвятили свои работы: Ватуля Г.Л. [1], Галагуря Е.И. [2], Глазунов Ю.В. [3], Опанасенко Е.В. [4], Стороженко Л.И. [5], Тимошенко С.П. [6], Труль В. А. [7], Хофф Н.Д. [8], Чихладзе Э.Д. [1, 9, 10], и другие ученые. Однако в данных трудах недостаточно изучена работа статически определимых, и статически неопределимых колонн, сжатых эксцентрично на одном торце и испытывающих осевое сжатие – на другом. В связи с этим в данной статье приведены решения, которые позволяют определить критическое значение нагрузки следующих расчетных схем внецентренно сжатых колонн (рис. 1): колонна, нагруженная двумя сжимающими силами, приложенными с эксцентриситетом e ; колонна, нагруженная на одном торце эксцентрично приложенной силой F ; колонна, жестко закрепленная внизу, шарнирно закрепленная сверху и нагруженная эксцентрично приложенной силой на верхнем торце; колонна, жестко закрепленная внизу, нагруженная на свободном конце эксцентрично приложенной силой.

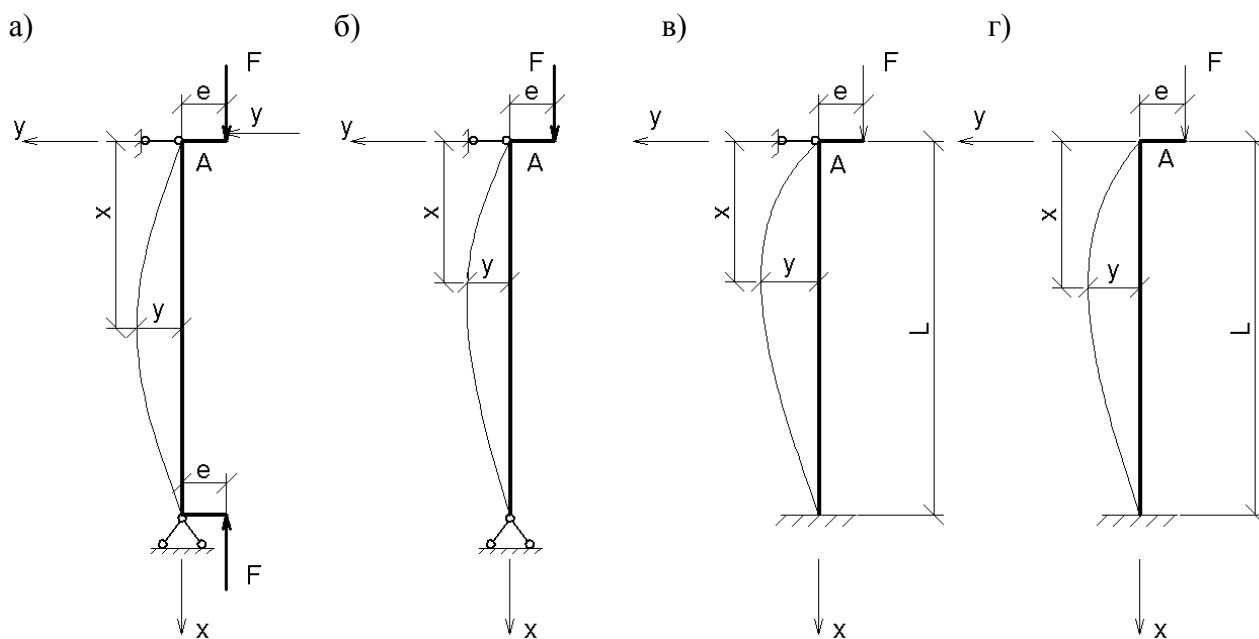


Рис. 1. Расчетные схемы колонн:

а – колонна, нагруженная двумя сжимающими силами, приложенными с эксцентриситетом e ; б – колонна, нагруженная на одном торце эксцентрично приложенной силой F ; в – колонна, жестко закрепленная внизу, шарнирно закрепленная сверху и нагруженная эксцентрично приложенной силой на верхнем торце; г – колонна, жестко закрепленная внизу, нагруженная на свободном конце эксцентрично приложенной силой

Постановка задачи. Рассмотрим отдельно, каждую из схем опирания колоны и запишем уравнение для определения максимальных прогибов y .

1. Колонна, нагруженная двумя сжимающими силами, приложенными с эксцентриситетом e (рис. 1, а). Дифференциальное уравнение изогнутой оси будет иметь такой вид:

$$y'' + k^2 \cdot y = -k^2 \cdot y, \quad (1)$$

где:

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1):

$$y = e \left(\cos kx + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - 1 \right). \quad (3)$$

Сечение с максимальным прогибом находится на расстоянии $x = 0,5l$ от начала координат (начало координат расположено в точке А).

