

БУДІВЕЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра будівельної механіки та гідравліки

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ
РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Харків – 2015

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри будівельної механіки та гідравліки 27 травня 2015 р., протокол № 8.

У методичних вказівках подано приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з будівельної механіки для студентів спеціальності «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання» напряму «Машинобудування».

Укладач

доц. О.В. Опанасенко

Рецензент

доц. С.В. Воронін

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРАХУНКОВО-
ПРОЕКТУВАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З БУДІВЕЛЬНОЇ
МЕХАНІКИ

Відповідальний за випуск Опанасенко О.В.

Редактор Страхова В.В.

Підписано до друку 12.06.15 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 4,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Розрахунок статично визначної багатопрогової балки.....	6
1.1 Розрахунок багатопрогової балки на зовнішнє навантаження.....	6
1.2 Розрахунок багатопрогової балки на рухоме навантаження.....	11
1.3 Визначення внутрішніх зусиль в багатопроговій балці по лініях впливу.....	17
2 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом сил.....	19
2.1 Визначення ступеня статичної невизначності.....	19
2.2 Вибір основної системи.....	20
2.3 Система канонічних рівнянь.....	24
2.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь.....	24
2.5 Перевірка правильності визначення коефіцієнтів і вільних членів.....	26
2.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь.....	29
2.7 Побудова епюри моментів у заданій статично невизначній системі.....	29
2.8 Перевірка правильності побудови епюри M	30
2.9 Побудова епюри поперечних сил Q	31
2.10 Побудова епюри поздовжніх сил N	33
2.11 Перевірка правильності побудови епюр Q і N	35
3 Розрахунок плоскої статично невизначної рами методом переміщень.....	35
3.1 Визначення ступеня кінематичної невизначності.....	36
3.2 Основна система методу переміщень.....	37
3.3 Система канонічних рівнянь.....	38
3.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь.....	40
3.5 Побудова епюри моментів M в заданій статично невизначній системі.....	43
3.6 Побудова епюри поперечних сил Q	45
3.7 Побудова епюри поздовжніх сил N	47

4 Розрахунок статично визначної ферми.....	49
4.1 Розрахунок ферми на нерухоме навантаження.....	49
4.2 Розрахунок ферми на рухоме навантаження.....	54
4.3 Визначення внутрішніх зусиль в стержнях ферми по лініях впливу.....	62
Список літератури.....	63
Додаток А Таблиця стандартних рішень.....	64

ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів і містять приклади розв'язання завдань, які виконують студенти денної і заочної форм навчання спеціальності «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини та обладнання» напряму «Машинобудування» при вивченні будівельної механіки. Ці вказівки є продовженням та доповненням методичних рекомендацій кафедри будівельної механіки та гідравліки [1- 4].

Для кінцевого контролю отриманого розв'язку чи контролю розв'язання по кроках, а також для допомоги при розв'язанні завдання призначені програмні комплекси кафедри [5].

Вказівки містять довідковий матеріал, необхідний для розв'язання завдань: таблиці стандартних рішень (додаток А).

У даних вказівках розв'язання задач супроводжується основними теоретичними даними курсу, які покладено в основу рішення. Однак ці вказівки не можуть замінити підручник, тому, щоб розв'язувати задачі з розумінням, треба попередньо ознайомитись з відповідним матеріалом у підручнику чи у курсі лекцій [6 - 8].

Зміст та наповнення розрахунково-графічних робіт прийняті згідно з планом підготовки студентів відповідного напряму.

1 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ БАГАТОПРОГОНОВОЇ БАЛКИ

Завдання 1.1. Виконати розрахунок статично визначної багатопрогонової балки на рухоме і нерухоме навантаження. Визначити внутрішні зусилля в балці і побудувати лінії впливу.

1.1 Розрахунок багатопрогонової балки на зовнішнє навантаження

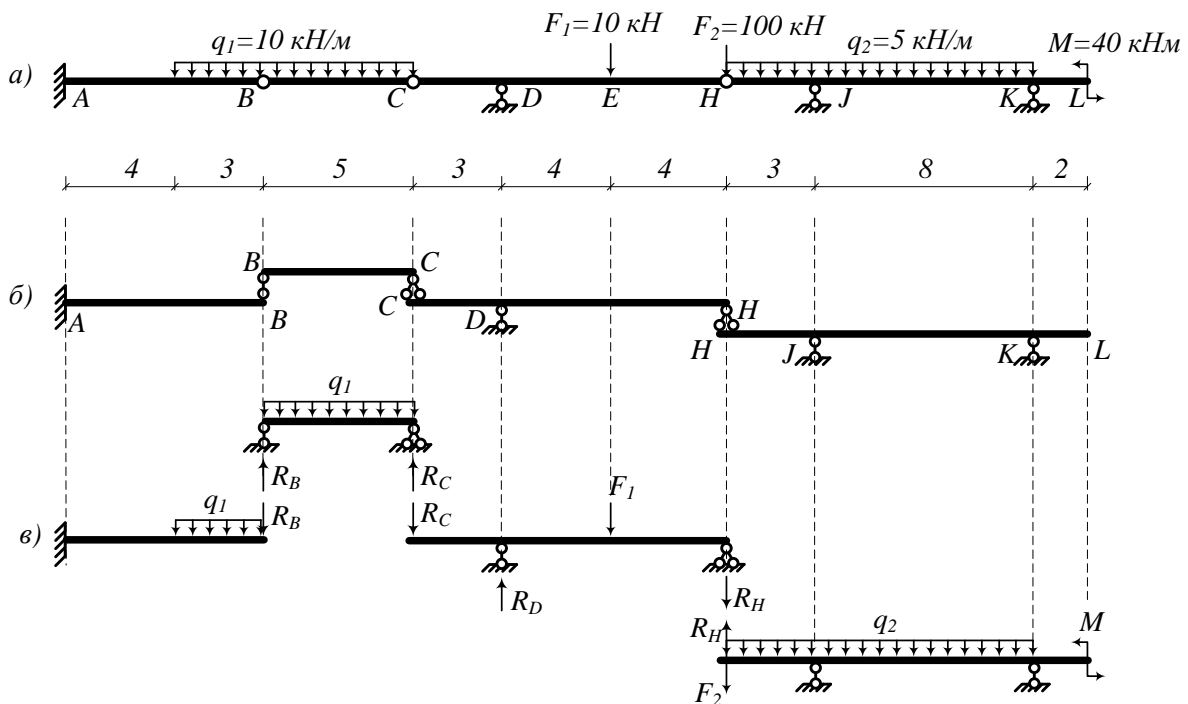


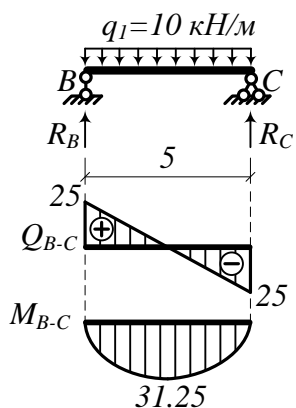
Рисунок 1.1 – Розрахункова схема багатопрогонової балки

Розрахунок балки починається з побудови поверхової схеми (рисунок 1.1, б). Для цього умовно по шарнірах (т. B , C , H) розбиваємо балку на окремі прогони. Балки, що мають два чи три зв'язки з землею (A - B , H - L), є головними балками, тобто балками нижнього поверху поверхової схеми. Інші балки встановлюються поверхами вище (другорядні балки). Кожна балка являє собою однопрогону балку, завантажену зовнішнім навантаженням. Розрахунок багатопрогонової балки починається з верхнього поверху. Балка верхнього поверху розраховується тільки на навантаження, яке прикладене до цього поверху. Всі інші балки

розраховуються на навантаження, яке прикладене до цієї балки, і навантаження, яке передається з вищерозташованих балок. Навантаження, прикладене до верхніх балок, передається на нижні балки за допомогою опорних реакцій (рисунки 1.1, в), взятих з протилежним знаком.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль розглянемо кожну балку окремо.

Балка В-С



Визначаємо реакції в опорах:

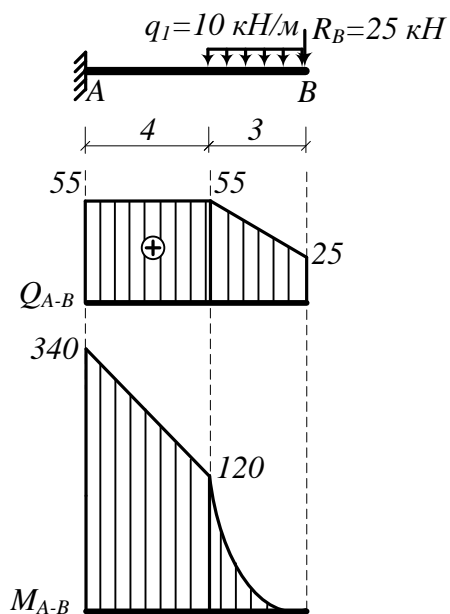
$$\sum Y = 0: R_B = R_C = \frac{q_1 \cdot 5}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ кН}.$$

Використовуючи метод перерізів, визначаємо зусилля в характерних точках балки:

$$Q_B = R_B = 25 \text{ кН}, \quad Q_C = R_C = -25 \text{ кН}$$

$$M_B = 0, \quad M_C = 0, \quad M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 5^2}{8} = 31.25 \text{ кН}.$$

Балка А-В



Навантаження, прикладене до балки А-В, буде складатися з навантаження q_1 і реакції R_B , що прикладена з напрямком вниз (на верхній балці реакція R_B спрямована вгору).

Визначаємо зусилля в точках:

$$Q_B = R_B = 25 \text{ кН}.$$

$$Q_{N,A} = R_B + q \cdot 3 = 25 + 10 \cdot 3 = 55 \text{ кН}.$$

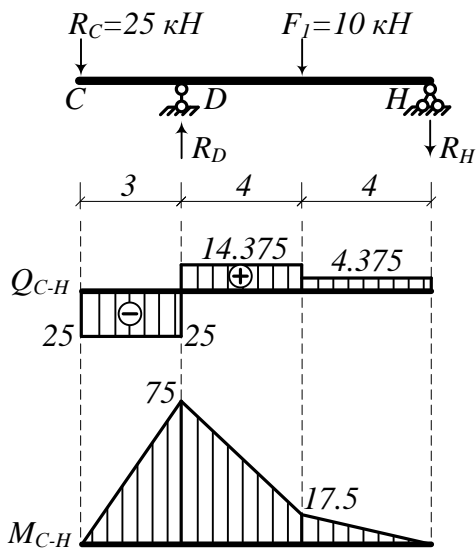
$$M_B = 0.$$

$$M_N = -R_B \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= -25 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -120 \text{ кНм}$$

$$M_A = -R_B \cdot 7 - q_1 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 4\right) = -25 \cdot 7 - 10 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 4\right) = -340 \text{ кНм.}$$

Балка С-Н



Зовнішній вплив буде складатися з сили F_1 і реакції R_C , прикладеної з протилежним знаком. Визначаємо реакції в опорах:

$$\sum M_D = 0: R_C \cdot 3 - F \cdot 4 + R_H \cdot 8 = 0,$$

$$R_H = \frac{-25 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{8} = -4.375 \text{ кН.}$$

$$\sum M_H = 0: R_C \cdot 11 - R_D \cdot 8 + F \cdot 4 = 0,$$

$$R_D = \frac{25 \cdot 11 + 10 \cdot 4}{8} = 39.375 \text{ кН.}$$

Виконуємо перевірку реакцій:

$$\sum Y = 0: -25 + 39.375 - 10 - 4.375 = 0, \quad -39.375 + 39.375.$$

Визначаємо зусилля в точках:

$$Q_C = -R_C = -25 \text{ кН}, \quad Q_D^{лев} = -R_C = -25 \text{ кН.}$$

$$Q_D^{np} = -R_C + R_D = -25 + 39.375 = 14.375 \text{ кН.}$$

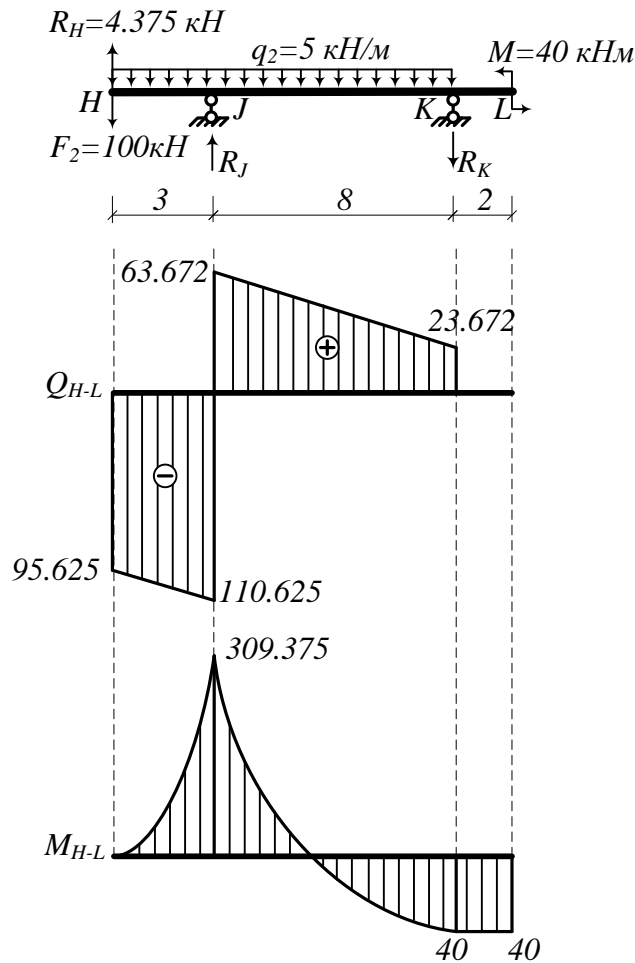
$$Q_H = R_H = 4.375 \text{ кН}, \quad Q_E^{np} = R_H = 4.375 \text{ кН.}$$

$$Q_E^{лев} = R_H + F_1 = 4.375 + 10 = 14.375 \text{ кН.}$$

$$M_C = 0, \quad M_D = -R_C \cdot 3 = -25 \cdot 3 = -73 \text{ кНм.}$$

$$M_H = 0, \quad M_E = -R_H \cdot 4 = -4.375 \cdot 4 = -17.5 \text{ кНм.}$$

Балка H-L



Реакцію R_H прикладаємо до балки H-L з напрямком вгору, так як на вищерозташованій балці D-H вона спрямована вниз. Визначаємо реакції в опорах:

$$\begin{aligned} \sum M_J = 0: & -R_H \cdot 3 + F_2 \cdot 3 - q_2 \times \\ & \times 11 \cdot \left(\frac{11}{2} - 3 \right) + R_K \cdot 8 + M = 0, \\ R_K = & \frac{4.375 \cdot 3 - 100 \cdot 3 +}{8} \\ & + 5 \cdot 11 \cdot 2.5 - 40 = -23.672 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_K = 0: & -R_H \cdot 11 + F_2 \cdot 11 - \\ & -R_J \cdot 8 + q_2 \cdot 11 \cdot \frac{11}{2} + M = 0, \end{aligned}$$

$$R_J = \frac{-4.375 \cdot 11 + 100 \cdot 11 + 5 \cdot 11 \cdot 5.5 + 40}{8} = 174.297 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: & 4.375 - 100 - 5 \cdot 11 + 174.297 - 23.762 = 0, \\ & 178.672 - 178.672 = 0. \end{aligned}$$

Визначаємо зусилля в точках:

$$\begin{aligned} Q_H &= R_H - F_2 = 4.375 - 100 = -95.625 \text{ кН}, \\ Q_J^{лев} &= R_H - F_2 - q_2 \cdot 3 = 4.375 - 100 - 5 \cdot 3 = -110.625 \text{ кН}, \\ Q_J^{прав} &= R_H - F_2 - q_2 \cdot 3 + R_J = 4.375 - 100 - 5 \cdot 3 + 174.297 = 63.672 \text{ кН}, \\ Q_L &= 0, \quad Q_K^{прав} = 0, \quad Q_K^{лев} = R_K = 23.672 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$M_H = 0, \quad M_{L,K} = M = 40 \text{ кНм.}$$

$$M_J = R_H \cdot 3 - F_2 \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1.5 = 4.375 \cdot 3 - 100 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 1.5 = -309.375 \text{ кНм.}$$

Побудовані таким чином ділянки епюр внутрішніх зусиль збираємо разом і отримуємо остаточні епюри поперечних сил і згинальних моментів (рисунок 1.2).

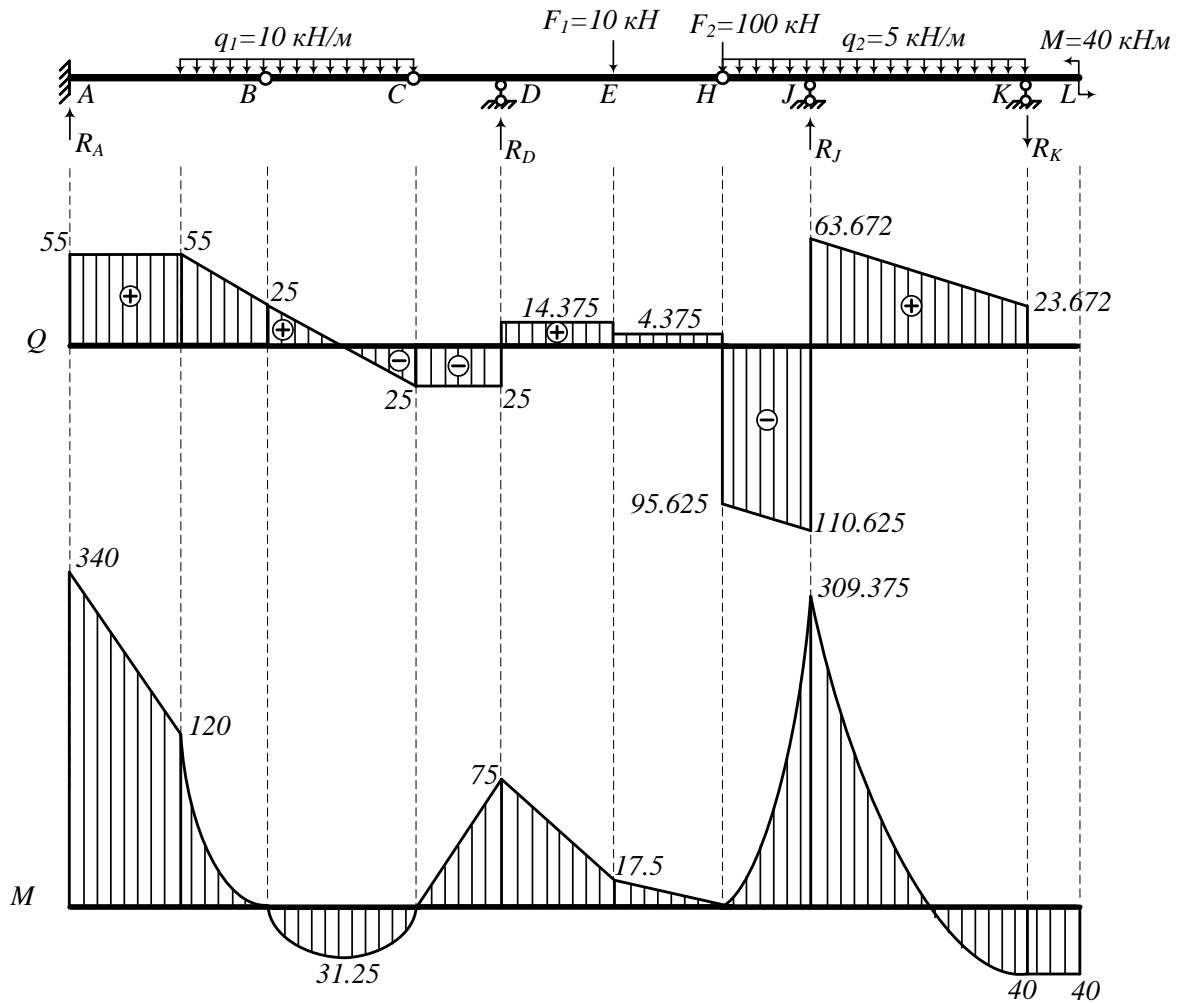


Рисунок 1.2 - Остаточні епюри поперечних сил і згинальних моментів

Виконуємо статичну перевірку:

$$\begin{aligned}\sum Y = 0: \quad R_A - q_1 \cdot 8 + R_D - F_1 - F_2 - q_2 \cdot 11 + R_J - R_K &= 0, \\ 55 - 10 \cdot 8 + 39.375 - 10 - 100 - 5 \cdot 11 + 174.297 - 23.672 &= 0, \\ 268.672 - 268.672 &= 0.\end{aligned}$$

Так як рівність виконується, система знаходиться в рівновазі.

