

УДК 624.072.31:075.23

## **Визначення критичного навантаження позацентрово стиснутих колон**

**Галагуря Є.І., к.т.н., Ковальов М.О., к.т.н., Биченок І.В.**

Український державний університет залізничного транспорту, Україна

**Анотація.** В статті наведено рішення, що дозволяють визначити критичне навантаження наступних розрахункових схем: колона, навантажена по торцях подовжніми силами з рівними та в одну сторону спрямованими ексцентриситетами; колона, жорстко затиснена внизу, шарнірно закріплена вгорі, навантажена ексцентрично прикладеною подовжньою силою на верхньому торці; колона, жорстко затиснена внизу, навантажена на вільному кінці ексцентрично прикладеною силою; колона, шарнірно-обіперта, навантажена на верхньому торці ексцентрично прикладеною подовжньою силою.

**Аннотация.** В статье приведены решения, которые разрешают определить критическую нагрузку следующих расчетных схем: колонна, нагруженная по торцам продольными силами с равными и в одну сторону направленными эксцентриситетами; колонна, жестко защемленная внизу, шарнирно закрепленная вверху, нагруженная эксцентрично приложенной продольной силой на верхнем торце; колонна, жестко защемленная внизу, нагруженная на свободном конце эксцентрично приложенной силой; колонна, шарнирно закрепленная, нагруженная на верхнем торце эксцентрично приложенной продольной силой.

**Abstract.** In the article solutions are cited that allow to determine critical load of the following structural models: the column is loaded on the ends by longitudinal forces with equal eccentricities acting in one direction; the column is rigidly clamped at the bottom, hinged at the top, loaded by eccentrically applied longitudinal force on the upper end; the column is rigidly supported at the bottom, loaded at free end by eccentrically applied force; the column is hinged, loaded on the upper end by eccentrically applied longitudinal force.

**Ключові слова:** колона, позацентровий стиск, критичне навантаження.

**Вступ.** Експериментальним і теоретичним дослідженням напружено-деформованого стану центрально та позацентрово стислих колон та інших несучих конструкцій присвятили свої роботи: Ватуля Г.Л. [5], Глазунов Ю.В., Жакін І.А., Опанасенко О.В., Стороженко Л.І., Чихладзе Е.Д. [3,4,5] та інші вчені. Відзначені роботи сприяли рішенню складної проблеми оцінки міцності та жорсткості колон. Однак не всі питання вирішені. Зокрема: недостатньо вивчена робота статично визначних, і статично невизначних колон, стиснутих ексцентрично на одному торці і таких, що зазнають осьове стискання – на іншому. В зв'язку з цим у даній статті наведені рішення, що дозволяють визначити критичне значення навантаження по-різному навантажених колон (рис. 1).

**Мета роботи** – розробка алгоритму визначення критичного навантаження позacentрово стиснутих колон.

**Постановка задачі.** Для визначення критичного навантаження позacentрово стиснутих колон спочатку необхідно отримати залежність між навантаженням та прогинами, які виникають в колонах при різних схемах навантаження.

1. Колонна навантажена двома стискаючими силами, прикладеними з ексцентриситетом  $e$  (рис. 1, а). Диференціальне рівняння вигнутої осі буде мати такий вигляд:

$$y'' + k^2 y = -k^2 e \quad (1)$$

де:

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \quad (2)$$

Рішення рівняння (1):

$$y = e \left( \cos kx + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - 1 \right). \quad (3)$$

Переріз з максимальним прогином знаходиться на відстані  $x=0,5l$  від початку координат.

Максимальний прогин дорівнює:

$$y = e \left( \cos 0,5kl + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin 0,5kl - 1 \right). \quad (4)$$

Підставляємо рівняння (2) в рівняння (4) і отримуємо:

$$y = e \left( \cos \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) + \frac{1 - \cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}{\sin \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \sin \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1 \right). \quad (5)$$

Використовуючи програму на ЕОМ, виразимо з рівняння (5) значення критичної сили:

$$F = \frac{4 \operatorname{arctg} \left( \frac{e \sqrt{2ey + y^2}}{y + e} \right)^2 EI}{l^2} \quad (6)$$

Підставляючи значення допустимого прогину колони згідно з [7], знаходимо критичну силу.