Максимальный прогиб равен:

$$y = e \left(\cos 0,5kl + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin 0,5kl - 1 \right). \quad (4)$$

Подставляем уравнение (2) в уравнение (4) и получаем:

$$y = e \left(\cos \left(0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) + \frac{1 - \cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}{\sin \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \sin \left(0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1 \right). \quad (5)$$

В результате компьютерной обработки полученных данных выразим из уравнения (5) значение критической силы:

$$F = \frac{4 \operatorname{arctg} \left(\frac{e \cdot \sqrt{2ey + y^2}}{y + e} \right)^2 EI}{l^2}. \quad (6)$$

Подставляя значение допустимого прогиба колонны согласно [11-13], определим критическую силу.

2. Колонна, нагруженная на одном торце эксцентрично приложенной силой F (рис. 1, б).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{k^2 \cdot e \cdot x}{l} - k^2 \cdot e. \quad (7)$$

Решение уравнения (7):

$$y = e \left(\cos kx - \operatorname{ctg} kl \cdot \sin kx - 1 + \frac{x}{l} \right). \quad (8)$$

Опасным будет то сечение, в котором возникает максимальный прогиб. Для определения опасного сечения необходимо найти точки экстремума функции (8), а это значит, что необходимо первую производную приравнять к нулю, и определить значение x . Для этого используем программу на ЭВМ, и находим сечение, где будет максимальный прогиб:

$$x = \frac{2 \operatorname{arctg} \left(\frac{kl \cdot \operatorname{tg} kl - \sqrt{\frac{k^2 l^2 - 1}{\cos^2(kl)} + 1}}{kl + \operatorname{tg} kl} \right)}{k}. \quad (9)$$

Решая совместно уравнения (2), (8) и (9) получим выражение для прогибов в виде (10).

Так как в уравнении (10) функция не определенная то значения критической силы аналитически мы вывести не сможем, но зная геометрические характеристики колонны и

допустимый прогиб, согласно [11-13], мы сможем получить значение критической силы.

$$\begin{aligned}
 y = e \cdot \cos & \left(2 \operatorname{arctg} \frac{\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l} \right) - \\
 - e \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \sin & \left(2 \operatorname{arctg} \frac{\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l} \right) - \\
 2 \operatorname{arctg} & \frac{\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l} \\
 - e + e & \frac{\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l}
 \end{aligned} \tag{10}$$

3. Колонна, жестко закрепленная внизу, шарнирно закрепленная сверху и нагруженная эксцентрично приложенной силой на верхнем торце (рис. 1, в).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{k^2 \cdot e \cdot x}{2 \cdot l} - k^2. \tag{11}$$

Решение уравнения (11):

$$y = e \left(\cos kx - \left(\frac{\cos kl + 0.5}{\sin kl} \right) \cdot \sin kx - 1 + \frac{x}{2 \cdot l} \right). \tag{12}$$

Для определения опасного сечения необходимо найти точки экстремума функции (12). В результате получим расстояние x до сечения с максимальным прогибом:

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1}{k} \times 2 \operatorname{arctg} & \left(\frac{-4kl \operatorname{tg}(0.5kl)}{kl \operatorname{tg}(0.5kl)^2 - 3kl - 6 \operatorname{tg}(0.5kl)} \right) + \\
 + \frac{\sqrt{k^2 l^2 \operatorname{tg}(0.5kl)^4 + 10k^2 l^2 \operatorname{tg}(0.5kl)^2 + 9k^2 l^2 - 36 \operatorname{tg}(0.5kl)}}{kl \operatorname{tg}(0.5kl)^2 - 3kl - 6 \operatorname{tg}(0.5kl)} &
 \end{aligned} \tag{13}$$

Решая совместно уравнения (2), (12) и (13) получим выражение для прогибов в виде (14), в котором функция не определенная и значение критической силы аналитически мы вывести не сможем, но зная геометрические характеристики колонны и допустимый прогиб,

согласно [11-13], мы сможем получить значение критической силы.

$$\begin{aligned}
 y = e \cos & \left(2 \operatorname{arctg} \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \frac{Fl^2}{\sqrt{EI \cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}} + 1 - \frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) - \\
 - e \operatorname{ctg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) \sin & \left(2 \operatorname{arctg} \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \frac{Fl^2}{\sqrt{EI \cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}} + 1 - \frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) - \\
 2 \operatorname{arctg} & \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \frac{Fl^2}{\sqrt{EI \cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}} + 1 - \frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \\
 - e + e & \frac{2 \operatorname{arctg} \left(\frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \frac{Fl^2}{\sqrt{EI \cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}} + 1 - \frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right)}{l \sqrt{\frac{F}{EI}}}
 \end{aligned} \tag{14}$$

