**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ СИСТЕМ
ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

Кафедра фізики

А. Т. Котвицький, К. А. Котвицька

МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Частина 1

Харків – 2018

Котвицький А.Т., Котвицька К.А. Механіка: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2018. – Ч. 1. – 62 с.

Наведений теоретичний матеріал для самостійного вивчення фізики розділу «Механіка» включає в себе основні відомості з теорії та питань для самоконтролю.

Призначено для студентів всіх форм навчання, які вивчають дисципліну «Фізика».

Іл. 26, табл. 3, бібліогр.: 10 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри фізики 23 листопада 2017 р., протокол № 4.

Рецензент

доц. Н. В. Глейзер

А. Т. Котвицький, К. А. Котвицька

МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Частина 1

Відповідальний за випуск Котвицька К. А.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 18.12.17 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій укладено на основі лекційного матеріалу з розділу «Механіка» для студентів перших курсів Українського державного університету залізничного транспорту у відповідності з робочою програмою дисципліни «Фізика».

З впровадженням кредитно-модульної системи навчання у ВНЗ України зменшується кількість аудиторних годин, тому передбачено винесення окремих питань лекційного матеріалу для самостійного вивчення. У зв'язку з цим, лекційні заняття передбачають висвітлення основних питань, законів і понять, які необхідно вивчити в межах даної дисципліни, і дати основні напрямки для самостійної роботи.

У результаті опрацювання лекційного матеріалу студент повинен:

- **знати** основні фізичні моделі та поняття фізики; параметри різновидів фізичних рухів; закони, що описують різновиди фізичних рухів; закони збереження;
- **вміти** формулювати фізичні закони; виводити формули, що пов'язують основні фізичні величини при формулюванні фізичних законів; пояснювати природу фізичних процесів і явищ; розв'язувати фізичні задачі; використовувати знання фізики для аналізу явищ, що вивчаються в рамках фахово-орієнтованих дисциплін.

Для поглибленого вивчення розділу «Механіка» студентам запропоновані підручники та посібники зі списку рекомендованої і використаної літератури.

Конспект лекцій розраховано для проведення лекційних занять зі студентами всіх спеціальностей денної форми навчання і можуть бути рекомендовані для дистанційного навчання курсу фізики.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Механіка та її структура. Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення матеріальної точки. Швидкість. Прискорення та його складові. Рівномірний і рівнозмінний рух. Рух матеріальної точки по колу. Зв'язок між лінійними та кутовими величинами.

Тема 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Основні характеристики динаміки. Закони Ньютона. Інерційна система відліку. Закон збереження імпульсу. Основні сили в механіці.

Тема 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

Робота постійної сили. Робота змінної сили. Кінетична енергія при поступальному русі. Теорема про зв'язок роботи та енергії. Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили. Види потенціальної енергії. Закон збереження енергії. Удар абсолютно пружних і непружних тіл.

Тема 4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Момент інерції матеріальної точки і твердого тіла. Момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент імпульсу та закон його збереження. Кінетична енергія твердого тіла при обертальному і поступальному русі.

Тема 1. ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

1.1 Механіка та її структура

Механіка – розділ фізики, у якому вивчається механічний рух.

Механічним рухом прийнято називати процеси зміни взаємного розташування тіл у просторі і часі відносно інших тіл.

Основне завдання механіки полягає в тому, щоб описати механічний рух тіла, а саме – зміну положення тіла у просторі в будь-який момент часу.

Класична механіка вивчає рух макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкостями світла у вакуумі ($c = 300000$ км/с).

Релятивістська механіка вивчає закони руху макроскопічних тіл зі швидкостями, сумірними зі швидкостями світла у вакуумі. Релятивістська механіка ґрунтується на постулатах спеціальної теорії відносності.

Квантова механіка описує закони руху мікроскопічних тіл (атомів, молекул та елементарних частинок).

Механіка складається з трьох основних розділів: *кінематика, динаміка і статика.*

Кінематика – розділ фізики, який вивчає опис руху тіл без з'ясування причин такого руху.

Динаміка – розділ фізики, який вивчає закони руху тіл і причини, що зумовлюють цей рух.

Статика – розділ фізики, який вивчає закони рівноваги тіла або системи тіл.

Механіка вивчає механічний рух тіл за допомогою ряду моделей, таких як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло і т. п.

Матеріальною точкою в механіці називається тіло, розмірами та формою якого в умовах даної задачі можна знехтувати. Знехтувати можна розмірами тіла за умови, що: а) відстані до інших тіл набагато більші порівняно з розмірами самого тіла; б) відстані, які проходить тіло, є набагато більші порівняно з розмірами тіла; в) тіло рухається поступально, тобто всі точки тіла рухаються однаково.

Наприклад, планети, що обертаються навколо Сонця, можна вважати матеріальними точками, оскільки розміри планет, хоч би якими великими вони не були, все ж таки дуже малі порівняно з їх відстанями до Сонця.

Абсолютно твердим тілом називають сукупність матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла залишаються незмінними. При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії. Тому часто в подальшому, поки не йдеться про обертання, рухому матеріальну точку ми будемо називати тілом.

При цьому:

1) простір є нескінченним, однорідним (всі точки його однакові), ізотропним (всі властивості простору однакові у всіх напрямках), а властивості простору не залежать від тіл, що знаходяться в ньому;

2) час є однорідним, тече в одному напрямку і хід часу не залежить від стану руху тіл.

1.2 Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення матеріальної точки

Рух тіл відбувається в просторі і часі. Для знаходження положення тіла необхідно задати систему відліку.

Системою відліку називають сукупність, яка складається з тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і пристрою для вимірювання часу.

Тілом відліку називають довільно обране тіло, відносно якого визначається положення інших тіл. У якості тіла відліку найчастіше використовують Землю, з якою пов'язують прямокутну *декартову систему координат*. Відрізки *x, y, z*, що відсікаються на осях координат перпендикулярними до них площинами, що проходять через точку *M*, називаються *координатами точки M* (рисунок 1.1).

Рис. 1.2.1

Рисунок 1.1

Положення матеріальної точки задається в просторі трьома координатами або вектором r .

Радіус-вектор – вектор, проведений з початку системи координат O в точку спостереження *M*.

$$r = xi + yj + zk, \tag{1.1}$$

де $x,\ y,\ z$ – координати точки;

i, j, k – одиничні вектори.

Для того щоб описати рух матеріальної точки, необхідно знайти три функції

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

або $r = r(t)$ – кінематичне рівняння руху.

Траєкторією називається сукупність послідовних положень точки, тобто лінія, яку вона описує в просторі під час свого руху (на рисунку 1.1 – це дуга АВ).

Шлях – це довжина траєкторії.

Одиницею вимірювання шляху в системі SI є метр:

$$[S] = \text{м}.$$

Зауважимо, що шлях є скалярною величиною, тобто величиною, яка не має напряму. Тобто з часом шлях або залишається незмінним, якщо тіло знаходиться в стані спокою, або збільшується, якщо тіло рухається.

Якщо відомо, що матеріальна точка пройшла шлях рівний 3 км, то ми все одно нічого не знаємо про характер руху, тобто матеріальна точка могла весь час рухатися від нас і зараз знаходитися на відстані 3 км. Могла пройти деяку дистанцію і повернутися до нас або взагалі весь час кружляла навколо нас.

Переміщення – векторна фізична величина, яка дорівнює різниці двох радіус-векторів проведених у перше і друге положення (рисунок 1.2).

$$\Delta r = r_2 - r_1, \tag{1.3}$$

де r_1 і r_2 – радіуси-вектори точки в моменти часу t_1 і t_2.

Модуль переміщення дорівнює:

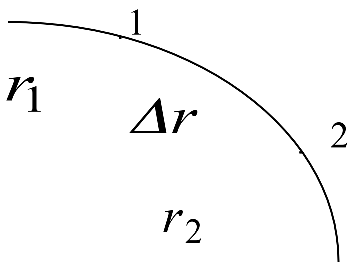


Рисунок 1.2

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Одиницею вимірювання переміщення в системі SI є метр:

$$[\Delta r] = м.$$

1.3 Швидкість

Швидкість – векторна величина, яка характеризує зміну положення тіла в кожний момент часу. З визначення швидкості випливає, що якщо положення тіла не змінюється з часом, то швидкість дорівнює нулю.

Нехай матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії АВ. Якщо за час Δt точка пройде шлях ΔS і матиме переміщення Δr, то кажуть, що тіло рухається з середньою швидкістю $v_{ср}$.

Середня швидкість переміщення – це векторна величина, яка дорівнює відстані, що долає тіло вздовж вектора переміщення за одиницю часу:

$$\vec{v}_{ср.} = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \qquad (1.4)$$

де Δr – переміщення матеріальної точки за час Δt (рисунок 1.3).

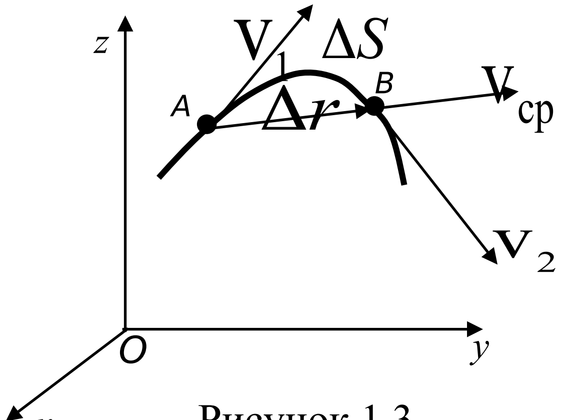


Рисунок 1.3

Середня швидкість переміщення спрямована вздовж вектора переміщення, тобто вздовж хорди AB.

Якщо у виразі (1.4) спрямувати час $\Delta t \to 0$, то одержимо вираз для миттєвої швидкості:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}, \qquad (1.5)$$

де dr – нескінченно мале переміщення за нескінченно малий проміжок часу dt.

Миттєва швидкість – вектор, що спрямований по дотичній до траєкторії в кожній її точці та дорівнює першій похідній радіус-вектора за часом:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \qquad (1.6)$$

де $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$ – проекції швидкості v на координатні осі.

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.7)$$

Чисельне *значення миттєвої швидкості* можна знайти з формули

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \qquad (1.8)$$

При прямолінійному русі $|\Delta r|$ і ΔS збігаються.

У випадку нерівномірного руху (рисунок 1.3) *середня шляхова швидкість* є скалярною величиною та визначається як відношення відрізка шляху ΔS до проміжку часу Δt.

$$v_{ср.шлях.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1.9)$$

Середня шляхова швидкість – величина, яка дорівнює відстані, що проходить тіло вздовж траєкторії за одиницю часу.

Одиницею вимірювання швидкості в системі SI є метр за секунду:

$$[v] = [v_{ср.шлях.}] = [v_{ср.}] = \text{м/с}.$$

1.4 Прискорення

Прискорення – характеристика зміни швидкості тіла за часом. Якщо за час Δt тіло змінило свою швидкість, то кажуть, що тіло рухалося із середнім прискоренням $a_{ср}$ (рисунок 1.4).

