

УДК 621.321

С.И. Приходько, М.С. Курцев, Хамзе Билал

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМОВ КОДИРОВАНИЯ/ДЕКОДИРОВАНИЯ КАСКАДНЫМИ КОДАМИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Проведены сравнительные исследования вычислительной сложности предложенных алгоритмов кодирования и декодирования каскадными кодами в частотной области, которые показали, что переход в частотную область преобразования приводит, как правило, к существенному снижению вычислительной сложности. Это снижение сопоставимо с переходом от блочного кода заданной длины к соответствующему каскаду той же длины. Применение одновременно и каскадных кодовых конструкций и вычислительных процедур в частотной области позволяет обеспечить наименьшую вычислительную сложность.

**Ключевые слова:** обобщенный каскадный код, спектральные свойства кодов, многомерные спектры, вычислительная сложность алгоритмов, алгоритмы кодирования/декодирования каскадными кодами с преобразованиями в частотной области, преобразование Фурье.

### Введение

**Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы.** Вычислительная сложность известных алгоритмов кодирования и декодирования каскадными кодами с использованием преобразований во временной области определяется числом операций над элементами конечного поля [2, 3, 5].

**Цель статьи** – сравнить вычислительную сложность разработанных алгоритмов кодирования и декодирования, обосновать практические рекомендации по их использованию для повышения достоверности передачи в телекоммуникационных системах и сетях.

### Основной материал

**Сложность кодирования / декодирования линейного блочного  $(n, k, d)$  кода с преобразованиями во временной области.** Для линейного блочного  $(n, k, d)$  кода, заданного порождающей  $n \times k$  матрицей, сложность кодирования определяется  $nk$  вычислительными операциями умножения и сложения элементов конечного поля. Если код задан в систематическом виде (порождающая матрица задана каноническим способом), тогда сложность кодирования определяется числом операций, необходимых для вычисления проверочной части кодового слова, т.е. потребуется  $(n-k)k$  операций. Если алгебраический блочный код задан порождающим многочленом степени  $(n-k)$ , а информационная последовательность задана коэффициентами информационного многочлена, тогда сложность кодирования и декодирования определяется сложностью умножения двух многочленов степени  $(n-k)$  и  $k$ . Стандартный способ потребует  $(n-k)k$  операций

над элементами конечного поля. Следует отметить, что наибольший энергетический выигрыш от кодирования дают коды с  $k/n \approx 1/2 \dots 2/3$ . Положим  $k = n/2$ , тогда кодирование потребует  $n/4$  операций над конечным полем, что при больших длинах стремиться к  $n$ .

Вычислительная сложность декодирования определяется применяемым алгоритмом декодирования. Одним из наиболее эффективных, с вычислительной точки зрения, является декодирования Берлекэмп-Мессис, который применим для большинства алгебраических кодов. Сложность декодирования  $(n, k, d)$  кода алгоритмом Берлекэмп-Мессис равна  $\approx 6t^2$ , где  $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor - d$  - конструктивное кодовое расстояние. Используя границу Синглтона  $d = n - k + 1$  положим  $k = n/2$  и  $d = n/2 + 1$ , откуда  $t = n/4$  и сложность декодера Берлекэмп-Мессис примем равной  $\approx 6n^2/16$  что при больших  $n$  стремиться к  $n^2$ .

**Сложность кодирования / декодирования линейного блочного  $(n, k, d)$  кода в частотной области.** Оценим сложность кодирования / декодирования линейного блочного  $(n, k, d)$  кода в частотной области, в результате чего получим следующие оценки:

- сложность кодирования каскадными кодами в частотной области составит  $n \log n$  операций;
- сложность декодирования каскадными кодами в частотной области составит  $n(\log n)^2$  операций.

**Сложность кодирования / декодирования линейного блочного каскадного  $(Nn, Kk, Dd)$  кода во временной области.** Поскольку кодирование осу-

ществляется последовательно, сначала кодом второй, а затем кодом первой ступени, сложность кодера определяется суммой числа соответствующих операций. Для формирования слова второй ступени потребуется  $N$  операций, для формирования каждого из  $N$  слов первой ступени потребуется  $n$  операций. Таким образом, общее число операций оценивается как  $(N+1)n$ , что для больших  $n$  и  $N$  стремится к  $Nn$ .

Сложность декодирования каскадного кода во временной области также определяется суммой числа операций, которые необходимо выполнить для реализации алгоритмов декодирования всех слов первой и второй ступени. Используя декодер Берлекэмп-Мессис для декодирования каждого из  $N$  слов первой ступени, потребуется  $n^2$  операций. Для декодирования слова второй ступени потребу-

ется  $N^2$  операций. Общая сложность декодирования составит  $Nn^2 + N^2$ .