4. Колонна, жестко закрепленная внизу, нагруженная на свободном конце эксцентрично приложенной силой (рис. 1, г). Дифференциальное уравнение изогнутой оси будет иметь следующий вид:

$$y'' + k^2 \cdot y = -k^2 \cdot y. \tag{15}$$

Решение уравнения (15):

$$y = e \left(\cos kx + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - 1 \right) \tag{16}$$

Приравняв первую производную функции (16) к нулю, определим значение x при котором функция стремится к максимальному значению (т.е. находим сечение с максимальным прогибом). Для этого используем подход изложенный ранее:

$$x = - \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos(0.5kl) - 1}{\sin(0.5kl)} \right)}{k}. \tag{17}$$

Подставляем уравнение (2) и уравнение (17) в уравнение (16) и получаем:

$$\begin{aligned}
 y = e & \left(\cos \left(- \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \left(0.5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1}{\sin \left(0.5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1 - \cos l \sqrt{\frac{F}{EI}}}{\sin l \sqrt{\frac{F}{EI}}} \sin \left(- \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \left(0.5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1}{\sin \left(0.5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) \right) - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнения (18) выразим значение критической силы F с помощью ЭВМ.

$$F = \frac{4 \operatorname{arctg} \left(\frac{2e \cdot \sqrt{2ey + y^2}}{(y+e)^2} \right)^2 EI}{l^2} \quad (19)$$

Для расчета критической силы необходимо использовать значение допустимого прогиба колонны согласно [11-13].

Выводы. Получены уравнения, которые позволяют определить критическую нагрузку внецентренно сжатых колонн при различных схемах нагружения. Для решения этих уравнений необходимо задавать значение допустимого прогиба, согласно ДСТУ, и геометрические характеристики колонн, которые рассматриваются.

Литература

1. Чихладзе Э.Д. Основы расчета и проектирования комбинированных и сталебетонных конструкций / Э.Д. Чихладзе, Г.Л. Ватуля, Ю.П. Китов и др.; под ред Э.Д. Чихладзе. – Киев: Транспорт Украины, 2006. – 136 с.
2. Галагура Е.И. Испытание стальных и сталебетонных колонн коробчатого сечения на внецентренное и осевое сжатие / Е.И. Галагура // Міжвідомчий наук.-техн. зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту будівельних конструкцій Міністерства регіонального розвитку та будівництва України. – Київ: Видавництво НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 112–118.
3. Глазунов Ю.В. Исследование экономической эффективности применения сталебетонных колонн прямоугольного сечения в строительстве // Межвузовский сб. науч. трудов. – 1996. – вып. 27. – С.142-145.
4. Опанасенко О.В. Оптимізація сталебетонних стержневих конструкцій // Вісник ДонДАБА. Будівельні конструкції, будівлі та споруди. – Макіївка: ДонДАБА, 2003. – Вип. 2 (39). Том 2. – С. 128-131.
5. Стороженко Л.И., Голобородько Б.И., Яровой И.С. Исследование внецентренно-сжатых трубобетонных элементов. – В кн.: Строительные конструкции. Киев, 1970.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М., 1971г., 808стр. с илл.
7. Трулль В. А. К вопросу расчета устойчивости сжато-изогнутых стержней с использованием приближенного выражения для кривизны: кн. Исследования по строительным конструкциям и испытанию сооружений / В.А. Трулль, Р.С. Санжаровский. – Л. : 1968. – С. 23–25.
8. Хофф Н.Д. Продольный изгиб и устойчивость / Н.Д. Хофф. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 155 с.
9. Чихладзе Э.Д. Расчёт сталебетонных элементов прямоугольного сечения на прочность при внецентренном сжатии и изгибе / Э.Д. Чихладзе // Тр. ин-та ХИИТ. – 1993. – Вып. 21. – С. 23–25.
10. Чихладзе Э.Д. Расчёт сталебетонных элементов прямоугольного сечения на прочность при внецентренном сжатии и изгибе / Э.Д. Чихладзе, А.Д. Арсланханов // Строительство: Известия вузов. – 1992. – № 1. – С. 6–10.
11. Прогини і переміщення. Вимоги проектування: ДСТУ Б В.1.2-3:2006.– Офіц. вид – К.: Мінбуд України, 2006. – 14 с. (Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Національний стандарт України)
12. Конструкції металеві будівельні. Загальні технічні умови: ДСТУ Б В.2.6-75:2008. – Офіц. вид – К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 15с. (Конструкції будинків і споруд. Національний стандарт України)
13. Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу: ДБН В.2.6-163:2010. – Офіц. вид. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 201 с. – (Конструкції будівель і споруд. Державні будівельні норми України)