1.2 Розрахунок багатопрогової балки на рухоме навантаження

Розрахунок багатопрогової балки на рухоме навантаження починається з побудови поверхової схеми. Спочатку будуємо лінію впливу для балки, якій належить переріз чи опорна реакція, розглядаючи її як однопрогову балку. Потім лінію впливу поширюємо на інші балки, що лежать вище розглянутої. В межах другорядної балки лінія впливу являє собою пряму лінію, що сполучає крайню ординату сусідньої основної балки і нуль під протилежною опорою другорядної балки. Таким чином, над усіма шарнірами, що з'єднують однопрогові балки, лінія впливу має переломи (рисунок 1.3).

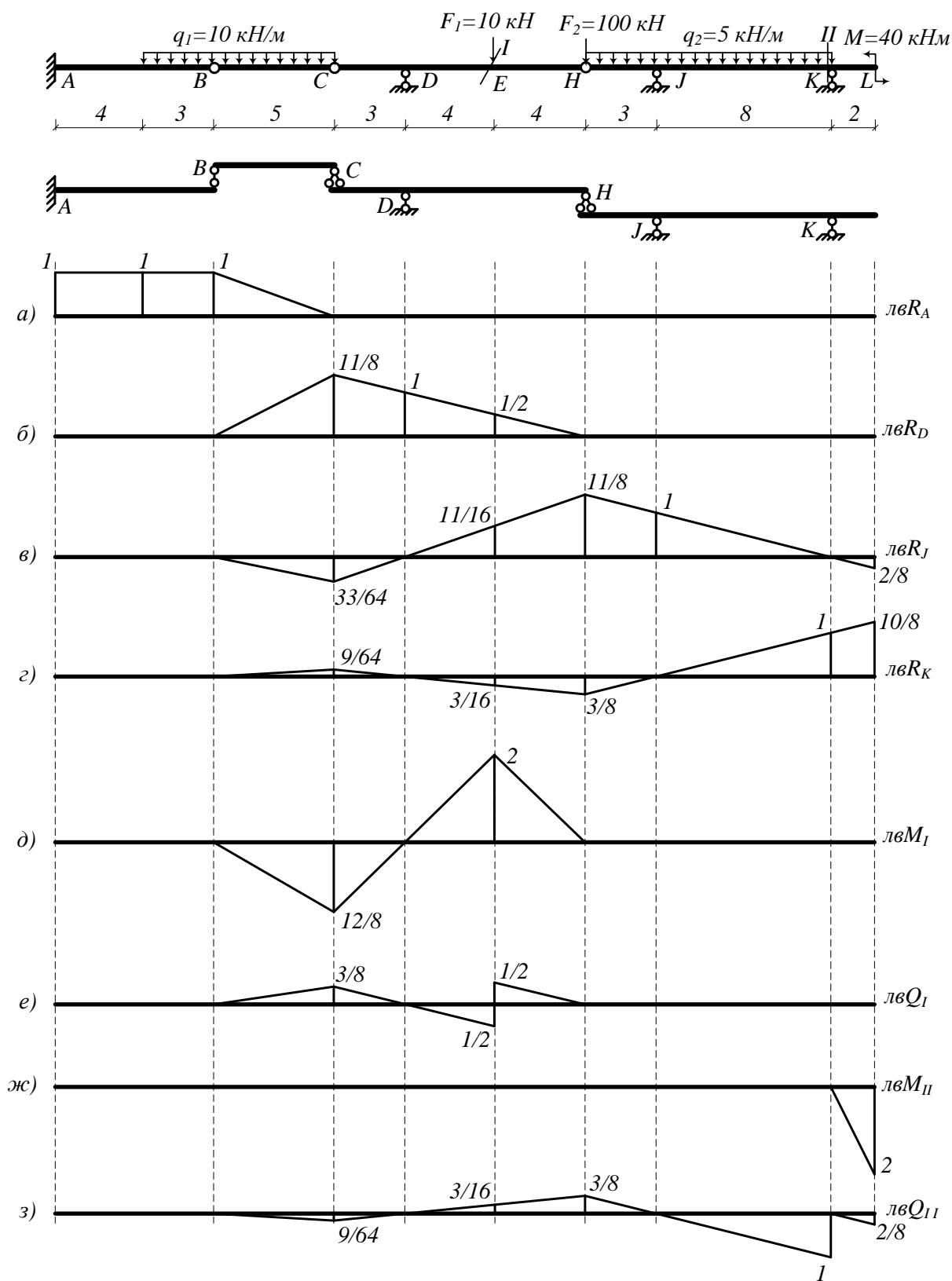
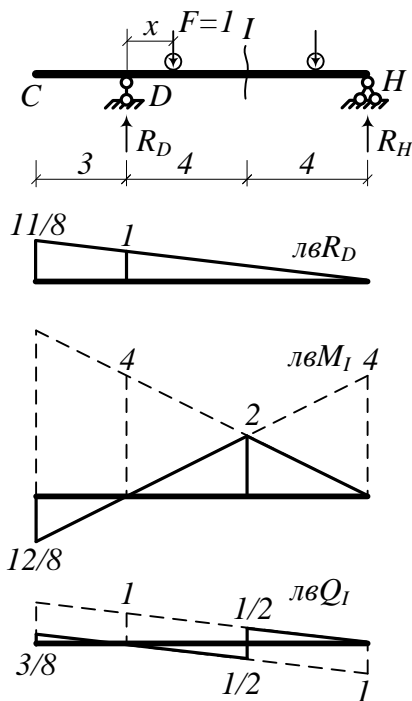


Рисунок 1.3 – Лінії впливу опорних реакцій, згинальних моментів і поперечних сил в багатопрогоновій балці



Лінія впливу R_D

Вантаж на ділянці D-H. Початок координат приймаємо в т. D.

$$\sum M_H = 0: R_D \cdot 8 - F \cdot (8 - x) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 8,$$

$$R_D = \frac{1 \cdot (8 - x)}{8} = \begin{cases} x = 0: R_D = 1, \\ x = 8: R_D = 0. \end{cases}$$

На базовій лінії під т. D відкладаємо ординату 1, під протилежною опорою (т. H) - ординату 0, і з'єднуємо дві ординати прямою лінією. Ординату в

т. C визначаємо з подібності трикутників.

Побудовану для окремої балки лінію впливу переносимо на багатопрогонову балку і поширюємо її на інші балки (рисунок 1.3, б). Одиничний вантаж перекочується на балку J-K. У поверховій схемі балка D-H опирається на балку J-K. Вплив з нижньої балки не передається на балку, яка лежить вище, отже, ординати лінії впливу на ділянці J-K дорівнюють нулю.

Одиничний вантаж перекочується на балку B-C. На поверховій схемі балка D-H знаходиться нижче балки B-C. Вплив з верхньої балки передається на балку, що лежить нижче.

Одиничний вантаж перекочується на балку A-B. На поверховій схемі балка A-B знаходиться нижче балки B-C, тобто вплив від одиничного вантажу не передається на балку B-C і тим самим не діє і на балку D-H. Отже, на ділянці A-B ординати дорівнюють нулю. З'єднуємо нульову ординату в т. B з ординатою в т. C.

Лінія впливу M_I

При побудові лінії впливу розглядаємо положення вантажу ліворуч і праворуч від перерізу.

Вантаж ліворуч. Складаємо рівняння моментів для правої частини балки.

$$M_I^{np.cил} = R_H \cdot 4, \quad лв M_I = лв R_H \cdot 4.$$

Лінія впливу моменту в перерізі I , коли вантаж перебуває зліва від перетину, повторює лінію впливу реакції R_H , всі ординати якої помножені на постійне число 4.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу R_H (одиниця під т. H і нуль під т. D) і всі її ординати збільшуємо в 4 рази. На цій лінії виділяємо ділянку зліва від перерізу, тобто ділянку, де знаходиться вантаж.

Вантаж праворуч. Складаємо рівняння моментів для лівої частини балки.

$$M_I^{лев.сил} = R_D \cdot 4, \quad лв M_I = лв R_D \cdot 4.$$

Лінія впливу моменту в перерізі I , коли вантаж перебуває праворуч від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції R_D , всі ординати якої помножені на постійне число 4.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу $R-D$ (одиниця під т. D і нуль під т. H) і всі її ординати збільшуємо в 4 рази. На цій лінії виділяємо ділянку праворуч від перерізу, тобто ділянку, де знаходиться вантаж.

Решту ординати визначаємо з подібності трикутників.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, д).

Лінія впливу Q_I

Вантаж ліворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для правої частини балки.

$$Q_I^{np.cил} = -R_H, \quad лв Q_I = лв R_H \cdot (-1).$$

Лінія впливу поперечної сили в перерізі I , коли вантаж перебуває зліва від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції R_H , всі ординати якої помножені на мінус одиницю.

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу R_H (одиниця під т. H і нуль під т. D). Знак «мінус» показує на те, що

лінію впливу R_H необхідно розгорнути симетрично вниз відносно базової лінії. На цій лінії виділяємо ділянку зліва від перерізу.

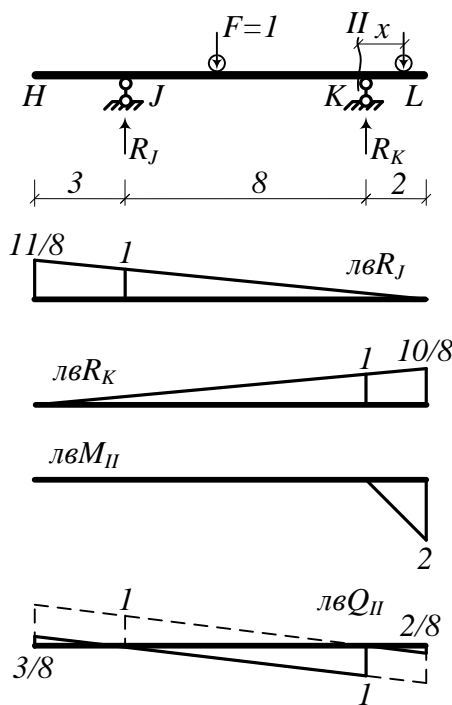
Вантаж праворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для лівої частини балки.

$$Q_I^{\text{лев.сил}} = R_D, \quad \text{лев} Q_I = \text{лев} R_D.$$

Лінія впливу поперечної сили в перерізі I , коли вантаж перебуває праворуч від перерізу, дорівнює лінії впливу реакції R_D .

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу R_D (одиниця під т. D і нуль під т. H) і на ній виділяємо ділянку праворуч від перерізу.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, е).



Лінія впливу R_J

Вантаж на ділянці $J-K$. Початок координат приймаємо в т. J .

$$\sum M_K = 0: R_J \cdot 8 - F \cdot (8 - x) = 0,$$

$$0 \leq x \leq 8,$$

$$R_J = \frac{1 \cdot (8 - x)}{8} = \begin{cases} x = 0: R_J = 1, \\ x = 8: R_J = 0. \end{cases}$$

Лінія впливу R_K

$$\sum M_J = 0: R_K \cdot 8 - F \cdot x = 0,$$

$$0 \leq x \leq 8,$$

$$R_K = \frac{1 \cdot x}{8} = \begin{cases} x = 0: R_K = 0, \\ x = 8: R_K = 1. \end{cases}$$

Переносимо лінії впливу реакцій на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, в, г).

Лінія впливу M_{II}

Вантаж ліворуч. Розглядаємо консольну частину балки.

$$M_{II}^{\text{пр.сил}} = 0.$$

Вантаж праворуч. При такому положенні вантажу так само зручніше розглядати праву консольну частину.

$$M_{II}^{np.cил} = -1 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad M_{II} = \begin{cases} x=0: & M_{II} = 0, \\ x=2: & M_{II} = -2. \end{cases}$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо прямою лінією. Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, ж).

Лінія впливу Q_{II}

Вантаж ліворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для правої частини балки.

$$Q_{II}^{np.cил} = -R_K.$$

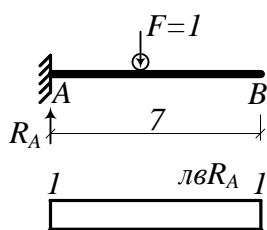
На базовій лінії пунктиром будуємо лв R_K , всі ординати якої помножені на мінус одиницю, і виділяємо ділянку зліва від перерізу.

Вантаж праворуч. Складаємо рівняння поперечної сили для лівої частини балки.

$$Q_{II}^{лев.cил} = R_J.$$

На базовій лінії пунктиром будуємо лінію впливу $R-J$ і на ній виділяємо ділянку праворуч від перерізу.

Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, з).



Лінія впливу R_A

Вантаж на ділянці $A-B$.

$$\sum Y = 0: \quad R_A - F = 0, \quad R_A = 1.$$

Всі ординати лінії впливу реакції R_A рівні одиниці, незалежно від положення рухомого вантажу. Переносимо лінію впливу на балку і поширюємо на інші ділянки (рисунок 1.3, а).

1.3 Визначення внутрішніх зусиль в багатопрогоновій балці за лініями впливу

Внутрішнє зусилля за лініями впливу визначається за формулою

$$S_i = \pm \sum F_i y_i \pm \sum q_i \omega_i \pm \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i,$$

де F_i - величина зосередженої сили, сила приймається зі знаком «плюс», якщо вона спрямована зверху вниз;

y_i - значення ординати лінії впливу під заданою силою, знак ординати приймаємо по лінії впливу (ордината, розташована над базовою лінією, вважаються додатною, під базовою лінією - від'ємною);

q_i - величина рівномірно розподіленого навантаження, розподілене навантаження приймається зі знаком «плюс», якщо воно спрямовано зверху вниз;

ω_i - площа лінії впливу, розташована під рівномірно розподіленим навантаженням, знак площі приймаємо по лінії впливу;

M_i - величина зосередженого моменту, зосереджений момент приймається зі знаком «плюс», якщо він спрямований за годинниковою стрілкою;

$\operatorname{tg} \alpha_i$ - тангенс кута нахилу лінії впливу до горизонталі в місці прикладання зосередженого моменту, тангенс позитивний, якщо функція лінії впливу зростаюча, від'ємний - функція спадає.

$$R_A = q_1 \cdot (1 \cdot 3) + q_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \right) = 10 \cdot 1 \cdot 3 + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 55 \text{ кН}.$$

$$R_D = q_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 39.375 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned}
R_J &= q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{33}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{11}{16} + F_2 \cdot \frac{11}{8} + q_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot (3+8) \right) + \\
&+ (-M) \cdot \left(-\frac{2}{8} / 2 \right) = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{64} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{11}{16} + 100 \cdot \frac{11}{8} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} \cdot 11 + \\
&\quad + 40 \cdot \frac{2}{8 \cdot 2} = 174.2969 \kappa H.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_K &= q_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \left(-\frac{3}{16} \right) + F_2 \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) + q_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 \right) + \\
&q_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \right) + (-M) \cdot \left(\frac{10}{8} / (8+2) \right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 - 10 \cdot \frac{3}{16} - \\
&- 100 \cdot \frac{3}{8} - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 - 40 \cdot \frac{10}{8 \cdot 10} = -23.6719 \kappa H.
\end{aligned}$$

$$M_I = q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot 2 = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8} \cdot 5 + 10 \cdot 2 = -17.50 \kappa H M.$$

$$Q_I^{neg} = q_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 14.375 \kappa H.$$

$$Q_{II}^{np} = q_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 4.375 \kappa H.$$

$$M_{II} = -M \cdot \left(-\frac{2}{2} \right) = 40 \cdot \frac{2}{2} = 40 \kappa H M.$$

$$\begin{aligned}
Q_{II} &= q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 \right) + F_1 \cdot \frac{3}{16} + F_2 \cdot \frac{3}{8} + q_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 \right) + \\
&+ q_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \right) + (-M) \cdot \left(-\frac{2}{8} / 2 \right) = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{3}{16} + \\
&+ 100 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 + 40 \cdot \frac{2}{8 \cdot 2} = 23.6719 \kappa H.
\end{aligned}$$

2 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ СИЛ

Приклад 2.1. Виконати розрахунок плоскої статично невизначної рами методом сил від дії зовнішнього навантаження (рисунок 2.1).

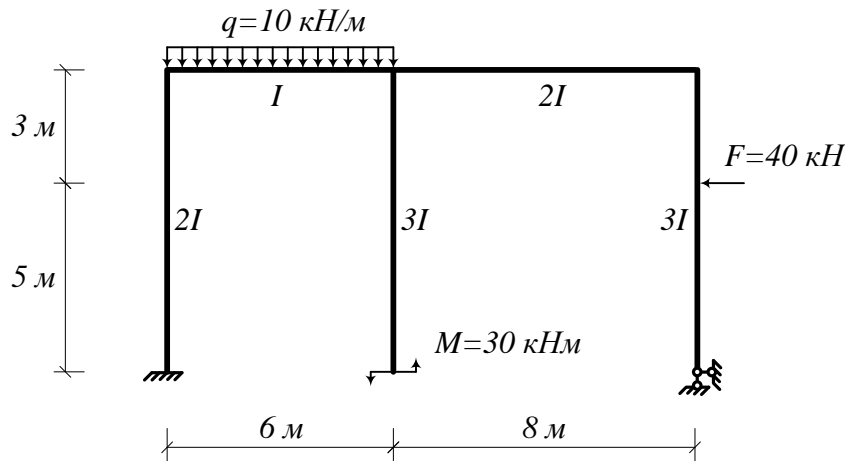


Рисунок 2.1 - Розрахункова схема статично невизначної рами

2.1 Визначення ступеня статичної невизначності

Ступінь статичної невизначності визначаємо виходячи з поняття замкнутого контуру (рисунок 2.2).

$$L = 3K - III,$$

де K - кількість замкнутих контурів;

III - кількість простих шарнірів.