Обобщим полученные оценки на многомерный случай каскадного кода с преобразованиями во временной области:

- сложность кодирования составит  $n_1 n_2 \dots n_p$  операций;
- сложность декодирования составит  $n_p(n_1^2 + n_1^2 + \dots + n_{p-1}^2) + n_p^2$  операций.

Сложность предложенных вычислительных алгоритмов кодирования / декодирования каскадных кодов с преобразованиями в частотной области приведена выше.

В табл. 1 приведены сводные данные сравнительных исследований вычислительной сложности известных и разработанных алгоритмов.

Таблица 1

Результаты сравнительных исследований вычислительной сложности известных и разработанных алгоритмов

	Способ построения и обработки	Сложность алгоритма	
		Кодирование	Декодирование
1	Для $(n, k, d)$ кода с преобразованиями во временной области	$n$	$n^2$
2	Для $(n, k, d)$ кода с преобразованиями в частотной области	$n \log n$	$n(\log n)^2$
3	Для каскадного двумерного $(Nn, Kk, Dd)$ кода с преобразованиями во временной области	$Nn$	$Nn^2 + N^2$
4	Для каскадного двумерного $(Nn, Kk, Dd)$ кода с преобразованиями в частотной области (разработанные алгоритмы)	$n \log n + N \log N$	$Nn(\log n)^2$
5	Для каскадного многомерного $(n_1 n_2 \dots n_p, k_1 k_2 \dots k_p, d_1 d_2 \dots d_p)$ кода с преобразованиями во временной области	$n_1 n_2 \dots n_p = n$	$n_p^2 + n_p \sum_{i=1}^{p-1} n_i^2$
6	Для каскадного многомерного $(n_1 n_2 \dots n_p, k_1 k_2 \dots k_p, d_1 d_2 \dots d_p)$ кода с преобразованиями в частотной области (разработанные алгоритмы)	$\sum_{i=1}^p n_i \log n_i$	$n_p \sum_{i=1}^{p-1} n_i (\log n_i)^2$

На рис. 1 построены зависимости сложности кодирования, а на рис. 2 – зависимости сложности декодирования известными и разработанными алгоритмами.

Как видно из приведенных зависимостей переход в частотную область преобразования приводит, как правило, к существенному снижению вычислительной сложности. Это снижение сопоставимо с переходом от блочного кода заданной длины к соответствующему каскаду той же длины. Применение одновременно и каскадных кодовых конструкций и вычислительных процедур в частотной области позволяет обеспечить наименьшую вычислительную сложность.

Приведенные на рисунке 2 зависимости подтверждают сделанный вывод о существенном снижении вычислительной сложности. Для заданной длины кодовой конструкции и «мерности» каскадного кода обеспечивается наименьшая вычислительная сложность декодирования. Таким образом,

методы и вычислительные алгоритмы кодирования / декодирования каскадными кодами в частотной области целесообразно использовать для повышения достоверности передачи данных в современных телекоммуникационных системах и сетях.

### Выводы

1. Проведенные сравнительные исследования вычислительной сложности разработанных алгоритмов кодирования и декодирования каскадными кодами в частотной области показали, что переход в частотную область преобразования приводит, как правило, к существенному снижению вычислительной сложности. Это снижение сопоставимо с переходом от блочного кода заданной длины к соответствующему каскаду той же длины. Применение одновременно и каскадных кодовых конструкций и вычислительных процедур в частотной области позволяет обеспечить наименьшую вычислительную сложность.

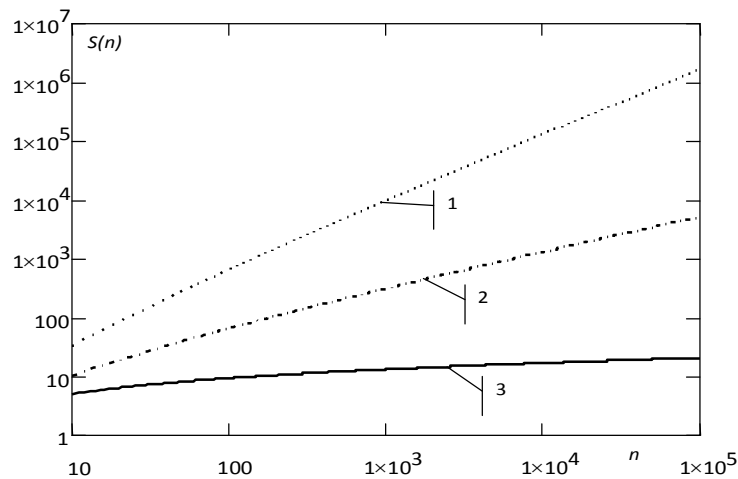


Рис. 1. Зависимости сложности кодирования  $S(n)$  от длины  $n$  кода: 1 – блокового кода с преобразованиями в частотной области / двумерного каскадного кода с преобразованиями во временной области; 2 – двумерного каскадного кода с преобразованиями в частотной области; 3 – многомерного каскадного кода с преобразованиями в частотной области.