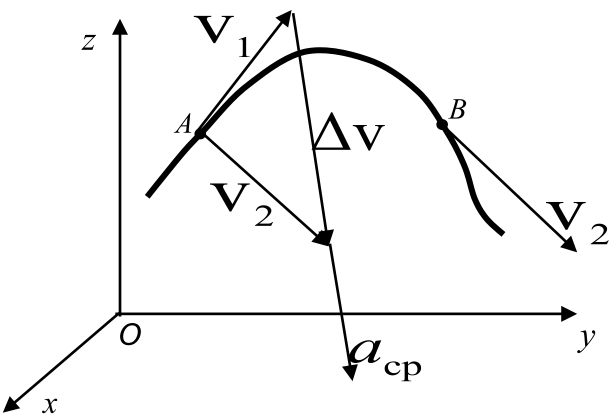


Рисунок 1.4

Середнє прискорення – це відношення зміни швидкості $\Delta v = v_2 - v_1$ до інтервалу часу Δt:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (1.10)$$

Спрямуємо час $\Delta t \to 0$, одержимо *миттєве прискорення*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\,v}{d\,t}. \tag{1.11}$$

Миттєве прискорення є першою похідною вектора швидкості v за часом або другою похідною радіуса вектора r за часом:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \tag{1.12}$$

де $\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$ – проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат.

Модуль прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.13}$$

Чисельне значення миттєвого прискорення можна знайти з формули

$$\vec{a} = \frac{d\,v}{d\,t}. \tag{1.14}$$

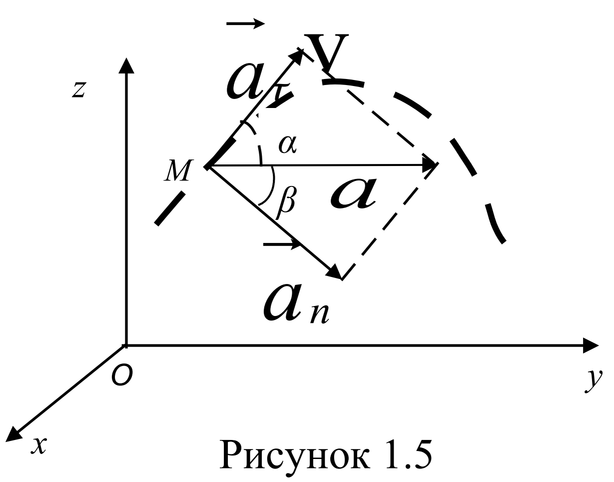


Рисунок 1.5

Розглянемо криволінійний рух, у якому швидкість змінюється як за величиною, так і за напрямком. У цьому випадку зручно використовувати поняття тангенціального та нормального прискорень (рисунок 1.5).

Тангенціальне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною (модулем) і спрямоване по дотичній до траєкторії (рисунок 1.5).

$$a_\tau = \frac{d\left|v\right|}{dt}. \tag{1.15}$$

Вектор a_τ спрямований вздовж вектора v, якщо швидкість збільшується за модулем, і в протилежний бік – якщо швидкість зменшується.

Нормальне прискорення a_n характеризує зміну швидкості за напрямком:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.16}$$

Вектор a_n спрямований по нормалі до траєкторії (рисунок 1.5).

Повне прискорення криволінійного руху точки дорівнює векторній сумі

$$a = a_n + a_\tau. \tag{1.17}$$

Модуль повного прискорення

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{1.18}$$

Напрямок вектора повного прискорення при криволінійному русі можна вказати, якщо визначити кут між вектором повного прискорення і вектором тангенціального прискорення або кут між вектором повного прискорення і вектором нормального прискорення.

$$\alpha = arctg\frac{a_n}{a_\tau} \text{ або } \beta = arctg\frac{a_\tau}{a_n}. \tag{1.19}$$

Одиницею вимірювання прискорення в SI є метр за секунду в квадраті:

$$\left[a\right] = \left[a_n\right] = \left[a_\tau\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.5 Рівномірний і рівнозмінний рух

Приклад 1. Матеріальна точка рухається прямолінійно з постійним прискоренням $a = const$. Знайти залежність координати і швидкості від часу за умови, що в початковий момент часу її координата $x(0) = x_0$, а швидкість $v(0) = v_0$.

Розв'язання: У разі одновимірного прямолінійного руху радіус-вектор $r(t)$ замінюється на координату $x(t)$. Щоб знайти залежність $x = x(t)$, скористаємося виразом:

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

звідки $dx = v(t)\,dt$

або

$$x = \int v(t)\,dt. \qquad (1.20)$$

З формули $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$, випливає, що $dv = a(t)\,dt$,

або

$$v = \int a(t)\,dt \qquad (1.21)$$

Тоді при $a = const$ маємо

$$\mathrm{v} = \int a\,dt = a\int dt = a\cdot t + c_1 = v_0 + a\cdot t, \qquad (1.22)$$

де c_1 – константа, яка визначається з початкових умов $v(0) = v_0$.

Підставляючи вираз (1.22) у формулу (1.20) отримаємо

$$x = \int v(t)\,dt = \int (v_0 + a\cdot t)dt = v_x t + \frac{a\,t^2}{2} + c_2. \qquad (1.23)$$

Константу c_2 знаходимо з умови $x(0)=x_0$, тоді $c_2=x_0$, отримуємо

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}. \tag{1.24}$$

Оскільки $S(t)=x-x_0$ – пройдений шлях, то

$$S(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}. \tag{1.25}$$

Запишемо основні формули прямолінійного рівноприскореного (рівнозмінного) руху:

$$\begin{gathered} x(t)=x_0+v_{0x}t+\frac{a_x t^2}{2}. \\ v_x=v_{0x}+a_x\cdot t. \\ a=const. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Приклад 2. Матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно, тобто з постійною швидкістю $v=v_0=const$. Знайти залежність координати від часу за умови, що в початковий момент часу її координата $x(0)=x_0$.

Розв'язання: За умови $a=0$ формула для знаходження координати тіла від часу

$$x(t)=x_0+v_{0x}t. \tag{1.27}$$

1.6 Рух матеріальної точки по колу

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається рух, при якому всі точки тіла рухаються по колу, центри яких лежать на одній прямій – осі обертання. Вісь обертання перпендикулярна до площин, у яких лежать ці кола.

Розглянемо обертання матеріальної точки M по колу (рисунок 1.6). Рухаючись по колу, точка M може за деякий час

Δt здійснити один або кілька обертів. У момент часу $t = 0$ вона перебувала в точці A.

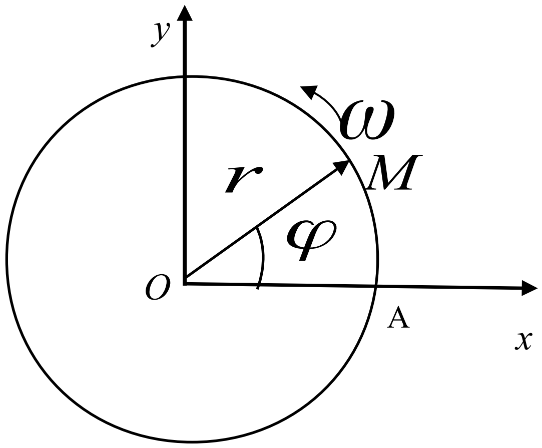


Рисунок 1.6

За час t радіус-вектор r повернувся на кут φ.

З рисунка 1.6 видно, що координати точки

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \qquad (1.28)$$

Модуль радіус-вектора $r = |r|$ і кута φ, який він складає з віссю *OX,* називають *полярними координатами* точки, а співвідношення (1.28) дають зв'язок декартових координат x і y з полярними (r,φ). У нашому випадку $r = const$ і положення точки M на колі визначається тільки однією полярною координатою - кутом φ.

Кутове переміщення – це вектор, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з напрямком руху правилом правого гвинта.

$$dr = \left[d\varphi, r \right]. \qquad (1.29)$$

Кутова швидкість – це вектор, чисельно рівний першій похідній від кута повороту $\Delta\varphi$ за часом Δt (рисунок 1.7).

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.30)$$

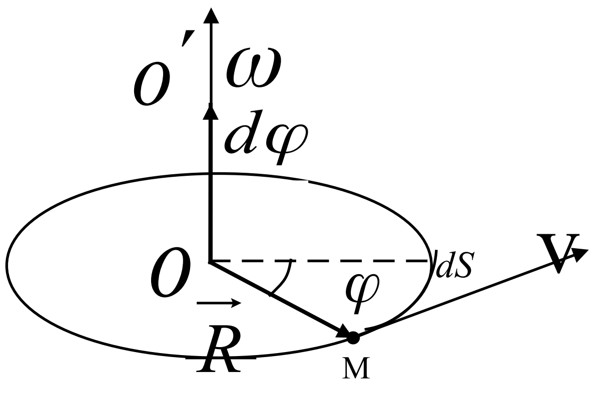


Рисунок 1.7

Вектор ω спрямований уздовж осі обертання OO' за правилом правого гвинта, тобто так само, як і вектор кута повороту $d\varphi$.

Кутова швидкість характеризує напрямок і швидкість обертання тіла навколо осі. Якщо $\omega = const$, то рух тіла називають рівномірним обертанням навколо нерухомої осі.

Одиницею вимірювання кутової швидкості в SI є радіан за секунду:

$$[\omega] = \text{рад / с} .$$

Швидкість довільної точки *M* при русі її по колу прийнято називати *лінійною швидкістю*.

$$\text{v} = \omega r. \tag{1.31}$$

З рисунка 1.7 видно, що вектор v направлений перпендикулярно до ω і до радіус-вектора R. Для характеристики нерівномірного обертання тіла вводиться поняття кутового прискорення.

Кутове прискорення – це вектор, чисельно рівний першій похідній кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту за часом (рисунок 1.8).

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.32}$$

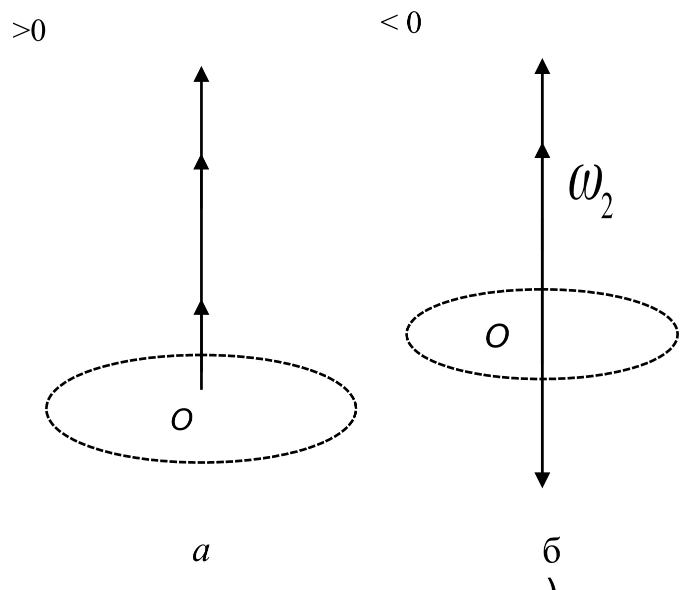


Рисунок 1.8

Вектор кутового прискорення направлений вздовж осі обертання: його напрямок збігається з напрямком кутової швидкості, якщо рух прискорений $\frac{d\omega}{dt} > 0$ (рисунок 1.8, *а*), і протилежний, якщо обертання сповільнене $\frac{d\omega}{dt} < 0$. (рис.1.8, *б*).