Умовно проводимо лінію землі, з'єднуючи між собою опори. Рама і земля дають перший контур, другий контур утворюють стержні шарнірно-нерухомої опори і земля. Шарнірно-нерухома опора містить чотири простих шарніри (середній шарнір подвійний, так як з'єднує три диски - стержень рами і два стержня опори).

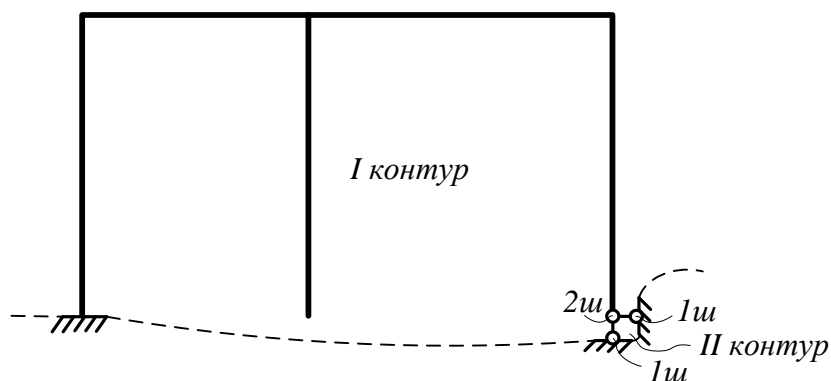


Рисунок 2.2 - До визначення ступеня статичної невизначності

$$L = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Розглянута рама двічі статично невизначна або має два зайвих зв'язки.

2.2 Вибір основної системи

Основну систему отримаємо з заданої розрахункової схеми шляхом відкидання умовно зайвих зв'язків. Зв'язки необхідно відкидати так, щоб система залишалася геометрично незмінною. Крім того, при виборі основної системи необхідно дотримуватися таких умов: епюри згинальних моментів (одиничні та вантажні), побудовані в основній системі, повинні мати якомога більше нульових ділянок; кількість обчислень, пов'язаних з визначенням коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь має бути мінімальною. Так як задана рама двічі статично невизначна, то відкидаємо два зв'язки і замінюємо їх невідомими реакціями X_1 і X_2 .

Розглянемо декілька варіантів основної системи. У першому варіанті (рисунок 2.3, а) відкидаємо момент в закріпленні і горизонтальний зв'язок в шарнірно-нерухомій опорі. У другому варіанті (рисунок 2.3, б) відкидаємо вертикальний і горизонтальний зв'язок в шарнірно-нерухомій опорі. У третьому варіанті (рисунок 2.3, в) відкидаємо момент в закріпленні та додамо шарнір між середньою стійкою і правим ригелем, тобто відкидаємо зв'язок, який перешкоджає їх взаємному повороту.

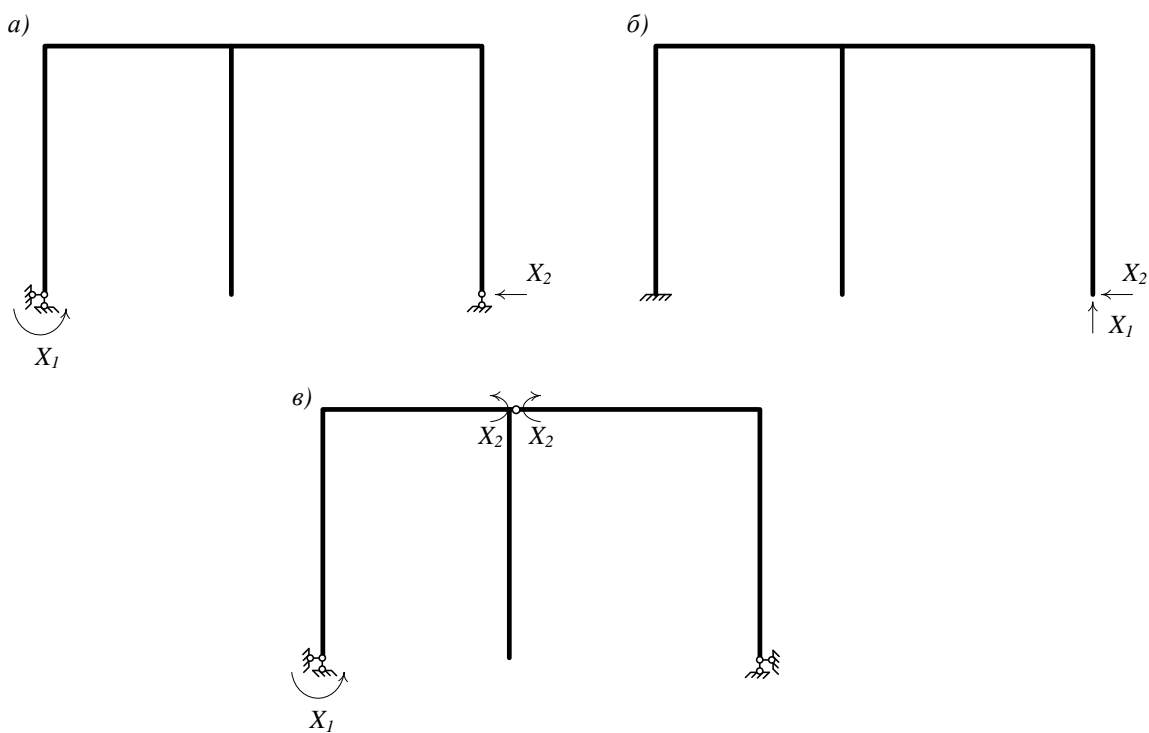


Рисунок 2.3 - Варіанти основної системи

Для поданих варіантів основних систем, використовуючи метод перерізів, правило знаків для згинальних моментів і принцип незалежності дії сил будуюмо одиничні (від $X_1=1$ і $X_2=1$) та вантажні (від зовнішнього навантаження) епюри моментів (рисунки 2.4-2.9).

Варіант 1

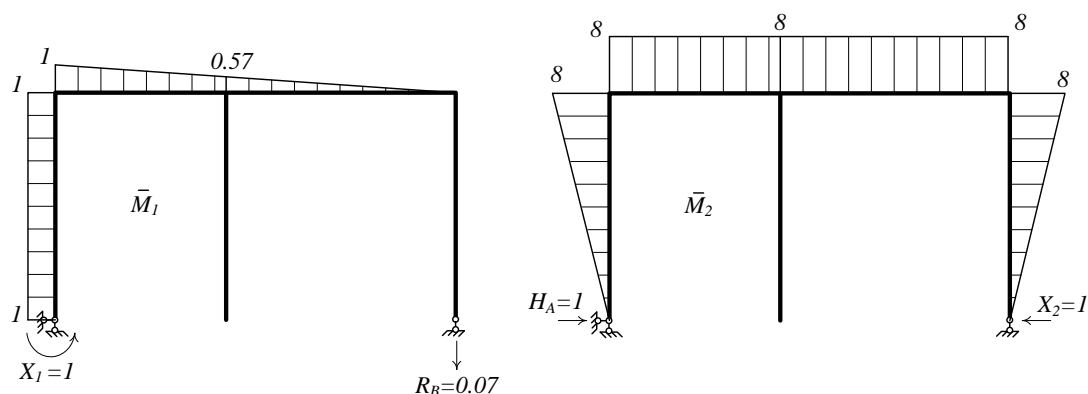


Рисунок 2.4 - Одиничні епюри моментів

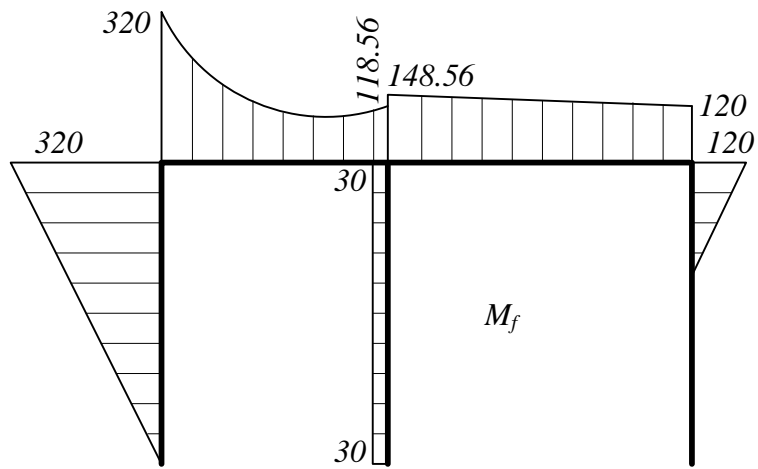
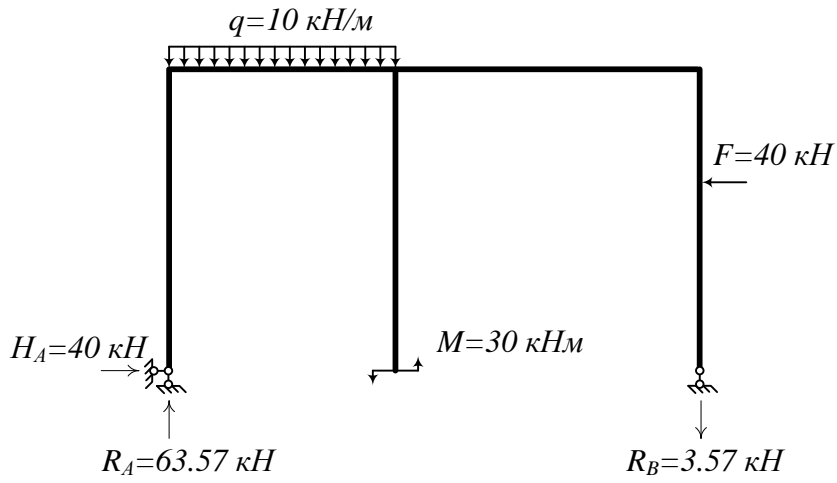


Рисунок 2.5 - Вантажна епюра моментів

Варіант 2

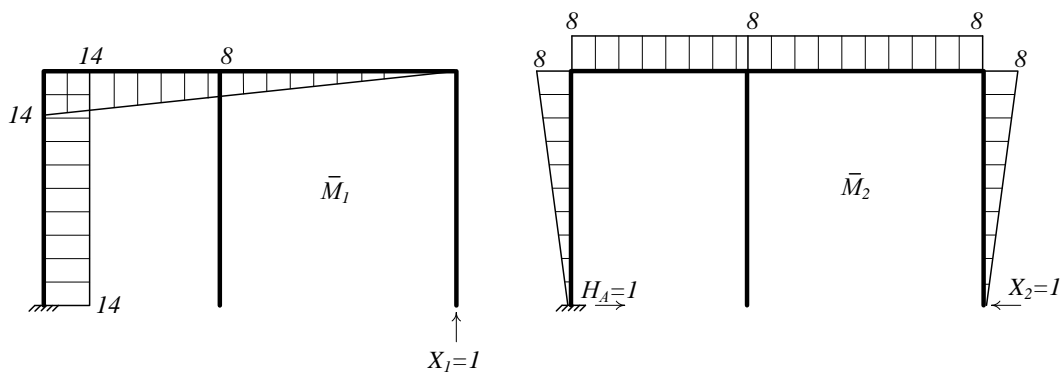


Рисунок 2.6 - Одиничні епюри моментів

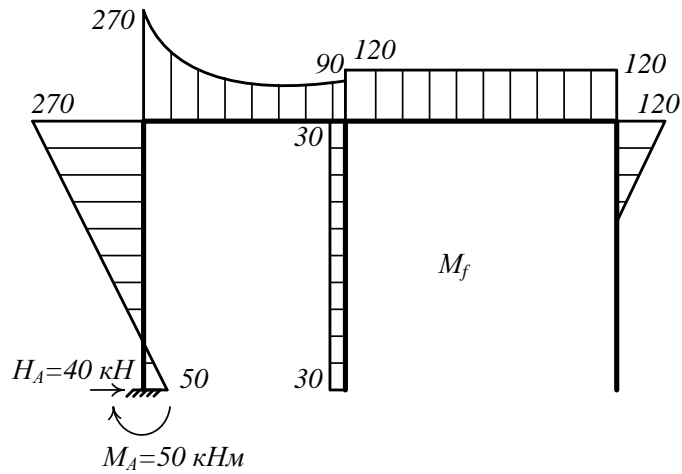


Рисунок 2.7 - Вантажна епюра моментів

Варіант 3

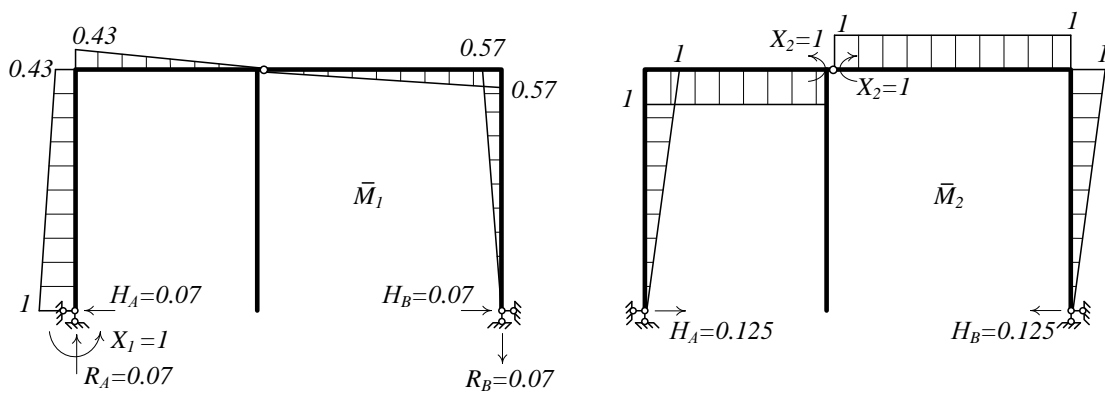


Рисунок 2.8 - Одиничні епюри моментів

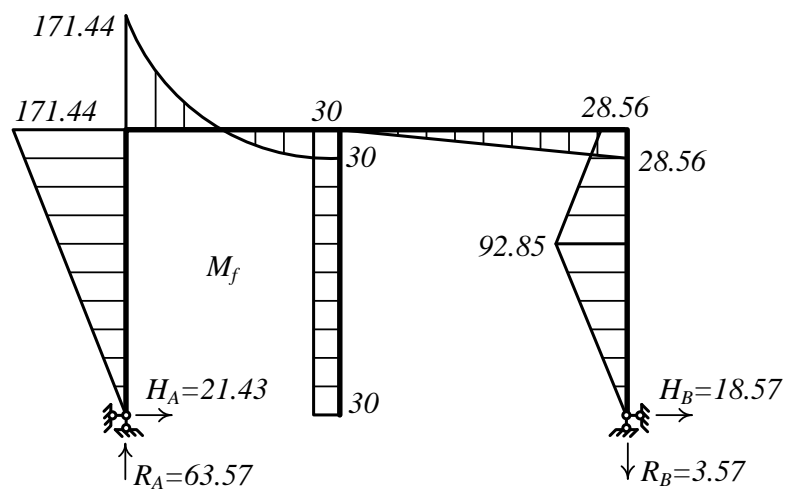


Рисунок 2.9 - Вантажна епюра моментів

Аналізуючи епюри, можна сказати, що найбільш явну раціональну систему виділити не можна. Одиничні епюри варіантів 1 і 2 ідентичні та, на відміну від варіанта 3, мають ділянки з нульовими координатами. Вантажна епюра варіанта 1 складається з простих фігур. Для подальшого розрахунку приймаємо перший варіант основної системи.

2.3 Система канонічних рівнянь

Умова еквівалентності основної і заданої систем записується у вигляді системи канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює числу невідомих, отже, система складатиметься з двох рівнянь.

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1f} = 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2f} = 0 \end{cases}$$

де X_1, X_2 – невідомі методу сил;

δ_{ij} - одиничні коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил, переміщення в основній системі за напрямком відкинутих зв'язків, викликані реакціями зв'язків, що дорівнюють одиниці;

Δ_{if} - вільні члени системи канонічних рівнянь методу сил, переміщення в основній системі за напрямком відкинутих зв'язків, які викликані зовнішнім навантаженням.

2.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь являють собою переміщення, які визначаються методом Мора. Інтеграл, що входить у формулу Мора, обчислюється за правилом Верещагіна

$$\delta_{ij} = \frac{y_i \omega_j}{EI},$$

де y_i – ордината під центром ваги криволінійної епюри, взята на прямолінійній епюрі;

Ω_j – площа криволінійної епюри;

EI – жорсткість поперечного перерізу,
або за формулою Сімпсона-Корнаухова

$$\delta_{ij} = \frac{l}{6EI} (M_i^{лев} \cdot M_j^{лев} + 4 \cdot M_i^{cp} \cdot M_j^{cp} + M_i^{np} \cdot M_j^{np}),$$

де l – довжина ділянки;

$M_i^{лев}, M_j^{лев}, M_i^{cp}, M_j^{cp}, M_i^{np}, M_j^{np}$ – ординати епюр на початку, в середині та на кінці ділянки.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{6}{6} \left(1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \cdot \frac{1+0.57}{2} + 0.57 \cdot 0.57 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.57 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.57 \right] = \frac{8.223}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right) = \frac{782.222}{EI};$$

$$\delta_{21} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{1+0.57}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.57 \right) = \frac{62.80}{EI};$$

$$\Delta_{1f} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{320}{2} + \frac{6}{6} \left(1 \cdot 320 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \times \frac{320+118.56}{2} + 0.57 \cdot 118.56 \right) - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1+0.57}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.57 \cdot \left(120 + \frac{2}{3} \cdot 28.56 \right) \right] = \frac{1733.324}{EI};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 320 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{320 + 118.56}{2} - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{148.56 + 120}{2} + \frac{3}{6 \cdot 3} \left(8 \cdot 120 + 4 \cdot \frac{8 + 5}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{120}{2} + 0 \cdot 5 \right) \right] = \frac{17215.733}{EI}.$$

2.5 Перевірка правильності визначення коефіцієнтів і вільних членів

Для виконання перевірки будемо сумарну одиничну епюру моментів

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

В характерних точках підсумовуємо ординати епюр з урахуванням знака і відкладаємо з боку більшої ординати (рисунок 2.10).