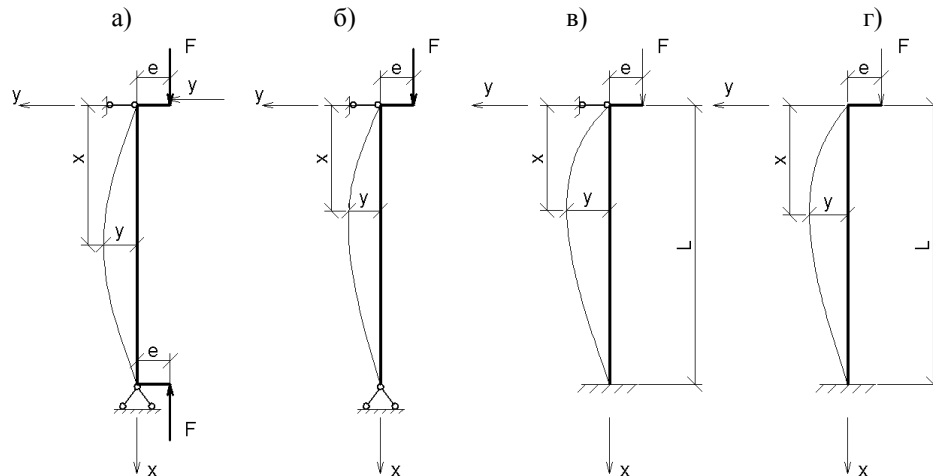


Рис. 1. Схеми навантаження колон

**2.** Колонна, навантажена на одному торці ексцентрично прикладеною силою  $F$  (рис. 1, б).

Диференціальне рівняння вигнутої осі:

$$y'' + k^2 y = \frac{k^2 ex}{l} - k^2 e \quad (7)$$

Рішення рівняння (7):

$$y = e \left[ \cos kx - \operatorname{ctg} kl \times \sin kx - 1 + \frac{x}{l} \right] \quad (8)$$

Небезпечним буде той перетин, в якому буде максимальний прогин. Для визначення небезпечного перетину необхідно знайти точки екстремуму функції (8), а це значить, що необхідно першу похідну прирівняти до 0 та визначити значення  $x$ . Для цього використовуємо програму на ЕОМ, та знаходимо перетин де буде максимальний прогин:

$$x = \frac{2 \arctg \left( \frac{kl \times \operatorname{tg} kl - \sqrt{\frac{k^2 l^2 - 1}{\cos^2(kl)^2} + 1}}{kl + \operatorname{tg} kl} \right)}{k}. \quad (9)$$

Підставляємо рівняння (2) та рівняння (9) в рівняння (8) і отримуємо:

$$y = e \cdot \cos \left( 2 \arctg \left( \frac{\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2} + 1}}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l}} \right) \right) -$$

$$- e \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \sin \left( 2 \arctg \left( \frac{\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2} + 1}}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l}} \right) \right) -$$

$$2\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\frac{F}{EI}} l \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{\frac{F}{EI} l^2 - 1}{\cos^2 \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right)^2 + 1}}}{\sqrt{\frac{F}{EI}} l + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{EI}} l} \right) \quad (10)$$

$-e+e$   $\sqrt{\frac{F}{EI}} l$

Оскільки в рівнянні (10) функція не визначена, то значення критичної сили аналітично ми вивести не зможемо, але знаючи геометричні характеристики колони та допустимий прогин, ми зможемо отримати значення критичної сили.

**3.** Колона, жорстко затиснена внизу, шарнірно закріплена вгорі та навантажена ексцентрично поздовжньою силою на верхньому торці (рис. 1, в).

Диференційне рівняння вигнутої осі:

$$y'' + k^2 y = \frac{k^2 e x}{2l} - k^2. \quad (11)$$

Рішення рівняння (11):

$$y = e \left( \cos kx - \left( \frac{\cos kl + 0,5}{\sin kl} \right) \sin kx - 1 + \frac{x}{2l} \right). \quad (12)$$

Для визначення небезпечного перетину необхідно знайти точки екстремуму функції (12). В результаті отримаємо відстань  $x$  до перетину з максимальним прогином:

$$x = \frac{1}{k} \cdot 2\operatorname{arctg} \left( \frac{-4kl \operatorname{tg}(0,5kl)}{kl \operatorname{tg}^2(0,5kl) - 3kl - 6\operatorname{tg}(0,5kl)} + \frac{\sqrt{k^2 l^2 \operatorname{tg}^4(0,5kl) + 10k^2 l^2 \operatorname{tg}^2(0,5kl) + 9k^2 l^2 - 36\operatorname{tg}^2(0,5kl)^2}}{kl \operatorname{tg}^2(0,5kl) - 3kl - 6\operatorname{tg}(0,5kl)} \right). \quad (13)$$

Підставляємо рівняння (2) та рівняння (13) в рівняння (12) і отримуємо рівняння (14), в якому функція не визначена та значення критичної сили аналітично ми вивести не зможемо, але знаючи геометричні характеристики колони та допустимий прогин, ми зможемо отримати значення критичної сили.