Одиницею вимірювання кутового прискорення в системі SI є радіан за секунду у квадраті:

$$[\varepsilon] = \text{рад / с}^2.$$

Середня кутова швидкість – це відношення кута повороту $\Delta\varphi$ радіус-вектора точки *M* до проміжку часу Δt, за який відбувся цей поворот:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.33}$$

Середнє кутове прискорення – це відношення зміни модуля кутової швидкості $\Delta\omega$ до проміжку часу Δt:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{1.34}$$

Період обертання – проміжок часу, протягом якого тіло здійснює один повний оберт, тобто радіус-вектор повертається на кут 2π.

$$T = \frac{t}{N}. \tag{1.35}$$

Одиницею вимірювання періоду в системі SI *є* секунда:

$$[T] = c.$$

Частота – величина, яка дорівнює кількості обертів за одиницю часу.

$$\nu = \frac{N}{t}. \tag{1.36}$$

Одиницею вимірювання частоти в системі SI є оберт за секунду або Герц.

$$[\nu] = 1/\text{с} = \text{Гц}.$$

Період і частота - взаємно обернені величини

$$T = \frac{1}{\nu}. \tag{1.37}$$

Якщо точка здійснила N обертів, то кут повороту її радіус-вектора $\varphi = 2\pi N$, а його кутова швидкість $\omega = \varphi / t = 2\pi N / t$.

Підставимо N/t із формули (1.36), отримаємо зв'язок кутової швидкості ω з частотою обертання і періодом:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1.38)$$

Для розв'язання оберненої задачі кінематики обертального руху матеріальної точки кут повороту φ можна знайти, якщо відома кутова швидкість ω:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega\, dt, \qquad (1.39)$$

а кутова швидкість ω - за відомим кутовим прискоренням ε –

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon\, dt, \qquad (1.40)$$

де φ_0 і ω_0 - константи інтегрування, рівні відповідно куту повороту та кутової швидкості у момент часу $t = 0$.

Основні формули для різних видів руху

1 *Для рівномірного обертання* матеріальної точки:

- залежність кута φ від часу буде дорівнювати

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t, \qquad (1.41)$$

де φ_0 - кут повороту в початковий момент часу;

$$\omega(t) = const. \qquad (1.42)$$

2 *Для рівнозмінного руху* матеріальної точки по колу:

- залежність кута φ від часу

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (1.43)$$

- залежність кутової швидкості від часу

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (1.44)$$

1.7 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами

Запишемо зв'язок між лінійними та кутовими величинами руху матеріальної точки по колу:

1 між довжиною дуги кола радіусом R і кутом повороту $\Delta\varphi$:

$$\Delta s = \Delta\varphi R. \qquad (1.45)$$

Для малих проміжків часу Δt цей вираз має вигляд

$$ds = d\varphi R, \qquad (1.46)$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту;

2 між модулями лінійної швидкості v точки та кутової швидкості ω:

$$v = \omega r; \qquad (1.47)$$

3 між модулями тангенціального прискорення та кутового прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\varepsilon; \qquad (1.48)$$

4 між модулями нормального прискорення та кутової швидкості:

$$a_n = \frac{v}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R; \qquad (1.49)$$

5 між повним прискоренням точки та її кутової швидкості і кутовим прискоренням:

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (1.50)$$

У таблиці 1.1 представлені характеристики і закони поступального і обертального руху матеріальної точки.

Таблиця 1.1

Поступальний рух	Обертальний рух
Рівномірний	
$v = \text{const}$,	$\omega = \text{const}$,
$s_0 = s_0 + \text{v}t$, $a_\tau = 0$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$, $\varepsilon = 0$
Рівнозмінний	
$s = s_0 + v_0\,t \pm \frac{\lvert a_\tau\rvert\;t^2}{2}$, $v = v_0 \pm \lvert a_\tau\rvert\;t$ $a_\tau = \text{const}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\,t \pm \frac{\lvert\varepsilon\rvert\;t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 \pm \lvert\varepsilon\rvert\;t$ $\varepsilon = \text{const}$
Нерівномірний	
$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Питання до теми 1

1 Що вивчає механіка? Назвати розділи механіки. Назвати моделі, які вивчає механіка.

2 Який рух називається поступальним? Що входить до складу системи відліку? Які системи відліку вам відомі?

3 Що таке траєкторія руху? На які види поділяється механічний рух за характером траєкторії? Записати рівняння руху.

4 Сформулювати поняття переміщення та шляху. Чим вони відрізняються?

5 Що таке швидкість? Записати формули для середньої, миттєвої швидкості. Як вони спрямовані?

6 Що таке прискорення? Записати формули для знаходження нормальної складової прискорення, тангенціальної складової прискорення. Вказати напрямок нормальної, тангенціальної складової прискорення.

7 Який рух називається обертальним? Записати зв'язок між полярними і декартовими координатами.

8 Що називається кутовою швидкістю? Записати формули для знаходження: а) середньої кутової швидкості; б) миттєвої кутової швидкості.

9 Що називається кутовим прискоренням? Як виражаються середнє і миттєве кутові прискорення при будь-якому змінному обертанні тіла?

10 Дайте визначення періоду обертання і частоти обертання. Як вони пов'язані між собою?

Тема 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Основні характеристики динаміки

Динаміка – основний розділ механіки, який вивчає закони руху і причини, що викликають або змінюють цей рух.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які були одержані в результаті узагальнення великої кількості експериментальних фактів. До основних характеристик динаміки поступального руху належать маса m, імпульс p і сила F.

Маса – це фізична величина, яка є мірою інертності тіл. Вона визначається порівнянням з еталонною масою. Ця маса називається *інертною масою*.

Сила, з якою тіло притягається до Землі, пропорційна його *гравітаційній масі* m_g. Інертну і гравітаційну маси прийнято вважати рівними, тому на практиці масу тіла визначають зважуванням на важільних вагах, де на одній з чашок знаходиться тіло встановленої маси.

Основні властивості маси в класичній механіці:

1 *Маса тіла* є постійною величиною, яка не залежить ні від положення, яке займає тіло в просторі, ні від її швидкості, ні від дії на дане тіло інших тіл.

2 *Маса є* «адитивною» величиною, тобто маса тіла, яка складається з кількох частин, дорівнює сумі мас усіх його частин:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_s. \qquad (2.1)$$

Зазначимо, що ці властивості маси справедливі лише при русі тіл зі швидкостями, які менші, ніж швидкості світла у вакуумі.

Одиницею вимірювання маси в системі SI є кілограм:

$$\left[m \right] = \text{кг.}$$

Імпульсом точки називається векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$p = mv. \qquad (2.2)$$

Основні властивості імпульсу:

1 Напрямок імпульсу тіла співпадає з напрямком швидкості тіла.

2 Імпульс є мірою поступального руху, тобто характеризує його кількість.

Одиницею вимірювання імпульсу в системі SI є кілограм-метр за секунду:

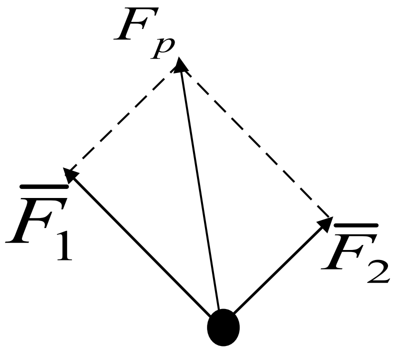
$$[\,p\,] = \text{кг} \cdot \text{м / с.}$$

Сила – це векторна фізична величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, у результаті якої тіло одержує прискорення або деформується.

Основні властивості сили:

1 Сила визначається числовою величиною (модулем) $\left| F \right| = F$, напрямком у просторі та точкою прикладання.

2 Виконується принцип суперпозиції: *результуюча сила, що діє на тіло*, дорівнює векторній сумі сил, з якими кожне з оточуючих тіл діє на це тіло за відсутності дії на нього інших тіл (рисунок 2.1).



з Якщо на тіло діє N сил, то їх сумарна дія еквівалентна дії однієї рівнодійної сили, яка є геометричною (векторною) сумою цих сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \qquad (2.3)$$

Рисунок 2.1

ірювання сили в системі SI є Ньютонабо кілограм-метр за секунду у квадраті:

$$[\,F\,] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

2.2**Закони Ньютона. Інерційна система відліку**

Закони Ньютона виконуються в інерціальних *системах відліку.* Система відліку, у якій будь-яка вільна матеріальна точка зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, називається *інерціальною.*

У якості першого закону руху Ньютон прийняв *закон інерції,* відкритий ще Г. Галілеєм: *будь-яке тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки вплив з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.*

Властивість тіла зберігати стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху за відсутності дії на нього інших тіл, називається *інерцією,* а перший закон – *законом інерції.*

Перший закон Ньютона: якщо на тіло не діють сили або сума цих сил дорівнює нулю, то тіло перебуває в стані спокою або рухається з постійною швидкістю:

$$a = 0, \text{ якщо } F_{рез} = 0. \qquad (2.3)$$

Перший закон Ньютона постулює існування інерціальних систем відліку: *існують такі системі відліку, у яких матеріальна точка зберігає свою швидкість сталою, якщо на нього не діють інші тіла або дія інших тіл скомпенсована.*

Основним законом динаміки поступального руху є другий закон Ньютона. У загальному формулюванні він читається так: *швидкість зміни імпульсу тіла в часі дорівнює результуючій прикладених до тіла сил.*

Другий закон Ньютона (в імпульсній формі)

$$\frac{dp}{dt} = F_{рез}. \tag{2.4}$$

Для тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу збігається з добутком маси на прискорення

$$ma = F . \tag{2.5}$$

Це рівняння називається *динамічним рівнянням руху* точки з постійною масою, або аналітичним записом другого закону Ньютона.

$$\vec{a} = \frac{F}{m}. \tag{2.6}$$

Якщо на тіло діють кілька сил, то у другий закон Ньютона входить рівнодійна цих сил.

У найпростішій формі другий закон прийнято формулювати так: *в інерціальній системі відліку вектор прискорення тіла прямо пропорційний векторній сумі діючих на нього сил і обернено пропорційний масі тіла:*

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}}{m}. \tag{2.7}$$

Третій закон Ньютона: дві матеріальні точки взаємодіють з силами, рівними за величиною та спрямованими в протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує ці точки (рисунок 2.2).

$$F_{12} = -F_{21} \tag{2.8}$$

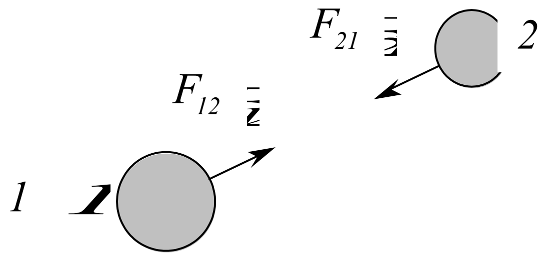


Рисунок 2.2

Зазначимо, що ці сили діють вздовж прямої, яка проходить через центр мас тіл. Це означає, що при взаємодії тіл сили завжди виникають парами і є силами однієї природи. Узагальнюючи зазначене, можна записати, що закони Ньютона не виводяться з будь-яких загальних принципів. Критерієм їх справедливості служить досвід.

Розрахунки, що ґрунтуються на законах Ньютона, узгоджуються з експериментом. Однак ці закони мають межі застосування:

1 Механіка Ньютона є механікою макроскопічних тіл, розміри і маси яких набагато більше від розмірів і мас атомів.

2 Тіла повинні рухатися зі швидкостями набагато меншими від швидкості поширення світла у вакуумі;

3 Закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку.

2.3 **Основні сили в механіці**

Основні сили, які розглядаються в класичній механіці, – це гравітаційні сили та сили електромагнітної природи, зокрема сили пружності і тертя.