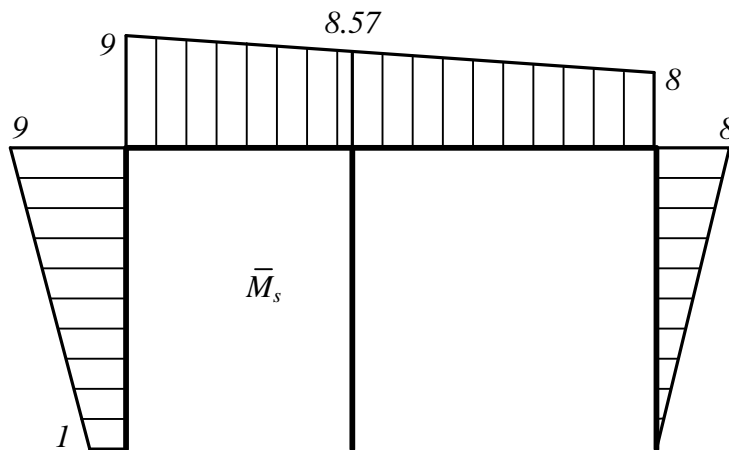


Рисунок 2.10 - Сумарна одинична епюра

Виконуємо універсальну перевірку

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\overline{M}_s \overline{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21}.$$

Обчислюємо ліву частину формули

$$\begin{aligned} \delta_{ss} = \sum \int \frac{\overline{M}_s \overline{M}_s}{EI} ds &= \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6 \cdot 2} \left(1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1+9}{2} \cdot \frac{1+9}{2} + 9 \cdot 9 \right) + \right. \\ &+ \frac{6}{6} \left(9 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{9+8.57}{2} \times \frac{9+8.57}{2} + 8.57 \cdot 8.57 \right) + \\ &+ \frac{8}{6 \cdot 2} \left(8.57 \cdot 8.57 + 4 \cdot \frac{8.57+8}{2} \cdot \frac{8.57+8}{2} + 8 \cdot 8 \right) + \\ &\left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right] = \frac{916.045}{EI}. \end{aligned}$$

Обчислюємо праву частину формули

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{8.22}{EI} + \frac{782.22}{EI} + \frac{62.80}{EI} + \frac{62.80}{EI} = \frac{916.045}{EI}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини, бачимо, що рівність виконується, отже, коефіцієнти системи канонічних рівнянь визначені правильно. Якщо результати не збігалися, необхідно виконати порядкову перевірку, тобто перевірити окремо коефіцієнти кожного рівняння. Проілюструємо це.

Виконаємо перевірку коефіцієнтів першого рівняння

$$\delta_{1s} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_s}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{12}.$$

Обчислюємо ліву частину формули

$$\begin{aligned} \delta_{1s} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_s}{EI} ds &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{9+1}{2} + \frac{6}{6} \left(1 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{1+0.57}{2} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{9+8.57}{2} + 0.57 \cdot 8.57 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.57 \cdot \left(8 + \frac{2}{3} \cdot 0.57 \right) \right] = \frac{71.023}{EI}. \end{aligned}$$

Обчислюємо праву частину формули

$$\delta_{1s} = \delta_{11} + \delta_{12} = \frac{8.22}{EI} + \frac{62.8}{EI} = \frac{71.023}{EI}.$$

Рівність правої і лівої частини говорить про те, що коефіцієнти першого рівняння визначено правильно.

Аналогічно виконується перевірка коефіцієнтів другого рівняння

$$\delta_{2s} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_s}{EI} ds = \delta_{22} + \delta_{21}.$$

Перевіряємо правильність обчислення вільних членів

$$\Delta_{sf} = \sum \int \frac{\overline{M}_s \overline{M}_f}{EI} ds = \Delta_{1f} + \Delta_{2f}.$$

Обчислюємо ліву частину виразу

$$\begin{aligned} \Delta_{sf} = \sum \int \frac{\overline{M}_s \overline{M}_f}{EI} ds = & \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 8 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) + \frac{6}{6} (320 \cdot 9 + \right. \\ & + 4 \cdot \frac{320 + 118.56}{2} \cdot \frac{9 + 8.57}{2} + 118.56 \cdot 8.57) - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{9 + 8.57}{2} + \\ & + \frac{8}{6 \cdot 2} \left(148.56 \cdot 8.57 + 4 \cdot \frac{148.56 + 120}{2} \times \frac{8.57 + 8}{2} + 120 \cdot 8 \right) + \\ & \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 3 \cdot \left(5 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] = \frac{18949.057}{EI}. \end{aligned}$$

Обчислюємо праву частину

$$\Delta_{sf} = \Delta_{1f} + \Delta_{2f} = \frac{1733.32}{EI} + \frac{17215.73}{EI} = \frac{18949.057}{EI}.$$

Рівність правої і лівої частини говорить про те, що вільні члени системи канонічних рівнянь визначені правильно.

2.6 Розв'язання системи канонічних рівнянь

Виконуємо розв'язання системи канонічних рівнянь

$$\begin{cases} X_1 \cdot 8.223 + X_2 \cdot 62.8 + 1733.324 = 0 \\ X_1 \cdot 62.8 + X_2 \cdot 782.222 + 17215.733 = 0 \end{cases}$$

У результаті розрахунку системи отримуємо

$$\begin{cases} X_1 = -110.3919 \text{кН} \\ X_2 = -13.1460 \text{кН} \end{cases}$$

2.7 Побудова епюри моментів у заданій статично невизначній системі

Побудова остаточної епюри моментів виконується за формулою

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_f$$

Тобто необхідно підсумувати ординати виправлених одиничних (рисунок 2.11) та вантажної (рисунок 2.12) епюр моментів у характерних точках з урахуванням знака ординат.

Виправлені епюри ($\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_2 X_2$) отримуємо шляхом множення ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих (X_1 , X_2).

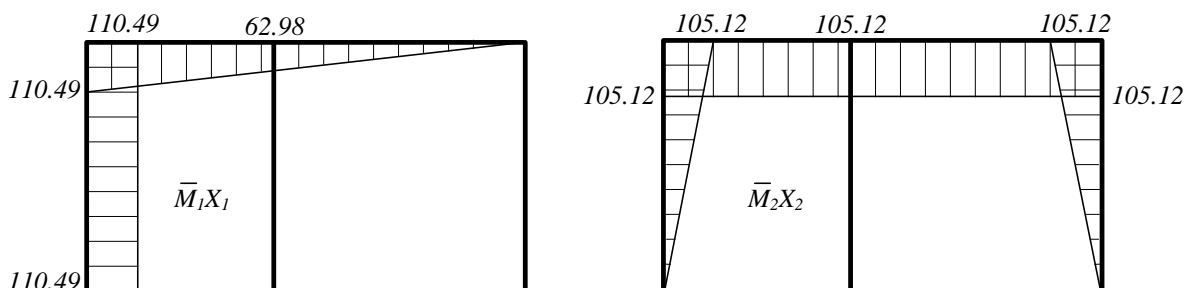


Рисунок 2.11 - Виправлені одиничні епюри моментів

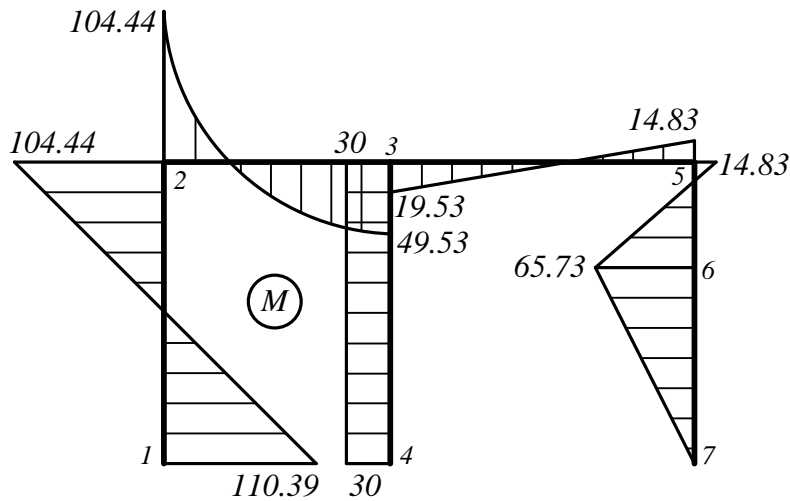


Рисунок 2.12 - Остаточна епюра моментів

2.8 Перевірка правильності побудови епюри M

Перевіряємо рівновагу у вузлах. Для цього вирізаємо вузли (рисунок 2.13) і складаємо рівняння моментів $\sum M_{уз} = 0$.

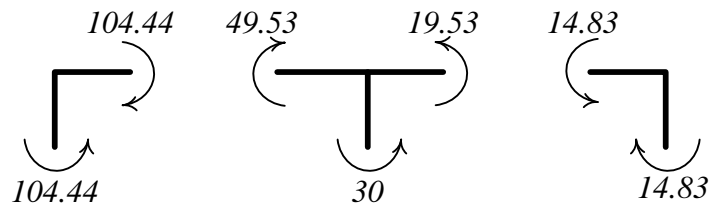


Рисунок 2.13 - Перевірка рівноваги у вузлах

Виконуємо деформаційну перевірку. Якщо епюра моментів побудована правильно, має виконуватися умова: результат перемноження остаточної епюри моментів на будь-яку з одиничних чи сумарну має дорівнювати нулю.

$$\sum \int \frac{MM_s}{EI} ds = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM_s}{EI} ds = & \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6 \cdot 2} \left(-1 \cdot 110.49 - 4 \cdot \frac{1+9}{2} \cdot \frac{110.39 - 104.44}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 9 \cdot 104.44 \right) + \frac{6}{6} \left(9 \cdot 104.44 + 4 \cdot \frac{9+8.57}{2} \cdot \frac{104.44 - 49.53}{2} - 8.57 \cdot 49.53 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{9+8.57}{2} + \frac{8}{6 \cdot 2} \left(-8.57 \cdot 19.53 - 4 \cdot \frac{8.57+8}{2} \cdot \frac{19.53 - 14.83}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 8 \cdot 14.83 \right) + \frac{3}{6 \cdot 3} \left(8 \cdot 14.83 - 4 \cdot \frac{8+5}{2} \cdot \frac{65.73 - 14.83}{2} - 5 \cdot 65.73 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 65.73 \right] = \frac{0.06}{EI}. \end{aligned}$$

2.9 Побудова епюри поперечних сил Q

Розрахункова епюра поперечних сил будується за допомогою епюри моментів з використанням залежності

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l},$$

де Q^0 - балочна поперечна сила, поперечна сила від зовнішнього навантаження;

M_n, M_{n-1} , - величини згинальних моментів на кінцях розглянутої ділянки (рисунок 2.14).

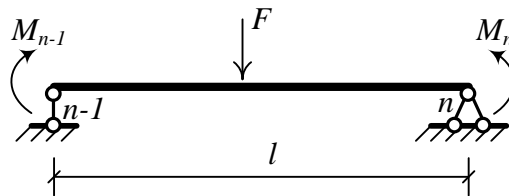
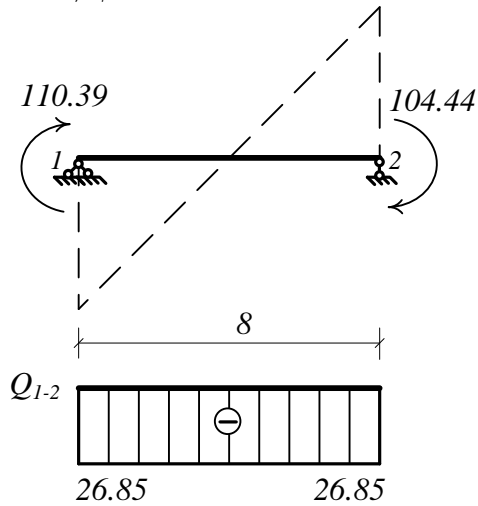


Рисунок 2.14 – До визначення поперечної сили

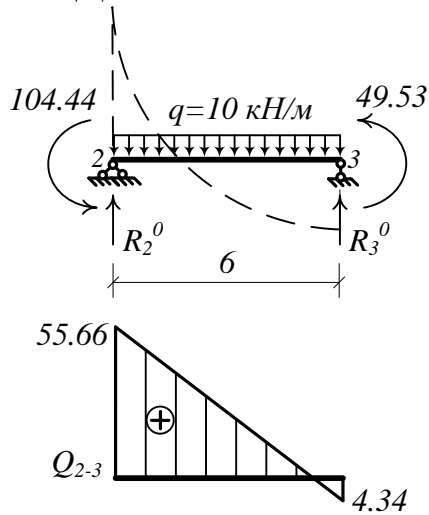
Кожен елемент рами розглядаємо як балку на двох опорах, завантажену опорними моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на ділянці відсутнє, то $Q^0=0$).

Ділянка 1-2



$$Q_{1-2} = \frac{-104.44 - 110.39}{8} = -26.85 \text{ кН}.$$

Ділянка 2-3



Визначаємо балкові реакції:

$$R_2^0 = R_3^0 = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ кН}.$$

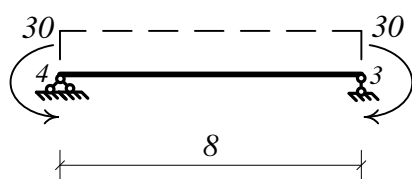
Обчислюємо поперечні сили в т. 2 і 3:

$$Q_2^0 = R_2^0 = 30 \text{ кН}, \quad Q_3^0 = -R_3^0 = -30 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 30 + \frac{49.53 + 104.44}{6} = 55.66 \text{ кН},$$

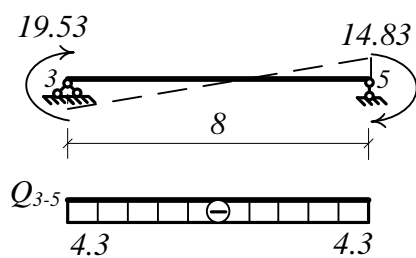
$$Q_3 = -30 + \frac{49.53 + 104.44}{6} = -4.34 \text{ кН}.$$

Ділянка 3-4

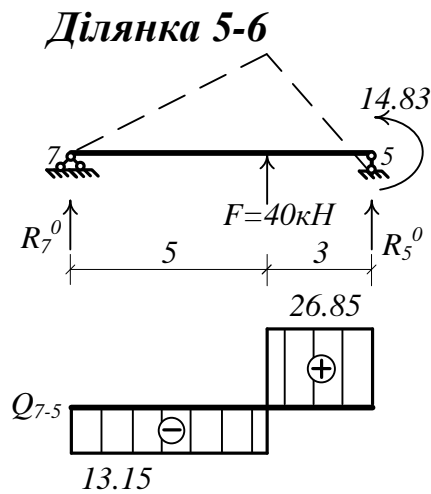


$$Q_{3-4} = \frac{-30 + 30}{8} = 0.$$

Ділянка 3-5



$$Q_{3-5} = \frac{-14.83 - 19.53}{8} = -4.3 \text{ кН}.$$



Визначаємо балкові реакції:

$$\sum M_5 = 0: R_7^0 = \frac{40 \cdot 3}{8} = 15 \text{ кН},$$

$$\sum M_7 = 0: R_5^0 = \frac{40 \cdot 5}{8} = 25 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в т. 7 і 5:

$$Q_7^0 = -R_7^0 = -15 \text{ кН},$$

$$Q_5^0 = R_5^0 = 25 \text{ кН}, \quad Q_7 = -15 + \frac{14.83 - 0}{8} = -13.15 \text{ кН},$$

$$Q_5 = 25 + \frac{14.83 - 0}{8} = 26.85 \text{ кН}.$$

Розрахункова еюра поперечних сил в заданій статично невизначній системі показана на рисунку 2.15.

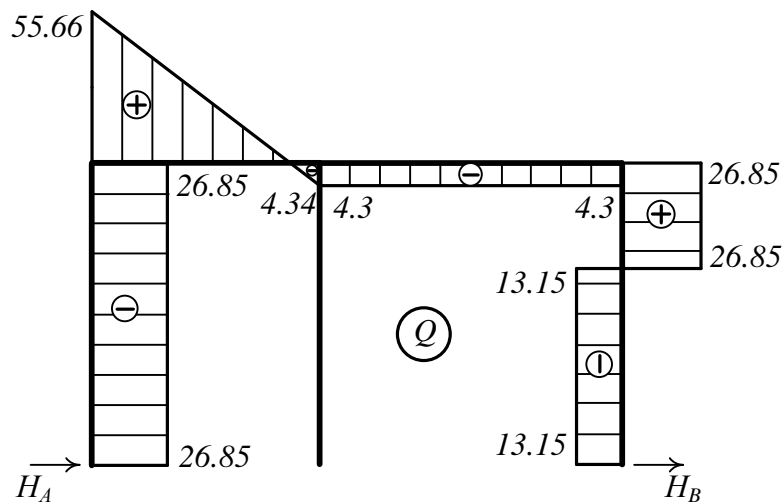
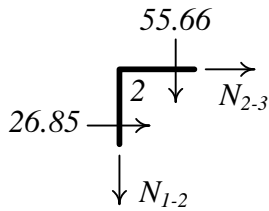


Рисунок 2.15 - Еюра поперечних сил

2.10 Побудова еюри поздовжніх сил N

Еюру поздовжніх сил будуюмо способом вирізання вузлів з еюри Q і складанням рівнянь рівноваги $\sum Y = 0$, $\sum X = 0$.

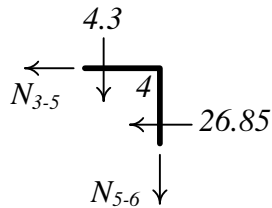
Вузол 2



$$\sum X = 0: N_{2-3} + 26.85 = 0, N_{2-3} = -26.85 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0: -N_{1-2} - 55.66 = 0, N_{1-2} = -55.66 \text{ кН}.$$

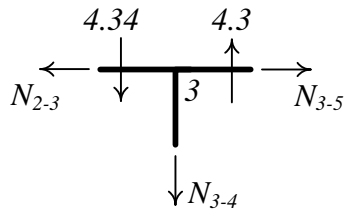
Вузол 5



$$\sum X = 0: -N_{3-5} - 26.85 = 0, N_{3-5} = -26.85 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0: -N_{5-6} - 4.3 = 0, N_{5-6} = -4.3 \text{ кН}.$$

Вузол 3



$$\sum X = 0: -N_{2-3} + N_{3-5} = 0,$$

$$-26.85 + 26.85 = 0.$$

$$\sum Y = 0: -N_{3-4} - 4.34 + 4.3 = 0, N_{3-4} \approx 0.$$

Розрахункова еюра поздовжніх сил в заданій статично невизначній системі показана на рисунку 2.16.

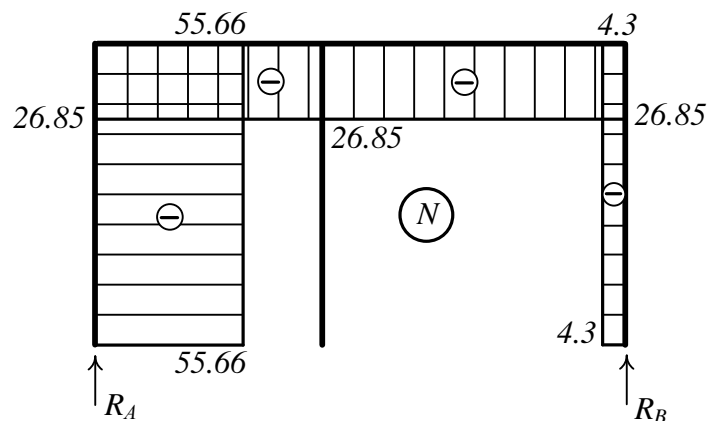


Рисунок 2.16 - Еюра поздовжніх сил

2.11 Перевірка правильності побудови епюр Q і N

Відсікаємо раму від опорних закріплень і розглядаємо її рівновагу під дією зовнішнього навантаження і опорних реакцій. Величини і напрямки реакцій приймаємо з епюр Q і N (рисунок 2.17).