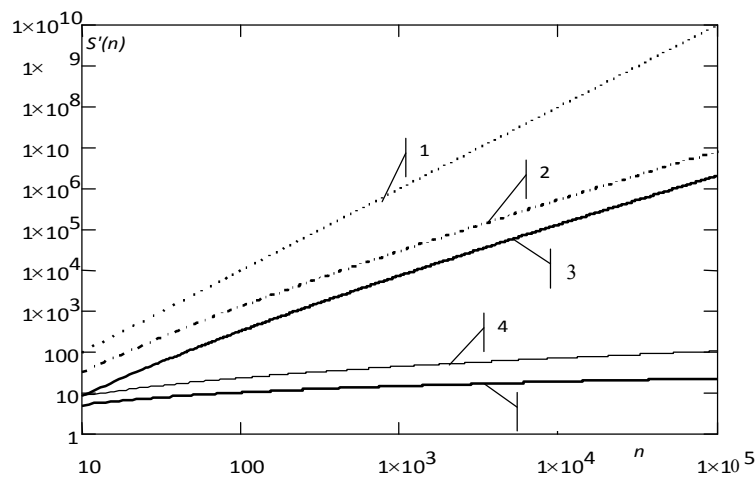


Рис. 2. Зависимости сложности декодирования  $S'(n)$  от длины  $n$  кода: 1 – блокового кода с преобразованиями во временной области; 2 – блокового кода с преобразованиями в частотной области / двумерного каскадного кода с преобразованиями во временной области; 3 – двумерного каскадного кода с преобразованиями в частотной области; 4 – многомерного каскадного кода с преобразованиями во временной области; 5 – многомерного каскадного кода с преобразованиями в частотной области

Таким образом, для заданной длины кодовой конструкции и «мерности» каскадного кода использование разработанных предложений обеспечивает наименьшую вычислительную сложность декодирования. Следовательно, предложенные методы и вычислительные алгоритмы кодирования / декодирования каскадными кодами в частотной области целесообразно использовать для повышения достоверности передачи данных в современных телекоммуникационных системах и сетях.

### Список литературы

1. Форми Д. Каскадные коды: пер. с англ. [Текст] / Д. Форми. – М.: Мир, 1970. – 207 с.
2. Алгебраические сверточные коды: учеб. пособие [Текст] / Н.И. Данько, С.Л. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, СИ. Приходько. – Х.: УкрГАЗТ, 2007. – 238 с.

3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки [Текст] / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов [Текст] / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1989. – 448 с.

5. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы практического применения [Текст] / Б. Скляр, пер. с англ. Под ред. А.В. Назаренко – Л.: Издат. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

6. Блох Э.Л. Обобщенные каскадные коды. Выпуск 5. [Текст] / Э.Л.Блох, В.В. Зяблов. – М.: Связь, 1976. – 240 с.

7. Блох Э.Л. Линейные каскадные коды. [Текст] / Э.Л.Блох, В.В. Зяблов. – М.: НАУКА, 1982. – 232 с.

Поступила в редколлегию 6.05.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава.

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ КОДУВАННЯ/ДЕКОДУВАННЯ КАСКАДНИМИ КОДАМИ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

С.І. Пріходько, М.С. Курцев, Хамзе Білал

*Проведено порівняльні дослідження обчислювальної складності запропонованих алгоритмів кодування і декодування каскадним кодами в частотній області, які показали, що перехід у частотну область перетворення призводить, як правило, до істотного зниження обчислювальної складності. Це зниження можна порівняти з переходом від блокового коду заданої довжини до відповідного каскаду тієї ж довжини. Застосування одночасно і каскадних кодових конструкцій і обчислювальних процедур в частотній області дозволяє забезпечити найменшу обчислювальну складність.*

**Ключові слова:** *узагальнений каскадний код, спектральні властивості кодів, багатовимірні спектри, обчислювальної складності алгоритмів, алгоритми кодування / декодування каскадним кодами з перетвореннями в частотній області, перетворення Фур'є.*

## CALCULABLE COMPLICATION OF ALGORITHMS OF ENCODING/DECODING CASCADE CODES IS IN FREQUENCY AREA

S.I. Prikhod'ko, M.S. Kurcev, Khamze Bilal

*A comparative study of computer algorithms proposed encoding and decoding concatenated codes in the frequency domain, which showed that the transition in the frequency domain conversion usually leads to a substantial reduction of computational complexity. This reduction is comparable to the transition from a given code block length to the respective stages of the same length. Application code simultaneously cascade structures and computational procedures in the frequency domain allows the smallest computational complexity.*

**Keywords:** *generalized concatenated code spectral properties codes multidimensional spectra, computational complexity, algorithms for encoding / decoding concatenated codes with changes in the frequency domain, Fourier transform.*