Сила гравітаційної взаємодії – це сила, що діє між двома матеріальними тілами та обумовлена їх гравітаційною взаємодією:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.9}$$

де m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між матеріальними точками або тілами,

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала.

Застосовуючи закон всесвітнього тяжіння до випадку взаємодії Землі з тілом масою *m*, розташованим поблизу земної поверхні на висоті *h*, отримаємо

$$F = G\frac{M_з m_2}{(R_з + h)^2}, \tag{2.10}$$

де $M_з$ – маса Землі, $R_з$ – радіус Землі.

Сила тяжіння – це сила, яка діє на тіло з боку Землі:

$$F_т = mg, \tag{2.11}$$

де $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – прискорення вільного падіння.

Прискорення вільного падіння тіла g залежить від його висоти над земною поверхнею:

$$\text{g} = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}. \tag{2.12}$$

Вага тіла – це сила, з якою тіло внаслідок тяжіння до Землі діє на опору або підвіс:

$$P = mg. \tag{2.13}$$

Якщо опора (підвіс) рухається з прискоренням, то вага тіла буде залежати від прискорення тіла та напрямку руху тіла з опорою:

$$P = m(g \pm a). \tag{2.14}$$

Відповідно до третього закону Ньютона одночасно виникають дві рівні за модулем і протилежні за напрямком сили. Силу $\vec{N}$, з якою опора діє на тіло, називають силою *нормальної реакції опори*. Для тіла, що лежить на нерухомій горизонтальній поверхні, вага і сила реакції опори рівні за модулем силі тяжіння F_m.

Сила пружності – це сила, що виникає при деформації тіла, тобто при зміні його форми або об'єму, обумовленому дією зовнішніх сил.

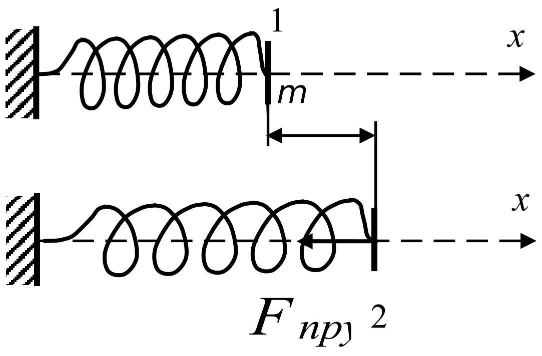


Рисунок 2.3

Для пружних деформацій справедливий закон Гука: *сила пружності, що виникає при деформації стискання або розтягу, пропорційна величині деформації* (рисунок 2.3):

$$F_{\text{пр}} = - kx, \qquad (2.15)$$

де k – коефіцієнт пружності;
x – абсолютна деформація.

Сили тертя з'являються при переміщенні тіл, що стикаються, або їх частин одна відносно одної:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \qquad (2.16)$$

де μ – коефіцієнт тертя;
N – сила нормального тиску.

Сили тертя спрямовані по дотичній до поверхонь, що труться, причому так, що вони протидіють відносному зміщенню цих поверхонь. Тертя, що виникає при відносному переміщенні двох дотичних тіл, називається *зовнішнім*; тертя між частинами одного і того самого тіла називається *внутрішнім*.

2.4 Закон збереження імпульсу

Із законів Ньютона випливає закон збереження імпульсу для замкненої системи тіл.

Замкненою називають систему тіл, на які не діють зовнішні сили. Тіла системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

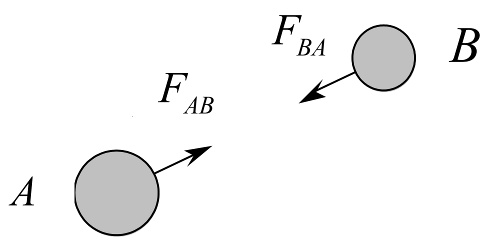


Рисунок 2.4

Розглянемо замкнену систему, що складається з двох тіл A і B (рисунок 2.4). За третім законом Ньютона, сили їх взаємодії

$$F_{A,B} = -F_{B,A}.$$

За другим законом Ньютона, $\vec{F}_{A,B} = \frac{dp_A}{dt}$, $\vec{F}_{B,A} = \frac{dp_B}{dt}$, тому $\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt}$, тобто $\frac{d\left(p_A + p_B\right)}{dt} = 0$, звідки випливає, що

$$p_A + p_B = const.$$

Для системи N тіл:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const. \qquad (2.17)$$

Це рівняння виражає *закон збереження імпульсу*: сумарний імпульс замкненої системи тіл не змінюється з часом. Векторне рівняння (2.17) розпадається на три незалежних рівняння для компонент імпульсу по осях координат:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{xi} = const, \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{yi} = const, \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{zi} = const. \qquad (2.18)$$

Якщо вздовж будь-якого напрямку на систему тіл не діють зовнішні сили, то проекція її сумарного імпульсу на цей напрямок залишається постійною. Це дозволяє використовувати закон збереження імпульсу при розв'язанні задач механіки.

Як показує досвід, закон збереження імпульсу виконується при будь-яких взаємодіях тіл всередині замкненої системи. Закон збереження імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики.

Питання до теми 2

1 Що вивчає динаміка? Записати основні динамічні характеристики поступального руху тіла.

2 Що таке маса? Які властивості вона має?

3 Що таке сила? Які види сил у механіці ви знаєте?

4 Яка величина називається імпульсом тіла? Яку величину називають імпульсом сили?

5 Сформулювати перший закон Ньютона.

6 Сформулювати другий закон Ньютона в загальній формі і записати його математично.

7 Сформулювати третій закон Ньютона. У чому суть цього закону?

8 Яка сила називається: а) силою пружності; б) силою тяжіння; в) силою тертя? Записати формули для знаходження цих сил.

9 Яка система тіл називається замкненою (ізольованою), незамкненою?

10 Сформулювати закон збереження імпульсу.

Тема 3. РАБОТА. ЕНЕРГІЯ. ПОТУЖНІСТЬ

3.1. Робота постійної сили

Робота є кількісною характеристикою процесу обміну енергією між тілами, що взаємодіють. Зміна механічного руху тіла пов’язана з силами, які діють на тіло з боку інших тіл. Тому в механіці роботу вимірюють добутком сили, що діє на тіло в напрямку його переміщення, на модуль цього переміщення.

Розглянемо тіло, що рухається прямолінійно з постійною силою ($\vec{F} = const$) і під дією сили здійснює переміщення $\vec{S}$ (рисунок 3.1).

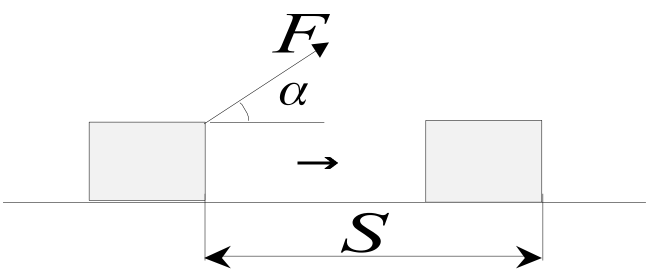


Рисунок 3.1

Механічною роботою даної сили $\vec{F}$ на деякому переміщенні $\vec{S}$ називається добуток модуля сили, переміщення точки її прикладення і косинуса кута α між напрямком сили і напрямком переміщення:

$$A = F \times S \cos\alpha . \tag{3.1}$$

Праву частину формули (3.1) можна записати у вигляді *скалярного добутку* вектора сили F і вектора переміщення S

$$A = (F, S). \tag{3.2}$$

Залежно від величини кута α механічна робота може бути додатною ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), від'ємною (при $\alpha > \frac{\pi}{2}$) і дорівнювати нулю $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Одиницею вимірювання роботи у системі SI – Джоуль:

$$[A] = \text{Дж}.$$

Приклад 1. Розглянемо тіло масою m, що рухається вертикально вниз з точки В на висоті h (рисунок 3.2). В точці А він торкається Землі. Яку роботу здійснює сила тяжіння за час польоту тіла?

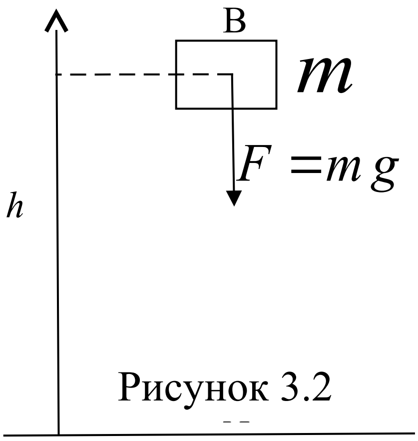


Рисунок 3.2

Розв'язання. Оскільки сила тяжіння постійна і дорівнює $F = mg$, то її роботу знайдемо, обчисливши скалярний добуток (F, S). Врахуємо, що рух вертикальний і $\alpha = 0$, тобто $\cos\alpha = 1$, тоді отримаємо

$$A_{1,2} = (F, S) = mg \cdot S \cdot \cos\alpha = mgh.$$

Робота сили тяжіння Рисунок 3.2 нює mgh і не залежить від траєкторії руху.

3.2 Робота змінної сили

Якщо траєкторія рухомого тіла не є прямою, а діюча на нього сила не постійна ($F \neq const$), то для обчислення роботи розіб'ємо весь шлях від точки 1 до точки 2 на прямолінійні відрізки $d S_i$ досить малої довжини, щоб силу на цих відрізках можна було вважати постійною (рисунок 3.3).

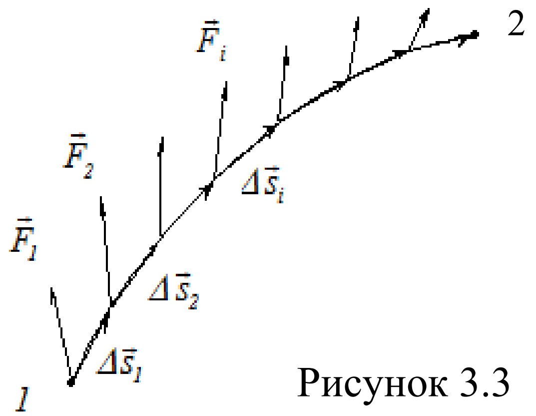


Рисунок 3.3

Робота змінної сили на всьому шляху (*1-2*) буде дорівнювати сумі робіт на кожному з відрізків:

$$dA_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} dA_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}, d\vec{S}_i\right). \quad (3.3)$$

Суму можна замінити інтегруванням

$$A_{1,2} = \int_1^2 \left(\vec{F}, d\vec{S}\right) = \int_1^2 F_s dS. \quad (3.4)$$

Це інтеграл векторної функції вздовж траєкторії руху від точки 1 до точки 2. Такий інтеграл називається криволінійним. Часто криву 1-2 позначають через L_{12}, вздовж якої рухається тіло, тоді формула (3.3) має вигляд

$$A_{1,2} = \int_{L_{1,2}} \left(F, dS\right). \quad (3.5)$$

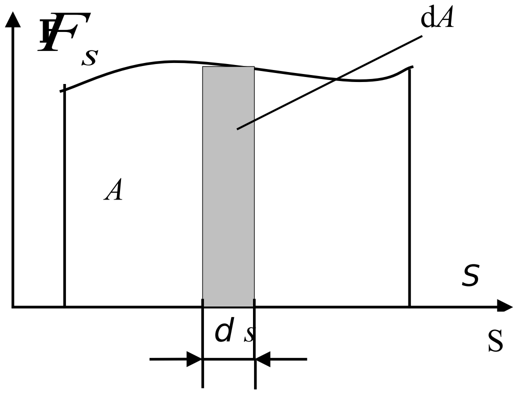


Рисунок 3.4

Для обчислення цього інтегралу необхідно знати залежність F_s від шляху S. Якщо залежність F_s від шляху S представлена графічно (рисунок 3.4), то робота *A* визначається заштрихованою на графіку площею кривої $F_s(S)$.