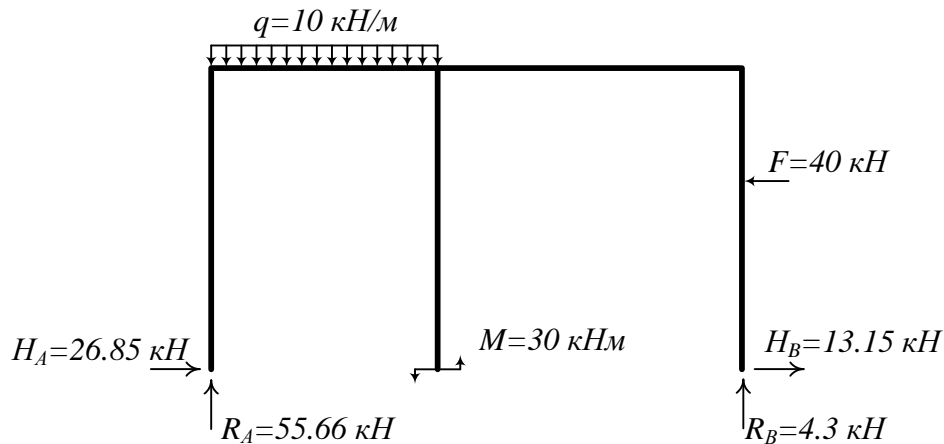


Рисунок 2.17 - Перевірка умови рівноваги рами

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum X = 0: & 26.85 + 13.15 - 40 = 0, \quad 40 - 40 = 0, \\ \sum Y = 0: & 55.66 - 10 \cdot 6 + 4.3 = 0, \quad 59.96 - 60 \approx 0.\end{aligned}$$

Так як рівняння виконуються, система знаходиться в рівновазі.

3 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Приклад 3.1. Виконати розрахунок плоскої статично невизначної рами методом переміщень від дії зовнішнього навантаження (рисунок 3.1).

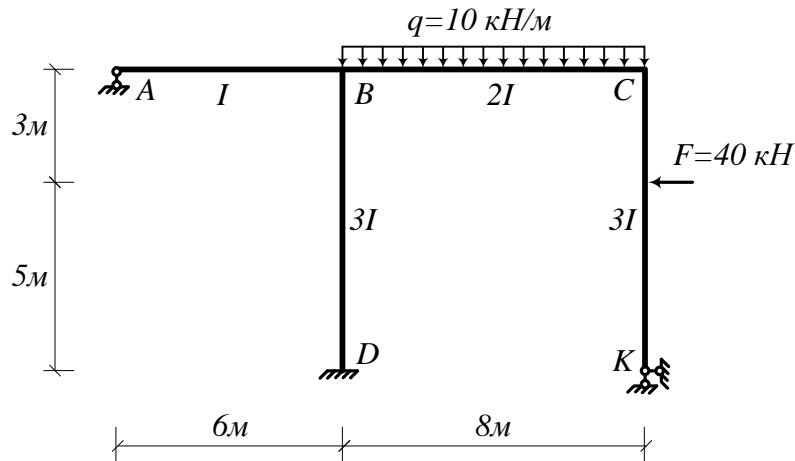


Рисунок 3.1 - Розрахункова схема статично невизначної системи

3.1 Визначення ступеня кінематичної невизначності

Загальне число невідомих незалежних переміщень вузлів рами визначаємо за формулою

$$n = n_y + n_l,$$

де - n_y - кількість можливих кутових переміщень;

n_l - кількість можливих лінійних переміщень.

У розглянутій рамі значення n_y дорівнює числу жорстких вузлів без врахування опорних вузлів $n_y = 2$ (вузли B і C).

Для визначення числа лінійних невідомих n_l необхідно замінити задану систему шарнірно-стержневою схемою (рисунок 3.2) шляхом введення повних шарнірів у всі жорсткі вузли (точки B і C) і опорні закріплення (точка D).

Кількість лінійних переміщень вузлів системи дорівнює числу стержнів, які необхідно ввести в шарнірно-стержневу схему, щоб перетворити її на геометрично незмінну. Аналізуючи шарнірно-стержневу систему, бачимо, що вузли A , B , C можуть переміщуватися по горизонталі.

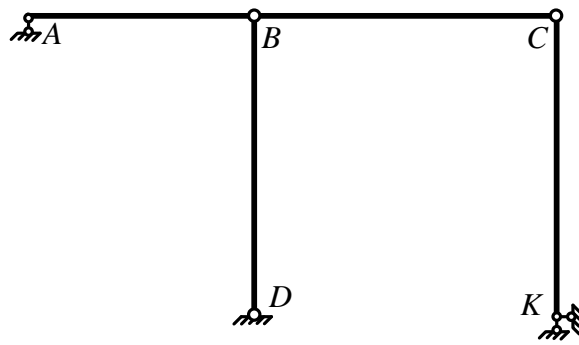


Рисунок 3.2 - Шарнірно-стержнева система

Число незалежних лінійних переміщень визначаємо за формулою

$$n_{\text{л}} = III - 3K = 13 - 3 \cdot 4 = 1,$$

де III – число усіх простих одиночних шарнірів,
 K – число замкнутих контурів, включаючи землю.

Щоб обмежити переміщення цих вузлів, додаємо один горизонтальний стержень.

Загальне число невідомих переміщень дорівнює

$$n = 2 + 1 = 3.$$

3.2 Основна система методу переміщень

Основну систему (рисунок 3.3) отримуємо шляхом введення в усі жорсткі вузли плаваючих закріплень (вузли B і C) і постановкою додаткових стержнів (вузол A), що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

За основні невідомі методу переміщень приймаємо кутові (Z_1, Z_2) та лінійні (Z_3) переміщення вузлів.

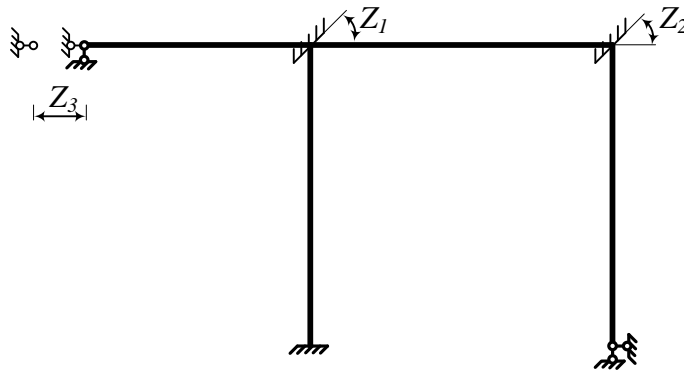


Рисунок 3.3 - Основна система методу переміщень

3.3 Система канонічних рівнянь

Основна система відрізняється від заданої додатковими зв'язками. У введених закріпленнях виникають реактивні моменти, в додаткових стержнях - реактивні зусилля. Реактивні моменти і реактивні зусилля можна обернути на нуль, якщо повернути закріплення на кути рівні дійсним поворотам вузлів, і змістити вузли так, щоб їх лінійні переміщення були рівні переміщенням, що виникають в заданій системі. Математичний запис цього факту виражається системою канонічних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює числу невідомих переміщень, отже, система складатиметься з трьох рівнянь.

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1f} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{21} + R_{2f} = 0 \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3f} = 0 \end{cases}$$

де Z_i – невідомі методу переміщень;

r_{ij} - коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу переміщень; реактивні моменти (зусилля) у введених заземленнях (в додаткових зв'язках) від повороту (лінійного переміщення) зв'язку на одиницю;

R_{if} - вільні члени системи канонічних рівнянь методу переміщень; реактивні моменти (зусилля) у зв'язках, викликані зовнішнім навантаженням.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь будуємо одиничні (рисунки 3.4, 3.5) та вантажну (рисунок 3.6) епюри моментів. Епюри будуються з використанням таблиць стандартних рішень (додаток А).

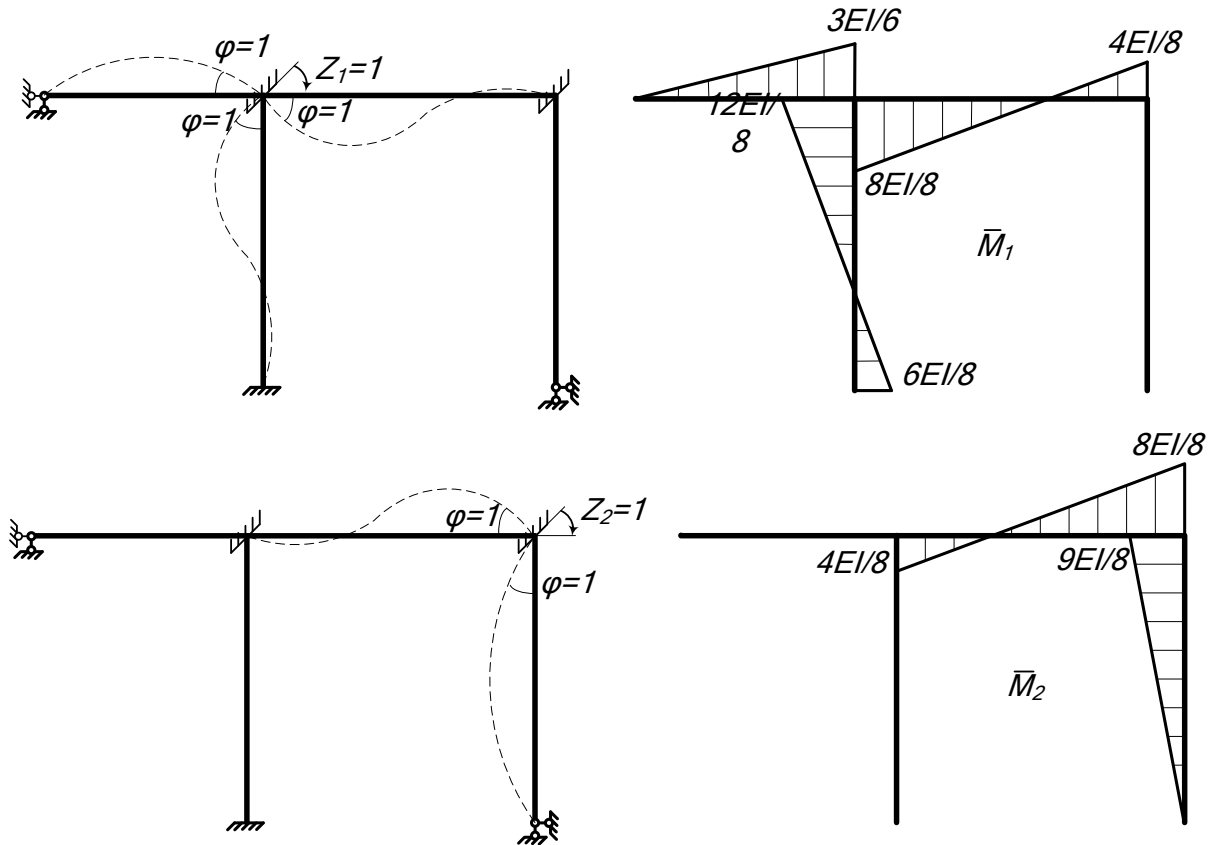


Рисунок 3.4 - Схеми деформування стержнів і одиничні епюри моментів

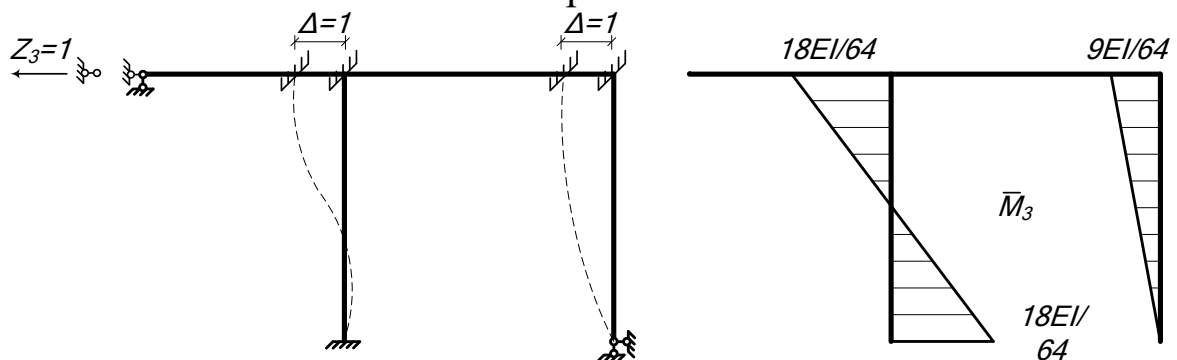


Рисунок 3.5 - Схеми деформування стержнів і одиничні епюри моментів

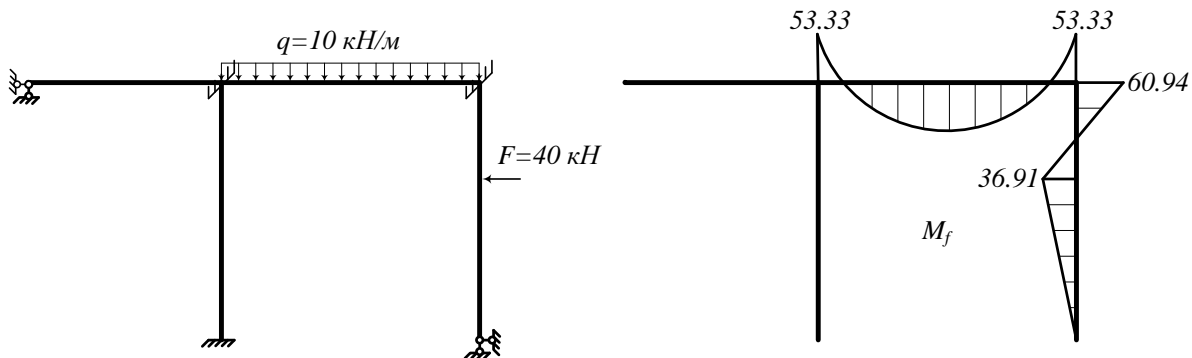
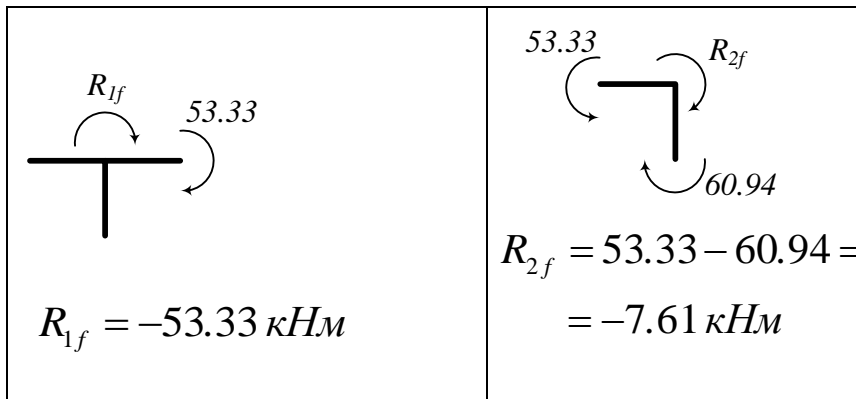


Рисунок 3.6 - Вантажна еюра моментів

3.4 Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Для визначення коефіцієнтів використовуємо статичний спосіб. Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні моменти у введених закріпленнях, визначаємо шляхом вирізання вузлів і складанням рівнянь рівноваги $\sum M_y = 0$.

$r_{11} = \frac{3EI}{6} + \frac{12EI}{8} + \frac{8EI}{8} = 3EI$	$r_{12} = \frac{4EI}{8} = 0.5EI$	$r_{13} = \frac{18EI}{64} = 0.281EI$
$r_{22} = \frac{8EI}{8} + \frac{9EI}{8} = 2.125EI$	$r_{21} = \frac{4EI}{8} = 0.5EI$	$r_{23} = \frac{9EI}{64} = 0.141EI$



Коефіцієнти і вільні члени, які являють собою реактивні зусилля в додаткових стержнях, визначаємо за допомогою перерізів, які відсікають раму або частину рами від опор, і складанням рівнянь рівноваги $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$. У розсічених стержнях одиничних та вантажних епюр моментів визначаємо величини поперечних сил за формулою

$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l},$$

де Q^0 - балочна поперечна сила, поперечна сила від зовнішнього навантаження;

M_n , M_{n-1} , - величини згинальних моментів на кінцях розглянутої ділянки.

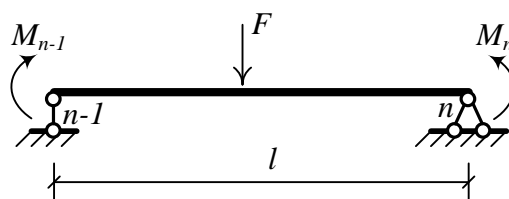
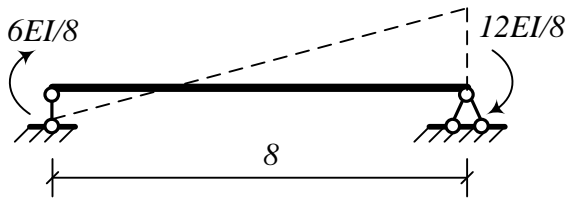


Рисунок 3.7 – До визначення поперечної сили

Кожен елемент рами розглядаємо як балку на двох опорах (рисунок 3.7), завантажену опорними моментами і зовнішнім навантаженням (якщо зовнішнє навантаження на ділянці відсутнє, то $Q^0 = 0$). При визначенні Q враховують знак згинального моменту.

Проілюструємо на прикладі однієї ділянки епюри M_1 (лівий стояк):



$$Q = \frac{-\frac{12EI}{8} - \frac{6EI}{8}}{8} = -0.070EI.$$

Так як поперечну силу отримано зі знаком «мінус», то силу по відношенню до розтину направляємо проти годинникової стрілки (відповідно до правила знаків поперечних сил).

	$r_{33} = 0.070EI + 0.018EI = 0.088EI$
	$r_{31} = 0.281EI$
	$r_{32} = 0.141EI$
	$R_{3f} = -32.62 \text{ кН}$

Для перевірки правильності обчислення реактивних зусиль і моментів з різними індексами використовуємо рівність $r_{ik} = r_{ki}$. Як бачимо з наданого розрахунку, $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$, отже, вони визначені правильно.