$$\begin{aligned}
 & y = e \cos \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \sqrt{\frac{Fl^2}{EI \cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}} \right) \right) - \\
 & - e \operatorname{ctg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \sqrt{\frac{Fl^2}{EI \cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}} \right) \right) - \\
 & - e + e \frac{2 \operatorname{arctg} \left( \frac{l \sqrt{\frac{F}{EI}} \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - \sqrt{\frac{Fl^2}{EI \cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2 + 1} - \frac{1}{\cos \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)^2}}}{l \sqrt{\frac{F}{EI}} + \operatorname{tg} \left( l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}} \right)}{l \sqrt{\frac{F}{EI}}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

4. Колонна, жорстко затиснена внизу, навантажена на вільному кінці ексцентрично прикладеною силою (рис. 1, г). Диференціальне рівняння вигнутої осі буде мати наступний вигляд:

$$y^n + k^2 y = -k^2 e \quad (15)$$

Рішення рівняння (15):

$$y = e \left( \cos kx + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - 1 \right) \quad (16)$$

Прирівнявши першу похідну функції (16) до 0, визначимо значення  $x$ , при якому функція добігає максимального значення (тобто знаходимо перетин з максимальним прогином). Для цього використовуємо ЕОМ.

$$x = - \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{\cos(0,5kl) - 1}{\sin(0,5kl)} \right)}{k}. \quad (17)$$

Підставляємо рівняння (2) та рівняння (17) в рівняння (16) і отримуємо:

$$y = e \cdot \cos \left( -\operatorname{arctg} \left( \frac{\cos \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1}{\sin \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) \right) + e \left( \frac{1 - \cos l \sqrt{\frac{F}{EI}}}{\sin l \sqrt{\frac{F}{EI}}} \right) \cdot \sin \left( -\operatorname{arctg} \left( \frac{\cos \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right) - 1}{\sin \left( 0,5l \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)} \right) \right). \quad (18)$$

З рівняння (18) виразимо значення критичної сили  $F$  за допомогою ЕОМ.

$$F = \frac{4 \operatorname{arctg} \left( -\frac{2e \sqrt{2ey + y^2}}{(y + e)^2} \right) EI}{l^2}. \quad (19)$$

Для розрахунку критичної сили необхідно використовувати значення допустимого прогину колони згідно з [7].

### Висновки

Отримано рівняння, що дозволяють визначити критичне навантаження позакентровано стиснутих колон. Для рішення цих рівнянь необхідно задавати значення допустимого прогину згідно з ДСТУ та геометричні характеристики колон, що розглядаються.

## **Література**

- [1] Трулль В. А. К вопросу расчета устойчивости сжато-изогнутых стержней с использованием приближенного выражения для кривизны : Исследования по строительным конструкциям и испытанию сооружений / В. А. Трулль, Р. С. Санжаровский. – Л. : 1968. – С. 23–25.
- [2] Хофф Н. Д. Продольный изгиб и устойчивость / Н. Д. Хофф – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 155 с.
- [3] Чихладзе Э. Д. Расчет сталебетонных элементов прямоугольного сечения на прочность при внецентренном сжатии и изгибе / Э. Д. Чихладзе // Тр. ин-та ХИИТ. – 1993. – Вып. 21. – С. 23–25.
- [4] Чихладзе Э. Д. Расчет сталебетонных элементов прямоугольного сечения на прочность при внецентренном сжатии и изгибе / Э. Д. Чихладзе, А.Д. Арсланханов // Строительство : Известия вузов. – 1992. – № 1. – С. 6–10.
- [5] Основы расчета и проектирования комбинированных и сталебетонных конструкций / [Чихладзе Э. Д., Ватуля Г. Л., Китов Ю. П. и др.]; под ред Э. Д. Чихладзе. – Киев : Транспорт Украины, 2006. – 136 с.
- [6] Галагура Е. И. Испытание стальных и сталебетонных колонн коробчатого сечения на внецентренное и осевое сжатие / Е. И. Галагура // Міжвідомчий наук.-техн. зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту будівельних конструкцій Міністерства регіонального розвитку та будівництва України. – Київ : Видавництво НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 112–118.
- [7] Прогини і переміщення. Вимоги проектування : ДСТУ Б В.1.2-3:2006.– Офіц. вид. – К. : Мінбуд України, 2006. – 14 с. (Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Національний стандарт України).
- [8] Конструкції металеві будівельні. Загальні технічні умови : ДСТУ Б В.2.6-75:2008. – Офіц. вид – К. : Мінрегіонбуд України, 2009. – 15с. (Конструкції будинків і споруд. Національний стандарт України).
- [9] Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу : ДБН В.2.6-163:2010. – Офіц. вид. – К. : Мінрегіонбуд України, 2011. – 201 с. – (Конструкції будівель і споруд. Державні будівельні норми України).

*Надійшла до редколегії 29.05.2015 р.*