Приклад 2. Нехай тіло масою *m* переміщується з точки 1 у точку 2 під дією сили пружності $F_{пруж}$.

Розв'язання. З закону Гука сила пружності $F_{пруж} = -kx$. Тоді робота сили пружності при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2 визначається за формулою

$$A = \int_1^2 (F_{пруж}, dx) = \int_1^2 (-kx, dx) = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}. \qquad (3.6)$$

Для характеристики швидкості виконання роботи вводиться поняття потужності.

Середньою потужністю називають фізичну величину, що дорівнює відношенню роботи до проміжку часу, за який вона виконується:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (3.7)$$

Якщо за час dt сила здійснює роботу (F, dS), то *миттєва механічна потужність*, яку розвиває ця сила в даний момент часу (при $v = const$), буде дорівнювати

$$N = \frac{(F, dS)}{dt} = (\vec{F}, \vec{v}). \qquad (3.8)$$

Одиницею вимірювання потужності в системі SI є Ват (Джоуль за секунду).

$$[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

3.3 Кінетична енергія при поступальному русі. Теорема про зв'язок роботи і енергії

Енергія є універсальною мірою різних форм руху та взаємодії матеріальних тіл. Різним формам руху відповідають різні форми енергії: механічна, теплова, електромагнітна та інші.

Енергію вимірюють роботою, яку може зробити тіло. У механіці розглядаються два види енергії: кінетична і потенціальна.

Кінетична енергія – це енергія, яку має матеріальна точка внаслідок механічного руху і визначається роботою, яку необхідно виконати, щоб викликати цей рух.

$$dE_к = \delta A. \tag{3.9}$$

Кінетична енергія тіла, яке знаходиться в поступальному русі, визначається за формулою

$$W_к = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \tag{3.10}$$

Покажемо, як пов'язані між собою робота і кінетична енергія. За співвідношенням (3.4), робота результуючої сили

$$A_{1,2} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{S}), \tag{3.11}$$

оскільки, за другим законом Ньютона,

$$\vec{F} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \qquad \text{і} \qquad dS = vdt,$$

то

$$A_{1,2} = \int_1^2 \left(m\frac{d\mathrm{v}}{dt}, \vec{\mathrm{v}}dt \right) = m\int_1^2 (\vec{\mathrm{v}}, d\vec{\mathrm{v}}) = \frac{m\mathrm{v}_2^{\,2}}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^{\,2}}{2}. \tag{3.12}$$

Порівнявши вирази (3.12) і (3.13), одержимо вираз для теореми зв’язку роботи і енергії: *робота результуючої всіх сил, що діють на тіло, дорівнює зміні його кінетичної енергії*:

$$A_{1,2} = W_{к2} - W_{к1}, \tag{3.13}$$

де $W_{к1}$ та $W_{к2}$ – кінетична енергія тіла відповідно в початковій і кінцевій точках шляху.

Повна кінетична енергія $W_к$ системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл $W_{кi}$, що входять до неї:

$$W_к = \sum_i W_{кi} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (3.14)$$

Кінетична енергія системи є функцією стану її руху та залежить від вибору системи відліку.

Одиницею вимірювання кінетичної енергії в SI є Джоуль.

$$\left[W_к\right] = \text{Дж}.$$

3.4 Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили

Потенціальна енергія – це механічна енергія системи тіл, що визначається взаємним розташуванням тіл і характером сил взаємодії між ними. Якщо взаємодія здійснюється за допомогою силових полів (пружних сил, гравітаційних сил), то робота цих сил не залежить від траєкторії руху, а залежить тільки від початкового та кінцевого положення тіла. Ці поля *називаються потенціальними,* а сили консервативними.

Консервативна сила – це сила, робота якої не залежить від форми траєкторії тіла, а визначається тільки координатами початку і кінця шляху.

Вище було показано (див. приклад 1), що при переміщенні тіла робота сили тяжіння визначається тільки висотою над рівнем Землі початкової і кінцевої точок його шляху і не залежить від форми траєкторії. Крім сили тяжіння, цю саму властивість мають і інші фундаментальні сили природи, наприклад сила пружності, гравітаційна сила, а також сила електростатичної взаємодії між зарядами.

Можна зазначити, що потенціальна енергія тіла визначається роботою, яку необхідно виконати для переміщення його з положення, де потенціальна енергія дорівнює нулю, у дане положення.

$$W_p = A_{1,0}. \qquad (3.15)$$

Робота консервативних сил при переміщенні тіла з однієї точки простору в іншу дорівнює зменшенню його потенціальної енергії:

$$A_{1,2} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p . \qquad (3.16)$$

Робота консервативної сили при переміщенні по замкненій траєкторії завжди дорівнює нулю $A_{1,2} = 0$.

Роботу консервативних сил можна виразити і через зміну кінетичної енергії тіла. За теоремою про зв'язок роботи і енергії, ця робота дорівнює приросту кінетичної енергії тіла, тобто $A_{1,2} = W_{к2} - W_{к1}$.

Узагальнюючи зазначене, отримуємо, що потенціальна енергія може бути перетворена в роботу, кінетичну енергію або інші види енергії, наприклад у внутрішню (теплову) енергію.

3.5 Види потенціальної енергії

1) Потенціальна енергія в однорідному силовому полі.

Поле називається *однорідним*, якщо сила, що діє на тіло однакова у всіх точках поля. Якщо тіла масою m, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння біля Землі, то потенціальна енергія однорідному силовому полі буде дорівнювати:

$$W_p = mgh, \qquad (3.17)$$

де g – прискорення вільного падіння;
h – висота тіла над поверхнею Землі.

2) Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла.

Під час деформації пружного тіла в ньому виникають внутрішні сили, які перешкоджають деформації. Потенціальна енергія пружно-деформованого тіла

$$W_p = \frac{k\Delta x^2}{2}, \qquad (3.18)$$

де k – коефіцієнт пружності;

Δx – абсолютна деформація.

3) Потенціальна енергія гравітаційного поля, створеного точковою масою:

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \quad (3.19)$$

де m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між матеріальними точками або тілами;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, якою рухалось тіло, називаються *неконсервативними*. До неконсервативних сил належать сили тертя. Робота сил тертя завжди від'ємна.

3.6 Закон збереження енергії в механіці

За теоремою про зв'язок роботи і енергії, робота, що здійснюється рухомим тілом при зміні швидкості тіла, визначається зміною кінетичною енергії даного тіла: $A_{1,2} = W_{к2} - W_{к1}$.

З іншого боку, робота дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятому з протилежним знаком: $A_{1,2} = W_{p1} - W_{p2}$.

З цих рівнянь отримуємо

$$A_{1,2} = W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1}, \quad (3.20)$$

звідки випливає, що

$$W_{к1} + W_{p1} = W_{к2} + W_{p2}. \quad (3.21)$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії тіла називається його *повною механічною енергією*:

$$W = W_к + W_p. \quad (3.22)$$

Рівняння (3.23) виражає закон збереження енергії в механіці:

$$W = W_к + W_p = const. \qquad (3.23)$$

Закон збереження повної механічної енергії: *якщо на тіло діють тільки консервативні сили, то його повна механічна енергія залишається постійною: можуть відбуватися лише перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки, але повний запас енергії тіла не змінюється.*

Замкненою системою називається сукупність тіл, на які не діють зовнішні сили. Якщо між тілами такої системи діють тільки консервативні сили, то вона називається *консервативною*. Повна механічна енергія замкненої консервативної системи тіл зберігається в часі.

Якщо ж у замкненій системі, крім консервативних, діють також неконсервативні сили, наприклад сили тертя, то повна механічна енергія системи не зберігається.

Як випливає з рівняння (3.23), при переході тіла з положення в положення частина його потенційної енергії піде на здійснення роботи з подолання сили тертя:

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1} + |A_{тр}|, \qquad (3.24)$$

або

$$W_{к2} + W_{p2} = W_{к1} + W_{p1} - |A_{тр}|. \qquad (3.25)$$

Тобто повна механічна енергія тіла зменшується на величину цієї роботи, яка перетворюється в тепло:

$$W_1 - W_2 = |A_{тр}|. \qquad (3.26)$$

Це пояснюється тим, що сили тертя здійснюють завжди від'ємну роботу – механічна енергія перетворюється у внутрішню. Отже, наявність сил тертя в замкненій системі призводить до зменшення її повної механічної енергії. Але в цьому випадку виконується загальний закон збереження енергії: *в ізольованій від будь-яких зовнішніх впливів системі залишається постійною сума всіх видів енергії.*

3.7 Абсолютно непружний удар

Удар – це зіткнення двох або більше тіл, коли взаємодія триває дуже короткий час. При ударі в тілах виникають такі значні внутрішні сили, що зовнішніми силами, які діють на них, можна знехтувати. Це дозволяє розглядати ці тіла як замкнену систему і застосовувати до неї закони збереження.

Удар називається *центральним*, коли лінія удару проходить через центр мас тіл, а напрямок швидкостей тіл до зіткнення співпадає з лінією удару.

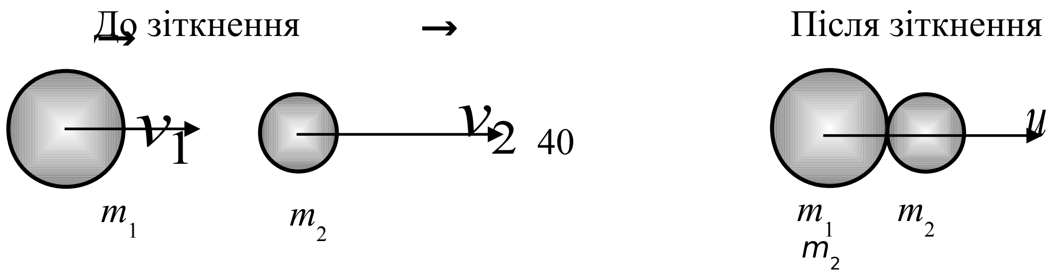
Абсолютно непружний удар – це удар, після якого швидкості обох тіл, що зіштовхуються, виявляються однаковими. Щоб це стало можливим, тіла, що зіштовхуються, повинні мати такі властивості, щоб сили, що виникають при їх деформації, залежали не від величини деформації, а від швидкості зміни деформації. Такі властивості притаманні, наприклад, м'якій глині, пластиліну. При непружному зіткненні в початковий момент удару швидкість деформації велика (кулі стискаються), тому виникають сили, що надають кулям прискорення, спрямованого в протилежні боки. З розвитком удару швидкості деформації куль зменшуються, а самі деформації збільшуються, доки швидкості куль не виявляться рівними. У цей момент деформації куль перестануть змінюватися, зникнуть сили, і обидві кулі будуть рухатися з однаковою швидкістю.

При абсолютно непружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії. Механічна енергія тіл до удару більше, ніж після удару, оскільки вона частково (або повністю) переходить у внутрішню енергію тіл і витрачається на роботу деформації тіл.

Для визначення швидкості тіл після непружного удару розглянемо удар двох куль, що утворюють замкнену систему (рисунок 3.5).