Виконуємо розрахунок системи канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} 3EIZ_1 + 0.5EIZ_2 + 0.281EIZ_3 - 53.33 = 0 \\ 0.5EIZ_1 + 2.125EIZ_2 + 0.141EIZ_3 - 7.61 = 0 \\ 0.281EIZ_1 + 0.141EIZ_2 + 0.088EIZ_3 - 32.62 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = -\frac{23.6324}{EI} \\ Z_2 = -\frac{22.8954}{EI} \\ Z_3 = \frac{482.8291}{EI} \end{cases}.$$

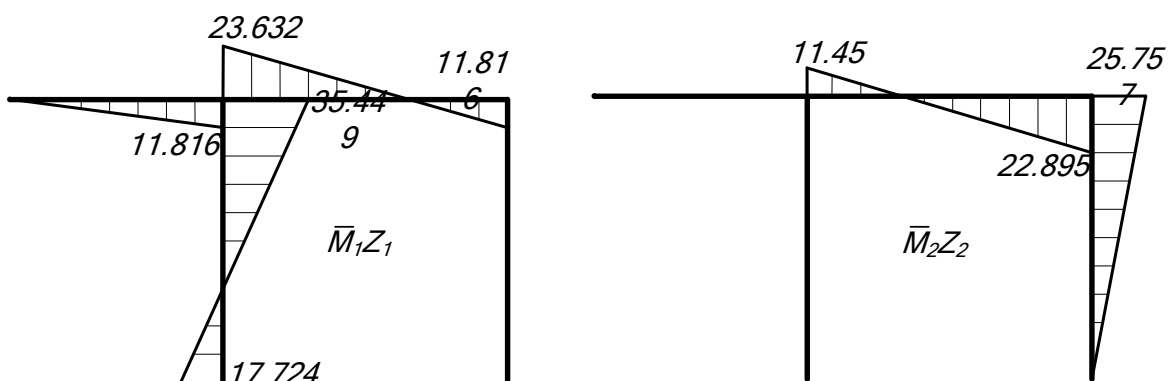
3.5 Побудова епюри моментів M в заданій статично невизначній системі

Побудова остаточної епюри моментів виконується за формулою

$$M = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_f.$$

Остаточну епюру моментів (рисунок 3.9) отримуємо шляхом підсумовування ординат в характерних точках одиничних виправлених та вантажної епюр моментів.

Виправлені епюри (рисунок 3.8) отримуємо шляхом множення ординат одиничних епюр на відповідне значення невідомих (Z_1, Z_2, Z_3).



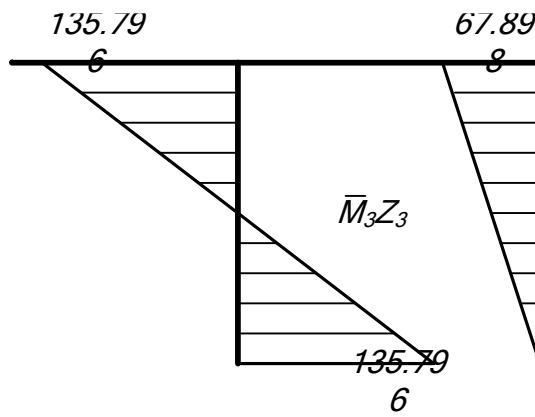


Рисунок 3.8 - Виправлені епюри моментів

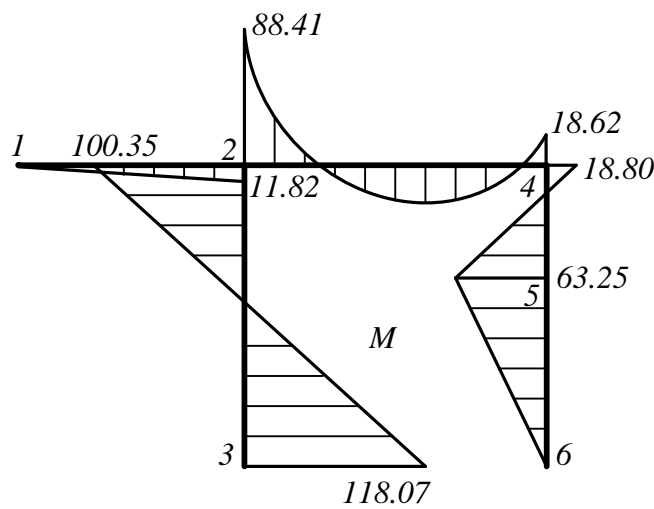


Рисунок 3.9 - Остаточна епюра моментів

Перевіряємо рівновагу в вузлах. Для цього вирізаємо вузли (рисунок 3.10) і складаємо рівняння моментів $\sum M_{уз} = 0$.

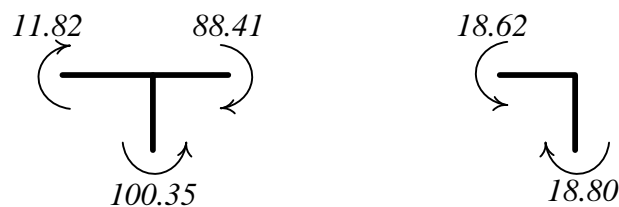


Рисунок 3.10 – Рівновага вузлів

Рівність моментів у вузлах забезпечена.

Так само виконуємо наступну перевірку: результат перемноження остаточної епюри моментів на будь-яку з одиничних чи сумарну, побудованих в основній системі методу сил (рисунок 3.11), має дорівнювати нулю.

$$\Delta_{MM_i^*} = \sum \int \frac{MM_i^*}{EI} ds = 0.$$

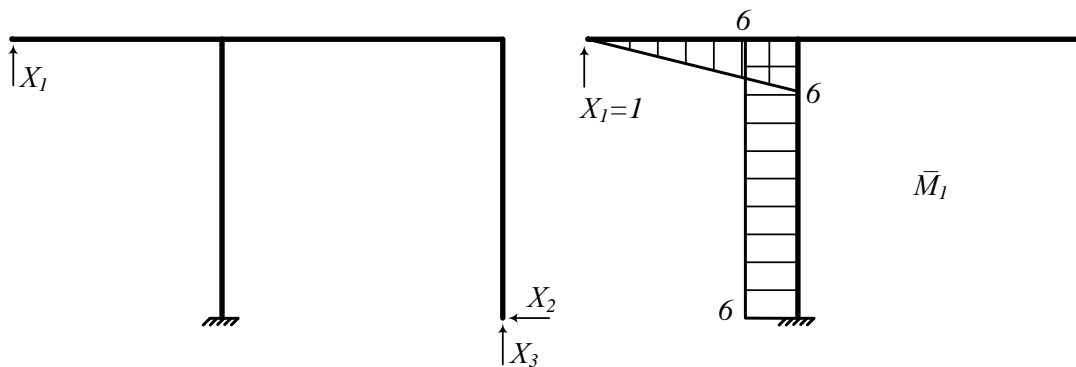


Рисунок 3.11 – Основна система та одинична епюра моментів методу сил

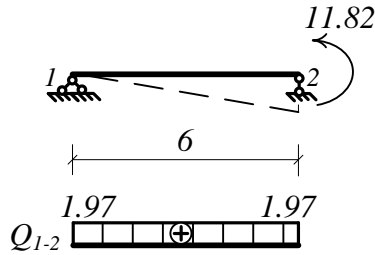
$$\Delta_{MM_i^*} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 11.82 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{100.35 - 118.07}{2} \right) = \frac{0.08}{EI}.$$

3.6 Побудова епюри поперечних сил Q

Розрахункова епюра поперечних сил будується за допомогою епюри моментів з використанням залежності

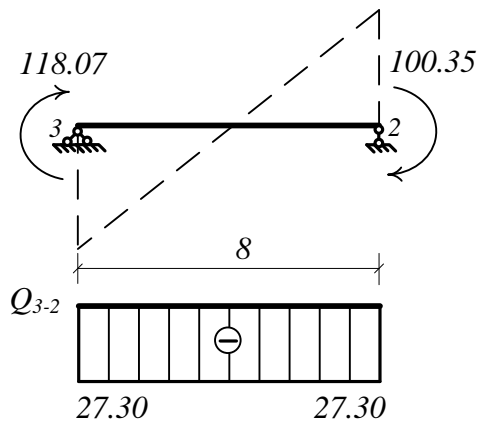
$$Q = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l}.$$

Ділянка 1-2



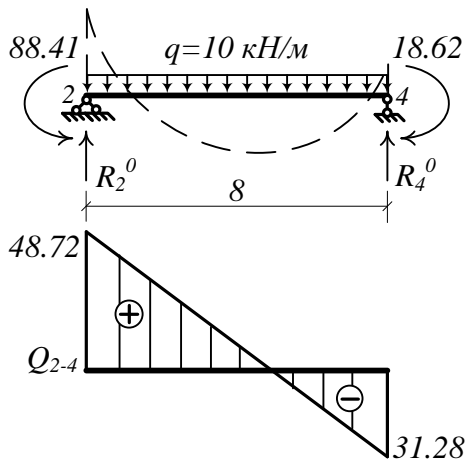
$$Q_{1-2} = \frac{11.82}{8} = 1.97 \text{ кН.}$$

Ділянка 2-3



$$Q_{3-2} = \frac{-100.35 - 118.07}{8} = -27.30 \text{ кН.}$$

Ділянка 2-4



Визначаємо балкові реакції:

$$R_2^0 = R_4^0 = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ кН.}$$

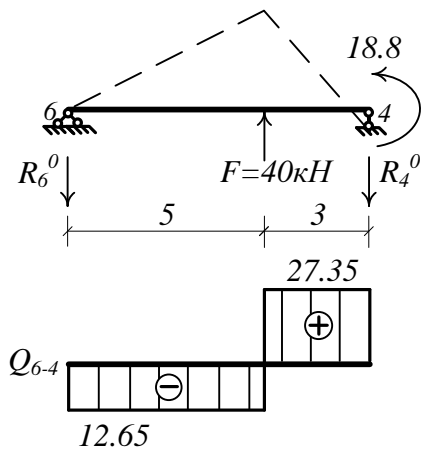
Обчислюємо поперечні сили в т. 2 і т. 4.:

$$Q_2^0 = R_2^0 = 40 \text{ кН}, Q_4^0 = -R_4^0 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 40 + \frac{-18.62 - 88.41}{8} = 48.72 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -40 + \frac{-18.62 - 88.41}{8} = -31.28 \text{ кН.}$$

Ділянка 6-4



Визначаємо балкові реакції:

$$\sum M_6 = 0: R_4^0 = \frac{40 \cdot 5}{8} = 25 \text{ кН},$$

$$\sum M_4 = 0: R_6^0 = \frac{40 \cdot 3}{8} = 15 \text{ кН}.$$

Обчислюємо поперечні сили в т. 6 і т. 4 (рисунок 3.12):

$$Q_6^0 = R_6^0 = -15 \text{ кН},$$

$$Q_4^0 = R_4^0 = 25 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -15 + \frac{18.8}{8} = -12.65 \text{ кН}, \quad Q_4 = 25 + \frac{18.8}{8} = 27.35 \text{ кН}.$$

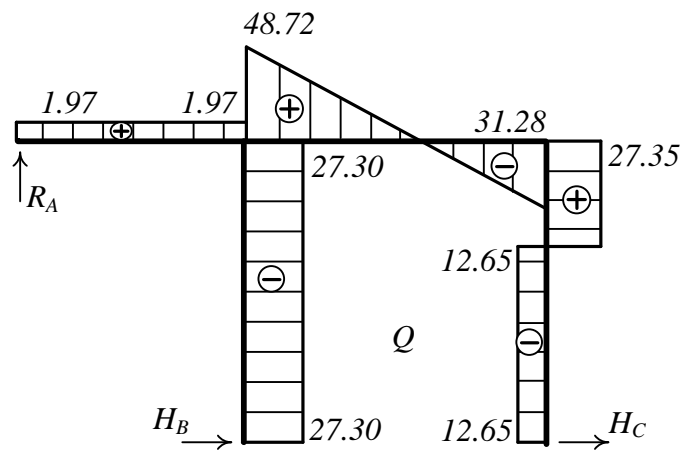
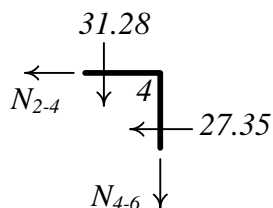


Рисунок 3.12 - Остаточна епюра поперечних сил

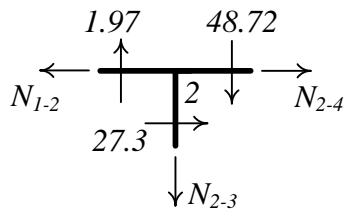
3.7 Побудова епюри поздовжніх сил N

Епюра поздовжніх сил N будується на підставі епюри Q , шляхом вирізання вузлів та розгляду їх рівноваги (рисунок 3.13).



$$\sum X = 0: -N_{2-4} - 27.35 = 0, \quad N_{2-4} = -27.35 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0: -N_{4-6} - 31.28 = 0, \quad N_{4-6} = -31.28 \text{ кН}.$$



$$\sum X = 0: -N_{1-2} + 27.3 + N_{2-4} = 0, \quad N_{1-2} = 0,$$

$$\sum Y = 0: -N_{2-3} - 48.72 + 1.97 = 0,$$

$$N_{2-3} = -46.75 \text{ кН}.$$

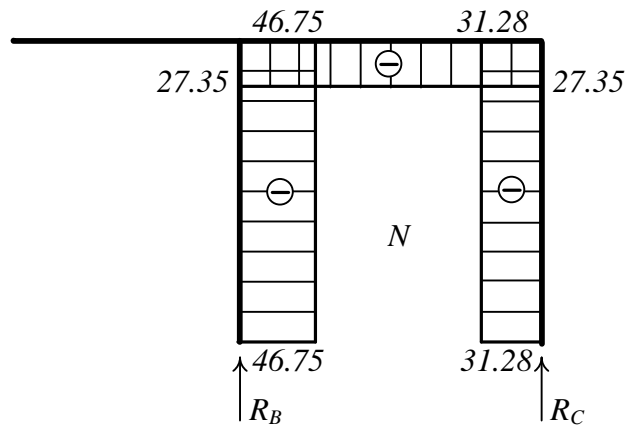


Рисунок 3.13 - Остаточна епюра поздовжніх сил

Виконуємо статичну перевірку рівноваги заданої системи. Величини та напрямки реакцій приймаємо з епюр Q і N (рисунок 3.14).

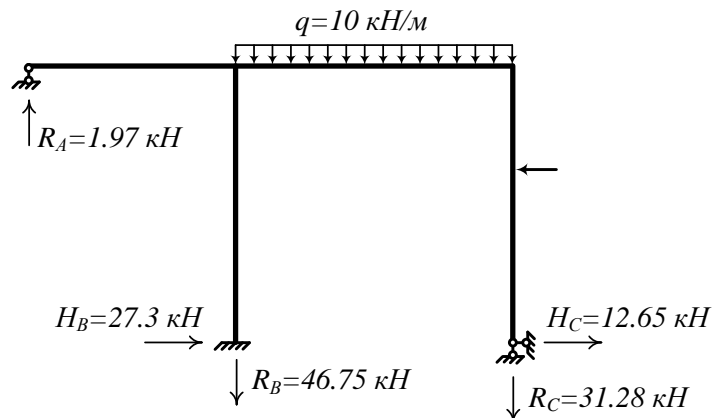


Рисунок 3.14 - Перевірка рівноваги системи

$$\sum X = 0: 27.3 + 12.65 - 40 = 0, \quad 40.5 - 40 \approx 0,$$

$$\sum Y = 0: 1.97 - 10 \cdot 8 + 46.75 + 31.28 = 0, \quad 80 - 80 = 0.$$

Так як рівняння виконуються, система знаходиться в рівновазі.

4 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧНОЇ ФЕРМИ

Приклад 4.1. Виконати розрахунок статично визначної ферми від дії рухомого і нерухомого навантаження. Визначити зусилля в стержнях і побудувати лінії впливу.

4.1 Розрахунок ферми на нерухоме навантаження

Розглянемо ферму, завантажену системою зосереджених сил.

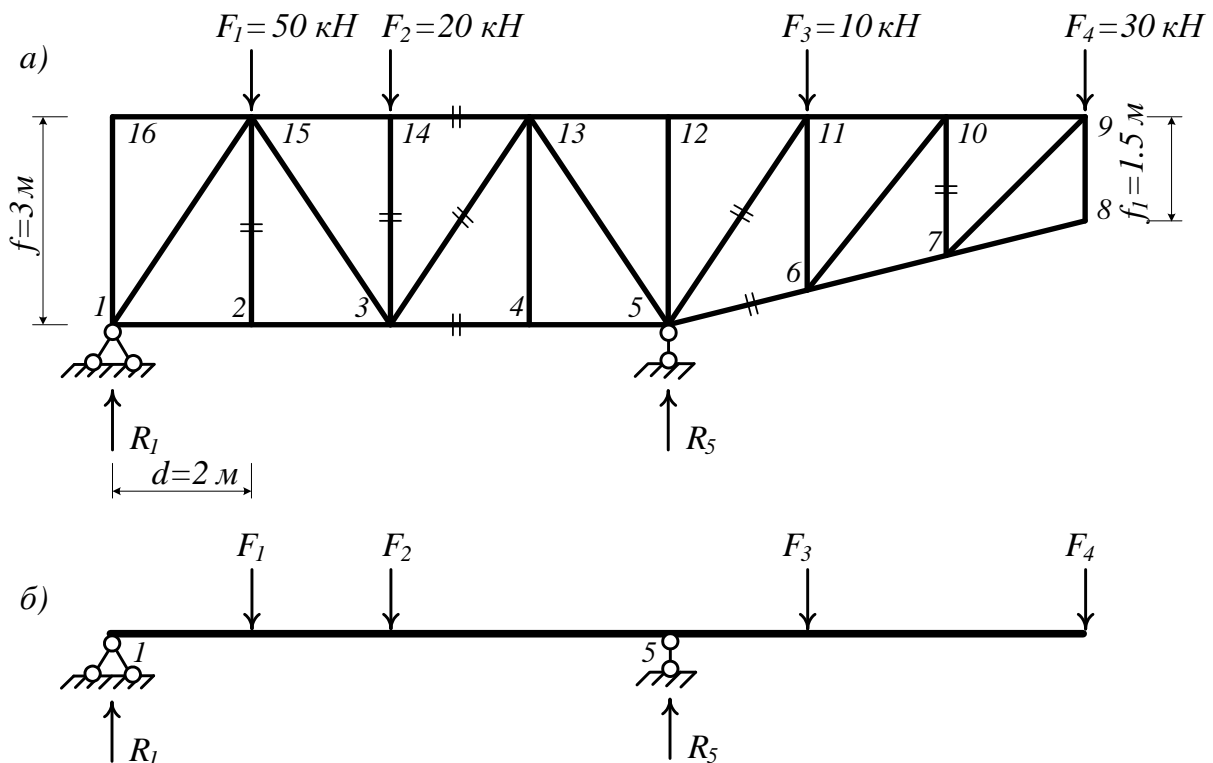


Рисунок 4.1 - Розрахункова схема ферми

Визначаємо опорні реакції, що виникають від дії зовнішнього навантаження. Необхідно відзначити, що вертикальні реакції у фермі від зовнішнього навантаження визначаються так само, як і в балці того ж прогону (рисунок 4.1, б). Складаємо рівняння моментів щодо опор (точки 1 і 5):

$$\sum M_1 = 0: -F_1 \cdot d - F_2 \cdot 2d + R_5 \cdot 4d - F_3 \cdot 5d - F_4 \cdot 7d = 0,$$

$$R_5 = \frac{F_1 \cdot d + F_2 \cdot 2d + F_3 \cdot 5d + F_4 \cdot 7d}{4d} = \frac{50 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 7}{4} = 87.5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_5 = 0: F_1 \cdot 3d + F_2 \cdot 2d - R_1 \cdot 4d - F_3 \cdot d - F_4 \cdot 3d = 0,$$

$$R_1 = \frac{F_1 \cdot 3d + F_2 \cdot 2d - F_3 \cdot d - F_4 \cdot 3d}{4d} = \frac{50 \cdot 3 + 20 \cdot 2 - 10 - 30 \cdot 3}{4} = 22.5 \text{ кН.}$$

Виконуємо перевірку правильності визначення реакцій. Складаємо суму проєкцій сил на вісь Y :

$$\sum Y = 0: R_1 - F_1 - F_2 + R_5 - F_3 - F_4 = 0,$$

$$87.5 - 50 - 20 + 22.5 - 10 - 30 = 0, \quad 110 - 110 = 0.$$

Перевірка виконується, тобто реакції визначено правильно.