Згідно з законом збереження сумарний імпульс куль до удару повинен бути таким самим, як і після удару:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\ u\,, \qquad (3.27)$$



m_1 і m_2 – маси куль, v_1 і v_2 – швидкості до удару

Рисунок 3.5

Якщо швидкості куль спрямовані в один бік (рисунок 3.5), то рівняння (3.27) перепишеться у вигляді

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u \tag{3.28}$$

де m_1 і m_2 – маси куль;

v_1, v_2 – швидкості куль до удару,

u – швидкість після удару, однакова для обох куль.

З рівняння випливає, що швидкість куль після удару

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_2 + m_1}. \tag{3.29}$$

Внаслідок непружного зіткнення тіл відбувається втрата кінетичної енергії, яка переходить у теплову та інші форми енергії. Цю втрату можна визначити за формулою

$$\Delta W = \frac{m_2 m_1}{2(m_2 + m_1)} (v_1 - v_2)^2, \tag{3.30}$$

де ΔW – втрата механічної енергії в системі.

Розглянемо деякі окремі випадки непружних зіткнень:

1 *Кулі рухаються в одному напрямку.* Удар можливий, якщо швидкості v_1 і v_2 різні. Наприклад, $v_2 > v_1$, тобто друга куля наздоганяє першу. Після удару кулі будуть рухатися в той самий бік зі швидкістю більшою, ніж швидкість першої кулі, і меншою, ніж швидкість другої:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_2 + m_1} \quad (3.31)$$

2 *Кулі рухаються назустріч одна одній.* Після удару кулі будуть рухатися разом у той самий бік, в який рухалась куля, що має більший імпульс, тобто

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_2 + m_1}. \quad (3.32)$$

Якщо імпульси обох куль рівні за величиною, то після удару обидві кулі зупиняться.

3.8 Абсолютно пружний удар

Під час удару тіла деформуються. Суть пружного удару полягає в тому, що кінетична енергія відносного руху контактуючих тіл на короткий час перетворюється в енергію пружної деформації, яка у свою чергу переходить знову в кінетичну енергію руху. За рахунок цього має місце перерозподіл енергії між контактуючими тілами.

Абсолютно пружний удар – зіткнення двох тіл, під час якого зберігається не тільки геометрична сума імпульсів, а й сума кінетичних енергій взаємодіючих тіл, тобто виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії.

Розглянемо зіткнення двох тіл і визначимо швидкості тіл після пружного удару. Позначимо швидкості куль масами m_1 і m_2 до удару через v_1 і v_2, після удару – через u_1 і u_2.

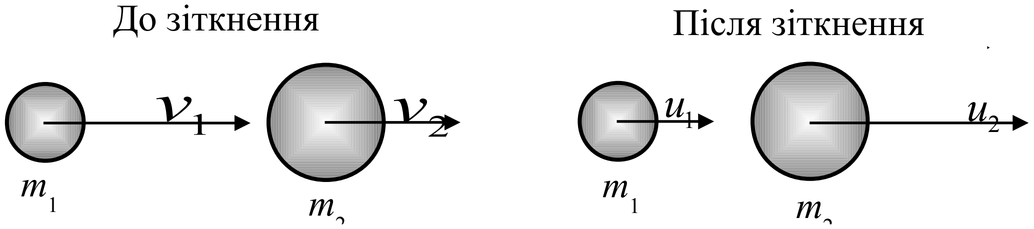


Рисунок 3.6

При пружному ударі виконуються два закони збереження: закон збереження енергії і закон збереження імпульсу:

$$\frac{m_1 v_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{\ 2}}{2} = \frac{m_1 u_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_2 u_2^{\ 2}}{2} . \tag{3.33}$$
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

Розглянемо центральний удар:

1 Перша куля наздоганяє іншу, тоді проекції векторів чисельно дорівнює модулю цих векторів:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_1^{\ 2}}{2} + \dfrac{m_2 v_2^{\ 2}}{2} = \dfrac{m_1 u_1^{\ 2}}{2} + \dfrac{m_2 u_2^{\ 2}}{2} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases} . \tag{3.34}$$

Скоротимо на двійку та перегрупуємо доданки

$$\begin{cases} m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2 \\ m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m_1 \left(v_1^2 - u_1^2 \right) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \\ m_1 \left(v_1 - u_1 \right) = m_2 \left(u_2 - v_2 \right) \end{cases} , \tag{3.35}$$

звідки

$$\begin{cases} m_1 \left(v_1 - u_1 \right) \left(v_1 + u_1 \right) = m_2 \left(u_2 - v_2 \right) \left(u_2 + v_2 \right) \\ m_1 \left(v_1 - u_1 \right) = m_2 \left(u_2 - v_2 \right) \end{cases} . \tag{3.36}$$

Скориставшись другим рівнянням, перепишемо перше як

$$m_2 \left(u_2 - v_2 \right) \left(v_1 + u_1 \right) = m_2 \left(u_2 - v_2 \right) \left(u_2 + v_2 \right) . \tag{3.37}$$

Зробимо спрощення на $m_2 \left(u_2 - v_2 \right)$, отримаємо

$$u_1 = u_2 + v_2 - v_1 . \tag{3.38}$$

Підставимо формулу (3.38) у друге рівняння формули (3.36), отримуємо

$$m_1 \left(v_1 - u_2 - v_2 + v_1 \right) = m_2 \left(u_2 - v_2 \right) ,$$

або

$$2 m_1 v_1 - m_1 u_2 + m_2 v_2 = u_2 \left(m_2 + m_1 \right) . \tag{3.39}$$

Звідси отримуємо

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \tag{3.40}$$

Тоді для швидкості першої кулі після зіткнення u_1 одержимо

$$u_1 = u_2 + v_2 - v_1 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} + v_2 - v_1,$$

або

$$u_1 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1) + v_2\left(m_2 + m_1\right) - v_1\left(m_2 + m_1\right)}{m_2 + m_1},$$

звідки

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}. \tag{3.41}$$

2 Якщо кулі рухаються назустріч одна одній, то закон збереження енергії і імпульсу має вигляд

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}. \tag{3.42}$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є

$$u_1 = \frac{-2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}, \tag{3.43}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 - v_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}. \tag{3.44}$$

Розглянемо деякі окремі випадки пружних зіткнень:

1 Рівні маси $m_1 = m_2 = m$.

а) перша частинка наздоганяє другу $v_1 > v_2$.

$$u_1 = \frac{2mv_2}{m+m} = v_2,$$
$$u_2 = \frac{2mv_1}{m+m} = v_1. \qquad (3.45)$$

тобто частинки обмінюються швидкостями, і після удару друга частинка віддаляється від першої;

б) частинки рухаються назустріч одна одній:

$$u_1 = \frac{-2mv_2}{m+m} = -v_2,$$
$$u_2 = \frac{2mv_1}{m+m} = v_1. \qquad (3.46)$$

Після удару частинки рухаються в протилежні боки, перша частинка зі швидкістю другої до удару, а друга зі швидкістю першої;

в) друга частинка до удару нерухома $v_2 = 0$.

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1, \qquad (3.47)$$

тобто після зіткнення перша частинка зупиняється, а друга починає рухатися зі швидкістю першої.

2 Рівні швидкості $v_1 = v_2 = v$.

Частинки рухаються назустріч одна одній:

$$u_1 = \frac{-2m_2v + v(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \frac{-2m_2v + vm_1 - vm_2}{m_2 + m_1} = \frac{-3m_2v + vm_1}{m_2 + m_1} = v\frac{m_1 - 3m_2}{m_2 + m_1}$$
$$u_2 = \frac{2m_1v - v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1v - vm_2 + vm_1}{m_2 + m_1} = v\frac{3m_1 - m_2}{m_2 + m_1}. \qquad (3.48)$$

3 Нерухомий другий шар до зіткнення – $v_2 = 0$:

$$u_1 = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1},$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_2 + m_1} \qquad (3.49)$$

Якщо маса першої кулі більше другої, то вона продовжить рух у тому самому напрямі, якщо менше, то покотиться назад. Друга куля після зіткнення почне рухатися.

4 Перша куля стикається з нерухомою другою кулею ($v_2 = 0$) нескінченної маси ($m_2 \to \infty$), тоді:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = v_1 \frac{m_1/m_2 - m_2/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \to v_1 \frac{0-1}{1+0} = -v_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \to v_1 \frac{0}{1+0} = 0 \qquad (3.50)$$

Тобто перший м'яч відскакує назад з тією ж самою швидкістю.

3.9 Нецентральний пружний удар

Окремим випадком нецентрального пружного удару може служити зіткнення двох більярдних куль однакової маси, одна з яких до зіткнення була нерухомою, а швидкість другої була спрямована не по лінії центрів куль (рисунок 3.7).

Після нецентрального зіткнення кулі розлітаються під деяким кутом одна до одної. Для визначення швидкостей u_1 і u_2 після удару потрібно знати положення лінії центрів у момент удару або прицільну відстань *d*. Якщо маси куль однакові, то вектори швидкостей u_1 і u_2 куль після пружного зіткнення завжди спрямовані перпендикулярно одна до одної.

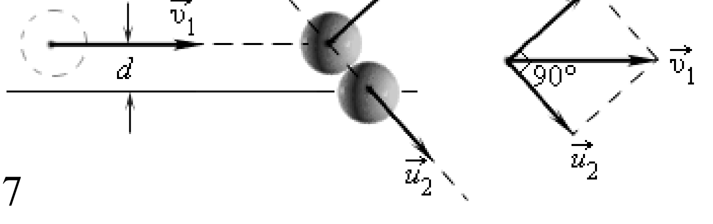


Рисунок 3.7

Це легко показати, застосовуючи закони збереження імпульсу та енергії:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^{\,2}}{2} + \dfrac{m_2 v_2^{\,2}}{2} = \dfrac{m_1 u_1^{\,2}}{2} + \dfrac{m_2 u_2^{\,2}}{2} \end{cases}. \tag{3.51}$$

При $m_1 = m_2 = m$ і $v_2 = 0$ формули системи (3.51) набувають вигляду

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_1^{\,2} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} \end{cases}. \tag{3.52}$$

Це означає, що вектори швидкостей v_1, u_1 і u_2 утворюють трикутник (див. рисунок 3.7), і для цього трикутника справедлива теорема Піфагора.

Питання до теми 3

1 Дати визначення механічної роботи. Як виражається в поступальному русі механічна робота: а) постійної сили, спрямованої під кутом до переміщення; б) змінної сили?

2 Зобразити графічно роботу: а) постійної сили; б) змінної сили.

3 Записати вираз для середньої потужності, миттєвої потужності.

4 Що таке кінетична енергія? Сформулювати теорему про кінетичну енергію.

5 Які сили називаються консервативними, неконсервативними (дисипативними)? Навести приклади цих сил.

6 Що таке потенціальна енергія? Які види потенціальної енергії вам відомі?

7 Сформулювати закон збереження енергії для консервативних і дисипативних сил.

8 Що таке удар? Який удар називається центральним?

9 Який удар називається абсолютно непружним? Записати закони збереження імпульсу для абсолютно непружного удару.

10 Який удар називається абсолютно пружним? Записати закони збереження імпульсу для абсолютно пружного удару.

Тема 4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Момент інерції матеріальної точки і твердого тіла. Теорема Штейнера

Моментом інерції називається фізична величина, яка є мірою інертності тіла в обертальному русі. Від моменту інерції залежить швидкість зміни кутової швидкості та кутового прискорення при дії на тіло (матеріальну точку) моменту сили.