Загальний спосіб визначення зусиль в фермі полягає в тому, щоб шляхом розрізання її на частини отримати кілька незалежних один від одного рівнянь статички (рисунок 4.2).

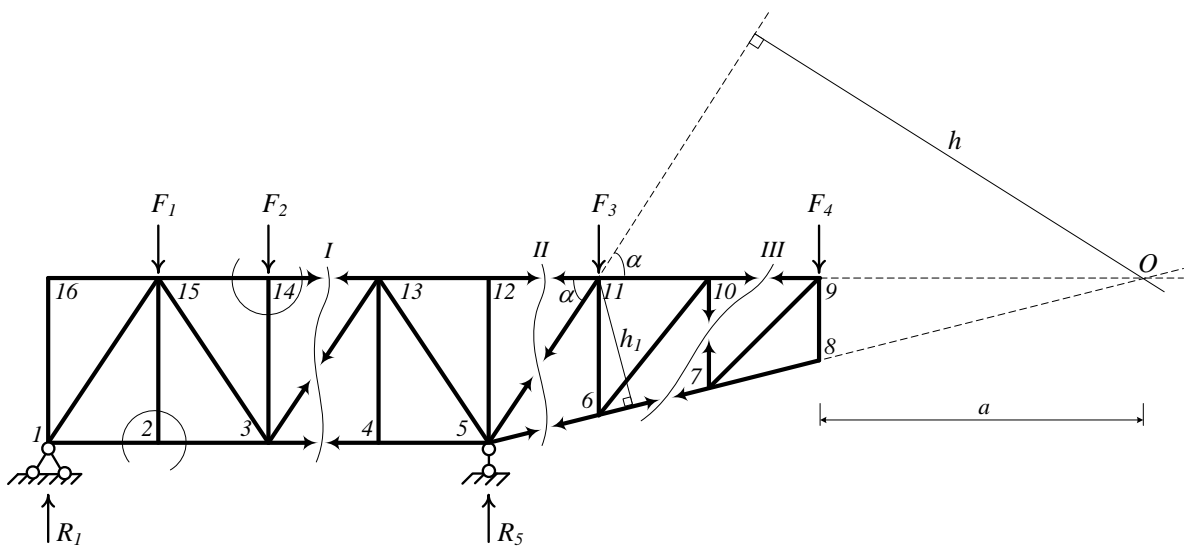
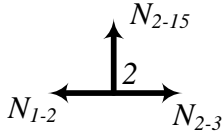


Рисунок 4.2 - Схема проведення розрізів

Одним з найпростіших способів отримання рівнянь є проведення таких розрізів, кожен з яких відсікає від ферми по одному вузлу (*спосіб вирізання вузлів*).

Стержень N_{2-15}

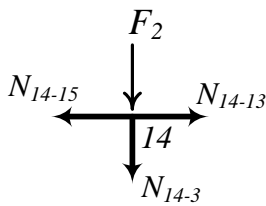


Щоб визначити зусилля в стержні N_{2-15} , вирізаємо вузол 2. Задаємося додатним напрямком зусиль. Припустимо, що вони

спрямовані від вузла, тобто розтягнуті. Складаємо рівняння

$$\sum Y = 0: N_{2-15} = 0.$$

Стержень N_{14-3}



Щоб визначити зусилля в стержні N_{14-3} , вирізаємо вузол 14 і складаємо рівняння

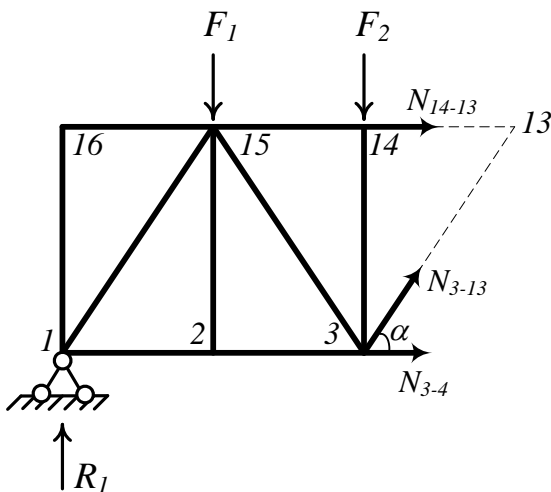
$$\sum Y = 0: -N_{14-3} - F_2 = 0,$$

$$N_{14-3} = -F_2 = -50 \text{ кН}.$$

Спосіб вирізання вузлів використовують в основному у вузлах, де сходяться два стержні або у вузлах, в яких стержні сходяться під прямим кутом.

Розглянемо наступний спосіб визначення зусиль у стержнях ферми - *спосіб моментної точки*.

Стержні N_{3-4} , N_{14-13} , N_{3-13}



Щоб визначити зусилля в стержнях N_{3-4} , N_{14-13} , N_{3-13} , необхідно розрізати їх і розглянути рівновагу або правої, або лівої частини ферми. Розсічені стержні замінюємо зусиллями і спрямовуємо їх до перерізу. Знайдемо зусилля в стержні N_{3-4} .

Для вибору рівняння рівноваги розглянемо всі три випадки:

$$\sum Y = 0, \sum X = 0, \sum M = 0.$$

При проекції всіх сил на вісь Y стержень N_{3-4} проектується в точку. Складемо рівняння сил відносно осі X : $\sum X = 0: N_{3-4} + N_{3-13} \cdot \cos \alpha + N_{14-13} = 0$. Таким чином, отримали рівняння з трьома невідомими.

Залишається рівняння моментів. Визначаємо моментну точку, відносно якої будемо записувати рівняння рівноваги. Зазначимо, що моментна точка знаходиться на перехрещенні лінії дії двох інших розсічених стержнів (N_{14-13} та N_{3-13}) – це т. 13.

$$\sum M_{13}^{\text{лев. сил}} = 0: N_{3-4} \cdot 3 + F_2 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - R_1 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{3-4} = \frac{R_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 4}{3} = \frac{22.5 \cdot 6 - 20 \cdot 2 - 50 \cdot 4}{3} = -35 \text{ кН}.$$

Визначимо зусилля в стержні N_{14-13} . Запишемо рівняння моментів відносно т. 3 (точка перерізу стержнів N_{3-4} і N_{3-13}).

$$\sum M_3^{\text{лев. сил}} = 0: -N_{14-13} \cdot 3 + F_1 \cdot 2 - R_1 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{14-13} = \frac{F_1 \cdot 2 - R_1 \cdot 4}{3} = \frac{50 \cdot 2 - 22.5 \cdot 4}{3} = 3.33 \text{ кН}.$$

При такому способі визначення зусиль в перерізі може бути і більше трьох стержнів з невідомими зусиллями, якщо всі невідомі, крім одного, перехрещуються в одній точці.

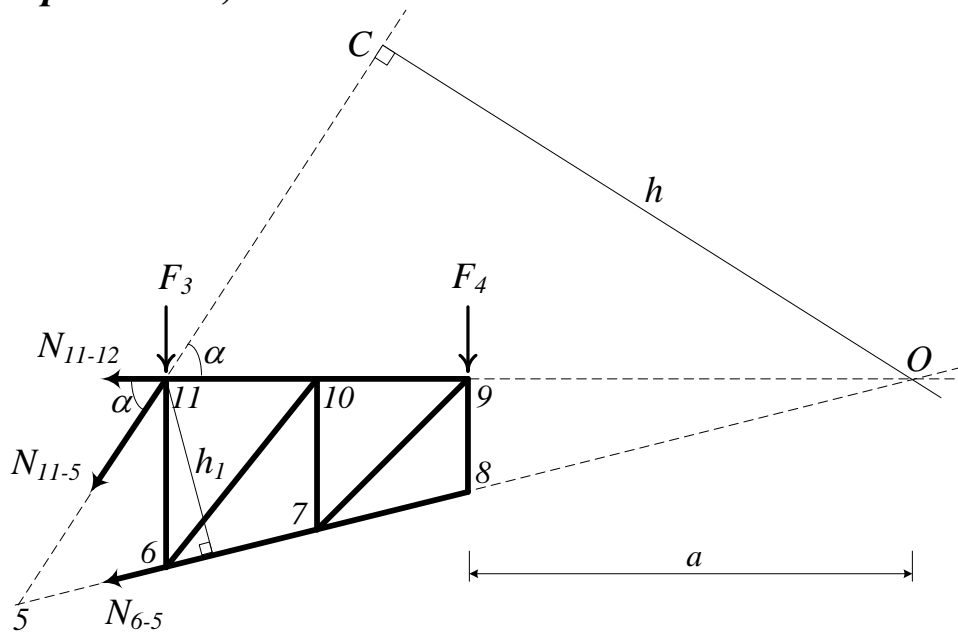
Розглянемо ще один окремий випадок визначення зусиль, коли з трьох стержнів два паралельні один одному (*спосіб проекцій*). Так як стержні N_{14-13} і N_{3-4} паралельні один одному, тобто не мають точки перерізу, то зусилля в стержні N_{3-13} визначимо, записавши рівняння рівноваги відносно осі Y :

$$\sum Y^{\text{лев. сил}} = 0: N_{3-13} \cdot \sin \alpha - F_2 - F_1 + R_1 = 0, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.832,$$

$$N_{3-13} = \frac{F_2 + F_1 - R_1}{0.832} = \frac{20 + 50 - 22.5}{0.832} = 57.09 \text{ кН}.$$

Розглянемо порядок визначення зусиль в стержнях консольної ферми.

Стержні N_{6-5} , N_{11-5}



Щоб визначити зусилля в заданих стержнях, розсікаємо ферму перерізом на дві частини. Будемо розглядати рівновагу правої частини. Моментною точкою для стержня N_{5-6} є т. 11 (точка перерізу стержнів N_{11-12} і N_{11-5}). З цієї точки проводимо перпендикуляр h_1 до лінії дії стержня N_{5-6} . Складаємо рівняння рівноваги

$$\sum M_{11}^{np.cul} = 0: -N_{5-6} \cdot h_1 - F_4 \cdot 4 = 0.$$

Величину h_1 визначимо з трикутника $5-11-6$. Для даного трикутника h_1 є висотою, $h_1 = 2.425$ м.

$$N_{5-6} = -\frac{F_4 \cdot 4}{h_1} = -\frac{30 \cdot 4}{2.425} = -49.48 \text{ кН}.$$

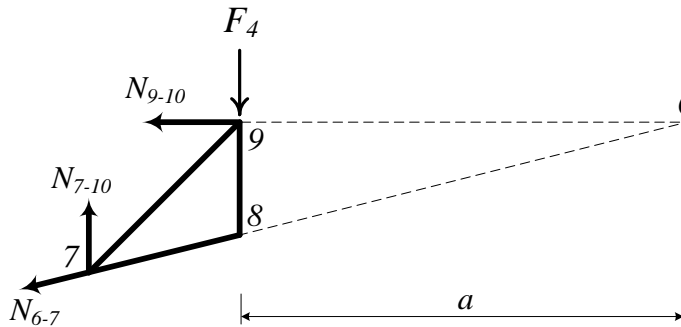
Щоб визначити зусилля в стержні N_{5-11} , необхідно знайти точку перерізу стержнів N_{5-6} і N_{11-12} – т. O . З цієї точки до лінії дії стержня N_{5-11} відновлюємо перпендикуляр h .

Величину a (відстань до т. O) визначаємо з подібності трикутників $9-O-8$ та $10-O-7$, $a = 6$ м. Величину h визначимо з трикутника $11-C-O$, $h = 8.32$ м. Складаємо рівняння рівноваги

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{11-5} \cdot h + F_3 \cdot 10 + F_4 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{11-5} = \frac{-F_3 \cdot 10 - F_4 \cdot 6}{h} = \frac{-10 \cdot 10 - 30 \cdot 6}{8.32} = -33.65 \text{ кН}.$$

Стержень N_{10-7}



Складаємо рівняння рівноваги моментів відносно т. O :

$$\sum M_O^{np.cul} = 0:$$

$$-N_{7-11} \cdot 8 + F_4 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{7-10} = \frac{F_4 \cdot 6}{8} = \frac{30 \cdot 6}{8} = 22.5 \text{ кН}.$$

4.2 Розрахунок ферми на рухоме навантаження

Для заданих стержнів побудуємо лінії впливу від одиничного зосередженого рухомого вантажу.

Будуємо лінії впливу реакцій (рисунок 4.3). Вантаж перебуває на ділянці 16-12. Початок координат приймаємо в т. 1. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_5 = 0: -R_1 \cdot 8 + F \cdot (8 - x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_1 = \frac{F \cdot (8 - x)}{8} = \begin{cases} x = 0, & R_1 = \frac{1 \cdot 8}{8} = 1; \\ x = 8, & R_1 = 0. \end{cases}$$

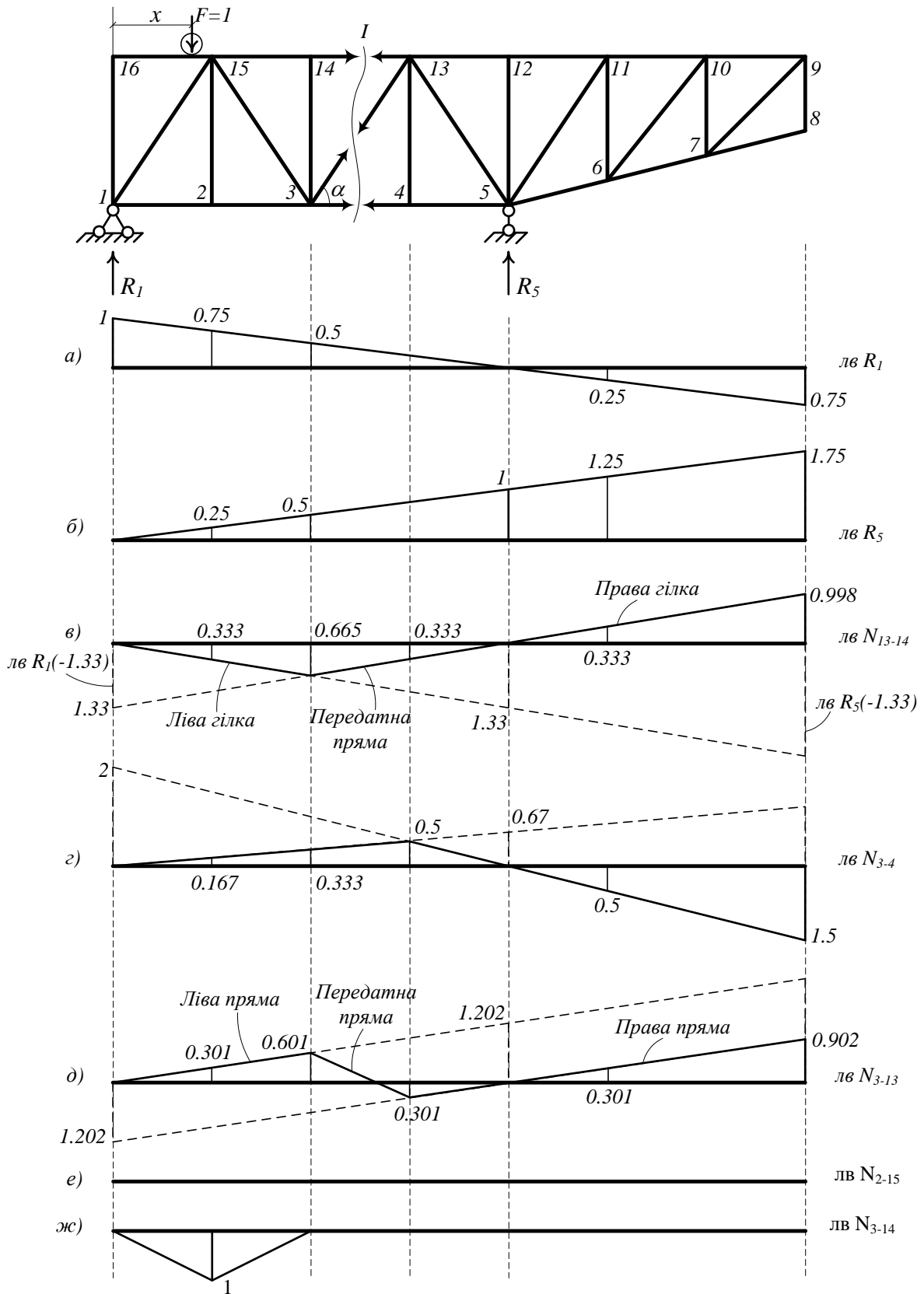


Рисунок 4.3 - Лінії впливу

Проводимо базову лінію, під т. 1 відкладаємо ординату, яка дорівнює 1, під т. 5 - 0, і ці дві ординати з'єднуємо прямою лінією через всю довжину ферми (рисунок 4.3, а).

Аналогічно будуємо лінію впливу другої реакції (рисунок 4.3, б).

$$\sum M_1 = 0: R_5 \cdot 8 - F \cdot x = 0, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

$$R_5 = \frac{F \cdot x}{8} = \begin{cases} x=0, & R_1 = \frac{1 \cdot 0}{8} = 0; \\ x=8, & R_1 = 1. \end{cases}$$

Для побудови ліній впливу зусиль у фермах розглядаємо рівновагу вузлів і частин ферми. Рухоме навантаження прикладаємо до вантажного поясу.

При використанні способу перерізів записуємо рівняння рівноваги відсіченої частини ферми при положенні рухомого одиничного вантажу ліворуч і праворуч від розсіченої панелі (панель, між найближчими від проведеного перерізу вузлами пояса, по якому рухається вантаж). В результаті отримуємо рівняння правої і лівої прямої лінії впливу. В межах розсіченої панелі прямі з'єднуємо перехідною прямою.

Стержень N_{13-14}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 16-14). Моментна точка - т. 3. Розсічена панель - 14 - 13. Розглядаємо рівновагу правої від перерізу частини ферми:

$$\sum M_3^{np.cил} = 0: N_{14-13} \cdot 3 + R_5 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{14-13} = \frac{-R_5 \cdot 4}{3}, \quad лвN_{14-13} = лвR_5 \cdot (-1.33)$$

Лінія впливу зусилля N_{14-13} дорівнює лінії впливу реакції R_5 , всі ординати якої помножені на число - 1.33. На базовій лінії пунктиром проводимо отриману лінію впливу і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від т. 16 до т. 14) (рисунок 4.3, в).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 13-9). Моментна точка - т. 3. Розсічена панель – 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої від перерізу частини ферми:

$$\sum M_3^{лев.сил} = 0: -N_{14-13} \cdot 3 - R_1 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{14-13} = \frac{-R_1 \cdot 4}{3}, \quad лвN_{14-13} = лвR_1 \cdot (-1.33).$$

Пунктиром проводимо лінію впливу R_1 , всі ординати якої помножені на число -1.33 , і на цій лінії виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від т. 13 до т. 9) (рисунок 4.3, в). Дві отримані прямі лінії впливу з'єднуємо між собою перехідною прямою.