Моментом інерції матеріальної точки відносно нерухомої осі обертання називається скалярна фізична величина, що дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані до осі обертання.

$$I = mr^2, \qquad (4.1)$$

де m – маса матеріальної точки;

r – відстань від точки до осі обертання (рисунок 4.1).

Для знаходження моменту інерції твердого тіла необхідно розбити тіло на елементарні маси Δm_i та скласти моменти інерції кожної з них:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2, \qquad (4.2)$$

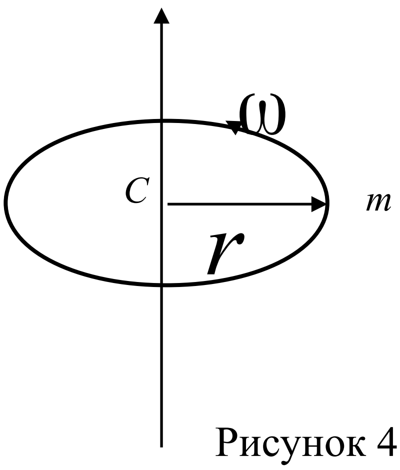


Рисунок 4.1

де m_i – маса i-ї матеріальної точки;

r_i – радіус обертання i-ї матеріальної точки.

Для знаходження моменту інерції твердого тіла з нерівномірним, безперервним розподілом мас слід перейти від суми до інтегрування за об’ємом тіла V.

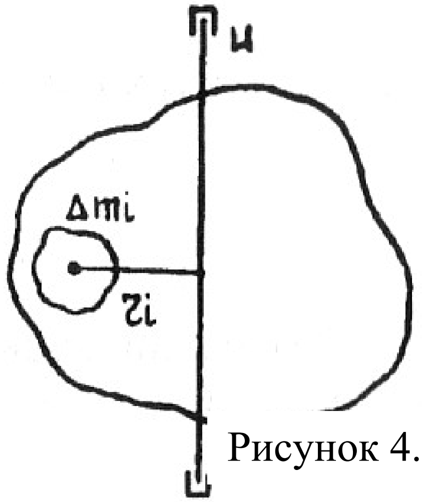


Рисунок 4.2

$$I = \lim \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm \cdot$$

Для однорідного тіла $dm = \rho dV$, де $\rho = m/V$ - його густина, тоді

$$I = \rho \int_V r^2 dV \, . \qquad (4.3)$$

Приклад 1. Знайдемо момент інерції однорідного тонкого стрижня довжиною l від перпендикулярної осі, що проходить через один з його кінців (вісь AA' на рисунку 4.3).

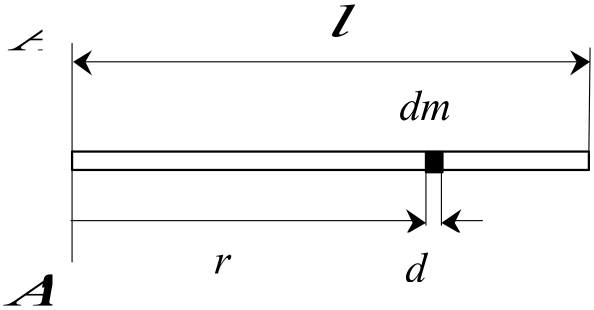


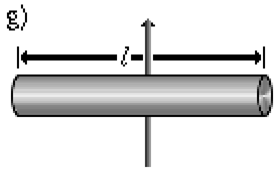
Рисунок 4.3

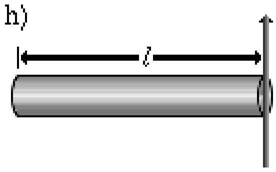
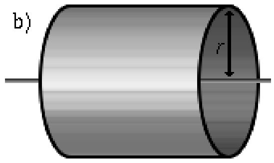
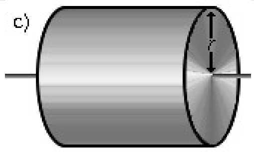
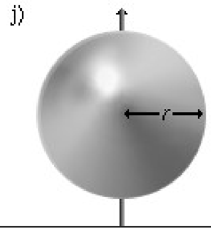
Розіб'ємо стрижень на малі ділянки, де $dV = Sdr$, S - площа поперечного перерізу стрижня. Підставимо $dV = Sdr$ в інтеграл при $\rho S l = \rho V = m$, отримуємо

$$I = \rho \int_0^1 S\, r^2 dr = \frac{1}{3} \rho\, S\, l^3 = \frac{1}{3} m\, l^2 . \qquad (4.4)$$

У таблиці 4.1 наведені моменти інерції деяких геометричних тіл відносно осі обертання.

Таблиця.4.1

Тіло	Рисунок	Вісь, відносно якої визначається момент інерції тіла	Момент інерції тіла
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l		Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно	$I = \frac{ml^2}{12}$

		до нього	
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l		Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$I = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m, маховик радіусом R і масою m		Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = mR^2$
Суцільний циліндр або диск радіусом R і масою m		Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R		Проходить через центр кулі	$I = \frac{2mR^2}{5}$

Будь-яке тіло має три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр його мас, обертання навколо яких не супроводжується тиском на підшипники, що кріплять вісь. Вони називаються *вільними осями*. У тіла правильної форми ці осі збігаються з осями його симетрії. Моменти інерції тіла відносно вільних осей I_x, I_y, I_z називаються *головними моментами інерції*, а самі ці осі – *головними осями інерції.*

1 Для тіл з довільною несиметричною формою всі три головні моменти інерції різні $I_x \neq I_y \neq I_z$.

2 Для тіл з осьовою симетрією два головні моменти інерції мають однакову величину, а третій відмінний від них $I_x = I_y \neq I_z$ (наприклад однорідний циліндр).

3 Для тіл з центральною симетрією всі три головні моменти інерції рівні (наприклад однорідний шар або сфера).

Для обчислення моментів інерції твердого тіла відносно довільної осі обертання використовують теорему Штейнера: *момент інерції* I_A *тіла відносно деякої осі АА´ дорівнює сумі моменту інерції тіла* I_C *відносно осі* OO'*, що проходить через його центр мас С паралельно осі АА´, і добутку маси тіла на квадрат відстані* d *між цими осями.*

$$I = I_0 + md^2, \tag{4.5}$$

де I_0 – момент інерції цього тіла відносно осі OO', що проходить через центр мас тіла;

d – відстань між паралельними осями;

m – маса тіла.

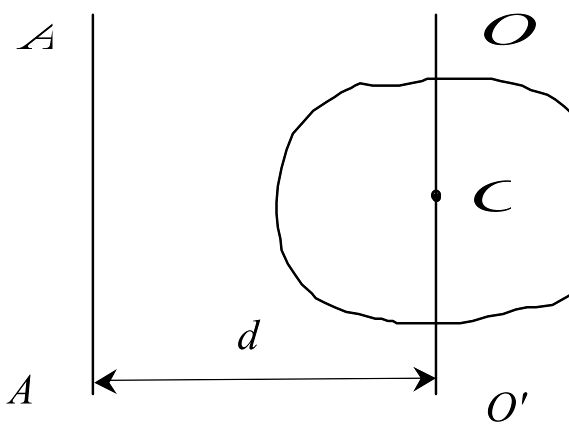


Рисунок 4.4

За допомогою теореми Штейнера знайдемо момент інерції однорідного стрижня відносно осі, що проходить через його середину (центр мас) (рисунок 4.4). Оскільки відстань до осі обертання $d = l/2$, з теореми Штейнера випливає, що:

$$I_0 = I - md^2, \tag{4.6}$$

де $I = \frac{1}{3}ml^2$ – момент інерції тонкого стрижня, вісь якого проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього,

$$I_0 = \frac{1}{3}ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2. \qquad (4.7).$$

4.2 Момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху

Моментом сили називається величина, яка є мірою взаємодії тіл в обертальному русі. Слід розрізняти момент сили відносно точки і відносно осі.

Моментом сили F відносно точки О називається векторний добуток радіус-вектора r, *проведеного з точки О в точку прикладання сили, на силу* F.

$$M = \left[r \times F \right]. \tag{4.8}$$

M Рис. 4.2.1.

Напрямок вектора моменту сили знаходять за правилом правого гвинта, а її модуль дорівнює:

r F

O

$r_\perp$ α

$$M = rF\sin\alpha = r_\perp F, \tag{4.9}$$

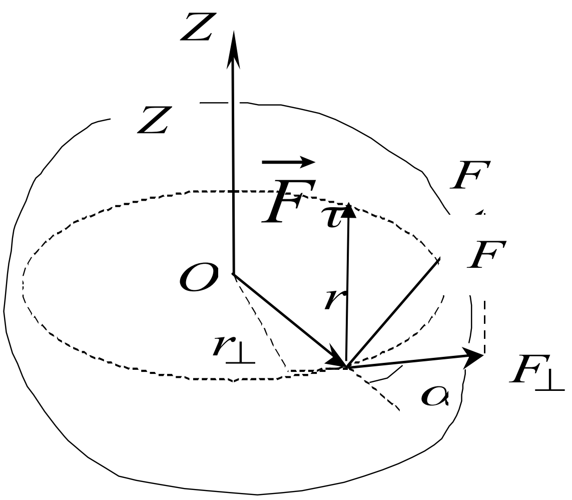
де α - кут між векторами F і радіус-вектором r, $r_\perp = r\sin\alpha$ - *плече сили* - це найкоротша відстань між лінією дії сили і віссю обертання (рисунок 4.5).

Рисунок 4.5

Момент сили не змінюється при перенесенні точки прикладання сили вздовж лінії її дії. Якщо на тіло діє декілька сил, то результуючий момент сили відносно полюса О буде дорівнювати геометричній сумі моментів всіх сил.

$$M = \sum_i M_i = \sum_i \left[r \times F \right], \tag{4.10}$$

Розглянемо тверде тіло, закріплене на осі (рисунок 4.6). Зміна швидкості його обертання викликається зовнішніми силами. Дія сили залежить від її направлення і точки прикладання. Складова зовнішньої сили вздовж осі не може змінювати кутову швидкість обертання тіла.



Моментом сили відносно нерухомої осі обертання Z називається добуток складової цієї сили $F_\perp$, що лежить у площині, перпендикулярній до осі, на її плече.

r $r_\perp$ $F_\perp$ α

$$M_z = F_\perp r \sin\alpha = F_\perp \cdot r_\perp, \qquad (4.11)$$

унок 4.6

де $r_\perp$ - плече сили $F_\perp$;

$F_\perp$ – проекції зовнішньої сили на площину, перпендикулярну до осі обертання.