Стержень N_{3-4}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 16-14). Моментна точка - т. 13. Розсічена панель – 14 - 13. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_{13}^{пр.сил} = 0: -N_{3-4} \cdot 3 + R_5 \cdot 2 = 0,$$

$$N_{3-4} = \frac{R_5 \cdot 2}{3}, \quad лвN_{3-4} = лвR_5 \cdot 0.667.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу R_5 , всі ординати якої помножені на число 0.667 , і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від т. 16 до т. 14) (рисунок 4.3, г).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 13 - 9). Моментна точка - т. 13. Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої частини ферми:

$$\sum M_{13}^{лев.сил} = 0: N_{3-4} \cdot 3 - R_1 \cdot 6 = 0,$$

$$N_{3-4} = \frac{-R_1 \cdot 6}{3}, \quad лвN_{3-4} = лвR_1 \cdot 2.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу R_1 , всі ординати якої помножені на число 2, і на цій лінії виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (від т. 13 до т. 9) (рисунок 4.3, г).

Стержень N_{3-13}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 16 - 14). Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum Y^{np.cил} = 0: -N_{3-13} \cdot \sin \alpha + R_5 = 0, \quad \sin \alpha = 0.832,$$

$$N_{3-13} = \frac{R_5}{0.832}, \quad лвN_{14-13} = лвR_5 \cdot 1.202.$$

Пунктиром проводимо лінію впливу і виділяємо на ній ділянку, де зараз знаходиться вантаж (рисунок 4.3, д).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж перебуває на ділянці 13 - 9). Розсічена панель 14 - 13. Розглядаємо рівновагу лівої частини ферми:

$$\sum Y^{лев.cил} = 0: N_{3-13} \cdot \sin \alpha + R_1 = 0,$$

$$N_{3-13} = \frac{-R_1}{\sin \alpha}, \quad лвN_{3-13} = лвR_1 \cdot (-1.202).$$

Пунктиром проводимо лінію впливу і виділяємо ділянку, де зараз знаходиться вантаж (рисунок 4.3, д).

При використанні способу вирізання вузлів розглядаємо рівновагу вирізаного вузла при положенні вантажу у вузлі і поза вузлом. Отримані ординати лінії впливу з'єднуємо прямими лініями.

Стержень N_{2-15}

Лінію впливу даного стержня будуємо, використовуючи метод вирізання вузлів. Вирізаємо вузол 2 і розглядаємо положення вантажу у вузлі і поза вузлом. Так як вантажним є верхній пояс ферми, то при будь-якому положенні рухомого вантажу зусилля в стержні дорівнює нулю, тобто лінія впливу має нульові ординати (рисунок 4.3, е).

Стержень N_{2-14}

Вирізаємо вузол 14.

Вантаж у вузлі (точка 14):

$$\sum Y = 0: -N_{2-14} - 1 = 0, \quad N_{2-14} = -1.$$

Вантаж поза вузлом (вантаж на ділянках 16 - 15, 13 - 9):

$$\sum Y = 0: N_{2-14} = 0.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.3, ж).

Тепер розглянемо, як будуються лінії впливу для консольної частини ферми. При будь-якому положенні рухомого вантажу завжди розглядається рівновага консольної частини споруди (рисунок 4.4).

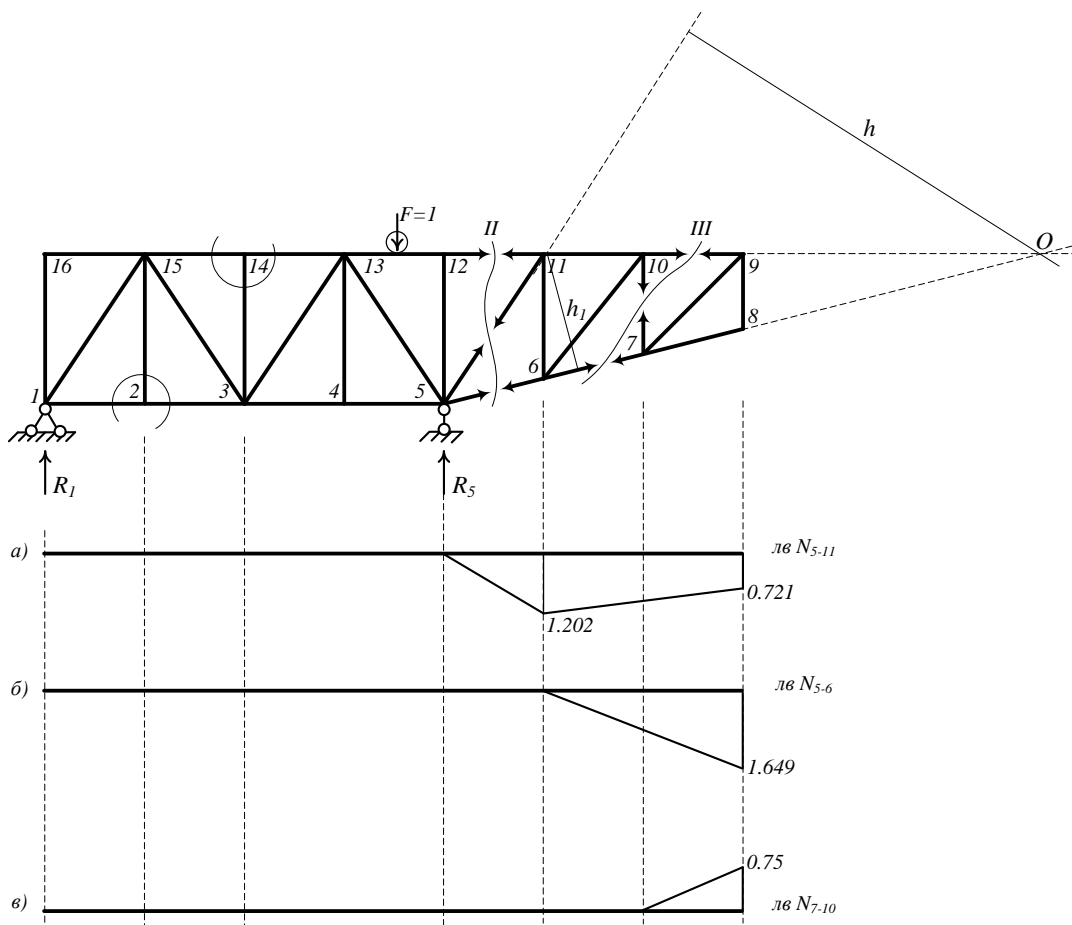


Рисунок 4.4 – Лінії впливу

Стержень N_{5-11}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж на ділянці 16 - 12). Моментна точка - т. *O*. Розсічена панель 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{5-11} \cdot h = 0, \quad h = 8.32\text{м}, \quad N_{5-11} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 12 має ординати рівні нулю (рисунок 4.4, а).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж на ділянці 11 - 9). Моментна точка - т. *O*. Розсічена панель - 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{5-11} \cdot h + 1 \cdot x = 0, \quad N_{5-11} = \frac{-1 \cdot x}{h}.$$

Розглянемо положення вантажу в характерних точках.

$$\text{Вантаж в т. 11: } x = 10\text{м}, \quad N_{5-11} = \frac{-1 \cdot 10}{8.32} = -1.202.$$

$$\text{Вантаж в т. 9: } x = 6\text{м}, \quad N_{5-11} = \frac{-1 \cdot 6}{8.32} = -0.721.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.4, а).

Стержень N_{5-6}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж на ділянці 16 - 12). Моментна точка - т. 11. Розсічена панель - 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: N_{5-6} \cdot h_1 = 0, \quad h_1 = 2.425\text{м}, \quad N_{5-6} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 12 має ординати, рівні нулю (рисунок 4.4, б).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж на ділянці 11 - 9). Моментна точка - т. 11. Розсічена панель - 11 - 12. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{5-6} \cdot h_1 - 1 \cdot x_1 = 0, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot x_1}{h_1}.$$

Розглянемо положення вантажу в характерних точках.

$$\text{Вантаж в т. 11: } x = 0, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot 0}{2.425} = 0.$$

$$\text{Вантаж в т. 9: } x = 4\text{м}, \quad N_{5-6} = \frac{-1 \cdot 4}{2.425} = -1.649.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.4, б).

Стержень N_{7-10}

Вантаж зліва від перерізу (вантаж на ділянці 16 - 10). Розсічена панель - 10 - 9. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{7-10} \cdot (a + d) = 0, \quad N_{7-10} = 0.$$

Лінія впливу на ділянці 16 - 10 має ординати рівні нулю (рисунок 4.4, в).

Вантаж праворуч від перерізу (вантаж знаходиться в т. 9). Моментна точка - т. О. Розсічена панель - 10 - 9. Розглядаємо рівновагу правої частини ферми:

$$\sum M_O^{np.cul} = 0: -N_{7-10} \cdot (a + d) + 1 \cdot a = 0,$$

$$N_{5-6} = \frac{1 \cdot a}{a + d} = \frac{6}{6 + 2} = 0.75.$$

На базовій лінії відкладаємо значення ординат і з'єднуємо їх прямою лінією (рисунок 4.4, в).

4.3 Визначення внутрішніх зусиль в стержнях ферми за лініями впливу

Внутрішні зусилля в стержнях ферми за лініями впливу визначаються за формулою

$$N = \pm \sum F_i y_i,$$

де F_i - величина зовнішнього навантаження;

y_i - значення ординат ліній впливу під заданими силами.

У формулі сила приймається зі знаком «плюс», якщо вона спрямована зверху вниз. Знак ординати приймаємо за лінією впливу. Ординати, розташовані над базовою лінією, вважаються додатними, під базовою лінією – від’ємними.

$$R_1 = 50 \cdot 0.75 + 20 \cdot 0.5 + 10 \cdot (-0.25) + 30 \cdot (-0.75) = 22.5 \text{ кН}.$$

$$R_5 = 50 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.5 + 10 \cdot 1.25 + 30 \cdot 1.75 = 87.5 \text{ кН}.$$

$$N_{13-14} = 50 \cdot (-0.333) + 20 \cdot (-0.665) + 10 \cdot 0.333 + 30 \cdot 0.998 = 3.32 \text{ кН}.$$

$$N_{3-4} = 50 \cdot 0.167 + 20 \cdot 0.333 + 10 \cdot (-0.5) + 30 \cdot (-1.5) = -34.99 \text{ кН}$$

$$N_{3-13} = 50 \cdot 0.301 + 20 \cdot 0.601 + 10 \cdot 0.301 + 30 \cdot 0.902 = 57.14 \text{ кН}.$$

$$N_{5-11} = 10 \cdot (-1.202) + 30 \cdot (-0.721) = -33.65 \text{ кН}.$$

$$N_{5-6} = 30 \cdot (-1.649) = -49.47 \text{ кН}.$$

$$N_{7-10} = 30 \cdot 0.75 = 22.5 \text{ кН}.$$

$$N_{2-5} = (50 + 20 + 10 + 30) \cdot 0 = 0.$$

$$N_{3-14} = 50 \cdot (-1) = -50 \text{ кН}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Методичні вказівки

1 Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П., Веревічева М.А. та ін. Розрахунок багатопробльотних статично визначних балок з використанням ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 1996. – 68 с.

2 Черненко М.Г., Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П. та ін. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом сил з використанням ПЕОМ. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 38 с.

3 Чихладзе Е.Д., Петров А.М. Розрахунок плоских статично невизначних рам методом переміщень із застосуванням комп'ютера. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – 66 с.

4 Чихладзе Е.Д., Черненко М.Г., Єгорова І.М. Розрахунок статично визначних ферм з використанням комп'ютера. – Харків: УкрДАЗТ, 2001. – 24 с.

5 Кітов Ю.П., Черненко М.Г., Веревічева М.А. Програмний комплекс для контролю і розв'язання задач на ПЕОМ за курсом "Будівельна механіка". – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 100 с.

Підручники

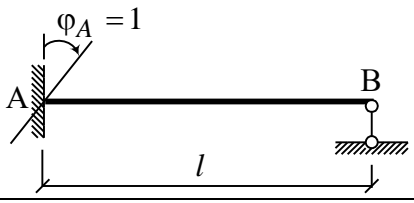
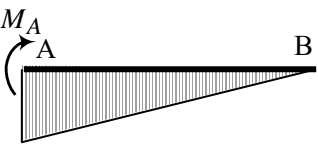
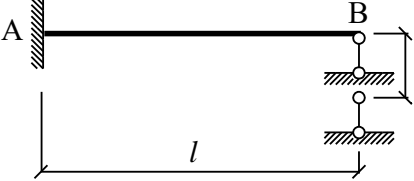
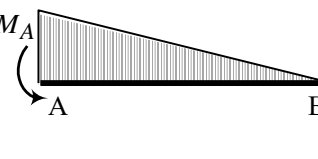
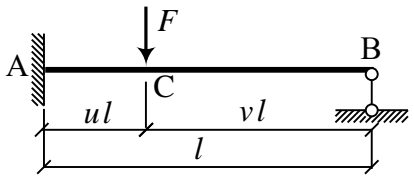
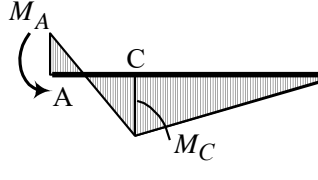
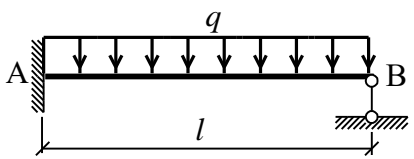
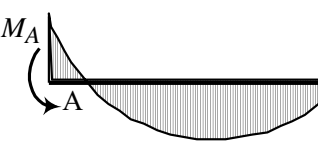
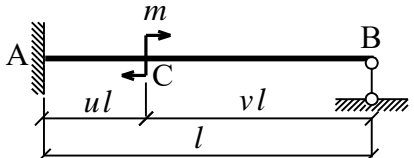
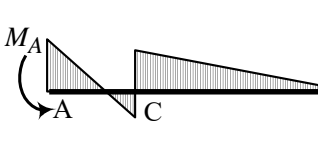
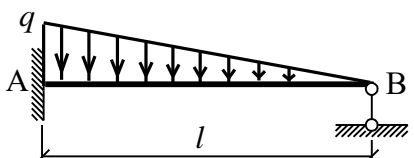
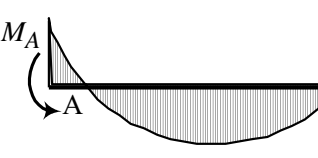
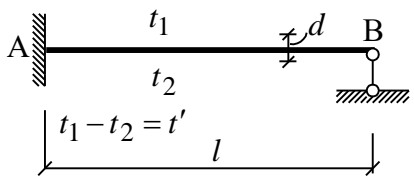
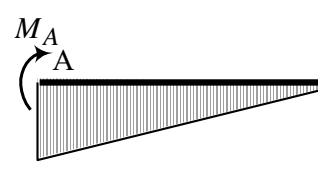
6 Дарков А.В., Кузнецов В.И. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1962. – 743 с.

7 Чихладзе Э.Д. Строительная механика. – Харьков: УкрГАЗТ, 2011. – 320 с.

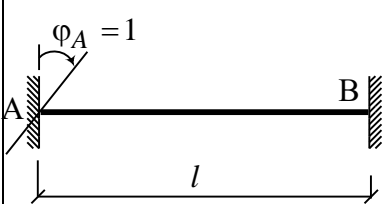
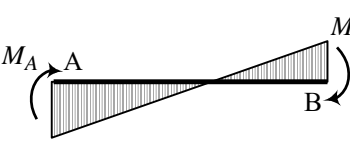
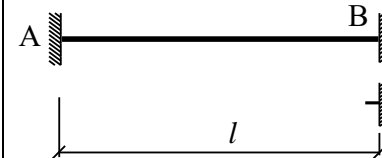
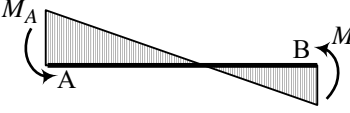
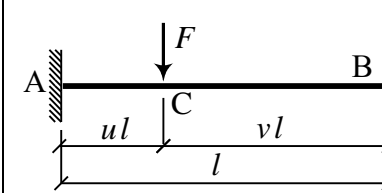
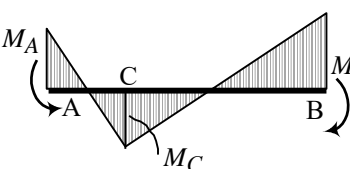
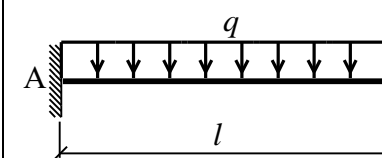
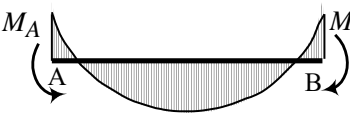
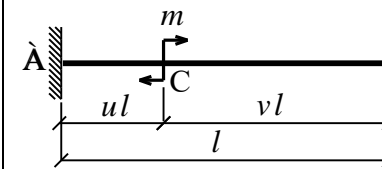
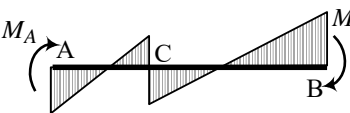
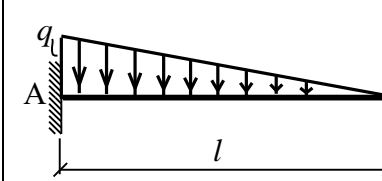
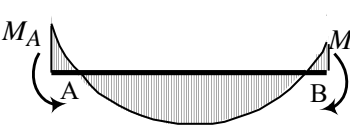
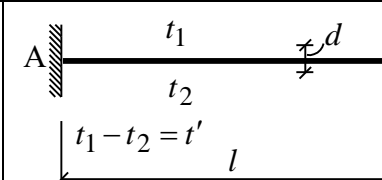

8 Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 320 с.

Додаток А

Таблиця А.1 – Таблиця стандартних рішень

№	Схеми стержнів і впливів на них	Епюри моментів	Формули
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EJ}{l}$
2			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}$
3			$M_A = -\frac{Fl}{2}v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Fl}{2}u^2v(3-u)$
4			$M_A = -\frac{ql^2}{8}$
5			$M_A = -\frac{m}{2}(3v^2 - 1)$
6			$M_A = -\frac{ql^2}{15}$
7			$M_A = \frac{3EJ \alpha t'}{2d}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
8			$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
9			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2}$
10			$M_A = -uv^2 Fl$ $M_B = u^2 v Fl$ $M_C = 2u^2 v^2 Fl$
11			$M_A = -M_B = -\frac{ql^2}{12}$
12			$M_A = mv(3u - 1)$ $M_B = mu(3v - 1)$
13			$M_A = -\frac{ql^2}{20}$ $M_B = \frac{ql^2}{30}$
14			$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha t'}{d}$