Обертальна здатність сили залежить від складової F_τ, а з другого закону Ньютона

$$F_\tau = m a_\tau, \qquad (4.12)$$

де a_τ - тангенціальне прискорення,

$$a_\tau = \varepsilon\, r,$$

де ε - кутове прискорення,

звідки другий закон

$$F_\tau = m\varepsilon\, r. \qquad (4.13)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння на r, отримуємо

$$F_\tau \cdot r = (m\varepsilon\, r) r. \qquad (4.14)$$

Враховуючи, що $F_\tau \cdot r = M$ – момент сили і $I = m r^2$ – момент інерції точки, отримуємо

$$M = I \cdot \varepsilon. \qquad (4.15)$$

Оскільки момент сили і кутове прискорення величини векторні, то рівняння (4.15) можна записати у векторній формі:

$$M = I \cdot \varepsilon \,. \tag{4.16}$$

Це рівняння є основним рівнянням динаміки обертального руху (другий закон Ньютона для обертального руху): *момент сили, що діє на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення.*

4.3 Момент імпульсу. Рівняння моментів

Момент імпульсу є кількісною характеристикою обертального руху. Під моментом імпульсу L матеріальної точки відносно точки O називається векторний добуток радіус-вектора r і вектора її імпульсу p.

$$L = \left[r \times p \right]. \tag{4.17}$$

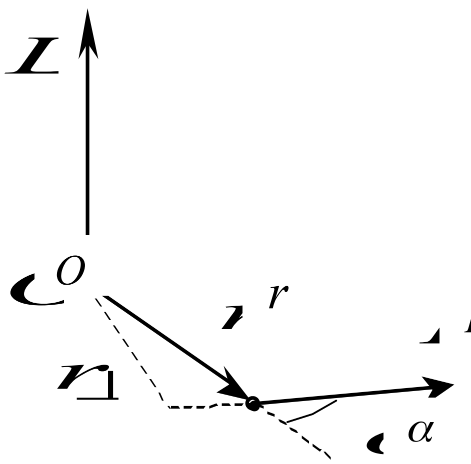


Рисунок 4.7

Вектор моменту імпульсу L направлений уздовж осі обертання в напрямку, який визначається за правилом правого гвинта. Якщо траєкторією частинки є коло, то момент її імпульсу відносно центра кола

Момент імпульсу частинки, що рухається вздовж прямої лінії (рисунок 4.7) дорівнює

$$L = r\,p \sin\alpha = r_{\perp} m \mathrm{v}\,. \tag{4.19}$$

Якщо на частинку не діють сили, її швидкість не змінюється то момент імпульсу залишається постійним.

Щоб знайти момент імпульсу твердого тіла, що обертається навколо осі Z з кутовою швидкістю ω, розіб'ємо тіло на N матеріальних точок масами m_i.

Момент імпульсу кожної точки

$$L_{zi} = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega . \qquad (4.20)$$

оскільки її швидкість $v_i = \omega r_i^2$, де r_i - відстань точки від осі обертання. Підсумовуючи по всіх точках і виносячи за знак суми загальний множник ω, одержимо момент імпульсу тіла відносно осі Z:

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega. \qquad (4.21)$$

Вираз у дужках називається *моментом інерції* тіла відносно осі Z*:*

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 . \qquad (4.22)$$

Звідси отримуємо, що момент імпульсу тіла, закріпленого на осі, дорівнює добутку моменту інерції і кутової швидкості:

$$L_z = I_z \omega . \qquad (4.23)$$

Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання Z дорівнює добутку моменту інерції відносно тієї самої осі і кутової швидкості.

Розглянемо виведення формули рівняння моментів у найпростішому випадку. Нехай матеріальна точка рухається по колу радіусом r тоді її імпульс (як і швидкість) спрямований під кутом 90^0 до радіус-вектора і вираз для моменту імпульсу $L = \left[r \times p \right]$. можна написати в скалярному вигляді $L = rp$.

Знайдемо похідну за часом від цього виразу:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = r\frac{dp}{dt}, \qquad (4.24)$$

де ми врахували, що при русі по колу модуль радіус-вектора не змінюється.

З другого закону Ньютона випливає, що

$$F = \frac{dp}{dt},$$

тоді

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot F. \quad (4.25)$$

У даному випадку добуток $r \cdot F$ визначає момент сили, що діє на матеріальну точку, тобто

$$M = r \cdot F. \quad (4.26)$$

Остаточно одержуємо рівняння моментів у скалярному вигляді

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (4.27)$$

У векторному вигляді

$$\frac{d\,L}{d\,t} = \frac{d\,r}{d\,t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\,p}{d\,t}. \quad (4.28)$$

Похідна радіус-вектора r дорівнює швидкості матеріальної точки $\frac{d\,r}{d\,t} = v$, а оскільки вектори v і p паралельні один одному, їх векторний добуток обертається в нуль. З другого рівняння Ньютона в імпульсній формі $\frac{d\,p}{d\,t} = F$, векторний добуток $r \times F$ утворює момент сили M, тому

$$\frac{d\,L}{d\,t} = \vec{M}. \quad (4.29)$$

Це співвідношення називається рівнянням моментів: *похідна за часом моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центра дорівнює моменту діючої сили відносно того самого центра.*

4.4 Закон збереження моменту імпульсу

За аналогією з динамікою поступального руху можна показати, що рівняння моментів, виведене в підрозділі 4.3, можна узагальнити на випадок системи N частинок (матеріальних точок). Якщо на кожну з матеріальних точок системи діють *зовнішні* і *внутрішні* сили, то момент зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок системи, дорівнює:

$$\vec{M}_{зовніш} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,зовніш}, \tag{4.30}$$

де $M_{зовніш}$ – *результуючий або головний момент зовнішніх сил.*

Під *зовнішніми силами* слід розуміти сили, що діють на матеріальні точки системи ззовні, а під *внутрішніми* – сили, з якими кожна матеріальна точка системи діє на всі інші її точки. Тоді рівняння моментів (4.29) для системи матеріальних точок у векторній формі, буде мати вигляд:

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}_{зовніш}. \tag{4.31}$$

Якщо ми маємо замкнену систему, то момент зовнішніх сил буде дорівнювати нулю:

$$M_{зовніш} = 0,$$

тоді з рівняння моментів отримуємо, що

$$\frac{dL}{dt} = 0. \tag{4.32}$$

звідки випливає, що

$$L = const \text{ або } I\omega = const. \tag{4.33}$$

З цього випливає закон збереження моменту імпульсу: *якщо результуючий момент зовнішніх сил, діючих на систему* *матеріальних точок, дорівнює нулю, то момент імпульсу системи залишається постійним у часі.*

Закон збереження моменту імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики разом із законами збереження імпульсу та енергії.

4.5 Кінетична енергія твердого тіла при обертальному і поступальному русі

Розглянемо рух матеріальної точки по колу і на цьому прикладі введемо нові величини, необхідні для опису обертального руху твердого тіла. Нехай матеріальна точка масою m починає рух по колу радіусом R під дією сили F, яка завжди спрямована по дотичній до цього кола.

$$A = F \cdot S = W_{кин} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \tag{4.34}$$

де S – шлях, який проходить матеріальна точка по колу при повороті на кут φ.

Перейдемо від лінійних величин до кутових $S = R\varphi$, $v = \omega R$.

Отримуємо

$$F \cdot S = FR \cdot \varphi = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{4.35}$$

Нагадаємо, що добуток сили на плече називається моментом сили

$$M = FR, \tag{4.36}$$

добуток маси матеріальної точки на квадрат радіуса кола, по якій здійснюється обертання, називається моментом інерції матеріальної точки

$$I = mR^2. \tag{4.37}$$

Робота при обертальному русі визначається виразом

$$A = M \cdot \varphi \tag{4.38}$$

Кінетична енергія при обертальному русі визначається виразом:

$$W_{обер} = \frac{I\omega^2}{2} \tag{4.39}$$

Теорема: *кінетична енергія рухомого тіла дорівнює сумі кінетичної його енергії поступального руху і енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до напрямку його руху (теорема Кеніга):*

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{обер} \tag{4.40}$$

Приклад 2. Обчислимо кінетичну енергію циліндра масою m, який котиться зі швидкістю v по горизонтальній поверхні. Будемо вважати, що рух відбувається без проковзування, тоді кутова швидкість обертання циліндра ω пов'язана з поступальною швидкістю центра мас v формулою

$$v = \omega R, \tag{4.41}$$

де R – радіус циліндра.

За теоремою Кеніга

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{обер},$$

де $W_{пост} = \frac{mv^2}{2}$ – поступальна кінетична енергія;

$W_{обер} = \frac{I\omega^2}{2}$ – обертальна кінетична енергія.

Момент інерції диска (циліндра) відносно осі, що проходить через його центр мас і перпендикулярна до площини диска,

$$I = \frac{1}{2} mR^2,$$

Знайдемо кутову швидкість ω з виразу (4.41):

$$\omega = v / R\,.$$

Підставивши формули в теорему Кеніга, отримуємо

$$W_{кин} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(v/R\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2v^2}{4R^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4}\,.$$

Остаточно

$$W_{кин} = \frac{2mv^2}{4} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3mv^2}{4}\,. \qquad (4.42)$$

Узагальнюючи зазначене вище, наведемо аналогію між поступальними і обертальними величинами у вигляді таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Поступальний рух (прямолінійний)	***Обертальний рух (навколо нерухомої осі)***
Координата x	Кутова координата φ
Швидкість $v = \frac{dx}{dt}$	Кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Прискорення $a = \frac{dv}{dt}$	Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Маса m	Момент інерції I
Імпульс $p = mv$	Момент імпульсу $L = I\omega$
Закон збереження імпульсу $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const$	Закон збереження моменту $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const$
Сила F	Момент сили M
Другий закон Ньютона	Другий закон Ньютона

$\sum F = ma, \quad \sum \vec{F} = \frac{dp}{dt}$	$M = I \cdot \varepsilon, \quad \vec{M} = \frac{dL}{dt}$
Робота $A = (F, S)$	Робота $A = (M, \varphi)$
Кінетична енергія $W_к = \frac{mv^2}{2}, \quad W_к = \frac{p^2}{2m}$	Кінетична енергія $W_к = \frac{I\omega^2}{2}, \quad W_к = \frac{L^2}{2I}$

Питання до теми 4

1 Зобразити вектори кута повороту, кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла.

2 Що називається моментом інерції тіла відносно осі? Записати формули для моментів інерції круглого диска, обруча, кулі і однорідного стрижня.

3 Навести формулювання теореми Штейнера.

4 Дати визначення моменту сили і моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центра (полюса).

5 Вивести формулу, що пов'язує момент сили і момент імпульсу.

6 Сформулювати закон збереження моменту імпульсу.

7 Вивести основне рівняння динаміки обертального руху системи матеріальних точок.

8 Якою формулою виражається робота при повороті тіла на деякий кут?

9 Записати формулу кінетичної енергії твердого тіла, що обертається.

10 Сформулювати і довести теорему про повну кінетичну енергію тіла, що рухається.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Трофимова, Т. И. Курс физики [Текст] : учеб. пособие / Т. И. Трофимова. - 7-е изд., испр. - М. : Высш. шк., 2001. - 542 с.

2 Детлаф, А. А., Курс физики [Текст] / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2001. – 718 с.

3 Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст] : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1977. - Т. 1-2.

4 Сивухин, Д. В. Общий курс физики [Текст] : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 – 520 с.

5 Дягилев, Ф. М. Физика [Текст] : учеб. пособие : в 2 ч. / Ф. М. Дягилев. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гуманит. ун-та, 2008. – Ч. 1. – 216 с.

6 Вовк, Р. В. Механіка і молекулярна фізика [Текст] : навч. посібник / Р. В. Вовк, А. В. Попов. – Харків : УкрДАЗТ, 2011. - 184 с.

7 Пойда, В. П. Загальна фізика : Механіка [Текст] : конспект лекцій / В. П. Пойда. – Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2011. - 280 с.

8 Лисенко, О. В. Фізика [Текст] : конспект лекцій / О. В. Лисенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2017. – Ч. 1. – 174 с.

9 Зачек, І. Р. Курс фізики [Текст] : навч. підручник / І. Р. Зачек, Б М. Романишин, В. М. Габа, Ф. М. Гончар. – Львів: Бескид-Біт, 2002. – 376 с.

10 Бушок, Г. Ф. Курс фізики [Текст] : навч. посібник: у 2 кн. Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – 2-ге вид. – К. :Либідь, 2001. – 448 с.